Февраль 2013 г. **Том 183, № 2**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Электрогидродинамика заряженных поверхностей

А.И. Жакин

Представлены методика расчёта и основные результаты теоретических и экспериментальных исследований воздействия электрического поля на диэлектрические жидкости со свободными поверхностями (плоские поверхности, мениски, струи и капли). Показана важная роль поверхностной проводимости и конечного времени релаксации зарядов в развитии неустойчивостей.

PACS numbers: 41.20.Cv, **67.25.–k**, 68.03.Hj DOI: 10.3367/UFNr.0183.201302c.0153

Содержание

1. Введение

Изучение поведения заряженных капель, струй и плоских поверхностей имеет давнюю историю [1–4]. Такое внимание к этому вопросу обусловлено не только научным, но и в значительной степени практическим интересом. Об электростатических технологиях можно получить представление из ряда монографий [5–10], обзоров [11–18] и нескольких сотен, если не тысяч, научных статей в самых различных научных журналах. В качестве примеров отметим работы по электростатическому диспергированию жидкостей вплоть до частиц атомных масштабов (атомизация) [19–28], по электростатическому окрашиванию [29], печати [30], интенсификации горения углеводородного топлива [31–35], масс-спектроскопическому анализу биомолекул [14, 25–28], методам получения наночастиц [36, 37]. Проведены многочисленные исследования по распылению [38–47], устойчивости [1, 3, 48–55], стабилизации заряженных струй и управлению ими [56–62], а также аналогичные исследования с заряженными каплями [1, 15–18, 63, 64]. Благодаря простоте геометрии и проведения наблюдений выполнено большое число работ по изучению устойчивости и нелинейных деформаций заряженной плоской поверхности [3, 12, 65–77].

Характеризуя теоретические подходы, отметим, что в большинстве из них используются довольно упрощённые модели: омический закон объёмной проводимости $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ с постоянным коэффициентом σ без учёта поверхностной проводимости. Как отмечено в обзоре [12], для "хороших" жидкостей имеется вполне удовлетворительное согласие теоретических и экспериментальных результатов. Не касаясь строгости теоретических рассмотрений, зададим вопрос: что же делать с "нехорошими" случаями? Не относятся ли проведённые исследования [12] лишь к частным случаям и не окажутся ли их предсказания несправедливыми при малейших изменениях параметров? Ниже мы рассмотрим примеры экспериментальных наблюдений, которые наводят, по крайней мере, на размышления о необходимости развития новых подходов. При этом вначале сформулируем краевую задачу, на основе которой дадим краткий обзор основных электрогидродинамических (ЭГД) эффектов на свободных поверхностях в электрическом поле.

2. Формулировка краевой задачи

Рассмотрим две несмешивающиеся несжимаемые жидкости (одна из которых может быть газом), разделённые свободной поверхностью (рис. 1).

Общая формулировка основной системы уравнений и граничных условий должна учитывать вязкость и проводимость жидкостей, а также физико-химические свой-

А.И. Жакин. Курский государственный технический университет, ул. 50 лет Октября 94, 305040 Курск, Российская Федерация
Тел. (4712) 56-05-90. Факс (4712) 56-18-85
E-mail: zhakin@mail.ru

Статья поступила 7 ноября 2011 г., после доработки 27 февраля 2012 г.

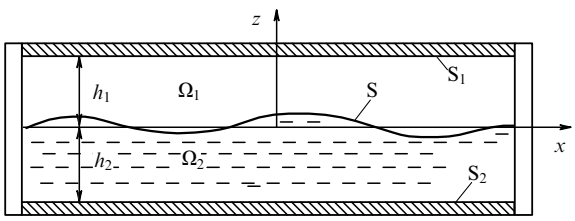

Рис. 1. Геометрия области: S — свободная поверхность, S_1 , S_2 — электроды.

ства поверхности раздела. В условиях омической проводимости основная система уравнений имеет следующий вид:

$$\rho_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_i}{\mathrm{d}t} = -\nabla p_i' + \eta_i \Delta \mathbf{V}_i + q_i \mathbf{E}_i\,, \qquad \operatorname{div} \mathbf{V}_i = 0\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}_i) = q_i\,, \quad \mathbf{E}_i = -\nabla \Phi_i\,, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_i = 0\,. \tag{2}$$

Здесь индекс i соответствует величинам в областях Ω_i, в которых находятся верхняя ($i = 1$) и нижняя ($i = 2$) жидкости, ρ_i — плотность, $\mathbf{V}_i$ — скорость, p_i' — суммарное (гидродинамическое и стрикционное) давление [78], η_i — динамическая вязкость, ε, ε_0 — относительная и абсолютная диэлектрические проницаемости, $\mathbf{E}_i$, Φ_i — соответственно напряжённость и потенциал электрического поля, q_i — объёмный заряд, $\mathbf{j}_i$ — объёмная плотность электрического тока.

Граничные условия на поверхностях электродов S_1 (анод), S_2 (катод) и на границе раздела S двух несжимаемых и несмешивающихся жидкостей имеют следующий вид:

$$S_1\colon \quad \Phi_1 = U\,, \quad V_1 = 0; \qquad S_2\colon \quad \Phi_2 = 0\,, \quad V_2 = 0; \tag{3}$$

$$S\colon \quad \langle \mathbf{V} \rangle = 0\,, \qquad -\frac{\partial F/\partial t}{|\nabla F|} = V_{1\mathrm{n}} = V_{2\mathrm{n}}\,, \tag{4}$$

$$\big(\langle p_{ik} \rangle + \langle T_{ij} \rangle\big) n^j = 2\alpha H n^i\,, \tag{5}$$

$$\langle \Phi \rangle = 0\,, \qquad \langle \varepsilon\varepsilon_0 E_\mathrm{n} \rangle = q_\mathrm{s}\,, \qquad q_\mathrm{s} = \sum_i e_i n_{si}\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial n_{si}}{\partial t} + \operatorname{div}_\mathrm{s}(\mathbf{i}_{si}^* + n_{si}\mathbf{V}_\mathrm{t}) - 2H n_{si} V_{1\mathrm{n}} = -\langle i_{\mathrm{in}}^* \rangle + \dot{\xi}_{si}\,. \tag{7}$$

Здесь $F(x, y, z) = 0$ — уравнение свободной поверхности; $V_{1\mathrm{n}}$, $V_{2\mathrm{n}}$ и $\mathbf{V}_\mathrm{t}$ — соответственно две нормальные и тангенциальная компоненты скорости на S; n^k — компоненты нормали к S; α — коэффициент поверхностного натяжения; H — средняя кривизна поверхности; p_{ik}, T_{ij} — тензоры механических и максвелловских напряжений; n_{si}, $\mathbf{i}_{si}^*$ — поверхностные плотность зарядов и миграционный поток зарядов i-го компонента; q_s — суммарная плотность поверхностного заряда; $\dot{\xi}_{si}$ — поверхностная скорость образования i-го компонента; $\operatorname{div}_\mathrm{s}$ — операция поверхностной дивергенции [78]. Условия (3) определяются заданием напряжения на электродах и прилипанием вязкой жидкости, (4) — кинематические условия, (5) — динамические, (6) — электродинамические, (7) — баланс поверхностных зарядов i-го сорта на S; угловые скобки обозначают скачок соответствующей величины при переходе через поверхность, например $\langle p' \rangle = p_2' - p_1'$.

Так как динамика жидкостей определяется процессами на свободной поверхности, необходимо детально сформулировать на ней граничные условия. Прежде всего отметим, что, согласно микроскопической точке зрения, принято считать, что граница раздела несмешивающихся жидкостей имеет толщину порядка нескольких молекулярных слоёв [79], а на ионы вблизи поверхности оказывают влияние короткодействующие поляризационные силы, направленные в сторону более поляризующейся жидкости. Таким образом, поверхность раздела всегда является адсорбентом ионов. Именно это обстоятельство приводит к появлению заряда у водных капель в воздухе, насыщенном ионами. В общем случае скорость поверхностной адсорбции определяется соотношением $\dot{\xi}_{si}^+ = k_\mathrm{ad} f_\mathrm{s} n_i$, десорбции — соотношением $\dot{\xi}_{si}^- = k_\mathrm{de} n_{si}$ [80], где k_ad (k_de) — коэффициент адсорбции (десорбции), $f_\mathrm{s} = 1 - n_{si}/n_{\mathrm{s}0}$ — коэффициент заполнения, $n_{\mathrm{s}0}$ — плотность адсорбционных центров. Таким образом, скорость поверхностного захвата ионов под действием адсорбционных сил выражается как

$$\dot{\xi}_{si} = k_\mathrm{ad} f_\mathrm{s} n_i - k_\mathrm{de} n_{si}\,. \tag{8}$$

Коэффициенты k_ad, k_de можно оценить следующим образом. При захвате ионов из газовой фазы $\dot{\xi}_{si}^+ = (\beta_i/4)\bar{c}_i n_i$ [81, 82], где β_i — коэффициент аккомодации, $\bar{c}_i$ — тепловая скорость ионов. Если поверхностные ионы проникают в глубь жидкости, то под действием поляризационных сил они отталкиваются от неё и сосредоточиваются в плотной и диффузионной частях поверхностного слоя [78]; в этом случае $k_\mathrm{de} = 0$. В случае физически адсорбированных ионов [83]

$$k_\mathrm{de} = \nu_\mathrm{s} \exp\left(-\frac{U_\mathrm{A}}{k_\mathrm{B} T}\right),$$

где ν_s — частота тепловых колебаний адсорбированного иона, U_A — энергия связи с поверхностью. В случае поверхности раздела жидкость–жидкость в результате действия поляризационных короткодействующих сил ионы из менее полярной среды адсорбируются более полярной средой. Если ионы не образуют химических связей, то вследствие активационного характера их движения $k_\mathrm{ad} = \nu_\mathrm{s} r_\mathrm{s} \exp(-U_\mathrm{s}/k_\mathrm{B} T)$, где r_s — радиус захвата, U_s — энергия взаимодействия иона с поверхностью, причём $U_\mathrm{s} < 0$. Например, в случае поляризационных сил

$$U_\mathrm{s} = -\frac{\beta}{r_\mathrm{s}}\,, \qquad \beta = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\,, \qquad \varepsilon_2 > \varepsilon_1\,, \qquad k_\mathrm{de} = 0\,.$$

Проведённые рассуждения показывают, что в общем случае нельзя пренебрегать адсорбционно-десорбционными процессами на свободной поверхности. Более того, наши исследования [75] показали, что адсорбционные процессы могут существенно изменять свойства поверхности раздела, например поверхностное натяжение (см. раздел 3).

Сформулированная задача описывает не только поведение жидкостей в геометрии рис. 1, но и поведение заряженных капель и струй. В последних случаях задаётся не разность потенциалов, а величина поверхностного заряда $q_{\mathrm{s}0}$ в равновесном состоянии. Ещё раз подчеркнём, что состояние жидкостей определяется динамикой свободной поверхности, поэтому часто используют термин "устойчивость свободной поверхности",

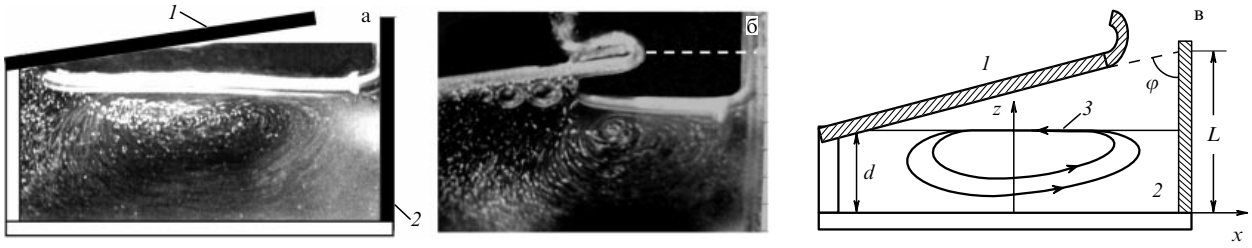

Рис. 2. (а, б) ЭГД-течения под действием межфазных тангенциальных сил в системе трансформаторное масло – воздух при различных положениях поверхности. (в) Схема расчёта: *1*, *2* — электроды, *3* — свободная поверхность.

который мы и будем употреблять в дальнейшем. Устойчивость свободной поверхности обычно исследуют методом малых возмущений, которые представляют в виде суммы по нормальным модам. Далее находят наиболее "опасную" моду возмущений и параметры, при которых возмущения возрастают с течением времени. Указанные вычисления рассмотрены в разделах 4, 5.

3. Общие закономерности поведения свободной поверхности в электрическом поле

Силовое воздействие поля на свободную поверхность определяется нормальными и тангенциальными напряжениями, которые следуют из граничного условия (5):

$$-\langle p'\rangle + \langle\tau_{ij}\rangle n^i n^j + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\langle\varepsilon E_{\rm n}^2\rangle - \langle\varepsilon\rangle E_{\rm t}^2\right) = 2\alpha H\,, \qquad (9)$$

$$\langle\tau_{ij}\rangle n^i t^j = -q_{\rm s} E_{{\rm t}j}\,. \qquad (10)$$

Здесь t^j — компоненты единичного касательного вектора $\mathbf{t}$, $E_{{\rm t}j}$ — компоненты касательной составляющей напряжённости поля $\mathbf{E}_{\rm t}$ к поверхности S.

Соотношение (9) показывает, что электрическое поле изменяет кривизну поверхности, что приводит к её деформации. Из (10) видно, что поверхностная кулоновская сила $\mathbf{f}_{\rm et} = q_{\rm s}\mathbf{E}_{\rm t}$ уравновешивается вязкими напряжениями, т.е. при $\mathbf{f}_{\rm et} \neq 0$ развивается течение и равновесное состояние жидкости становится невозможным. Подобные течения, которые возникают внутри и снаружи пузырей или капель несмешивающихся слабопроводящих жидкостей, легко наблюдаемы в плоском слое при наклонном внешнем поле (рис. 2). Элементарный расчёт скорости течения в серединной части вихря в приближении "вмороженного" заряда (см. ниже) и $d \ll L$, $\varphi \ll 1$ (электрод *1* на рис. 2в почти вертикален) даёт следующее выражение для скорости течения:

$$V_x = -V_{\rm m} s(3s-2)\,, \qquad s = \frac{z}{d}\,, \qquad V_{\rm m} = |q_{\rm s}E_x|\,\frac{d}{4\eta}\,,$$
$$q_{\rm s} = \frac{E_z}{\varepsilon\varepsilon_0}\,, \qquad E_z = \frac{Ud}{4L^2}\,, \qquad E_x = -\frac{U}{\varphi L}\,, \qquad (11)$$

где η — динамическая вязкость. Соотношение (11) показывает, что скорость течения максимальна на поверхности жидкости, и она будет направлена, причём вне зависимости от полярности электрода, в сторону наклонённого электрода *1* (рис. 2в).

Обстоятельный обзор течений под действием тангенциальных напряжений приведён в [12]. Показано, что в случае капель (или пузырей) в слабопроводящей жидкости обнаружены своеобразные вихревые течения (рис. 3).

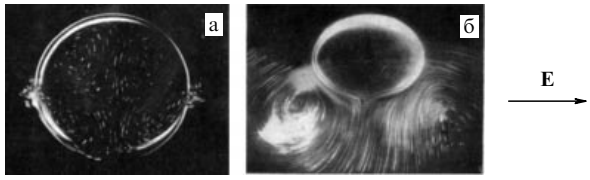

Рис. 3. Течение внутри (а) и вне (б) капли силиконового масла, находящейся в смеси касторового и кукурузного масел [12, 64].

Проводя элементарные вычисления в стоксовском приближении и заменяя (9) граничным условием непрерывности полного тока $\langle j_{\rm n}\rangle = 0$, авторы [12] дают следующее выражение для тангенциальной составляющей скорости течения на поверхности сферической капли:

$$V_\theta = 2V_{\rm m}\cos\theta\sin\theta\,, \qquad V_{\rm m} = -\frac{9\varepsilon_{\rm i}E_0^2 r_0(RS-1)}{10(2+R)^2(\eta_{\rm i}+\eta_{\rm e})}\,, \qquad (12)$$

где $R = \sigma_{\rm e}/\sigma_{\rm i}$, $S = \varepsilon_{\rm e}/\varepsilon_{\rm i}$, индекс i (e) относится к капле (внешней жидкости), E_0 — напряжённость внешнего поля, r_0 — радиус капли, θ — угол, отсчитываемый от направления внешнего поля.

Для описания деформации капли авторы [12], используя баланс вязких и электростатических сил (без решения гидродинамической задачи), вводят так называемую разделяющую функцию Φ:

$$\Phi = S(1+R^2) - 2 + \frac{3}{5}\,\frac{(RS-1)(2M+3)}{M+1}\,, \qquad (13)$$

где $M = \eta_{\rm e}/\eta_{\rm i}$ — отношение вязкостей. Считается, что при $\Phi = 0$ капля в электрическом поле остаётся сферической, а при $\Phi > 0$ ($\Phi < 0$) вытягивается (сплющивается) вдоль поля. В [12] отмечается, что результаты (11), (12) в некоторых случаях совпадают с результатами экспериментов. Однако существуют также значительные расхождения результатов теории и эксперимента. Например, капля кремнийорганического полимера полиметилфенилсилоксана (ПМФС) в касторовом масле сжимается вдоль направления внешнего поля (рис. 4а), а капля воды в ПМФС — растягивается (рис. 4б). Однако капли ПМФС в веретённом масле и, наоборот, капли веретённого масла в ПМФС вытягиваются всегда вдоль направления электрического поля, несмотря на их довольно сильно различающиеся проводимости. Эти примеры показывают неприменимость критерия (13).

При дальнейшем увеличении поля иногда в полярных или экваториальных областях наблюдается образование микроконусов (рис. 5), которые являются центрами диспергирования жидкости капли в окружающую среду.

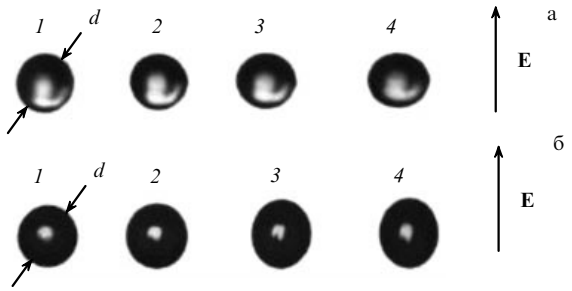

Рис. 4. (а) Сжатие ПМФС в касторовом масле вдоль направления внешнего поля: *1* — $E = 0$, *2* — $E = 16$ кВ см$^{-1}$, *3* — $E = 21$ кВ см$^{-1}$, *4* — $E = 25$ кВ см$^{-1}$; $d = 0{,}61$ мм [84]. (б) Растяжение капли воды в ПФМС вдоль направления внешнего поля: *1* — $E = 0$, *2* — $E = 25$ кВ см$^{-1}$, *3* — $E = 48$ кВ см$^{-1}$, *4* — $E = 56$ кВ см$^{-1}$; $d = 1{,}3$ мм.

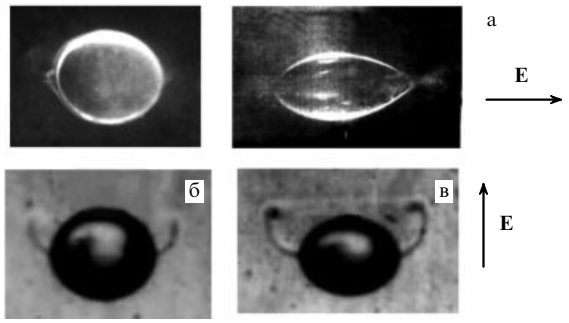

Рис. 5. (а) Деформация капель воды в трансформаторном масле с образованием микроконусов, являющихся областями диспергирования. Деформация капли ПФМС в касторовом масле: (б) $E = 25$ кВ см$^{-1}$, (в) $E = 33$ кВ см$^{-1}$ [84].

Таким образом, общие закономерности деформации капель в постоянном электрическом поле таковы: в области полей, меньших некоторого критического значения, $E < E_*$, наблюдается только деформация капель (см. рис. 4), а при $E > E_*$ деформация сопровождается образованием микроконусов (см. рис. 5), с вершин которых происходит диспергирование жидкости.

Аналогичные закономерности наблюдаются и для заряженных менисков. Наши исследования показали, что в зависимости от прикладываемого напряжения

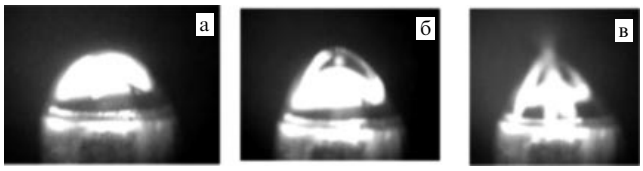

Рис. 6. Вытягивание мениска воды вдоль поля при $U < U_1$. При $U \sim U_1$ кончик мениска совершает колебания, частота которых при $U_1 = 10$ кВ см$^{-1}$ имеет порядок 200 Гц (а) и возрастает с увеличением напряжения (б), с последующим зажиганием коронного разряда (в). Диаметр капилляра 1 мм, расстояние от его кромки до проволочного электрода 15 мм.

можно выделить следующие закономерности. При $U < U_1$ мениск вытягивается вдоль направления электрического поля (рис. 6). Далее при $U_1 < U < U_2$ наблюдаются низкочастотные (порядка нескольких сотен герц) пульсации микроконуса, сопровождающиеся коронным свечением. При $U_2 < U < U_3$ наблюдается отрыв микрокапель размером порядка размера микроконуса (рис. 7а). При этом, в зависимости от размера мениска, могут отрываться как одиночные микрокапли (при малых менисках (рис. 7а)), так и микроструи, впоследствии распадающиеся на микрокапли (рис. 7б). При распадах микроструй ближайшие к мениску капли иногда возвращаются на мениск, что обусловлено их перезарядкой. Эти результаты показывают, что поверхность мениска окружена облаком зарядов со знаком, противоположным знаку полярности мениска. Наконец, при $U_3 < U < U_4$ отрываются макрокапли либо струи (рис. 7в) размером порядка радиуса капилляра. При $U > U_4$ наступает пробой.

С уменьшением радиуса капилляра частота выбросов макрокапель резко возрастает, достигая величины до 4×10^4 капель в 1 с для водных растворов при диаметрах капилляров 60 – 300 мкм (именно в таком режиме диспергирования работают электрокаплеструйные принтеры [30]). При этом отрывающиеся капли могут распадаться в результате развития ЭГД-неустойчивости.

При равенстве тангенциальной составляющей поля на поверхности нулю, т.е. эквипотенциальности поверхности, возможно равновесное состояние жидкости. Такое равновесие устанавливается при плоской, цилиндриче-

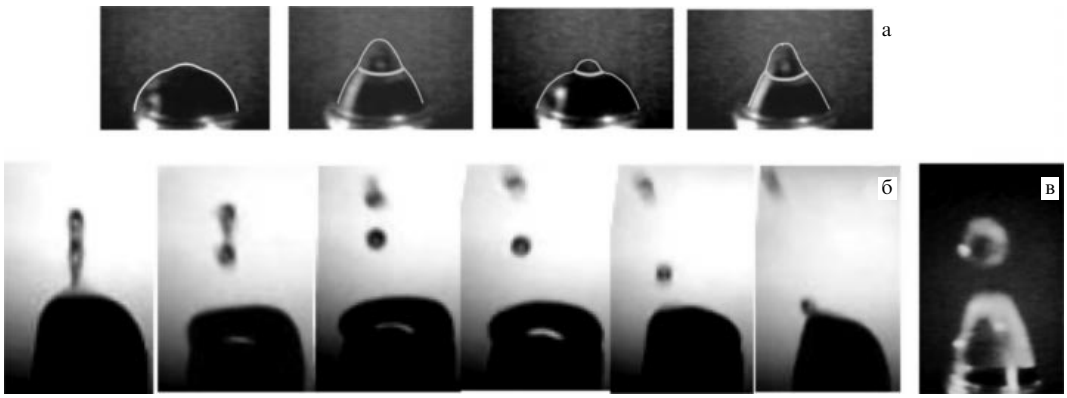

Рис. 7. Режимы диспергирования мениска в системе водопроводная вода – воздух: (а) пульсации микроконуса, сопровождающиеся коронным свечением, $U \approx 10$ кВ, частота пульсаций ~ 200 Гц. (б) Кадры, показывающие процесс отрыва микроструи с последующим её распадом на микрокапли, $U \sim 17$ кВ, частота 1000 кадров в 1 с. (в) Отрыв макрокапли, $U \geqslant 17$ кВ. Диаметр капилляра и расстояние от его кромки до проволочного электрода те же, что и в случае рис. 6.

Таблица 1. Характеристики типичных диэлектрических жидкостей

Жидкость	ε	σ, См м$^{-1}$	ρ, г см$^{-3}$	α, дин см$^{-1}$	τ_e, с	τ_c, с	
						$\lambda \leqslant 0{,}1$ мм	$\lambda = 1$ мм
Водопроводная вода	81	10^{-5}	1	72	7×10^{-5}	$\leqslant 4{,}7 \times 10^{-5}$	$1{,}5 \times 10^{-3}$
Глицерин	56	10^{-5}	1,26	59,4	5×10^{-5}	$\leqslant 6 \times 10^{-5}$	$1{,}9 \times 10^{-3}$
Этиловый спирт	28	10^{-6}	0,79	28,5	2×10^{-4}	$\leqslant 6{,}6 \times 10^{-5}$	$2{,}1 \times 10^{-3}$
Нитробензол	31	10^{-6}	1,2	43,9	3×10^{-4}	$\leqslant 2 \times 10^{-5}$	$6{,}6 \times 10^{-4}$
Нефть	2,2	10^{-10}	0,8	26	0,19	$\leqslant 7 \times 10^{-5}$	$2{,}5 \times 10^{-3}$
Бензин	2,2	10^{-10}	0,7	28	0,19	$\leqslant 6{,}5 \times 10^{-5}$	2×10^{-3}

ской и сферической геометриях, т.е. в случаях как жидких слоёв, так и цилиндрических струй и капель (пузырей).

Рассмотрение поведения свободных поверхностей при различных геометриях, проводимостях и вязкостях жидкостей как в постоянных, так и в переменных полях проведено в различных обзорах (см., например, [4, 12, 16, 17]) и монографиях (см., например, [9, 55]). Результаты исследований показывают, что поведение поверхности существенно определяется проводимостями контактирующих сред. Поэтому целесообразно выделять различные классы ЭГД-задач.

Общепринятой является следующая схема. Вводят время релаксации объёмного заряда $\tau_e = \varepsilon\varepsilon_0/\sigma_*$, где σ_* — характерное значение проводимости, в том числе поверхностной. С другой стороны, в динамических задачах всегда есть характерные времена τ_0, определяемые периодами собственных колебаний, в частности периодами гравитационных, $\tau_g = \sqrt{\lambda/(2\pi g)}$, и капиллярных, $\tau_c = \lambda\sqrt{\lambda\rho/(2\pi\alpha)}$, колебаний, где λ — длина волны, так что $\tau_0 = \min(\tau_g, \tau_c)$. Периоды колебаний гравитационных возмущений оцениваются как $\tau_g = 4 \times 10^{-3}$ с при $\lambda = 1$ мм и $\tau_g = 1{,}3 \times 10^{-2}$ с при $\lambda = 1$ см; типичные значения τ_e, τ_c для различных жидкостей приведены в табл. 1.

Если $\tau_e \ll \tau_0$, то поверхность можно считать эквипотенциальной, а при $\tau_e \geqslant \tau_0$ необходимо учитывать поверхностную проводимость. Из таблицы 1 видно, что условие $\tau_e \ll \tau_0$ выполняется в довольно ограниченном числе случаев, например для воды, глицерина и этилового спирта при $\lambda \geqslant 1$ мм. Для типичных жидких диэлектриков, как полярных, так и неполярных, это условие, как правило, не выполняется. Более того, при коротковолновых возмущениях в жидких углеводородах справедливо обратное неравенство, $\tau_e \gg \tau_0$, т.е. такие возмущения развиваются на фоне "вмороженного" поверхностного заряда. Таким образом, можно выделить два класса задач.

Первый класс задач, в которых $\tau_e \ll \tau_0$ и заряд релаксирует очень быстро, называется приближением идеального проводника. К этому классу относятся задачи о жидкостях, контактирующих со слабопроводящими средами (воздух, жидкие углеводороды и др.) и имеющих проводимости порядка и выше проводимости воды. В этом случае заряды распределяются только по поверхности, поэтому такие задачи естественно назвать приближением заряженной поверхности. Процессы с быстрой релаксацией зарядов достаточно широко распространены в природе, и они нашли применение в современных технологиях. В связи с этим рассмотрим основные закономерности поведения заряженных поверхностей.

Для любой заряженной поверхности, находящейся в равновесии, существует критическая напряжённость E_*, такая, что при напряжённости поля на этой поверхности $E < E_*$ поле её стабилизирует. Это означает, что электрическое поле подавляет все малые возмущения. При напряжённостях поля, превышающих критическую напряжённость, $E > E_*$, возникает неустойчивость поверхности с дальнейшей довольно сложной нелинейной эволюцией, приводящей либо к образованию нетривиальных поверхностных форм, либо к диспергированию жидкости.

Ко второму классу относятся задачи с конечным временем релаксации зарядов, $\tau_e \geqslant \tau_0$, в которых необходимо учитывать не только объёмную, но и поверхностную проводимость. В качестве примера укажем задачи о диспергировании жидких углеводородов, получении тонких полимерных нитей или капилляров и т.д.

Рассмотрим основные закономерности деформации плоской поверхности при нормальной и тангенциальной ориентациях поля. При этом будем придерживаться следующей, часто используемой, терминологии. Согласно первому методу Ляпунова [85], зависимость возмущений от времени принимается пропорциональной величине $\exp(\lambda t)$, где λ — спектральный параметр, определяемый задачей для собственных значений. При этом имеются и другие параметры, например напряжённость внешнего поля, поэтому λ является функцией параметров задачи. Если при некоторых значениях параметров величина λ вещественна, то при $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$) возмущения монотонно возрастают (убывают). Такой режим называется монотонной неустойчивостью. Если λ является комплексной величиной, то при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$) возмущения возрастают (убывают), совершая гармонические колебания. Такой режим называют колебательной неустойчивостью.

3.1. Нормальное поле

Экспериментально достаточно подробно изучены неустойчивости границы раздела воздух – жидкость с быстрой релаксацией заряда (воздух – ртуть [3, 86], воздух – вода [65, 68]) и воздух – жидкость с конечной скоростью релаксации заряда (воздух – силиконовое или трансформаторное масло [67]). Критическая напряжённость поля E_* в коротковолновой области спектра при быстрой релаксации заряда (см. раздел 4.1), по-видимому, впервые была вычислена Френкелем [3], общий случай рассмотрен в работах [65, 67]. Во всех работах отмечается согласие результатов теории и эксперимента (см., например, [55]). Случай горизонтальной поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей довольно

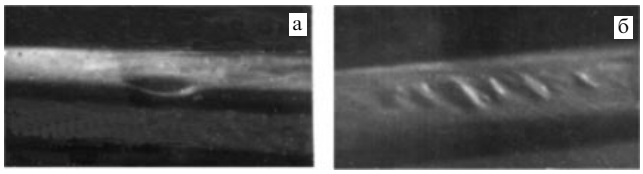

Рис. 8. Нелинейные формы на заряженной поверхности глицерина, граничащего с трансформаторным маслом: (а) уединённая лунка, (б) валы [75].

сложен, поскольку необходимо учитывать вязкости жидкостей и, что принципиально важно, поверхностную проводимость (см. раздел 5.2).

Эксперименты показывают, что малые деформации поверхности быстро трансформируются в довольно сложные нелинейные формы типа валов, лунок и пиков. Последние, как правило, являются неустойчивыми и, вытягиваясь, образуют тонкие нитеобразные структуры, замыкающие межэлектродный промежуток. Подобные нелинейные формы, например, наблюдались на поверхности раздела глицерин – трансформаторное масло [75] (рис. 8). Следует отметить, что на "свежей" поверхности раздела лунки не образуются — они появляются только после "выдержки" поверхности раздела в течение нескольких месяцев. По-видимому, это связано с электрохимической реакцией на поверхности раздела, приводящей к уменьшению поверхностного натяжения. В пользу этого факта свидетельствуют, во-первых, видимое увеличение толщины переходного слоя и, во-вторых, изменение отражательных свойств поверхности (исчезновение блеска и появление матовости). Отметим также, что нелинейные деформации типа лунок наблюдались на заряженной поверхности жидкого гелия [87 – 89]. Принципиальное различие этих двух случаев заключается в разном направлении действия поверхностной кулоновской силы: в [87 – 89] электроны вдавливаются в поверхность, а в [75], наоборот, сила направлена от поверхности.

3.2. Касательное поле

В случае касательного поля $E = E_x \neq 0$, $E_z = 0$, поверхностный заряд отсутствует, $q_s = 0$, и возможно равновесие жидкости. Интерес представляют неустойчивость поверхности и развитие течений при достаточно больших касательных полях. Такая неустойчивость наблюдалась в вертикальном плоском конденсаторе, заполненном двумя слабопроводящими несмешивающимися жидкостями (см. обзор [12] и описание оригинальных экспериментов [66, 90]). После потери устойчивости развивается течение в виде стационарных электроконвективных ячеек. Значение пороговой напряжённости поля, вычисленное при предположении омической объёмной проводимости (без учёта поверхностной проводимости), приведено в [12, 66, 71]. Показано [71], что монотонная неустойчивость, приводящая к стационарной электроконвекции, возможна при выполнении условий $\sigma_1 > \sigma_2$, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ или противоположных условий $\sigma_1 < \sigma_2$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ (здесь и ниже индексные обозначения соответствуют рис. 1). Колебательная неустойчивость может развиваться в двух случаях: 1) $\sigma_2/\sigma_1 > \varepsilon_2/\varepsilon_1 > \rho_1/\rho_2$, 2) $\sigma_2/\sigma_1 < \varepsilon_2/\varepsilon_1 < \rho_1/\rho_2$. Эти результаты существенно отличаются от результатов работ [12, 66], в которых утверждается, что неустойчивость развивается только при выполнении условия $\sigma_2/\sigma_1 > \varepsilon_2/\varepsilon_1$.

Наблюдение поверхностной неустойчивости легко осуществить в геометрии, представленной на рис. 2б, где штриховой линией обозначено положение свободной поверхности. В этом случае формируется касательное поле вдоль поверхности и развитие объёмной ЭГД-неустойчивости, обусловленной инжекционными процессами, исключено. Оказывается, что стационарная электроконвекция отсутствует, однако развивается колебательная коротковолновая поверхностная неустойчивость, которая проявляется в беспорядочном движении дисперсной частицы на поверхности, сопровождающемся характерным низкочастотным "шипением" с частотой порядка 50 – 200 Гц. На наш взгляд, подобная неустойчивость связана с поверхностной проводимостью. Этот вывод, который следует из элементарных физических соображений, подтверждается соответствующими расчётами. Действительно, поверхностные заряды возбуждают колебания поверхности с частотой, определяемой миграционной скоростью ионов $\omega_i = V_{Ei}k$, $V_{Ei} = b_i E$, где b_i — подвижность иона, k — волновое число. Если ω_i совпадает, например, с частотой капиллярных волн $\omega = k\sqrt{\alpha k/\rho}$, то возникает резонанс и на поверхности развивается неустойчивость, обусловленная переходом энергии электрического поля в энергию мелкомасштабных колебаний поверхности.

Приведём некоторые результаты экспериментального исследования поведения заряженных менисков и цилиндрических струй. Типичная схема установки представлена на рис. 9. Катодом являлся тонкостенный капилляр *2* (использовались капилляры с внутренними диаметрами $d = 1$ мм и $d = 2$ мм), а анодом служило медное кольцо *1* диаметром $D = 13{,}5$ мм, изготовленное из проволоки толщиной 2,3 мм. Определение скорости истечения осуществлялось с применением покадровой развёртки.

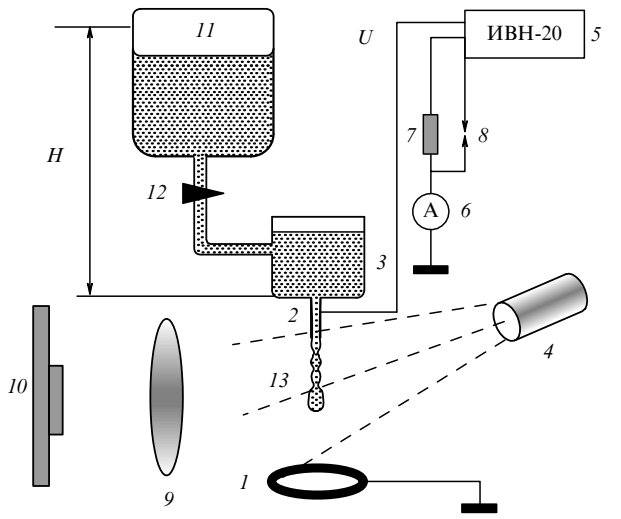

Рис. 9. Установка по исследованию истечения заряженных струй: *1* — проволочное кольцо, *2* — капилляр, *3* — кювета с исследуемой жидкостью, *4* — осветитель рабочей зоны, *5* — высоковольтный источник питания, *6* — амперметр, *7* — ограничительное сопротивление, *8* — искровой разрядник, *9* — увеличительная оптическая система, *10* — видеокамера, *11* — накопительная колба, *12* — зажим, регулирующий расход, *13* — заряженная струя.

3.3. Струи с быстрой релаксацией зарядов

Вода и водные растворы относятся к жидкостям с быстрой релаксацией зарядов и сравнительно большим коэффициентом поверхностного натяжения (см. табл. 1). Результаты экспериментального исследования истечения таких жидкостей представлены в разделах 3.3.1 – 3.3.3.

3.3.1. Режим капельного истечения. В этом режиме в отсутствие напряжения жидкость вытекает в виде капель (рис. 10а). При превышении напряжением величины $U \sim 6$ кВ капли начинают сливаться и при дальнейшем возрастании напряжения до $U \sim 10-15$ кВ формируется струйное течение, которое имеет волновой характер, причём форма струи постоянно меняется (рис. 10б – г). Таким образом, при $U \sim 6-15$ кВ электрическое поле стабилизирует истечение. При бóльших напряжениях, $U \geqslant 17$ кВ, происходит дестабилизация течения, которая проявляется в том, что каплеобразование вновь начинается вблизи конца капилляра. Причём скорость падения капель уменьшается, вследствие чего они укрупняются, и под действием кулоновской силы отталкивания капли начинают разлетаться (рис. 10д).

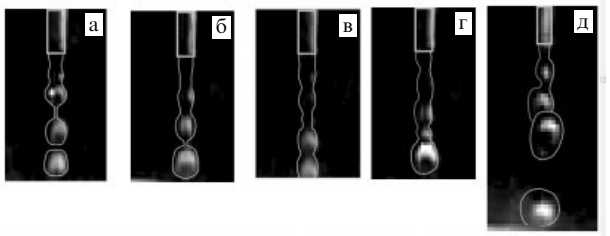

Рис. 10. Влияние величины поля на капельный режим истечения: (а) $U = 0$, (б) $U = 6$ кВ, (в) $U = 10$ кВ, (г) $U = 15$ кВ, (д) $U = 17$ кВ.

3.3.2. Переходный режим. В режиме перехода от капельного течения к струйному появляются новые закономерности влияния поля. Так как скорость истечения в последнем случае больше, чем при капельном истечении, разрыва струи на начальном участке не происходит и течение носит волновой характер с амплитудой, значительно меньшей, чем при капельном режиме (рис. 11а). При этом длина волны вдоль направления истечения уменьшается с возрастанием поля, поэтому размеры капель, на которые распадается струя, уменьшаются, а область каплеобразования при увеличении поля сдвигается выше по течению (рис. 11б). Интересным эффектом является винтовой характер истечения при достаточно высоких напряжениях (рис. 11в).

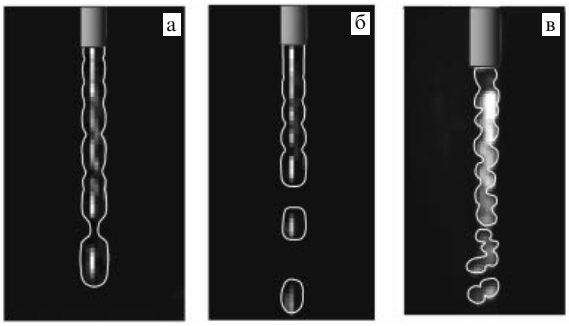

Рис. 11. Влияние величины поля на переходный режим истечения: (а) $U = 6$ кВ, (б) $U = 10$ кВ, (в) $U = 12$ кВ.

3.3.3. Режим струйного истечения. В режиме струйного истечения скорости истечения настолько велики, что струи приобретают цилиндрическую форму при весьма малой амплитуде волнистости (рис. 12). Каплеобразование происходит на конце струи, причём заряженные капли под действием кулоновской силы отталкивания начинают разлетаться (рис. 12а, б). Эти данные позволяют оценить заряд капель. Так, в момент образования капли её заряд оценивается как $q_0 = 4\pi R_0^2 q_s$, где $q_s = \varepsilon_0 E$, R_0 — радиус капли, $E = U/R$. В случае разлёта капель (капли *1*, *2* на рис. 12а, б) на основании уравнения движения разлетающейся капли

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = q\mathbf{E} + \frac{q^2\mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

для малых горизонтальных смещений Δx на промежутках времени Δt находим $\Delta x = [q^2 x/(4\pi\varepsilon_0 R^3 m)]\Delta t^2/2$, где q — заряд капель *1*, *2*, расстояния x и R показаны на рис. 12в. Полагая $U = 10$ кВ, $R_0 = 0{,}5$ мм, для заряда капли в момент отрыва получаем $q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_0 U = 5 \times 10^{-10}$ Кл. Согласно рис. 12б, при $x = 1$ мм, $\Delta x \approx 0{,}5$ мм, $\Delta t \approx 1/240$ с и $R = 4$ мм, учитывая, что $m = \rho(4\pi/3)R_0^3$ (где ρ — плотность воды), находим $q = 4{,}5 \times 10^{-10}$ Кл. Таким образом, заряды q_0 и q совпадают с точностью $\sim 10\,\%$, поэтому их разлёт на начальном участке обусловлен взаимным отталкиванием. То, что q несколько меньше начального заряда q_0, можно объяснить разрядкой капель противоионами, находящимися в воздухе. Обратим внимание на то, что в области стабилизации струи, выбирая специальную конфигурацию электродов, можно эффективно увеличивать длину области устойчивости струи (рис. 12г, д). Аналогичная стабилизация водной струи описана в [91].

Роль вязкости жидкости в развитии неустойчивости заряженных струй показана на рис. 13 на примере истечения глицерина и полимерной жидкости (растворы полистирола в дихлорэтане или полиметилфенилсилоксан) [84]. Из рисунка видно, что повышение вязкости в докритической области поля может эффективно стабилизировать струю (рис. 13а – в), а в закритической области развивается неустойчивость по отношению к коротковолновым осесимметричным возмущениям (рис. 13г).

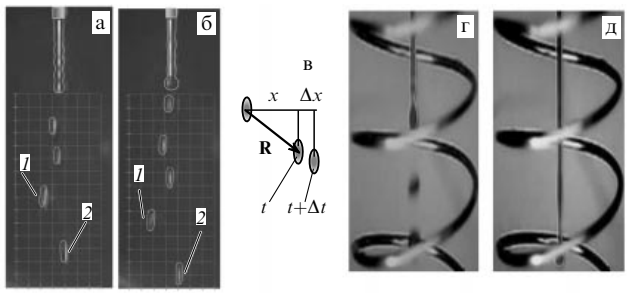

Рис. 12. Влияние величины поля на струйный режим истечения. (а, б) Последовательные кадры с интервалом $\Delta t = 1/240$ с при $U = 10$ кВ. Вытянутая форма капель *1* и *2* объясняется их движением со скоростью ≈ 5 см с$^{-1}$, что приводит к образованию треков; шаг сетки 1 мм. (в) Схема к расчёту заряда капель; (г, д) стабилизация струи: на рис. г $U = 0$, на рис. д $U = 6$ кВ.

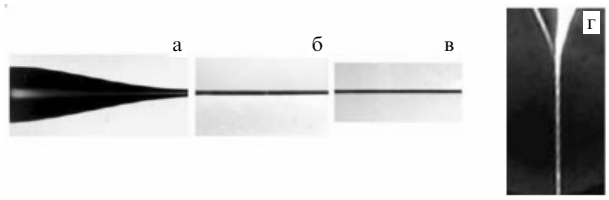

Рис. 13. Фотографии участков истекающей из капилляра диаметром 1 мм струи полимерной жидкости в направлении силы тяжести, сделанные на расстоянии от кромки капилляра, равном (а) нулю, (б) 2 см, (в) 4 см; расход $8{,}3 \times 10^{-3}$ см^3 с$^{-1}$, средняя напряжённость поля между капилляром и противоэлектродом 56 кВ см$^{-1}$ [84]. (г) Развитие неустойчивости глицериновой струи, $U = 10$ кВ.

3.4. Струи с конечной скоростью релаксации зарядов

На рисунке 14 представлены результаты экспериментов по истечению заряженных струй касторового масла. Вследствие большой вязкости и сравнительно малого поверхностного натяжения, в отсутствие поля струя начинает распадаться на капли вблизи конца капилляра (рис. 14а). Приложение поля стабилизирует поверхность струи, и истечение происходит в виде довольно длинной цилиндрической струи (рис. 14б). Неустойчивость развивается на конце струи, при этом образуются мелкие капли-сателлиты, которые могут перезаряжаться двумя способами, а именно: посредством однократной перезарядки, так что капля возвращается обратно на заряженную жидкость (рис. 14в), и посредством двукратной перезарядки, при которой капля вначале приближается к жидкости, а затем начинает удаляться от неё (рис. 14г). Наконец, в достаточно сильных полях возможно истечение нескольких струй (рис. 14д).

Подводя итог, подчеркнём, что для объяснения экспериментальных данных о поведении свободной поверхности в электрическом поле необходимо применять более точные физико-химические модели, в частности учитывать динамику поверхностных зарядов. Отметим также, что эта точка зрения не нова. Её высказывали, например, авторы работы [5], исследовавшие электростатическое диспергирование жидкостей с использованием ПАВ, увеличивающих поверхностную проводимость. Такая же точка зрения высказывалась в [92], где исследовалось вращение цилиндрических тел в слабопроводящих средах (в том числе в воздухе) во внешнем однородном электрическом поле, перпендикулярном оси симметрии.

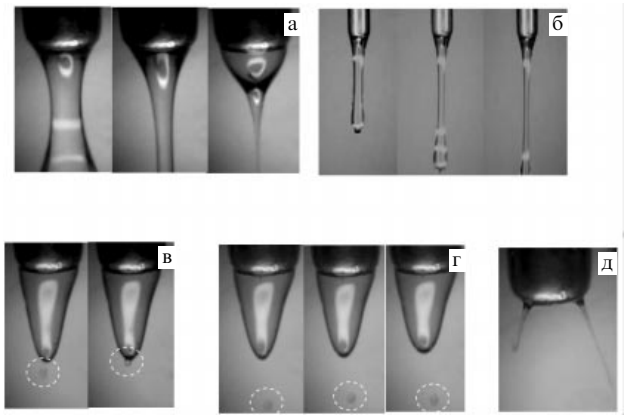

Рис. 14. Влияние величины поля на режим истечения касторового масла: (а) $U = 0$, (б) $U = 6$ кВ. (в) Возвращение капли сателлита после перезарядки. (г) Двойная перезарядка капли. (д) Полиструйное истечение в сильном поле, $U = 10$ кВ.

4. Электрогидродинамика свободной поверхности при быстрой релаксации зарядов

В этом разделе рассмотрим закономерности неустойчивости и развития возмущений при быстрой релаксации зарядов, когда свободную поверхность можно считать эквипотенциальной. Напомним, что задачи этого класса формально совпадают с задачами об устойчивости свободной поверхности идеального проводника.

4.1. Линейная электрогидродинамическая неустойчивость плоской поверхности

Ниже будет показано, что критическую напряжённость E_* можно определить на основе модели идеальной жидкости, а развитие возмущений существенно зависит от вязкости жидкости. Этот раздел является подготовительным для нелинейного анализа.

При $\tau_e \ll \tau_0$ краевая задача (1)–(7) записывается в виде

$$\Omega_i\colon \quad \rho_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_i}{\mathrm{d}t} = -\nabla p_i' + \eta_i \Delta \mathbf{V}_i + \rho_i \mathbf{g}\,, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}_i = 0\,, \tag{14}$$

$$\Omega_1\colon \quad \Delta \Phi = 0\,, \qquad \mathbf{E} = -\nabla \Phi\,; \tag{15}$$

$$\mathrm{S}_1\colon \quad \Phi = 0\,, \quad \mathbf{V}_1 = 0\,; \qquad \mathrm{S}_2\colon \quad \mathbf{V}_2 = 0\,; \tag{16}$$

$$\mathrm{S}\colon \quad \Phi = U\,, \quad \langle \mathbf{V} \rangle = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = V_{1\mathrm{n}} |\nabla F|\,, \tag{17}$$

$$-\langle p' \rangle + \langle \tau_{ij} \rangle n^j n^i + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{\mathrm{n}}^2}{2} = 2\alpha H\,, \quad \langle \tau_{ij} \rangle n^i t^j = 0\,. \tag{18}$$

Уравнение свободной поверхности имеет вид $z = f(t, x, y)$, $F = z - f(t, x, y)$, $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, $f(t, x, y)$ — отклонение свободной поверхности от плоского состояния (см. рис. 1).

4.1.1. Равновесное состояние. При равновесии задача (14)–(18) имеет решение

$$\Phi_0 = -E_0 z + U\,, \qquad E_0 = \frac{U}{h_1}\,, \qquad f_0 = 0\,,$$
$$p_{10}' = p_0 + \rho_1 g (h_1 - z)\,, \qquad p_{20}' = p_{10}'(0) - \rho_2 g z - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0^2}{2}\,. \tag{19}$$

Здесь p_0 — константа, определяемая разностью атмосферного и стрикционного давлений. Обратим внимание на то, что давление в нижней жидкости (идеальном проводнике) меньше давления в верхней на величину $\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0^2/2$, которая является разностью между поверхностной кулоновской силой $q_{\mathrm{s}} E_0 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0^2$ и электрическим давлением $\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0^2/2$.

4.1.2. Уравнения для возмущений. Представляя неизвестные функции в виде суммы равновесных и малых по амплитудам добавок (возмущений), например $f_0 + f$, и подставляя их в (14)–(18), после линеаризации получим следующие уравнения для возмущений:

$$\Omega_i\colon \quad \rho_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} = -\nabla p_i + \eta_i \Delta \mathbf{V}_i + \rho_i \mathbf{g}\,, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}_i = 0\,, \tag{20}$$

$$\Omega_1\colon\quad \Delta\Phi = 0\,,\qquad \mathbf{E} = -\nabla\Phi\,; \tag{21}$$

$$z = h_1\colon\quad \Phi = 0\,,\quad V_1 = 0\,;\qquad z = -h_2\colon\quad V_2 = 0\,; \tag{22}$$

$$z = 0\colon\quad E_0 f = \Phi\,,\quad \langle V\rangle = 0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial t} = V_{1z} = V_{2z}\,, \tag{23}$$

$$-\langle p\rangle - \langle\rho\rangle g f + 2\left\langle \eta\,\frac{\partial V_z}{\partial z}\right\rangle + \varepsilon_1\varepsilon_0 E_0\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\alpha\Delta_1 f\,, \tag{24}$$

$$\left\langle \eta\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\right\rangle = \left\langle \eta\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\right\rangle = 0\,. \tag{25}$$

4.1.3. Дисперсионное уравнение. В дальнейшем ради простоты рассматриваем случай, в котором область Ω_1 заполнена газом, так что $\rho_1 \ll \rho_2 \equiv \rho$, $\eta_1 \ll \eta_2 \equiv \eta$. Устойчивость исследуем относительно нормальных мод,

$$[\mathbf{V}, p, f, \Phi] = \big[\mathbf{W}(z), P(z), F, \Psi(z)\big]\exp\big[\mathrm{i}(\omega t - kx)\big]\,, \tag{26}$$

где ось x ориентирована вдоль направления волнового вектора. Подставляя (26) в (20)–(25) и проводя элементарные, но несколько громоздкие вычисления, получаем следующее дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω и волновое число k:

$$\eta\nu\big[(k^2+\beta^2)^2\tanh(kh_2) - 4k^3\beta\tanh(\beta h_2)\big] = kD\,, \tag{27}$$

$$D = \alpha k^2 + \rho g - \varepsilon_1\varepsilon_0 E_0^2 k\coth(kh_1)\,,\quad \beta^2 = k^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\nu}\,,$$

где $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость.

4.1.4. Анализ устойчивости. Из уравнения (27) видно, что в общем случае частота ω является комплексной величиной, $\omega = \omega_0 + \mathrm{i}\delta$, где ω_0 — частота колебаний, δ — декремент возрастания (убывания) возмущений. Критическая напряжённость поля E_*, при превышении которой развивается неустойчивость, определяется из условия $\delta = 0$, т.е. при вещественной частоте. Можно доказать, что на границе устойчивости, $\delta = 0$, единственным вещественным решением уравнения (27) является тривиальное решение $\omega_0 = 0$. Отсюда следует, что E_* определяется условием $D = \alpha k^2 + \rho g - \varepsilon_1\varepsilon_0 E_0^2 k\coth(kh_1) = 0$. Введём безразмерные параметры $W = \varepsilon_1\varepsilon_0 E_0^2/(\rho g h_1)$, $\kappa = kh_1$, $\gamma = l_c^2/h_1^2$, где $l_c = \sqrt{\alpha/(\rho g)}$ — капиллярная длина. Тогда E_* будет определяться условием

$$W_* = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 E_*^2}{\rho g h_1} = \min_{\kappa>0} W(\gamma,\kappa) = W(\gamma,\kappa_*)\,,$$
$$W(\gamma,\kappa) = (1+\gamma\kappa^2)\,\frac{\tanh\kappa}{\kappa}\,. \tag{28}$$

Рассмотрим различные предельные случаи.

В области длинноволновых возмущений, $\kappa \ll 1$, производная W'_κ выражается как $W'_\kappa = 2\kappa(\gamma - 1/3) + O(\kappa^2)$. Отсюда следует, что при $3\gamma > 1$ критическое значение W_* находится из условия $\kappa = 0$, что даёт $W_* = 1$. Таким образом, если верхний электрод расположен достаточно близко к поверхности или достаточно велик коэффициент поверхностного натяжения, $h_1 < \sqrt{3}\,l_c$, то неустойчивость развивается в области длинноволновых возмущений, причём $E_* = \sqrt{\rho g h_1/\varepsilon_1\varepsilon_0}$.

В другом предельном случае, $\gamma \ll 1/3$, т.е. когда верхний электрод значительно удалён от поверхности, $h_1 \gg l_c$, критическая напряжённость определяется как $E_* = \sqrt{2\rho g l_c/\varepsilon_1\varepsilon_0}$, при этом критическая длина волны выражается через капиллярную длину: $l_* = 2\pi/k_* = 2\pi l_c$, где $k_* = \kappa_*/h_1$, κ_* находится из (28).

Проведённый элементарный анализ показывает, что плоская заряженная поверхность теряет устойчивость по отношению к монотонным возмущениям, причём критическая напряжённость поля E_* не зависит от вязкости жидкости. Этот результат легко получить, используя метод квадратичных форм не только для поверхности жидкость–газ, но и для поверхности раздела двух несмешивающихся вязких жидкостей. Именно, из системы (20)–(25) для возмущений, зависимость от времени которых определяется множителем $\exp(\lambda t)$, $\lambda = \delta + \mathrm{i}\omega_0$, с помощью метода, приведённого в [85], получаем

$$\delta(H_1 + H_2) + \mathrm{i}\omega_0(H_1 - H_2) = -R\,, \tag{29}$$

$$H_1 = \sum_{i=1}^{2}\rho_i\int_{\Omega_i}|\mathbf{V}_i|^2\,\mathrm{d}V\,,\qquad R = 2\sum_{i=1}^{2}\eta_i\int_{\Omega_i}\sum_{n,m}|V^i_{nm}|^2\,\mathrm{d}V\,,$$

$$H_2 = \int_{\mathrm{S}}\big[\alpha|\nabla F|^2 - \langle\rho\rangle g - \varepsilon_1\varepsilon_0 E_0^2|\nabla\Phi|^2\big]\,\mathrm{d}S\,,$$

где интегралы по координатам x, y вдоль поверхности берутся по области периодичности, V^i_{nm} — тензор скоростей деформаций i-й жидкости. Из (29) видно, что на границе устойчивости, $\delta = 0$, величина $R = 0$, откуда $V^i_{nm} = 0$, т.е. в жидкостях отсутствуют вязкие напряжения. Таким образом, на границе устойчивости критическое значение E_* не зависит от вязкости жидкостей. Этот вывод справедлив не только для плоской, но и для цилиндрической и сферической поверхностей.

4.1.5. Декременты возмущений. Вязкость существенно влияет на форму и скорость возрастания возмущений в области неустойчивости. Аналитические выражения для декрементов возмущений можно получить в предельных случаях слабовязкой или сильновязкой жидкости.

В случае слабовязкой жидкости, $k^2\nu/\omega_0 \ll 1$, в докритической области $E_0 < E_*$ частота колебаний выражается как

$$\omega = \sqrt{kD\,\frac{\coth(kh_2)}{\rho}} \equiv \omega_0\,, \tag{30}$$

где D определено в (27). Декремент затухания колебаний выражается как $\delta = 2k^2\nu$, т.е. не зависит от поля. В закритической области $E_0 > E_*$ декремент возрастания возмущений увеличивается с повышением величины поля по закону $\delta = \sqrt{k|D|\coth(kh_2)/\rho}$. В данном случае условие слабой вязкости записывается как $k^2\nu/\delta \ll 1$.

В случае сильновязких жидкостей в докритической $E_0 < E_*$ (закритической $E_0 > E_*$) области декремент убывания (возрастания) возмущений выражается в виде

$$\delta = \frac{|D|}{2k\eta A}\,,\qquad A = \tanh(kh_2) - \frac{kh_2}{\cosh^2(kh_2)}\,. \tag{31}$$

При этом колебательные возмущения не развиваются, а условие сильной вязкости имеет вид $\delta/(k^2\nu) \ll 1$. Обратим внимание на то, что это условие выполняется при произвольной вязкости, но малой надкритичности (малом D).

4.1.6. Сценарии развития неустойчивостей. Проведённые вычисления позволили установить следующие законо-

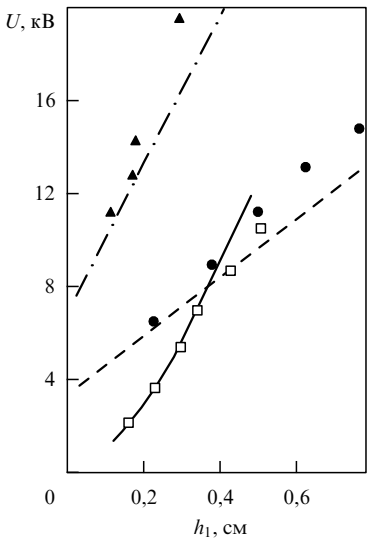

Рис. 15. Сравнение результатов теории и эксперимента: ▲ — силиконовое масло, переменное поле 400 Гц (теоретические результаты показаны штрихпунктирной линией) [65], ● — силиконовое масло, постоянное поле (теоретические результаты — штриховая линия) [65], □ — вода, постоянное поле (теоретические результаты — сплошная линия) [68].

мерности развития неустойчивости заряженной поверхности.

В случае маловязких жидкостей в докритической области $E_0 < E_*$ возможны колебания поверхности. Заряд на поверхности, согласно (30), уменьшает частоту колебаний, т.е. подавляет возмущения. В области неустойчивости $E_0 \sim E_*$ колебания поверхности прекращаются и при $E_0 > E_*$ развивается монотонная неустойчивость. Декременты возмущений возрастают линейно по полю, $\delta \sim E_0$.

В случае сильновязких жидкостей колебания поверхности в докритической области не развиваются, однако, согласно (31), поле уменьшает декременты возмущений. В закритической области $E_0 > E_*$ развивается монотонная неустойчивость и декременты возмущений возрастают с увеличением поля как $\delta \sim E_0^2$.

Из рисунка 15, на котором проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных, видно, что их согласие имеет место при малых h_1, когда наиболее "опасными" являются длинноволновые возмущения (которые, согласно критерию $h_1 < \sqrt{3}\, l_c$, являются критическими для воды при $h_1 < 0{,}47$ см, а для силиконового масла при $h_1 < 0{,}26$ см). В области коротковолновых возмущений, когда существенную роль играет поверхностная проводимость (см. раздел 5.2), имеют место значительные расхождения. Наилучшее согласие теоретических и экспериментальных результатов получено для воды, для которой расчёты критического напряжения проводились согласно (28) (сплошная линия). Расчёты для силиконового масла проводились в рамках общей модели (1)–(7) без учёта поверхностной проводимости (штриховая линия), однако в области длинноволновых возмущений критерий устойчивости также определялся согласно (28) (см. раздел 5.2). Вторым важным результатом является то, что в переменном поле высокой частоты (400 Гц) удовлетворительное согласие с экспериментом даёт теория идеального диэлектрика (штрихпунктирная линия).

Отметим, что указанные закономерности легко наблюдать как на плоской поверхности, так и на искривлённых поверхностях менисков. В связи с этим мы не будем приводить экспериментальные данные, а перейдём к более сложному вопросу — анализу нелинейного развития неустойчивости.

4.2. Ветвление равновесных форм

Довольно широко распространена точка зрения, что перестройка равновесной формы поверхности после потери устойчивости при малых надкритичностях (см. ниже) определяется решениями линейной задачи об устойчивости. Методика нахождения таких решений основывается на теории ветвления (ТВ) [93], которая, по сути, является асимптотической теорией (вычисления сводятся к решению последовательности линейных задач). Первое приближение всегда описывается линейными уравнениями, определяющими устойчивость, поэтому главный член в асимптотическом разложении всегда совпадает с решением задачи об устойчивости. Основной результат ТВ — это вычисление амплитуд решений в закритической области (ответвившихся решений).

Суть схемы вычислений, которая, на наш взгляд, наиболее прозрачна при изложении ТВ в операторном виде [93], кратко заключается в следующем. Рассматривается банахово пространство $\mathcal{B}$ вещественных функций $u = u(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, со скалярным произведением $(u_1, u_2) = \int_\Omega u_1 u_2 \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}$, $\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где Ω — некоторая ограниченная область трёхмерного пространства. Рассматриваются решения уравнения для некоторого нелинейного оператора второго порядка $\hat{\mathcal{A}}$, действующего на подмножестве $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, которые $\hat{\mathcal{A}}$ отображает в нуль,

$$\hat{\mathcal{A}}[u, W] = 0\,. \tag{32}$$

Здесь для удобства выделен спектральный параметр W.

Заменой $u \to u - u_0$ (где u_0 — равновесное решение) задача (32) сводится к задаче о ветвлении решений в окрестности нулевого решения, что и будем предполагать. При некотором $W = W_*$ в задаче (32) нарушается единственность решения, и при $W > W_*$ кроме нулевого решения появляются новые решения $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Задача заключается в вычислении этих решений при $\mu = (W - W_*)/W_* \ll 1$ (в этом случае говорят о малой надкритичности). Идея решения заключается в следующем.

Представим W как $W = W_* + \mu W_*$ и разложим оператор $\hat{\mathcal{A}}$ в окрестности $\mu = 0$, выделив линейную часть $\hat{\mathcal{A}}_0$. Тогда (32) примет вид

$$\hat{\mathcal{A}}[u, W] = \hat{\mathcal{A}}_0[u, W_*] + \hat{\mathcal{A}}_1[u, \mu, W_*] = 0\,, \tag{33}$$

где $\hat{\mathcal{A}}_1[u, \mu, W_*]$ — нелинейный оператор, обращающийся в нуль при $\mu = 0$.

Ради простоты будем считать, что задача для собственных значений оператора $\hat{\mathcal{A}}_0$,

$$\hat{\mathcal{A}}_0[u, W] = 0\,, \tag{34}$$

имеет единственное решение $u = u_*$, отвечающее собственному числу $W = W_*$. Будем также полагать, что задача для сопряжённого к $\hat{\mathcal{A}}_0$ оператора $\hat{\mathcal{A}}_0^*$,

$$\hat{\mathcal{A}}_0^*[w, V] = 0\,, \tag{35}$$

также имеет единственное решение $w = w_*$, отвечающее собственному значению $V = V_*$. Тогда условие разрешимости уравнения (33) запишется как [93]

$$\left(\hat{\mathcal{A}}_1[u, \mu, W_*], w_*\right) = 0\,. \tag{36}$$

Соотношение (36), называемое уравнением разветвления, определяет амплитуду ответвившегося решения, которое при малой надкритичности $\mu \ll 1$ вычисляется следующим образом. Решение задачи (33) ищется в виде асимптотического разложения

$$u = \mu^{\lambda_1} a_1 u_1 + \mu^{\lambda_2} a_2 u_2 + \ldots + \mu^{\lambda_n} a_n u_n + \ldots, \tag{37}$$

где $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ — параметры, подлежащие определению, a_n — неизвестные константы $(n = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, что члены порядка μ^{λ_1} определяются задачей (34), так что $u_1 = u_*$, $W = W_*$, а члены u_n $(n \geqslant 2)$ находятся из решения последовательности линейных задач, включающих в себя известные $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. После подстановки (37) в (36) параметры λ_n определяются методом диаграмм Ньютона [93], а приравнивая нулю суммы членов порядка μ^{λ_n}, находят a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Эта процедура, которая в разных формах (математической, как описано выше, или физической) использовалась в многочисленных работах, применительно к конкретным задачам оказывается довольно громоздкой. Например, к задаче ветвления решений вращающейся идеальной жидкости указанная процедура впервые была применена (по сути, разработана) Ляпуновым [94], к задаче течения тонкой плёнки в аэродинамической трубе — Капицей [95], к задачам об устойчивости капиллярной жидкости со свободной поверхностью в гравитационном поле эта процедура применялась в [85], а к задаче о заряженной плоской поверхности идеального проводника — в [77]. Устойчивость плоской поверхности намагничивающейся жидкости в нормальном однородном магнитном поле по отношению к коротковолновым возмущениям исследовалась в [96, 97]. С использованием эквивалентности вариационного принципа и соответствующей краевой задачи такая же задача об устойчивости плоской поверхности в нормальном магнитном поле изучалась в [98]. Математическое исследование ветвления этой же задачи проводилось, например, в работах [99, 100]. Обстоятельное изложение проблем устойчивости и перестройки заряженной электронами поверхности жидкого гелия дано в монографии [88] и обзорах [87, 89]. Выводы работ [96–98] в сравнении с экспериментальными данными [99-102] проанализированы в [103]. Результаты вычислений легко понять на примере ветвления: возникновение ряда валов на фоне плоской поверхности [96, 97]. Основные выводы основываются на выражении для амплитуды $A_1 = \mu^{\lambda_1} a_1$, которая для идеального диэлектрика имеет вид (в размерных переменных):

$$A_1 = l_{\mathrm{c}} \sqrt{F(\varepsilon)\,\frac{E - E_*}{E_*}}, \qquad F(\varepsilon) = \frac{32(\varepsilon + 1)^2}{42\varepsilon - 11(\varepsilon^2 + 1)}\,, \tag{38}$$

где $l_{\mathrm{c}} = \sqrt{\alpha/(\rho g)}$, $E_* = \sqrt{2 l_{\mathrm{c}}\, \rho g/(\varepsilon\varepsilon_0)}$, ε — относительная диэлектрическая проницаемость нижней жидкости в геометрии рис. 1; $\lambda_1 = 1/2$.

Так как функция $F(\varepsilon)$ меняет знак в точке $\varepsilon = 3{,}54 \equiv \varepsilon_*$ ($F(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon < \varepsilon_*$, $F(\varepsilon) < 0$ при $\varepsilon > \varepsilon_*$), то подкоренное выражение в (38) положительно при $\varepsilon < \varepsilon_*$ в закритической области $E > E_*$ и при $\varepsilon > \varepsilon_*$ в докритической области $E < E_*$. В первом случае говорят о мягкой потере устойчивости, во втором — о жёсткой [96–98]. Причём при жёстком сценарии с возрастанием поля, $E \to E_*$, амплитуда ответвившегося решения уменьшается, т.е. поле стабилизирует равновесное состояние. В закритической области, $E > E_*$, из-за отрицательности подкоренного выражения в (38) амплитуда A_1 не имеет действительного значения. В этом случае полагают, что ветвления нет [85], т.е. при $\varepsilon > \varepsilon_*$, $E > E_*$ решения не существует.

Эксперименты с магнитной жидкостью [101, 102] показали, что устойчивость, как правило, соответствует мягкому сценарию, т.е. результаты экспериментов противоречат выводам [96–98]. Если говорить о жидких диэлектриках, то в этом случае обязателен учёт поверхностных зарядов, которые всегда присутствуют из-за наличия малой, но конечной проводимости жидкости.

Наконец, сделаем замечание относительно того, можно ли вообще сравнивать результаты ТВ с экспериментальными данными. На наш взгляд, этот вопрос является дискуссионным, так как при конечных возмущениях, которые должны описываться нелинейными уравнениями, возникают новые решения, например уединённые формы солитонного типа, которые исчезают при переходе к линейной задаче. В этом случае наблюдаются совершенно иные закономерности, которые мы рассмотрим в разделе 4.3.

4.3. Нелинейные деформации плоской поверхности

При исследовании динамики жидкости со свободной поверхностью обычно используют длинноволновое приближение или метод огибающих [104–108]. Длинноволновое приближение, часто называемое теорией мелкой воды, приводит к уравнению Кортевега–де Вриза (КдВ) [104–106], а метод огибающих — к нелинейному уравнению Шрёдингера [107–109], которое описывает, например, пакеты волн в глубокой воде [107–109] и на поверхности заряженной электронами поверхности жидкого гелия [110], явление самофокусировки лазерного пучка в нелинейной среде [111] и др. Последовательный многомасштабный асимптотический анализ [107] довольно громоздок, поэтому мы дадим краткий вывод нелинейных уравнений, основанный на физических соображениях, в длинноволновом приближении.

Вычисления проведём для случая идеальной жидкости и потенциального течения, $\mathbf{V} = \nabla\psi$. Введём амплитуду отклонения поверхности a и характерный горизонтальный масштаб λ, совпадающий по порядку величины с длиной волны возмущений. Аналитические выражения для этих параметров будут даны после вывода соответствующих уравнений. Переходя к безразмерным переменным $x' = x/\lambda$, $y' = y/\lambda$, $z' = z/h_2$, $f' = f/a$, $\Phi' = \Phi/U$, $\psi' = \psi/\psi_0$, $\psi_0 = \lambda c_0$, $c_0 = \sqrt{g h_2}$, получим следующую систему уравнений относительно безразмерных функций (штрихи опускаем):

$$\Omega_1\colon\quad \Phi_{zz} + \mu^2 \Delta_1 \Phi = 0\,; \qquad \Omega_2\colon\quad \psi_{zz} + \mu^2 \Delta_1 \psi = 0\,; \tag{39}$$

$$z = h\colon\quad \Phi = 0\,; \qquad z = -1\colon\quad \psi_z = 0\,; \tag{40}$$

$$z = \varepsilon f\colon\quad \Phi = 1\,, \qquad \varepsilon f_t = \mu^{-2}\psi_z - \varepsilon \nabla_1 \psi\, \nabla_1 f\,, \tag{41}$$

$$\psi_t + 0{,}5\mu^{-2}\left(\psi_z^2 + \mu^2 |\nabla_1 \psi|^2\right) + \varepsilon f - 0{,}5 W h^3 \left(\Phi_z^2 + \mu^2 |\nabla_1 \Phi|^2\right) - \\ - \varepsilon \mu^2 \gamma h^2 \operatorname{div}\left[\nabla_1 f \left(1 + \varepsilon^2 \mu^2 |\nabla_1 f|^2\right)^{-1/2}\right] = C(t)\,. \tag{42}$$

Здесь нижние буквенные индексы обозначают соответствующие частные производные, $C(t)$ — постоянная Лагранжа, Δ_1, ∇_1 — операторы по переменным x, y, и введены безразмерные параметры

$$\varepsilon = \frac{a}{h_2}\,, \quad \mu = \frac{h_2}{\lambda}\,, \quad h = \frac{h_1}{h_2}\,, \quad W = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0^2}{\rho g h_1}\,, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\rho g h_1^2}\,.$$

Вывод нелинейных уравнений проводится с помощью асимптотического разложения при малой амплитуде отклонения, $\varepsilon \ll 1$, в длинноволновом приближении, $\mu \ll 1$, по методике [77]. Изложим кратко принципиальные особенности методики.

Прежде всего отметим, что при нелинейном анализе малые параметры ε, μ входят не только в амплитуды, но и в качестве функциональных множителей в аргументы. Поэтому решение ищем в виде рядов по ε: $\psi = \sum_1^\infty \varepsilon^i \psi_i$, $\Phi = \sum_0^\infty \varepsilon^i \Phi_i$, где функции ψ_i, Φ_i зависят не только от времени и координат, но и от параметров ε, μ. Подставив эти разложения в (39)–(42), после линеаризации по ε получим последовательность краевых задач относительно ψ_i, Φ_i. Для Φ_0 имеем $\Phi_0 = 1 - z/h$, а для первых двух приближений получаем следующие задачи:

$$\Omega_1\colon\ \Phi_{izz} + \mu^2 \Delta_1 \Phi_i = 0\,; \qquad \Omega_2\colon\ \psi_{izz} + \mu^2 \Delta_1 \psi_i = 0\,, \quad i = 1, 2\,; \tag{43}$$

$$z = h\colon\ \Phi_i = 0\,; \qquad z = -1\colon\ \Psi_{iz} = 0\,; \tag{44}$$

$$z = 0\colon\ \Phi_1 = \frac{f}{h}\,, \quad \Phi_2 = -\Phi_{1z} f\,, \qquad \psi_1 = \Psi\,, \qquad \psi_2 = -\psi_{1z} f\,, \tag{45}$$

где $\Psi = \Psi(t, x, y)$ — функция, подлежащая определению.

В классе локализованных либо периодических решений можно использовать преобразование Фурье, что даёт

$$\Phi_i = \frac{1}{2\pi} \int F_i^* G_1(\boldsymbol{\kappa}, z) \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r})\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\kappa}\,,$$

$$F_1^* = \frac{f^*}{h}\,, \quad F_2^* = (\Phi_{1z} f)^*\,, \quad G_1(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{\sinh\left[\mu\kappa(h - z)\right]}{\sinh(\mu\kappa h)}\,;$$

$$\Psi_i = \frac{1}{2\pi} \int H_i^* G_2(\boldsymbol{\kappa}, z) \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r})\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{\kappa}\,,$$

$$H_1^* = \Psi^*\,, \quad H_2^* = (\psi_{1z} f)^*\,, \quad G_2(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{\cosh\left[\mu\kappa(z + 1)\right]}{\cosh(\mu\kappa)}\,,$$

где индекс $*$ обозначает фурье-преобразование соответствующих функций. Подставляя эти выражения в неиспользованные граничные условия (41), (42) и удерживая члены порядка ε, μ^2, получим следующую систему нелинейных уравнений относительно $f = f(t, x, y)$, $\Psi = \Psi(t, x, y)$:

$$f_t + \Delta_1 \Psi + \varepsilon \operatorname{div}_1 (f \nabla_1 \Psi) + \frac{\mu^2}{3} \Delta_1^2 \Psi = 0\,, \tag{46}$$

$$\Psi_t + (1 - W) f + \mu^2 h^2 \left(\frac{W}{3} - \gamma\right) \Delta_1 f + \\ + 0{,}5\varepsilon\left(|\nabla_1 \Psi|^2 - 3h^{-1} W f^2\right) = C_1(t)\,. \tag{47}$$

Система уравнений (46), (47), которая определяет эволюцию нелинейных возмущений в длинноволновом приближении, может быть упрощена в двух предельных случаях.

В докритической области $W < 1$ при $1 - W \ll \varepsilon$ система (46), (47) может быть преобразована по методике [107] в уравнение КдВ [75]

$$V_t + c_0 V_x + \frac{3\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{W}{h c_0^2}\right) V V_x + \\ + \frac{\mu^2}{6}\left[c_0 - \frac{h^2}{c_0}(W - 3\gamma)\right] V_{xxx} = 0\,, \tag{48}$$

где $V = \Psi_x$ — скорость течения в точке с координатой x, $c_0 = \sqrt{1 - W}$ — скорость распространения линейных волн. Форма свободной поверхности при этом определяется как $f = V/c_0$.

Влияние поля на нелинейные возмущения легко проследить, выписав решение в виде уединённой волны (солитона): $V = V_0 \cosh^{-2}\xi$, $\xi = x - ct$, где V_0 — максимальная скорость течения в вершине солитона (при $\xi = 0$), c — скорость движения солитона как целого. Подставляя это выражение в (48), получим

$$V_0 = \frac{4\mu^2}{3\varepsilon} \frac{c_0\left[c_0^2 + h^2(W - 3\gamma)\right]}{c_0^2 - W/h}\,,$$

$$c = c_0 + \frac{2\mu^2}{3}\left[c_0 + \frac{h^2}{c_0}(W - 3\gamma)\right].$$

Отсюда видно, что при $c_0^2 \neq W/h$ скорость V_0 уменьшается при возрастании величины поля (т.е. при $W \to 1$) и, поскольку $f = V/c_0$, поверхность выполаживается. Таким образом, в докритической области $W < 1$ поле подавляет длинноволновые возмущения. Однако при $W \to h/(1 + h) = W_h$ амплитуда скорости резко возрастает, $c_0^2 \sim W/h$, и поле может инициировать возмущения. При дальнейшем возрастании поля, $W_h < W < 1$, оно вновь подавляет возмущения. Форма поверхности может быть как выпуклой (при $c_0^2 > W/h$), так и вогнутой (при $c_0^2 < W/h$), и в толстых слоях ($h = h_1/h_2 \ll 1$) при увеличении поля поверхность стремится к плоской, а в тонких ($h = h_1/h_2 \gg 1$) может сильно деформироваться по закону $f \sim W/c_0$.

При напряжённостях поля, близких к критическим, $1 - W \sim \varepsilon$, поведение поверхности кардинально меняется. Во-первых, появляются статические деформации типа канавок и уединённых лунок, которые описываются уравнением (размерные переменные)

$$\Delta_1 f = a_1 f + a_2 f^2 + C_0\,, \tag{49}$$

$$a_1 = \frac{3(W - 1)}{h_1^2(W - 3\gamma)}\,, \qquad a_2 = \frac{9W}{2h_1^3(W - 3\gamma)}\,.$$

Уравнение (49) заменой $f = (|a_1|/a_2)\, u(\xi, \eta)$, $\xi = \sqrt{|a_1|}\, x$, $\eta = \sqrt{|a_1|}\, y$, сводится к виду

$$\Delta_{\xi\eta} u = \pm u + u^2 + C\,, \tag{50}$$

где $\Delta_{\xi\eta}$ — двумерный лапласиан по переменным ξ, η, верхний знак плюс берётся при $a_1 > 1$, минус — при $a_1 < 1$.

Уравнение (50) в одномерном случае, $\Delta_{\xi\eta} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}\xi^2$, имеет единственное решение $u = -3\cosh^{-2}(\xi/2\sqrt{2})$ при $a_1 > 1$. Так как $W \sim 1$, форма поверхности будет выпуклой (вал) при $3\gamma > 1$ и вогнутой (канавка) при $3\gamma < 1$. В осесимметричном случае, $\Delta_{\xi\eta} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}r^2 + r^{-1}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}r$, уравнение (50) проинтегрировано численно и затабулировано

[77]. Показано, что при $a_1 > 1$ функция $u(r)$ отрицательна и при малых поверхностных натяжениях, $3\gamma < 1$, нелинейная деформация проявляется в виде лунок (рис. 8а) .

На малых промежутках времени движение локализованных образований можно исследовать асимптотическим методом. Именно, вводя медленное время $\tau = \varepsilon_1 t$, $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon}$, и отыскивая решение уравнений (46), (47) в виде рядов $f = F(\tau, x, y) + \varepsilon_1 F_1(\tau, x, y) + \ldots$, $\Psi = \varepsilon_1 H(\tau, x, y) + \varepsilon_1^2 H_2(\tau, x, y) + \ldots$, в первом приближении получим

$$F_\tau + \Delta_1 H = 0\,, \qquad \alpha_0 H_\tau + \Delta_1 F - \alpha_1 F - \alpha_2 F^2 = C(t)\,,$$
$$\alpha_0 = 3\varepsilon B\,, \qquad \alpha_1 = 3(W-1)B\,,$$
$$\alpha_2 = \frac{9\varepsilon W B}{2h}\,, \qquad B = \frac{1}{\mu^2 h^2 (W - 3\gamma)}\,.$$

Исключая H, приходим к следующему уравнению относительно F:

$$\alpha_0 F_{\tau\tau} = \Delta_1(\Delta_1 F - \alpha_1 F - \alpha_2 F^2)\,. \tag{51}$$

В одномерном случае, $\Delta_1 = \partial^2/\partial x^2$, уравнение (51) совпадает с уравнением колебаний нелинейной струны [104], которое имеет решения солитонного типа. В пространственном случае уравнение (51) обладает решениями в виде стационарных, пульсирующих и бегущих лунок, которые наблюдались на заряженных поверхностях глицерина, контактирующего с трансформаторным маслом [75], и заряженной электронами поверхности жидкого гелия [87–89]. Обратим внимание на то, что в случае заряженной поверхности жидкого гелия электроны вдавливаются в поверхность и образование лунок представляет собой ожидаемый эффект. В случае заряженной поверхности глицерина поверхностная кулоновская сила направлена вверх, т.е. ожидаемым является образование бугорков, тогда как формируются лунки [75], а бугорки имеют осциллирующий характер [77] . Отметим также, что при описании деформации заряженной электронами поверхности жидкого гелия при некоторых параметрах (например, в режиме насыщения поверхности электронами, так что в обозначениях [89] $E_- = 0$ при больших толщинах слоя, $h \sim 1$ мм) также можно эффективно использовать рассмотренную выше методику [76].

В коротковолновой области в случае, когда верхний электрод достаточно удалён от поверхности ($\gamma < 1/3$ в (28)), нелинейный анализ в приближении малых наклонов поверхности приводит к интегро-дифференциальному уравнению [113]. Показано, что существуют решения, описывающие остроконечные пики (в терминах [113] — корневая особенность), наподобие так называемых конусов Тейлора (см. раздел 4.5). При анализе деформации заряженной поверхности гелия в плоском случае в коротковолновой области показано, что конечные возмущения с течением времени трансформируются в заострённые канавки [114, 115]. Таким образом, в коротковолновой области нелинейный анализ деформации плоских заряженных поверхностей приводит к выводу о существовании остроконечных деформаций. Подробный анализ формирования гладких уединённых деформаций и их перехода к остроконечным формам дан в обзоре [89].

Проведённый анализ показал, что нелинейное взаимодействие трёх сил (гравитационной, капиллярной и кулоновской) порождает неочевидные, а иногда и непредсказуемые эффекты. Наконец, подчеркнём, что в исследованиях заряженных поверхностей сформировалось целое направление нелинейного анализа, например, предпринимались попытки нелинейным взаимодействием лунок на заряженной поверхности моделировать двумерные кристаллические структуры [87–89] и т.д.

4.4. Неустойчивость заряженных цилиндрических струй

Искривлённость заряженных поверхностей порождает новые эффекты в ЭГД-неустойчивости. Подробную постановку задачи рассмотрим в разделе 5.3, а здесь проведём анализ закономерностей неустойчивости цилиндрической струи при мгновенной релаксации зарядов. Задачу решают в цилиндрической системе координат (r, φ, z), ось z которой направлена вдоль оси симметрии. Представляя возмущения в виде

$$F(r)\exp\left[\mathrm{i}(\omega t - n\varphi - kz)\right],$$

где $F(r)$ — амплитуды возмущений потенциала скорости и электрического поля (амплитуда отклонения свободной поверхности является постоянной), получаем следующее выражение для частот малых колебаний:

$$\omega^2 = \omega_0^2\,\frac{\kappa I_n'(\kappa)}{I_n(\kappa)}\left[\kappa^2 + n^2 - 1 + W\left(1 + \frac{\kappa K_n'(\kappa)}{K_n(\kappa)}\right)\right], \tag{52}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho R^3}}\,, \qquad \kappa = kR\,, \qquad W = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_0^2 R}{\alpha}\,,$$

где R — радиус невозмущённой струи, E_0 — напряжённость поля на поверхности струи, $I_n(\kappa)$, $K_n(\kappa)$ — модифицированные функции Бесселя n-го порядка [112], $n = 0, 2, 3, \ldots$ ($n = 1$ исключается ввиду неподвижности центра масс), штрихи обозначают производные по κ.

Рассмотрим предельные случаи. Используя формулы дифференцирования

$$I_0'(\kappa) = I_1(\kappa)\,, \qquad K_0'(\kappa) = -K_1(\kappa)\,,$$
$$I_n'(\kappa) = 0{,}5\left[I_{n+1}(\kappa) + I_{n-1}(\kappa)\right],$$
$$K_n'(\kappa) = -0{,}5\left[K_{n+1}(\kappa) + K_{n-1}(\kappa)\right], \quad n > 1\,,$$

и асимптотические выражения

$$\kappa \to 0\colon \quad I_n(\kappa) \to \frac{(\kappa/2)^n}{n!}\,, \qquad K_0(\kappa) \to -\ln\frac{\kappa}{2}\,,$$
$$K_n(\kappa) \to \frac{(2/\kappa)^n (n-1)!}{2}\,;$$
$$\kappa \to \infty\colon \quad I_n(\kappa) \to \frac{\exp\kappa}{\sqrt{2\pi\kappa}}\,, \qquad K_n(\kappa) \to \exp(-\kappa)\sqrt{\frac{\pi}{2\kappa}}\,,$$

из (52) получаем следующие асимптотики:

$$\kappa \ll 1\colon \quad \omega^2 = 0{,}5\omega_0^2\kappa^2(W-1)\,, \quad n = 0\,,$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 n(n-1)(n+1-W)\,, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{53}$$
$$\kappa \gg 1\colon \quad \omega^2 = \omega_0^2\kappa(n^2 + \kappa^2 - \kappa W)\,. \tag{54}$$

Отсюда видно, что в области длинноволновых мод, $\kappa \ll 1$, осесимметричные возмущения ($n = 0$) всегда подавляются полем, тогда как неосесимметричные ($n = 2, 3, \ldots$) подавляются полем при $W < 3$ и поле дестабили-

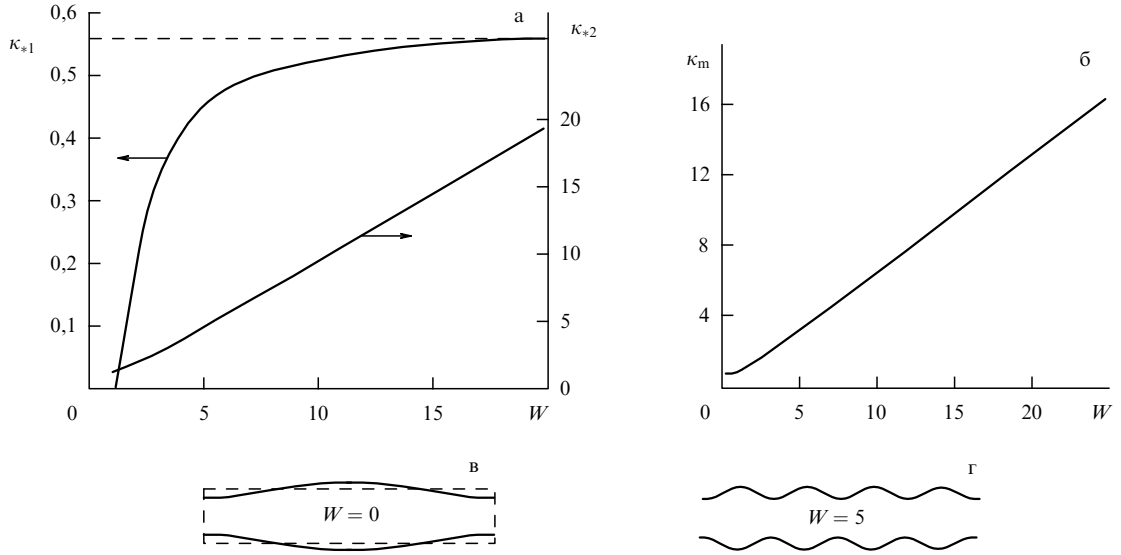

Рис. 16. К неустойчивости заряженных струй: зависимости от W граничных параметров κ_{*1} и κ_{*2} (а) и критического волнового числа κ_m (б). Критические формы возмущений при отсутствии (в) и наличии (г) заряда.

зирует струю при $W > 3$ по отношению к возмущениям с $n = 2$. В области коротковолновых возмущений, $\kappa \gg 1$, электрическое поле подавляет возмущения при $W < \kappa$ и дестабилизирует струю при $W > \kappa$ по отношению к осесимметричным возмущениям с $n = 0$.

Сравнивая закономерности ЭГД-неустойчивости плоской и цилиндрической поверхностей, можно увидеть, что при наличии кривизны поверхности появляются новые эффекты. Отметим наиболее примечательные: при $W > 1$ поле подавляет все длинноволновые возмущения, тогда как на плоской поверхности, наоборот, инициирует развитие длинноволновых возмущений. Далее, из (53), (54) видно, что в предельных случаях поле оказывает наибольшее влияние на осесимметричные возмущения ($n = 0$). Численное исследование дисперсионного уравнения (52) для осесимметричного случая показало, что область неустойчивости к волновым числам заключена в пределах $\kappa_{*1} < \kappa < \kappa_{*2}$. Зависимости граничных значений κ_{*1}, κ_{*2} от параметра W представлены на рис. 16а. Расчёты показали, что в слабых и сильных полях имеют место асимптотики: $\kappa_{*1} \to 0$, $\kappa_{*2} \to 1$ при $W \ll 1$, $\kappa_{*1} \to 0{,}56$, $\kappa_{*2} \to W$ при $W \gg 1$. Критическое волновое число κ_m (и соответствующая длина волны $\lambda_m = 2\pi/\kappa_m$) вычислялось из условия максимального значения декремента возрастания возмущений в области неустойчивости:

$$\delta = \max_{\kappa>0} \omega_0 F(\kappa) = F(\kappa_m)\,,$$

$$F(\kappa) = \sqrt{\frac{\kappa I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \left| \kappa^2 + n^2 - 1 + W\left(1 - \frac{\kappa K_1(\kappa)}{K_0(\kappa)}\right) \right|}\,.$$

Зависимость κ_m от W представлена на рис. 16б. Расчёты показывают, что $\kappa_m \to 0{,}7$ при $W \to 1$ и $\kappa_m \to 0{,}53W$ при $W \gg 1$, причём последняя асимптотика с точностью не менее 3 % становится справедливой при $W \geqslant 10$. Зависимость критической длины волны λ_m от диаметра струи D и параметра поля W определяется как $\lambda_m = \pi D/\kappa_m$. Из полученных численных данных следует, что в области слабых полей критическое возмущение определяется длиной волны Рэлея $\lambda_m = 4{,}5D$ и с возрастанием поля λ_m уменьшается (рис. 16в). Выявленные закономерности подтверждаются наблюдениями истечения заряженных струй из малого капилляра (см. рис. 11, 12).

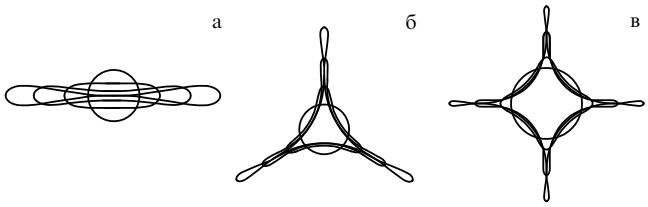

Рис. 17. Примеры нелинейных деформаций изначально цилиндрических струй в плоскости поперечного сечения, согласно [116].

Нелинейный анализ деформации заряженных струй является довольно сложным и требует утончённой математической техники. Отметим работу [116], в которой в точной постановке исследуются неосесимметричные деформации заряженной струи при отсутствии продольных деформаций (плоская постановка задачи). Результаты расчётов представлены на рис. 17. Из рисунка видно, что с возрастанием заряда возможно разделение струи на две части (рис. 17а), а также её диспергирование на мелкие капли (рис. 17б, в).

4.5. Конусы Тейлора

Для объяснения образования острийковых центров диспергирования капель воды (см. рис. 5) можно использовать упрощённую модель конусов Тейлора [117], суть которой заключается в следующем. На сильно нелинейной стадии деформации на малых участках поверхности возникают конусообразные структуры (рис. 18), форма которых на участках, удалённых от основания и вершины, определяются следующим образом. Предполагается, что поверхность имеет форму конуса с неизвестным углом θ_0 при вершине. Тогда потенциал электрического поля выражается как $\Phi = r^n f(\theta)$, где r, θ — сферические координаты с началом в вершине конуса (рис. 18а), n — неизвестный параметр. Так как поверхность эквипотенциальна, $f(\theta_0) = 0$.

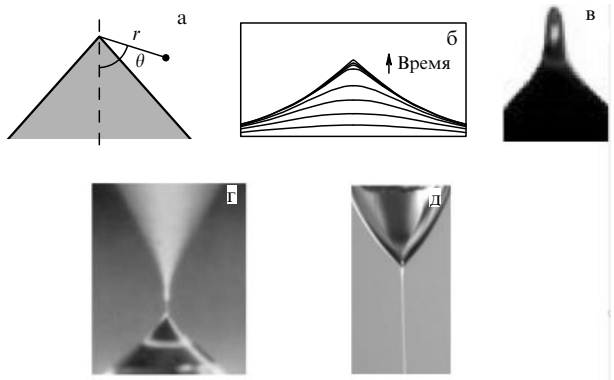

Рис. 18. (а) Выбранная система координат. (б) Численный расчёт формирования конуса Тейлора во времени на плоской заряженной металлической поверхности [118]. (в) Образование струи из вершины конуса Тейлора. (г) Распыление жидкости из микроструи. (д) Вытекание микроструи.

Для вычисления угла θ_0 используется уравнение Лапласа для потенциала электрического поля

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)+n(n+1)f=0 \qquad (55)$$

и баланс нормальных напряжений на поверхности конуса

$$p=p_0+2\alpha H-\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,. \qquad (56)$$

В данном случае удвоенная средняя кривизна выражается как $2H=A/r$, $A=\cos\theta_0/(1+\cos^2\theta_0)^{1/2}$. Для того чтобы уравнение (56) имело решение, необходимо положить $n=1/2$, что однозначно определяет уравнение (55), решение которого выражается через функцию Лежандра $f(\theta)=P_{1/2}(\theta)$ [112]. Корнем уравнения $P_{1/2}(\theta)=0$ является $\theta_0=49{,}3^\circ$, что и определяет так называемый угол Тейлора.

Аналитические расчёты по локальным деформациям заряженной плоской поверхности подтвердили факт образования конусов Тейлора (см., например, [89, 118–120] и приведённые там ссылки, а также рис. 18д). При этом рассматриваются различные модели жидкости: от идеального диэлектрика [118] до идеального проводника [119, 120], в предположении, что внешняя среда является непроводящим газом. Ясно, что решение Тейлора несправедливо для вершины конуса, которая является областью диспергирования жидкости, а в случае границы жидкость–газ — также областью зажигания коронного разряда (см. рис. 6).

Эксперименты показывают, что вершины конусов Тейлора являются неустойчивыми и пульсируют с частотами порядка нескольких сотен герц, причём частота пульсации увеличивается с возрастанием поля (рис. 7а). Обратим внимание на схожесть данного явления с импульсами Тричела при коронном разряде на игле [121]. На наш взгляд, расчёты [118–120] имеют модельный характер, так как не учитывают ионизации газа, в частности воздуха, при наличии контакта с которым обычно проводятся эксперименты, что существенно влияет на поведение заряженной поверхности (рис. 7а и 14в, г). Из вершины конуса Тейлора могут вытекать микроструи, которые в свою очередь могут, в зависимости от внешних условий и вязкости жидкости, либо распыляться на микрокапли (рис. 18г), либо формировать устойчивую тонкую жидкую нить (рис. 18д). Последний эффект, который является характерным при истечении жидкости в жидкость (см. обзор [122], а также оригинальные работы [123–129]), положен в основу ряда технологий по формированию микро- и нанокапсул [123, 124], полых наносфер [125], наноэмульсий [126], полых [124, 126] и коаксиальных [127–129] нанотрубок. Примеры таких изделий представлены на рис. 19.

Численные расчёты истечения микроструй из конусов Тейлора проводились в различных работах (см., например, [46, 47]). Эти расчёты также являются модельными, поскольку не учитывают ионизационные процессы в газе, возможную поверхностную релаксацию зарядов и, что важно для приложений, критерии устойчивости численно моделируемых стационарных течений.

5. Электрогидродинамическая неустойчивость свободной поверхности при конечном времени релаксации зарядов

5.1. Постановка задачи

Многообразие и сложность ЭГД-эффектов в жидких диэлектриках со свободными поверхностями неизбежно приводит к усложнению ЭГД-моделей, в частности к необходимости учёта поверхностной проводимости и конечной релаксации зарядов (см. раздел 3 и табл. 1). Это обстоятельство в свою очередь создаёт значительные математические трудности из-за необходимости учёта вязкости жидкости, а в прикладных вопросах — необходимости решения пространственных краевых задач.

Трёхмерность и многопараметричность математических моделей являются характерной чертой в исследовании поведения заряженных жидких менисков, струй и капель. Поэтому весьма вероятны ошибки как в физиче-

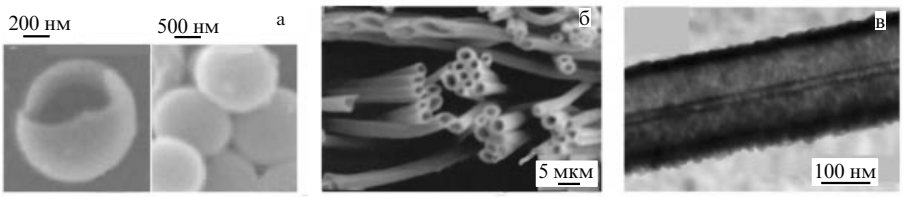

Рис. 19. Примеры изделий, полученных с помощью электрокаплеструйных технологий [122]: (а) наносферы [123], (б) нанотрубки [125], (в) коаксиальные нанотрубки [127].

ских постановках задач, так и в математических выкладках. Таким образом, не вызывает удивления тот факт, что во многих теоретических работах делаются довольно противоречивые и даже парадоксальные выводы. Так, в обзоре [17] утверждается, что при малых радиусах капель определяющую роль в ЭГД-неустойчивости играет вязкость жидкости, тогда как, например, при быстрой релаксации зарядов порог неустойчивости описывается предельным зарядом Рэлея, а вязкость влияет только на декремент возрастания возмущений (см. раздел 5.5). Неустойчивость капель воды иногда рассматривается в предположении идеального диэлектрика, а образование диспергирующих микроконусов (см. рис. 5) объясняется развитием высокомодовых возмущений (см., например, [55]).

Подобные недостатки можно отметить и в ряде зарубежных работ (например, [45, 50, 51, 61, 62]). Ошибки в постановках задач в указанных работах отмечены в лекциях интернациональной группы [130] (см. также [75]). Отдавая должное высокому уровню экспериментальных исследований [61, 62], тем не менее можно предположить, что авторов интересовали в основном прикладные вопросы: определение условий образования малых капель одинакового размера электрическим импульсным полем. При этом, как правило, рассматривается образование капель в однородном внешнем электрическом поле или в электрическом поле при внешнем периодическом (звуковом) возмущении [61, 62].

Наиболее типичные ошибки отмечаются в граничных условиях баланса поверхностных зарядов. Мы уже отмечали [78], что некорректное дифференцирование материального поверхностного интеграла привело к потере кинематического члена $q_{\rm s} V_{\rm n} H$ в работах [12, 45, 50, 51, 55, 61, 62]. В работах [50, 51] баланс поверхностного заряда записывается в виде $\partial q_{\rm s}/\partial t + {\rm div}_{\rm s}\,(q_{\rm s}\mathbf{V}_{\rm t}) + \langle\, j_{\rm n}\rangle = 0$, т.е. также не учитывается кинематический член $q_{\rm s} V_{\rm n} H$ и поверхностный ток $\mathbf{j}_{\rm s}$. Пренебречь поверхностным током можно только в случае "вмороженного" поверхностного заряда, т.е. при хемосорбции зарядов или медленной релаксации поверхностных зарядов. На наш взгляд, последний случай не является типичным и может наблюдаться только в специальных условиях, например при наличии ПАВ. Аналогичные неточности имеются в работах [61, 62].

Таким образом, физика заряженных поверхностей в широком диапазоне проводимостей (от значения $\sigma = 10^{-7}$ Ом$^{-1}$ см$^{-1}$, как в водных растворах, до $\sigma = 10^{-12}$ Ом$^{-1}$ см$^{-1}$, типичных для неполярных диэлектриков) далека от завершения, и она требует дальнейшего развития. На этом пути, естественно, возникает вопрос: какие новые эффекты порождает учёт поверхностной проводимости и конечного времени релаксации зарядов?

Сделаем несколько замечаний относительно общей постановки задачи. Как отмечено выше, при мгновенной релаксации зарядов кулоновская сила, приложенная к области свободной поверхности с единичной площадью, направлена вдоль нормали. Тангенциальные напряжения в этом случае отсутствуют, что приводит к значительному упрощению математической постановки задач для вычисления критериев неустойчивости. При конечном времени релаксации зарядов появляется тангенциальная поверхностная сила $q_{\rm s}\mathbf{E}_{\rm t}$, что приводит к наличию вязких напряжений, которые существенно перераспределяют поле скоростей, тем самым изменяя условия возникновения ЭГД-неустойчивости. Следует отметить, что в случае развития неустойчивости из равновесного состояния вязкость (в отличие от таковой при гидродинамической неустойчивости, когда вязкие напряжения являются причиной перехода от ламинарных течений к турбулентным [131]) играет демпфирующую роль, т.е. влияет не на порог неустойчивости, а на декременты развития возмущений. Однако конечное время релаксации зарядов в условиях поверхностной проводимости может резонансно "раскачивать" поверхность, поэтому становится возможной неустойчивость [75], подобная акустоэлектронной неустойчивости в полупроводниках [132].

Перейдём теперь непосредственно к постановке задачи. Прежде всего отметим, что в задачах со свободной поверхностью (электрогидродинамика капель, менисков и струй) инжекционные процессы, как правило, несущественны, поэтому объёмная проводимость определяется законом $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, где $\sigma = e(b_1 + b_2)n_0$, $b_1(b_2)$ — подвижность положительных (отрицательных) зарядов, n_0 — равновесная концентрация примесных ионов. Поверхностную проводимость в биионной модели будем определять обычным способом:

$$\mathbf{j}_{{\rm s}i} = e b_{{\rm s}i} n_{{\rm s}i} \mathbf{E}_{\rm t}\,, \qquad i = 1, 2\,, \tag{57}$$

где $b_{{\rm s}i}$, $n_{{\rm s}i}$ — поверхностные подвижности и концентрации ионных компонентов, $\mathbf{E}_{\rm t}$ — тангенциальная компонента поля, результирующий поверхностный заряд (см. (6)) определяется как $q_{\rm s} = e(n_{\rm s1} - n_{\rm s2})$.

Основная система уравнений имеет вид (1), (2) при граничных условиях (3)–(7). Причём необходимо иметь в виду, что толщина поверхностного переходного слоя порядка радиуса Дебая $r_{\rm D}$ [78], поэтому характерный внешний размер R (радиусы менисков, струй или капель) должен удовлетворять условию $R \gg r_{\rm D}$. При $R \leqslant r_{\rm D}$ рассмотрение динамики капель или струй в рамках механики сплошных сред, т.е. на основе (1)–(7), некорректно.

Начнём рассмотрение с наиболее простого случая — линейной устойчивости плоской поверхности, а затем перейдём к более сложным объектам — цилиндрическим струям и каплям.

5.2. Плоская поверхность

Исследование проводим в геометрии рис. 1, так что равновесное состояние описывается соотношениями (19), причём поверхностный заряд задаётся как $q_{\rm s0} = e(n^0_{\rm s1} - n^0_{\rm s2})$, где $n^0_{{\rm s}i}$ — постоянные поверхностные концентрации положительных ($i = 1$) и отрицательных ($i = 2$) зарядов. Далее ради простоты полагаем, что верхняя область Ω_1 заполнена газом, а устойчивость будем исследовать по отношению к бегущим волнам, так что можно рассматривать плоскую задачу.

Линеаризуя (1)–(7) в окрестности равновесного состояния и вводя функцию тока ψ посредством соотношений $V_x = \partial\psi/\partial z$, $V_z = -\partial\psi/\partial x$, после некоторых преобразований получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\Omega_1(z > 0)\colon \quad \Delta\Phi_1 = 0\,, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,; \\ &\Omega_2(z < 0)\colon \quad \Delta\left(\eta\Delta\psi - \rho\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0\,, \quad \Delta\Phi_2 = 0\,; \end{aligned} \tag{58}$$

$$\mathrm{S}(z=0):\quad \frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\,,\quad \Phi_2=\Phi_1-E_0 f\,,$$
$$\varepsilon_0\left(\varepsilon\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)=q_{\mathrm{s}}\,,$$
$$\frac{\partial n_{si}}{\partial t}+(-1)^i b_{si}n_{si}^0\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+n_{si}^0\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}-$$
$$-(-1)^i b_i n_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=0\,,$$
$$p-\rho g f+2\eta\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}-\varepsilon_0 E_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}=-\alpha\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,$$
$$\eta\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)=q_{\mathrm{s}0}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\,;$$
$$\mathrm{S}_1(z=h_1):\quad \Phi_1=0\,; \tag{59}$$
$$\mathrm{S}_2(z=-h_2):\quad \Phi_2=0\,,\quad \psi=\frac{\partial\psi}{\partial z}=0\,.$$

Разыскивая решение в виде нормальных мод:

$$(\psi,\,p,\,\Phi_i,\,n_{si},\,f)=\big(\Psi(z),\,P(z),\,F_i(z),\,N_{i0},\,f_0\big)\exp\big[\mathrm{i}(\omega t-kz)\big]\,,$$

где $N_{i0},\,f_0=\mathrm{const}$, получим

$$\Psi(z)=C_1\Psi_1(z)+C_2\Psi_2(z)\,,$$
$$\Psi_1(z)=\frac{\cosh k(z+h_2)-\cosh\beta(z+h_2)}{\cosh\kappa_2-\cosh\kappa_i}\,,$$
$$\Psi_2(z)=\frac{\beta\sinh k(z+h_2)-k\sinh\beta(z+h_2)}{\beta\sinh\kappa_2-k\sinh\kappa_i}\,,$$
$$F_1(z)=H_1\,\frac{\sinh k(h_1-z)}{\sinh\kappa_1}\,,\quad F_2(z)=H_2\,\frac{\sinh k(h_2+z)}{\sinh\kappa_2}\,,$$

где $\beta=\sqrt{k^2+\mathrm{i}\rho\omega/\eta}$, $\kappa_i=\beta h_2$, $\kappa_j=h_j k$, $C_j,H_j=\mathrm{const}$, $j=1,2$.

Подставляя эти соотношения в граничные условия (59), получаем линейную однородную систему относительно постоянных коэффициентов. Приравнивая детерминант этой системы нулю, находим следующее дисперсионное соотношение:

$$\rho\omega(A_1B_1-A_2B_2)-\mathrm{i}k2\eta\Omega_v=$$
$$=\alpha k^2+\rho g-k\varepsilon_0E_0^2\coth\kappa_2(1-G)\,, \tag{60}$$
$$A_1=\frac{a_3+a_2\omega/k}{a}\,,\quad A_2=\frac{a_3+a_1\omega/k}{a}\,,\quad a=a_1-a_2\,, \tag{61}$$
$$a_j=\Psi_j''+\mathrm{i}Fk\Psi_j'\,,\quad j=1,2\,,\quad a_3=\omega k(1-F)\,,\quad F=\frac{\Omega_\eta}{\omega H}\,,$$
$$\Omega_v=A_2\Psi_2'-A_1\Psi_1'\,,\qquad \Omega_\eta=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{\eta}\,,\qquad G=\frac{1-\Omega_v/\omega}{H}\,,$$
$$H=\varepsilon+1-\frac{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{e}}}{\omega}\,,\qquad \omega_{\mathrm{e}}=\frac{k\sigma_{\mathrm{s}0}+\sigma_0\coth\kappa_2}{\varepsilon_0}\,,$$
$$\sigma_{\mathrm{s}0}=e(b_{\mathrm{s}1}n_{\mathrm{s}1}^0+b_{\mathrm{s}2}n_{\mathrm{s}2}^0)\,,\qquad \sigma_0=e(b_1+b_2)n_0\,,$$
$$B_1=\frac{\beta\cosh\kappa_i}{\beta\sinh\kappa_2-k\sinh\kappa_i}\,,\qquad B_2=\frac{\sinh\kappa_2}{\cosh\kappa_2-\cosh\kappa_i}\,,$$
$$\Psi_1'=\frac{k\sinh\kappa_2-\beta\sinh\kappa_i}{\cosh\kappa_2-\cosh\kappa_i}\,,\qquad \Psi_2'=\frac{k\beta(\cosh\kappa_2-\cosh\kappa_i)}{\beta\sinh\kappa_2-k\sinh\kappa_i}\,,$$
$$\Psi_1''=k^2-\frac{\mathrm{i}\omega\rho}{\eta}\,\frac{\cosh\kappa_i}{\cosh\kappa_2-\cosh\kappa_i}\,,$$
$$\Psi_2''=k\beta\left[1-(\beta-k)\,\frac{\sinh\kappa_2+\sinh\kappa_i}{\beta\sinh\kappa_2-k\sinh\kappa_i}\right].$$

Записывая комплексную частоту ω в явном виде, $\omega=\omega_0+\mathrm{i}\delta$, можно увидеть, что уравнение (60) определяет зависимость частот колебаний ω_0 и декрементов возрастания (или убывания) возмущений δ от параметров задачи: геометрии области (расстояний h_1, h_2), вязкости η, напряжённости электрического поля E_0, проводимости среды (параметра ω_{e}), коэффициента поверхностного натяжения α, длины волны возмущений $\lambda=2\pi/k$ и др. Вследствие многопараметричности задачи и комплексного характера трансцендентного уравнения (60) его полное исследование является довольно сложным. Поэтому рассмотрим важные с прикладной точки зрения предельные случаи.

1. В случае длинноволновых возмущений или малой вязкости, $k^2\ll|\omega|\,\rho/\eta$, с точностью $O(\eta)$ из (60) получим

$$\rho\omega^2=k\coth\kappa_2(\alpha k^2+\rho g-k\varepsilon_0E_0^2\coth\kappa_1)\,. \tag{62}$$

Это уравнение определяет спектр малых колебаний идеальной жидкости при мгновенной релаксации зарядов. Таким образом, в длинноволновой области спектра возмущений вязкость жидкости и конечная релаксация зарядов не влияют на устойчивость заряженной поверхности, закономерности которой рассмотрены в разделе 4.1.

2. В приближении удалённых электродов, $\kappa_1\gg1$, $\kappa_2\gg1$, из (60) следует

$$(\rho\omega-\mathrm{i}k^2 2\eta)A_1-\mathrm{i}k2\eta A_2=\alpha k^2+\rho g-k\varepsilon_0E_0^2(1-G)\,, \tag{63}$$
$$A_1=\left(\frac{\beta}{k}-1\right)\frac{V_E^2}{V_f aH}+\frac{V_f}{a}-A_2\,,\qquad A_2=\frac{\mathrm{i}2k\eta}{\rho a}\,,$$
$$V_E^2=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{\rho}\,,\qquad V_f=\frac{\omega}{k}\,, \tag{64}$$
$$G=\frac{(kA_1+\beta A_2)/\omega-1}{H}\,,\qquad a=1+\frac{(\beta/k-1)V_E^2}{V_f^2H}\,,$$

где H определено в (61).

В длинноволновом приближении, $k^2\ll|\omega|\,\rho/\eta$, (63) принимает вид уравнения (62), в котором $\coth\kappa_1=\coth\kappa_2=1$. В другом предельном случае коротковолнового спектра, $k^2\gg|\omega|\,\rho/\eta$, уравнение (63) имеет следующий вид:

$$\omega=\frac{\mathrm{i}}{2k\eta}\left(F_0+\frac{k\varepsilon_0E_0^2}{\varepsilon+1}\,\frac{\omega}{\omega-\mathrm{i}\Omega_{\mathrm{e}}}\right),$$
$$F_0=\alpha k^2+\rho g-k\varepsilon_0E_0^2\,,\qquad \Omega_{\mathrm{e}}=\frac{\omega_{\mathrm{e}}}{\varepsilon+1}\,. \tag{65}$$

Отсюда видно, что в коротковолновой части спектра конечная релаксация зарядов играет существенную роль. Так, в случае мгновенной релаксации, $\omega_{\mathrm{e}}\gg|\omega|$, критическая напряжённость E_{1*}, при которой теряется устойчивость, выражается как $E_{1*}=2\sqrt{\rho g/\alpha}/\varepsilon_0$ при критической длине волны $\lambda_*=2\pi\sqrt{\alpha/(\rho g)}$. При "вмороженном" заряде, $\omega_{\mathrm{e}}\ll|\omega|$, имеем $E_{2*}=E_{1*}(\varepsilon+1)/\varepsilon$, т.е. поле увеличивается в $(\varepsilon+1)/\varepsilon$ раз при неизменной критической длине волны.

В промежуточном случае произвольной проводимости уравнение (65) исследуется следующим образом. Запишем (65) в виде квадратного уравнения с комплексными коэффициентами:

$$\omega^2-\mathrm{i}b\omega-c=0\,, \tag{66}$$
$$b=\Omega_{\mathrm{e}}+F+B\,,\quad B=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2\eta(\varepsilon+1)}\,,\quad c=F\Omega_{\mathrm{e}}\,,\quad F=\frac{F_0}{2k\eta}\,.$$

Разыскивая решение в виде $\omega = \omega_0 + \mathrm{i}\delta$, получим декремент $\delta = b/2$ и частоту $\omega_0 = (c - b^2/4)^{1/2}$. Отсюда следует, что колебательные возмущения существуют только в докритической области $\alpha k^2 + \rho g > k\varepsilon_0 E_0^2$ $(F_0 > 0)$. В закритической области $\alpha k^2 + \rho g < k\varepsilon_0 E_0^2$ $(F_0 < 0)$ колебательные возмущения отсутствуют $(\omega_0 = 0)$, а декременты возрастания возмущений определяются двумя ветвями:

$$\delta_1 = \frac{b}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4|c|}{b^2}}\right), \qquad \delta_2 = \frac{b}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4|c|}{b^2}}\right). \tag{67}$$

Первая ветвь неустойчива при малых проводимостях: $\delta_1 = -(k\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2/(\varepsilon + 1) - \alpha k^2 - \rho g)/(2\eta k)$ при $\omega_\mathrm{e} \to 0$, при $\omega_\mathrm{e} \to \infty$ величина δ_1 быстро убывает, $\delta_1 \to b \approx \Omega_\mathrm{e}$. Вторая ветвь исчезает при малых проводимостях, $\delta_1 \to 0$ при $\omega_\mathrm{e} \to 0$, и является неустойчивой при $\omega_\mathrm{e} \to \infty$: $\delta_2 = -(k\varepsilon_0 E_0^2 - \alpha k^2 - \rho g)/(2\eta k)$.

Проведённый анализ позволяет сделать следующие выводы.

1. В длинноволновом пределе или при малой вязкости, $k^2 \ll |\omega|\,\rho/\eta$, вязкость и поверхностная проводимость не влияют на частоты малых колебаний, а устойчивость определяется согласно модели идеальной жидкости при мгновенной релаксации зарядов.

2. В коротковолновой части спектра критическая напряжённость поля существенно зависит от проводимости (как объёмной, так и поверхностной). Декремент возрастания возмущений определяется вязкостью, поверхностным натяжением, проводимостью и поляризационными свойствами жидкости и в отсутствие силы тяжести не зависит от массовой плотности.

Аналогичные закономерности имеют место и для заряженных цилиндрических струй и капель, однако в случае последних появляются особенности, обусловленные кривизной поверхности.

5.3. Цилиндрическая струя

В этом разделе мы сосредоточим внимание на постановке задачи об устойчивости цилиндрической струи и на выяснении новых эффектов, обусловленных поверхностной проводимостью при конечном времени релаксации зарядов.

Будем считать, что струя контактирует с воздухом, в невозмущённом состоянии её радиус равен R, а на поверхности равномерно распределён заряд

$$q_{\mathrm{s}0} = e(n_{\mathrm{s}1}^0 - n_{\mathrm{s}2}^0) = \varepsilon_0 E_0\,.$$

Как и в плоском случае, $n_{\mathrm{s}i}^0$ — постоянные поверхностные концентрации положительных $(i = 1)$ и отрицательных $(i = 2)$ зарядов. В цилиндрической системе координат (r, φ, z), ось z которой направлена вдоль оси симметрии, для поля вне струи получаем $E_r = E_0 R/r$, где r — радиальная координата, а внутри струи поле равно нулю. Опыты и расчёты показывают (см. раздел 4.4 и [61, 62]), что на линейной стадии развивается неустойчивость к осесимметричным возмущениям, поэтому ради простоты выкладок будем рассматривать этот случай. Уравнения для возмущений и соответствующие граничные условия в терминах функции тока $(V_z = r^{-1}\,\partial(r\psi)/\partial r$, $V_r = -\partial\psi/\partial z)$ после преобразований, аналогичных проведённым в разделе 5.2, принимают вид

$$\begin{gathered}
\Omega_1(r > R)\colon\ \Delta\Phi_1 = 0\,,\quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-1}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,; \\
\Omega_2(r < R)\colon\ \Delta\Phi_2 = 0\,,\quad \hat{L}\left(\eta\hat{L}\psi - \rho\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0\,,\quad \hat{L} = \Delta - r^{-2}; \\
\mathrm{S}(r = R)\colon\ \frac{\partial f}{\partial t} = -\psi_r\,,\quad \Phi_2 = \Phi_1 - E_0 f\,,\quad \varepsilon_0(\varepsilon\Phi_{2r} - \Phi_{1r}) = q_\mathrm{s}\,, \\
\frac{\partial n_{\mathrm{s}i}}{\partial t} + (-1)^i b_{\mathrm{s}i} n_{\mathrm{s}i}^0 \Phi_{2zz} + n_{\mathrm{s}i}^0 \psi_{rz} - (-1)^i b_i n_0 \Phi_{2r} = 0\,, \\
i = 1, 2\,, \\
p + 2\eta\psi_{rz} - \varepsilon_0 E_0 \Phi_{2r} = -\alpha\left(f_{zz} + \frac{f}{R^2}\right), \\
\eta(2\psi_{zz} - \hat{L}\psi) = -q_{\mathrm{s}0}\Phi_{2z}
\end{gathered} \tag{69}$$

(в предположении ограниченности искомых функций при $r = 0$ и $r \to \infty$). Здесь нижние индексы z, r обозначают соответствующие частные производные.

Решение будем искать в виде нормальных мод:

$$\begin{gathered}
\Psi(z) = \big(C_1\Psi_1(z) + C_2\Psi_2(z)\big)F, \\
\Psi_1(z) = \frac{I_1(kr)}{I_1(\kappa)}\,,\qquad \Psi_2(z) = \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\kappa_i)}\,, \\
\Phi_1 = H_{10}\,\frac{K_0(kr)}{K_0(\kappa)}\,F,\qquad \Phi_2 = H_{20}\,\frac{I_0(kr)}{I_0(\kappa)}\,F,\qquad p = P(r)F, \\
f = f_0 F,\qquad n_{\mathrm{s}j} = N_{j0}F,\quad j = 1, 2\,,\quad F = \exp\big[\mathrm{i}(\omega t - kz)\big]\,,
\end{gathered} \tag{70}$$

где $\beta = \sqrt{k^2 + \mathrm{i}\rho\omega/\eta}$, $\kappa_i = R\beta$, $\kappa = Rk$, $C_j, H_{j0}, f_0, N_{j0} = \mathrm{const}$ $(j = 1, 2)$, I_0, I_1, K_0 (и далее K_1) — модифицированные функции Бесселя [112].

Подставляя эти выражения в граничные условия (69), получим следующее дисперсионное соотношение, определяющее комплексные частоты малых колебаний:

$$\begin{gathered}
\left(\mathrm{i}k2\eta\Psi_1' - \omega\rho\,\frac{I_0(\kappa)}{I_1(\kappa)}\right)A_1 - \mathrm{i}k2\eta\Psi_2' A_2 = \\
= \alpha\left(k^2 - \frac{1}{R^2}\right) - k\varepsilon_0 E_0^2\left(B_\kappa + \frac{K_1(\kappa)}{K_0(\kappa)}\,G\right).
\end{gathered} \tag{71}$$

Здесь параметры A_1, A_2, $\sigma_{\mathrm{s}0}$, σ_0 определяются выражениями (61), в которых

$$a_1 = \frac{V_E^2}{V_f^2}\,\frac{\Psi_1'}{k}\,,\quad a_2 = 1 + \frac{V_E^2}{V_f^2}\,\frac{\Psi_2'}{k}\,,\quad a_3 = -\frac{BV_E^2}{V_f H} - \frac{\mathrm{i}2k\eta}{\rho}\,, \tag{72}$$

$$H = 1 - \mathrm{i}\,\frac{\Omega_\mathrm{e}}{\omega}\,,\quad B_\kappa = \frac{K_1(\kappa)}{K_0(\kappa)} - \frac{1}{\kappa}\,,$$

$$G = \frac{1}{A_\kappa H}\left(\frac{A_2\Psi_2' - A_1\Psi_1'}{\omega} - 1\right),\qquad A_\kappa = \varepsilon\,\frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} + \frac{K_1(\kappa)}{K_0(\kappa)}\,,$$

$$\omega_\mathrm{e} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(k\sigma_{\mathrm{s}0} + \sigma_0\,\frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}\right),\qquad \Psi_1' = \frac{kI_1'(\kappa)}{I_1(\kappa)}\,,$$

$$\Psi_2' = \frac{\beta I_1'(\kappa_i)}{I_1(\kappa_i)}\,,\qquad \Omega_\mathrm{e} = \frac{\omega_\mathrm{e} I_1(\kappa)}{A_\kappa I_0(\kappa)}\,,$$

где I_1' обозначает производную по соответствующему аргументу, V_E, V_f определены в (64).

Рассмотрим предельные случаи.

1. В длинноволновом приближении или при малой вязкости, $k^2 \ll \omega_0\rho/\eta$, $\omega_0 = [\alpha/(\rho R^3)]^{1/2}$, получаем урав-

нение, совпадающее с (52) при $n = 0$. Следовательно, в этом приближении поведение заряженной струи описывается моделью идеальной жидкости с мгновенной релаксацией зарядов.

2. В коротковолновом приближении, $k^2 \gg \omega_0\rho/\eta$, получаем

$$\omega = \mathrm{i}\,\frac{\delta_0}{2\kappa D_\kappa}\left(F_W + \kappa W S_\kappa\,\frac{\omega}{\omega - \mathrm{i}\Omega_\mathrm{e}}\right), \quad F_W = \kappa^2 - 1 - \kappa W B_\kappa\,, \tag{73}$$

$$\delta_0 = \frac{\alpha}{R\eta}\,, \quad D_\kappa = \frac{I_0}{I_1} + L_\kappa P_\kappa\,, \quad L_\kappa = \frac{I_0}{I_1} - \frac{1}{\kappa}\,, \quad P_\kappa = 1 - \kappa\Psi_{21}\,,$$

$$\Psi_{21} = \frac{1 + 1/\kappa^2}{L_\kappa} - L_\kappa\,, \quad Q_\kappa = B_\kappa - L_\kappa P_\kappa\,, \quad S_\kappa = \frac{S_1}{A_\kappa}\,,$$

$$S_1 = P_\kappa\left(\frac{K_1 L_\kappa}{K_0} + \frac{I_0 Q_\kappa}{I_1}\right) + Q_\kappa\Psi_{21} - \frac{K_1 B_\kappa}{K_0}\,.$$

Здесь функции Бесселя зависят от параметра κ, критерий W определён в (52).

Уравнение (73) имеет ту же структуру, что и (65), поэтому закономерности развития неустойчивости в коротковолновом пределе являются такими же, как и в плоском случае: колебательные возмущения имеют место при $\kappa^2 > 1 + WB_\kappa$ $(F_W > 0)$, а неустойчивость развивается монотонным образом при $\kappa^2 < 1 + WB_\kappa$ $(F_W < 0)$. Причём в области неустойчивости существуют две ветви, декременты которых определяются из (66) с коэффициентами

$$b = \Omega_\mathrm{e} + F + B\,, \quad c = F\Omega_\mathrm{e}\,, \quad F = \frac{\delta_0 F_W}{2\kappa D_\kappa}\,, \quad B = \frac{\delta_0 W S_\kappa}{2D_\kappa}\,.$$

Правильность вычислений подтверждается тем, что, как можно убедиться непосредственной проверкой, в предельном случае больших радиусов $\kappa = Rk \gg 1$ с учётом $K_1/K_0 \to 1$, $I_1/I_0 \to 1$ дисперсионное уравнение (71) переходит в (63), (52) — в (62) при $\coth\kappa_1 = \coth\kappa_2 = 1$, а (73) — в (65).

Используя выражение (73), можно вычислить граничное значение κ_*, отделяющее область неустойчивости по отношению к длинам волн $\kappa < \kappa_*$ от области устойчивости $\kappa > \kappa_*$, а также значения κ_m, при которых декременты возмущений достигают своего максимума в области неустойчивости. Результаты расчётов для случаев малой, $\omega_\mathrm{e} \ll \delta_0$, и большой, $\omega_\mathrm{e} \gg \delta_0$, проводимостей при различных значениях W, ε представлены в табл. 2.

Приведённые численные данные показывают, что как в случаях неполярных жидкостей ($\varepsilon = 2{,}1$, как у трансформаторного масла, жидких углеводородов и т.д.), так и водных растворов ($\varepsilon = 81$) критическая длина волны $\lambda_* = 2\pi R/\kappa_*$, отделяющая область неустойчивости $\lambda > \lambda_*$ от области устойчивости $\lambda < \lambda_*$, уменьшается с возрастанием поля (параметра W), причём при фиксированном W с увеличением ε критическая длина λ_* тоже уменьшается. Такая же закономерность наблюдается и для наиболее опасной длины волны $\lambda_\mathrm{m} = 2\pi R/\kappa_\mathrm{m}$, при которой возмущения возрастают наиболее быстро. Причём в случае жидкостей с высокой релаксацией зарядов, $\omega_\mathrm{e} \gg \delta_0$, значения λ_*, λ_m не зависят от ε.

Таблица 2. Критические значения параметров неустойчивости заряженных струй вязких жидкостей (область коротковолнового спектра)

$W(\varepsilon)$	κ_*, $\omega_\mathrm{e} \ll \delta_0$	κ_*, $\omega_\mathrm{e} \gg \delta_0$	κ_m, $\omega_\mathrm{e} \ll \delta_0$	$\max\delta/\delta_0$, $\omega_\mathrm{e} \ll \delta_0$	κ_m, $\omega_\mathrm{e} \gg \delta_0$	$\max\delta/\delta_0$, $\omega_\mathrm{e} \gg \delta_0$
1 (2,1)	1,32	1,33	0,91	0,066	0,545	0,108
5 (2,1)	3,23	4,65	1,61	0,539	2,24	0,677
10 (2,1)	6,18	9,56	2,14	1,45	3,38	2,27
25 (2,1)	16,18	24,53	3,52	4,90	5,05	8,26
50 (2,1)	33,08	49,51	5,35	11,65	6,68	19,18
1 (81)	1,33	1,33	0,65	0,099	0,545	0,108
5 (81)	4,58	4,65	2,20	0,6657	2,24	0,677
10 (81)	9,44	9,56	3,35	2,27	3,38	2,27
25 (81)	24,2	24,53	5,03	8,11	5,05	8,26
50 (81)	48,89	49,51	6,65	18,88	6,68	19,18

5.4. Электрогидродинамическая неустойчивость токовых струй

Если вдоль струи течёт ток (струя замыкает электроды), то этот случай будем называть токовой струей. Электрическое поле в таких струях оказывает, как правило, стабилизирующее воздействие. Именно этот эффект позволяет создавать тонкие и сверхтонкие нити, например для фильтров Петрянова [6], полимерные микротрубки и даже медицинские капилляры (см. рис. 19).

Постановка задачи об устойчивости токовых струй та же, что и для заряженных струй (см. раздел 5.3), с тем отличием, что внешнее электрическое поле направлено вдоль оси струи, $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ — орт оси z, ориентированной вдоль оси цилиндрической струи радиусом R). Исследования ради простоты также будем проводить относительно осесимметричных возмущений. Тогда уравнения для возмущений в терминах функции тока имеют вид (68). Отличие возникает в граничных условиях для потенциалов электрического поля и балансе поверхностных зарядов и напряжений на свободной поверхности, а именно:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(r = R)\colon\quad & \Phi_2 = \Phi_1\,, \quad \varepsilon_0(\varepsilon\Phi_{2r} - \Phi_{1r}) = q_\mathrm{s} + \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0 f_z\,,\\
& q_\mathrm{s} = e(n_{\mathrm{s}1} - n_{\mathrm{s}2})\,,\\
& \frac{\partial n_{\mathrm{s}j}}{\partial t} - (-1)^j b_{\mathrm{s}j}E_0\frac{\partial n_{\mathrm{s}j}}{\partial z} + n^0_{\mathrm{s}j}\psi_{rz} -\\
& \qquad - (-1)^j b_j n_0(\Phi_{2r} + E_0 f_z) = 0\,, \quad j = 1, 2\,,\\
& p + 2\eta\psi_{rz} - \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0\Phi_{2z} = -\alpha\left(f_{zz} + \frac{f}{R^2}\right),\\
& \eta(2\psi_{zz} - \hat{L}\psi) = q_\mathrm{s}E_0\,.
\end{aligned}$$

Разыскивая решение в виде (70), по известной методике находим следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned}
&\left(\omega\rho\,\frac{I_0(\kappa)}{I_1(\kappa)} - \mathrm{i}k^2 2\eta\,\frac{I_1'(\kappa)}{I_1(\kappa)}\right)A_1 - \mathrm{i}k2\eta\beta\,\frac{I_1'(\kappa_i)}{I_1(\kappa_i)}\,A_2 =\\
&\quad = \alpha\left(k^2 - \frac{1}{R^2}\right) - \mathrm{i}k\varepsilon_0 E_0^2 H_\omega\,,
\end{aligned} \tag{74}$$

$$A_1 = \frac{\omega}{k} - A_2\,, \quad A_2 = \mathrm{i}k\left(\frac{2\eta}{\rho} + L\right) - kLH_\omega T_\kappa\,,$$

$$L = \frac{V_E^2 g}{\omega}\,, \quad g = \omega_\mathrm{e}G_\omega\,, \quad \omega_\mathrm{e} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\,, \quad H_\omega = \frac{g + \mathrm{i}(\varepsilon - 1)}{A_\kappa - \mathrm{i}gT_\kappa}\,,$$

$$T_\kappa = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}\,, \qquad G_\omega = \frac{b_1}{b_1 + b_2}\,\frac{1}{\omega - \omega_{\mathrm{s}1}} + \frac{b_2}{b_1 + b_2}\,\frac{1}{\omega + \omega_{\mathrm{s}2}}\,,$$

где V_E^2 определено в (64), A_κ, β, κ, κ_i определены в (70), (72), $\omega_{sj} = kb_{sj}E_0$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим предельные случаи.

1. При малой вязкости или в длинноволновом приближении, т.е. при $k^2 \ll \omega_0\rho/\eta$, $\omega_0 = [\alpha/(\rho R^3)]^{1/2}$, получаем следующее предельное соотношение:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \kappa T_\kappa \left[\kappa^2 - 1 + \frac{\kappa W}{A_\kappa} \frac{(\varepsilon - 1)^2 \Omega(\omega) - \mathrm{i}\omega_e S_\varepsilon(\kappa)}{\Omega(\omega) - \mathrm{i}\omega_e A_\varepsilon(\kappa)}\right], \quad (75)$$

$$\Omega(\omega) = \frac{(b_1 + b_2)(\omega - \omega_{s1})(\omega + \omega_{s2})}{b_1(\omega + \omega_{s2}) + b_2(\omega - \omega_{s1})},$$

$$S_\varepsilon(\kappa) = 2(\varepsilon - 1) - \frac{1}{A_\varepsilon(\kappa)}, \qquad A_\varepsilon(\kappa) = \frac{T_\kappa}{A_\kappa}.$$

Рассмотрим вначале случай малой проводимости, $\omega_e \ll \omega_0$. Представляя уравнение (75) в виде

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(\frac{\Omega(\omega)}{\omega_0} - \mathrm{i}A_\varepsilon(\kappa)\frac{\omega_e}{\omega_0}\right) =$$

$$= F\frac{\Omega(\omega)}{\omega_0} - \mathrm{i}\frac{\omega_e}{\omega_0}\left(A_\varepsilon(\kappa)F_0 + B_W S_\varepsilon(\kappa)\right), \quad (76)$$

$$F = F_0 + (\varepsilon - 1)^2 B_W, \quad F_0 = \kappa T_\kappa(\kappa^2 - 1), \quad B_W = \kappa^2 W A_\varepsilon(\kappa),$$

получаем в нулевом приближении $(\omega^2 - \omega_0^2 F)\Omega(\omega) = 0$. Отсюда следует, что при $\kappa^2 - 1 + \kappa W/A_\kappa > 0$ $(F > 0)$ реализуются два типа колебаний: капиллярные колебания с частотой $\omega_c = \omega_0\sqrt{F}$ и ионные волны с частотами, определяемыми уравнением $\Omega(\omega) = 0$, которые обусловлены бегущими волнами положительных и отрицательных поверхностных зарядов с частотами ω_{s1} и ω_{s2} соответственно.

Капиллярная неустойчивость развивается при $\kappa^2 - 1 + \kappa W/A_\kappa < 0$, откуда следует, что электрическое поле подавляет коротковолновые возмущения и неустойчивость может развиваться только в длинноволновой области спектра. Причём с возрастанием поля (параметра W) неустойчивость развивается в области длинноволнового спектра. В области существования капиллярных колебаний $\kappa^2 - 1 + \kappa W/A_\kappa > 0$ также может развиваться неустойчивость вследствие взаимодействия капиллярных и ионных волн. Действительно, полагая $\omega = \omega_c + \mathrm{i}\delta_c$, из (69) для декремента получим

$$\delta_c = \frac{\omega_0^2 \omega_e B_W}{2\omega_c \Omega(\omega_c)}\gamma(\varepsilon, \kappa), \qquad \gamma(\varepsilon, \kappa) = (\varepsilon - 1)^2 A_\varepsilon - S_\varepsilon(\kappa). \quad (77)$$

Вследствие того что функция $\Omega(\omega_c)$ может менять знак в зависимости от напряжённости поля, декремент также является знакопеременной функцией поля. Так, при положительных ионных частотах $\Omega(\omega_c) < 0$ при $\omega_c < \omega_{s1}$ и $\Omega(\omega_c) > 0$ при $\omega_c > \omega_{s1}$. При $\omega_c = \omega_{s1}$ величина $\Omega(\omega_c) = 0$, т.е. неустойчивость имеет резонансный характер. На наш взгляд, этот тип неустойчивости обусловлен переходом энергии ионных волн в энергию деформационных колебаний поверхности и аналогичен электронно-акустической неустойчивости в полупроводниках [132]. Как отмечалось выше, подобную неустойчивость можно наблюдать в эксперименте с наклонным электродом, схема которого показана на рис. 2б, где свободная поверхность жидкости занимает положение, отмеченное штриховой линией.

В случае больших проводимостей, $\omega_e \gg \omega_0$, выделим два предела. В первом выполняется условие

$$|b_1\omega_{s2} - b_2\omega_{s1}| \ll (b_1 + b_2)\omega_0.$$

Частота определяется прежним выражением $\omega_c = \omega_0\sqrt{F}$, а декремент принимает вид

$$\delta_1 = \frac{\omega_0^2 B_W}{2\Omega(\omega_c)}\gamma(\varepsilon, \kappa), \qquad \Omega(\omega_c) = \frac{\omega_{s1}\omega_{s2}}{\omega_c}.$$

В силу условия $\gamma(\varepsilon, \kappa) > 0$ декремент также положителен, $\delta_1 > 0$, следовательно, колебания такого типа затухают с течением времени.

Во втором пределе, $|b_1\omega_{s2} - b_2\omega_{s1}| \gg (b_1 + b_2)\omega_0$, имеем

$$\omega^2 = \omega_0^2 Z, \qquad Z = z_1 + \mathrm{i}z_2, \quad (78)$$

$$z_1 = \frac{F_1}{A_\varepsilon(\kappa)}, \qquad z_2 = \frac{\mu B_W \gamma(\varepsilon, \kappa)}{A_\varepsilon^2(\kappa)}, \qquad \mu = \frac{\Omega_e}{\omega_e},$$

$$F_1 = F_0 A_\varepsilon(\kappa) + S_\varepsilon(\kappa)B_W, \qquad \Omega_e = \frac{(b_1 + b_2)\omega_{s1}\omega_{s2}}{b_2\omega_{s1} - b_1\omega_{s2}}.$$

Выражая Z как $Z = |Z|\exp(\mathrm{i}\varphi)$, находим декремент $\delta_2 = \omega_0\sqrt{|Z|}\sin(\varphi/2)$, где знак угла φ определяется знаком Ω_e. Неустойчивость имеет место при $b_1\omega_{s2} < b_2\omega_{s1}$, когда $E_0 > 0$, и при $b_1\omega_{s2} > b_2\omega_{s1}$, когда $E_0 < 0$. Результаты расчётов показывают, что неустойчивость возникает при $\kappa < \kappa_*$. Численные значения κ_*, κ_m, $\delta(\kappa_m)/\omega_0 = \max\delta/\omega_0$ для случаев малой, $\omega_e \ll \omega_0$, и большой, $\omega_e \gg \omega_0$, проводимостей при различных значениях W, ε представлены в табл. 3.

Численные данные показывают, что электрическое поле эффективно стабилизирует токовую струю маловязких жидкостей только при низких проводимостях. Причём с возрастанием диэлектрической проницаемости стабилизация струи полем усиливается. В случае неполярных жидкостей $(\varepsilon \sim 2)$ критическая длина волны $\lambda_* = 2\pi R/\kappa_*$, отделяющая область неустойчивости $\lambda > \lambda_*$ от области устойчивости $\lambda < \lambda_*$, а также длина волны наиболее быстро развивающегося возмущения $\lambda_m = 2\pi R/\kappa_m$ возрастают с увеличением параметра W при низкой проводимости $(\omega_e \ll \omega_0)$ и, наоборот, убывают

Таблица 3. Критические значения параметров неустойчивости токовых струй маловязких жидкостей (область длинноволнового спектра)

$W(\varepsilon)$	κ_*, $\omega_e \ll \omega_0$	κ_*, $\omega_e \gg \omega_0$	κ_m, $\omega_e \ll \omega_0$	$\max\delta/\omega_0$, $\omega_e \ll \omega_0$	κ_m, $\omega_e \gg \omega_0$	$\max\delta/\omega_0$, $\omega_e \gg \omega_0$
1 (2,1)	0,77	1,76	0,51	0,059	1,23	0,70
5 (2,1)	0,35	5,20	0,24	0,012	3,50	21
10 (2,1)	0,22	9,66	0,15	0,0049	5,44	135
25 (2,1)	0,121	23,13	0,083	0,0016	15,4	1845
1 (81)	Устойчива	0,195	Устойчива	Устойчива	0,139	0,066
5 (81)	Устойчива	0,127	Устойчива	Устойчива	0,091	0,054
10 (81)	Устойчива	0,115	Устойчива	Устойчива	0,083	0,007
25 (81)	Устойчива	0,107	Устойчива	Устойчива	0,077	0,0129

при высокой проводимости ($\omega_e \gg \omega_0$). При значительной поляризуемости среды, такой, например, как у водных растворов ($\varepsilon \sim 81$), и слабой проводимости струя полностью стабилизируется полем, а при сильной проводимости закономерность стабилизации подобна описанной выше.

2. В случае коротковолнового спектра или сильной вязкости, $k^2 \gg \omega_0\rho/\eta$, уравнение (74) с точностью $O(\eta^{-2})$ записывается как

$$\omega = \mathrm{i}\,\frac{\delta_0}{2\kappa D_\kappa}\left(\kappa^2 - 1 + \frac{\kappa W}{A_\kappa}\,\frac{(\varepsilon-1)^2 - \mathrm{i}gC_\varepsilon(\kappa)}{1 - \mathrm{i}gA_\varepsilon(\kappa)}\right). \qquad (79)$$

Здесь δ_0, D_κ, A_κ определены в (72), (73), g определено в (74), $A_\varepsilon(\kappa)$ — в (75), параметр $C_\varepsilon(\kappa)$ имеет вид

$$C_\varepsilon(\kappa) = \varepsilon - 1 - \left(\frac{I_0}{I_1} - \kappa L_\kappa \Psi_{21}\right)\left[A_\kappa - (\varepsilon-1)\,\frac{I_1}{I_0}\right],$$

где L_κ, Ψ_{21} определены в (73), а функции Бесселя зависят только от κ.

Исследование уравнения (79) показывает, что в случае малой проводимости, $\omega_e \ll \delta_0$, существуют только ионные волны с частотами ω_{s1}, ω_{s2}, а капиллярные возмущения с декрементами

$$\delta_c = \frac{\delta_0}{2\kappa D_\kappa}\left(\kappa^2 - 1 + \frac{\kappa W}{A_\kappa}(\varepsilon-1)^2\right) \qquad (80)$$

монотонно убывают или возрастают.

В случае высокой проводимости, $\omega_e \gg \delta_0$, существуют ионные волны с частотами, описываемыми уравнением $\Omega(\omega) = \mathrm{i}\omega_e A_\varepsilon(\kappa)$, время затухания которых определяется временем релаксации зарядов $\tau_e = A_\varepsilon(\kappa)/\omega_e$, а также капиллярные волны, частоты и декременты которых в случае $|b_1\omega_{s2} - b_2\omega_{s1}| \gg (b_1+b_2)\delta_0$ выражаются как

$$\begin{gathered}\omega_c = \delta_0\mu B\,\frac{C_\varepsilon(\kappa) - (\varepsilon-1)^2 A_\varepsilon(\kappa)}{\mu^2 + A_\varepsilon^2(\kappa)}\,,\\ \delta_c = \delta_0\left(F_0 + B\,\frac{(\varepsilon-1)^2\mu^2 + A_\varepsilon(\kappa)C_\varepsilon(\kappa)}{\mu^2 + A_\varepsilon^2(\kappa)}\right),\\ \mu = \frac{\Omega_e}{\omega_e}\,, \qquad F_0 = \frac{\kappa^2-1}{2\kappa D_\kappa}\,, \qquad B = \frac{W}{2D_\kappa A_\kappa}\,.\end{gathered} \qquad (81)$$

Отсюда видно, что в коротковолновой области возможны колебательные капиллярные возмущения, которые являются устойчивыми и затухают с течением времени. Результаты численных расчётов параметров показали, что неустойчивость вязких струй наблюдается при $\kappa < \kappa_*$, причём декременты возмущений в области неустойчивости монотонно возрастают с уменьшением κ, т.е. с возрастанием длины волны $\lambda = 2\pi/\kappa$.

Численные значения κ_* для случаев малой, $\omega_e \ll \delta_0$, и большой, $\omega_e \gg \delta_0$, проводимостей при различных значениях W, ε, представленные в табл. 4, показывают, что токовые струи вязких жидкостей эффективно стабилизируются полем. Причём степень стабилизации возрастает с увеличением диэлектрической проницаемости.

Таблица 4. Критические значения параметров неустойчивости токовых струй вязких жидкостей (область коротковолнового спектра)

$W(\varepsilon)$	1 (2,1)	5 (2,1)	10 (2,1)	25 (2,1)	1 (81)	5 (81)	10 (81)	25 (81)
κ_*, $\omega_e \ll \delta_0$	0,77	0,35	0,22	0,12	0,005	0,002	0,0016	0,0008
κ_*, $\omega_e \gg \delta_0$	1,64	1,99	2,09	2,162	0,102	0,102	0,102	0,102

5.5. Неустойчивость капель

Принято считать, что максимальный (предельный) заряд Q_*, который может иметь капля радиусом R, определяется зарядом Рэлея: $Q_* = 8\pi(\varepsilon_0\alpha R^3)^{1/2}$ [1, 117]. Однако следует иметь в виду, что этот результат справедлив для жидкостей с мгновенной релаксацией зарядов, а размер капли ограничен снизу радиусом Дебая. При конечном времени релаксации зарядов этот результат неприменим и задачу об устойчивости заряженной капли следует рассматривать в полной постановке (1)–(7). Ниже мы представим методику и приведём результаты расчётов критериев устойчивости в рамках рассмотренных выше постановок задач.

Будем считать, что в равновесном состоянии поверхностный заряд определяется как $q_{s0} = e(n_{s1}^0 - n_{s2}^0) = \varepsilon_0 E_0$ (обозначения см. в разделе 5.3). В сферической системе координат (r, θ, φ), начало которой находится в центре капли, для поля вне капли получаем $E_r = E_0 R^2/r^2$, где r — радиальная координата, а поле внутри капли равно нулю. Вновь считаем, что поверхностная проводимость определяется согласно (57), а радиус струи значительно больше дебаевского.

Для исключения давления применим к векторному уравнению импульсов (20) операцию rot и к полученному уравнению снова применим операцию rot. Проецируя полученное векторное соотношение на радиальное направление, после некоторых преобразований получаем следующую краевую задачу для возмущений:

$$\begin{gathered}\Omega_1(r>R):\quad \Delta\Phi_1 = 0\,;\\ \Omega_2(r<R):\quad \Delta\Phi_2 = 0\,, \qquad \Delta\left(\eta\Delta u - \rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0\,;\end{gathered} \qquad (82)$$

$$\begin{gathered}\mathrm{S}(r=R):\quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{u}{r}\,, \quad \Phi_1 = \Phi_2 + E_0 f, \quad \varepsilon_0(\varepsilon\Phi_{2r} - \Phi_{1r}) = q_s\,,\\ \frac{\partial n_{sj}}{\partial t} + (-1)^j b_{sj} n_{sj}^0 R^{-2}\Delta_{\theta\varphi}\Phi_2 +\\ + n_{sj}^0\left(u_r - \frac{u}{R}\right) - (-1)^j b_j n_0 \Phi_{2r} = 0\,, \quad j = 1,2\,,\\ p - 2\eta\left(\frac{u_r}{R} - \frac{u}{R^2}\right) - \varepsilon_0 E_0\left(\frac{2E_0 f}{R} + \Phi_{1r}\right) =\\ = -\alpha R^{-2}(\Delta_{\theta\varphi} f + 2f)\,,\\ \eta\left(R^{-2}(2u + \Delta_{\theta\varphi}u) - u_{rr}\right) = q_{s0}R^{-1}\Delta_{\theta\varphi}\Phi_2\,,\\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\theta\varphi}\,,\\ \Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,,\end{gathered} \qquad (83)$$

при условии ограниченности искомых функций при $r = 0$ и $r \to \infty$. Здесь индекс r обозначает частную производную по r, $u = rV_r$, V_r — радиальная компонента скорости. Решение ищем в виде

$$\begin{gathered}u = \Psi(r)F_{lm}(\theta,\varphi,t)\,, \qquad p = P(r)F_{lm}(\theta,\varphi,t)\,,\\ \Phi_j = F_j(r)F_{lm}(\theta,\varphi,t)\,, \qquad n_{sj} = N_{j0}F_{lm}(\theta,\varphi,t)\,, \quad j = 1,2\,,\\ f = f_0 F_{lm}(\theta,\varphi,t)\,, \qquad F_{lm}(\theta,\varphi,t) = Y_{lm}(\theta,\varphi)\exp(\mathrm{i}\omega t)\,,\end{gathered} \qquad (84)$$

где $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ — сферические функции [112], $l=0,1,2,\ldots$ и $m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l$.

Подставляя (84) в (82), получим

$$\Psi(r)=C_1\left(\frac{r}{R}\right)^l+C_2\Psi_2(\beta r)\,,$$
$$\Psi_2(r)=\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{I_\gamma(\beta r)}{I_\gamma(\kappa_i)}\,,\qquad \gamma=l+\frac{1}{2}\,,\tag{85}$$
$$F_1(r)=H_{10}\left(\frac{r}{R}\right)^{-(l+1)}\,,\qquad F_2(r)=H_{20}\left(\frac{r}{R}\right)^l\,,$$
$$P(r)=-\frac{\mathrm{i}\omega\rho}{l}\left(\frac{r}{l}\right)^l C_1\,.$$

Здесь, как и в (77), $\beta=\sqrt{k^2+\mathrm{i}\rho\omega/\eta}$, $\kappa_i=\beta R$, $C_j, H_{j0}, f_0, N_{j0}=\mathrm{const}$, $j=1,2$, I_γ — модифицированная функция Бесселя [112].

Методом, описанным выше, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\mathrm{i}2\eta\omega R-\left(\frac{\mathrm{i}\omega\rho R^2}{l}+2\eta l\right)A_1-(2\eta a)A_2=$$
$$=\alpha\big[l(l+1)-2\big]-\varepsilon_0E_0^2R\big[l-1-(l+1)G\big]\,,\tag{86}$$
$$A_1=-D_\omega\big[\mathrm{i}\big(l(l+1)-2-2b\big)+B_\omega l(l+1)(l+2-a)\big]\,,$$
$$a=\frac{\kappa_iI_\gamma'(\kappa_i)}{I_\gamma(\kappa_i)}-\frac{1}{2}\,,\qquad A_2=D_\omega\big[\mathrm{i}2(l^2-1)+B_\omega 2l(l+1)\big]\,,$$
$$b=a+\frac{1}{8}-\frac{\kappa_i^2+\gamma^2}{2}\,,\qquad G=\frac{\mathrm{i}(lA_1+aA_2)/(\omega R)+l+2}{A_lH}\,,$$
$$A_l=(\varepsilon+1)l+1\,,\qquad H=1-\frac{\mathrm{i}\Omega_\mathrm{e}}{\omega}\,,\qquad \Omega_\mathrm{e}=\frac{\omega_\mathrm{e}l}{A_l}\,,$$
$$\omega_\mathrm{e}=\frac{\sigma_{\mathrm{s}0}/R+\sigma_0}{\varepsilon_0}\,,\qquad D_\omega=\frac{\omega R}{c+\mathrm{i}Q}\,,\qquad B_\omega=\frac{\Omega_\eta}{\omega A_lH}\,,$$
$$c=l(l-1)+2b\,,\qquad Q=\frac{\Omega_\eta l(l+1)(l-a)}{\omega A_lH}\,,\qquad \Omega_\eta=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{\eta}\,.$$

Исследование уравнения (86) показывает, что закономерности развития неустойчивости заряженной капли являются такими же, как и в случаях плоской поверхности и цилиндрической струи. Так, в случае малой вязкости или большого радиуса капли, $|\omega|\gg\nu/R^2$ ($\nu=\eta/\rho$), уравнение (86) с точностью $O(\eta)$ записывается в виде

$$\omega^2=\omega_0^2lF_l(W)\,,\qquad F_l(W)=l(l+1)-2-W(l-1)\,,\tag{87}$$

где ω_0, W определяются согласно (52), $l=2,3,\ldots$ (значения $l=0,1$ исключаются ввиду неподвижности центра масс и несжимаемости жидкости).

Выражение (87) описывает предельный заряд $Q_*=4\pi R^2\varepsilon_0E_*=4\pi\sqrt{W_*\varepsilon_0\alpha R^3}$. Очевидно, что неустойчивость наступает при $l=2$, т.е. $W>W_*=4$, что определяет предельный заряд Рэлея $Q_*=8\pi\sqrt{\varepsilon_0\alpha R^3}$. Таким образом, критерий предельного заряда Рэлея выполняется либо при малой вязкости, либо при больших радиусах капли, $\omega_0\gg\nu/R^2$, и вычисляется в модели идеальной жидкости при мгновенной релаксации зарядов.

В предельном случае больших вязкостей или малых радиусов капель, $\omega_0\ll\nu/R^2$, дисперсионное уравнение (86) принимает вид

$$\delta_\mathrm{c}=\frac{\delta_0}{2D_l}\left(F_l(W)+WS_l\,\frac{\omega}{\omega-\mathrm{i}\omega_\mathrm{e}}\right)\,,\tag{88}$$
$$D_l=(l-1)\,\frac{2(l+1)(\gamma+1)-l}{2l\gamma}\,,\quad S_l=\frac{l(l+1)(l+2)(\gamma+1)}{\gamma^2A_l}\,,$$

δ_0 определено в (73).

Таблица 5. Критические значения W_* и l_* капель вязких жидкостей или капель малого радиуса при различных ε

ε	2,1	5	10	15	20	28	31	81
W_*	20,4	10,6	7,4	6,45	5,82	5,18	5,04	4,35
l_*	7	4	3	3	2	2	2	2

Результаты численных расчётов критических значений W_* и соответствующих им l_* в случае малых проводимостей, $\omega_\mathrm{e}\ll\delta_0$, при которых капля теряет устойчивость (когда $\delta_\mathrm{c}=0$), представлены в табл. 5.

Из таблицы 5 видно, что критерий Рэлея $W_*=4$ для капель жидкостей с малой проводимостью, $\omega_\mathrm{e}\ll\delta_0$ (большим временем релаксации зарядов), выполняется только в случае сильно поляризующихся жидкостей, у которых, как правило, мало́ время релаксации зарядов. Обратим также внимание на то, что критические l_* малых капель неполярных жидкостей ($\varepsilon\sim2$) принимают довольно большие значения ($l_*=7$). Отсюда можно сделать вывод о том, что при этих параметрах капли могут распадаться на большее количество мелких капель, чем в случае рэлеевской неустойчивости. Наконец, предельный заряд $Q_*=4\pi\sqrt{W_*\varepsilon_0\alpha R^3}=18\pi\sqrt{\varepsilon_0\alpha R^3}$ для неполярных жидкостей ($\varepsilon\sim2$) более чем в два раза превышает предельный заряд для сильно полярных ($\varepsilon\sim81$) жидкостей.

6. Заключение

Подводя итог проведённым исследованиям, отметим следующее.

1. Решая точные дисперсионные уравнения (71), (74), (86), можно определить критические параметры, при которых развиваются неустойчивости струй и капель по отношению к известным электрическим и физическим характеристикам жидкостей.

2. Если возмущения генерируются внешними источниками (например, звуком), то в длинноволновой или коротковолновой областях можно использовать аналитические формулы при мгновенной релаксации зарядов: (30), (31) в случае плоской поверхности и (52), (53), а также данные, приведённые на рис. 16, в случае заряженных струй. При конечном времени релаксации зарядов в случае плоской поверхности можно пользоваться формулой (67), цилиндрических струй — данными табл. 2, токовых струй — данными табл. 3 и 4, заряженных капель — табл. 5.

3. Во многих практически важных случаях нет необходимости решать полные дисперсионные уравнения (71), (74), (86) и можно использовать аналитические формулы, полученные в длинноволновом или коротковолновом приближении. Покажем это на примере цилиндрических заряженных струй, используя электрофизические характеристики типичных жидких диэлектриков, представленные в табл. 6.

Таблица 6. Параметры, характеризующие неустойчивость типичных диэлектрических жидкостей при комнатных температурах (20 °C)

Жидкость	ε	η, Пз	ρ, г см$^{-3}$	α, дин см$^{-1}$	ω_e, Гц	$R = 1$ мм	
						ω_0, Гц	δ_0, Гц
Водопроводная вода	81	0,01	1	72	$1{,}4 \times 10^4$	284	$7{,}3 \times 10^4$
Глицерин	56	14	1,26	59,4	2×10^4	210	40
Нитробензол	31	0,02	1,2	43,9	3,6	191	$2{,}2 \times 10^4$
Этиловый спирт	28	0,012	0,78	22,8	4	169	$1{,}9 \times 10^4$
Ацетон	21	0,0033	0,8	23	5,4	169	7×10^4
Бутиловый спирт	18	0,03	0,8	22	6,3	166	$7{,}3 \times 10^3$
Бензол	2,3	0,006	0,88	29	0,05	181	$4{,}8 \times 10^4$
Касторовое масло	2,1	10	0,9	36	0,053	200	36

Прежде всего отметим, что даже в сильных полях, $E_0 \sim 100$ кВ см$^{-1}$, типичное значение параметра W при $R \sim 1$ мм порядка единицы, $W \sim 1$. Условие длинноволнового приближения или малой вязкости $k^2 \ll \omega_0\rho/\eta$ в безразмерном виде записывается как $\kappa_m^2 \ll R^2\omega_0/\nu$, $\nu = \eta/\rho$. Используя данные, приведённые на рис. 16б и в табл. 2, получаем, что при $W \leqslant 1$ выполняется соотношение $\kappa_m^2 \sim 1$. На основании данных табл. 6 имеем $R^2\omega_0/\nu \sim 200$ для слабовязких жидкостей, поэтому условие длинноволнового приближения или малой вязкости $k^2 \ll \omega_0\rho/\eta$ выполняется для маловязких жидкостей с $\eta \leqslant 0{,}01$ Пз при $R \geqslant 1$ мм.

Теперь рассмотрим случай коротковолнового спектра или сильновязких жидкостей. В безразмерных переменных этот предельный случай выражается как $\kappa_m^2 \gg R^2\delta_0/\nu = R\alpha/(\eta\nu)$. Для $R \sim 1$ мм, $\eta \geqslant 10$ Пз имеем $R\alpha/(\eta\nu) \sim 0{,}05$, поэтому при типичных $0{,}5 \leqslant \kappa_m \leqslant 1$ условие $k^2 \gg \delta_0\rho/\eta$ выполняется. Таким образом, в случае сильновязких жидкостей, $\eta \geqslant 10$ Пз, и малых размеров, $R \leqslant 1$ мм, можно использовать приближение коротковолнового спектра.

4. Результаты расчётов показали, что учёт поверхностной проводимости приводит к кардинальному пересмотру сложившихся представлений о развитии неустойчивости заряженных и токовых струй и заряженных капель. Например, в случае струй в рамках длинноволнового приближения релаксацию зарядов можно считать мгновенной, $\omega_e \gg \omega_0$, в воде и глицерине, и, наоборот, полагать заряд вмороженным в жидкий диэлектрик, $\omega_e \ll \omega_0$, если проводимость $\sigma \leqslant 10^{-11}$ Ом$^{-1}$ см$^{-1}$. Приближение сильной вязкости либо малых капель $\delta_0 \ll \nu/R^2$ справедливо для сильновязких жидкостей (глицерина и касторового масла), а для маловязких жидкостей (воды, бензола и др.) $\omega_0 \gg \nu/R^2$ даже при $R = 1$ мм, т.е. неустойчивость определяется критерием Рэлея. Предельный заряд малых капель вязких жидкостей с низкой диэлектрической проницаемостью более чем в два раза превышает предельный заряд капель с мгновенной релаксацией зарядов, имеющих те же размеры и электрофизические характеристики.

5. Представление закона проводимости в виде (57) позволяет охватить довольно широкий класс поверхностных явлений, в частности учесть как униполярную проводимость (например, поверхностных электронов [88]), так и многоионную проводимость несвязанных ионов. Кроме того, в задачах об устойчивости заряженных поверхностей поверхностная проводимость представляется в виде $\sigma_{s0} = e(b_{s1}n_{s1}^0 + b_{s2}n_{s2}^0)$, что соответствует омическому поверхностному закону проводимости связанных ионов $\mathbf{j}_s = \sigma_s\mathbf{E}_t$ с постоянным коэффициентом поверхностной проводимости σ_s. Дальнейшее развитие электрогидродинамики свободных поверхностей требует уточнения механизмов поверхностной проводимости на основе проведения соответствующих экспериментов.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России", 2009 – 2013 гг. (государственный контракт П913).

Список литературы

1. Lord Rayleigh *Philos. Mag. Ser. 5* **14** 184 (1882)
2. Macky W A *Proc. R. Soc. Lond. A* **133** 565 (1931)
3. Френкель Я И *ЖЭТФ* **6** 347 (1936); Frenkel J *Phys. Z. Sowjetunion* **7** 452 (1935)
4. Глонти Г А *ЖЭТФ* **34** 1329 (1958) [Glonti G A *Sov. Phys. JETP* **7** 917 (1958)]
5. Верещагин И П и др. *Основы электрогазодинамики дисперсных систем* (М.: Энергия, 1974)
6. Дружинин Э А *Производство и свойства фильтрующих материалов Петрянова из ультратонких полимерных волокон* (М.: ИздАТ, 2007)
7. Melcher J R *Continuum Electromechanics* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1981)
8. Lefebvre A H *Atomization and Sprays* (New York: Hemisphere Publ. Corp., 1989)
9. Melcher J R *Field-coupled Surface Waves, a Comparative Study of Surface-coupled Electrohydrodynamic and Magnetohydrodynamic Systems* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1963)
10. Панченков Г М, Цабек Л К *Поведение эмульсий во внешнем электрическом поле* (М.: Химия, 1969)
11. Коженков В И, Фукс Н А *Успехи химии* **45** 2274 (1976) [Kozhenkov V I, Fuks N A *Russ. Chem. Rev.* **45** 1179 (1976)]
12. Melcher J R, Taylor G I *Annu. Rev. Fluid Mech.* **1** 111 (1969) [Мельчер Дж, Тейлор Дж, в сб. *Механика. Периодический сборник иностранных статей* Вып. 5 (М.: Мир, 1971) с. 68]
13. Ширяева С О, Григорьев А И, Святченко А А, Препринт № 25 (Ярославль: Научный центр по фундаментальным проблемам вычислительной техники и систем управления. Институт микроэлектроники РАН, 1993)
14. Fenn J B et al. *Science* **246** 64 (1989)
15. Torza S, Cox R G, Mason S G *Philos. Trans. R. Soc. London A* **269** 295 (1971) [Торза С, Кокс Р, Мейсон С В, в сб. *Реология суспензий* (Под ред. В В Гогосова, В Н Николаевского) (М.: Мир, 1975) с. 285]
16. Григорьев А И *Электронная обработка материалов* (6) 23 (1990)

17. Григорьев А И, Ширяева С О *Изв. РАН. Мех. жидкости и газа* (3) 3 (1994) [Grigor'ev A I, Shiryaeva S O *Fluid Dynamics* **29** 305 (1994)]
18. Белоножко Д Ф, Григорьев А И *Электронная обработка материалов* (4) 17 (2000)
19. Hines R L *J. Appl. Phys.* **37** 2730 (1966)
20. Ijsebaert J C et al. *J. Appl. Physiol.* **91** 2735 (2001)
21. Baily A G *Sci. Prog. Oxford* **61** 555 (1974)
22. Maheshwari S, Chetwani N, Chang H-C *Ind. Eng. Chem. Res.* **48** 9358 (2009)
23. Габович М Д *УФН* **140** 137 (1983) [Gabovich M D *Sov. Phys. Usp.* **26** 447 (1983)]
24. Аметистов Е В и др. *Монодиспергирование вещества: принципы и применение* (Под ред. В А Григорьева) (М.: Энергоатомиздат, 1991)
25. Fenn J B et al. *Mass Spectrom. Rev.* **9** 37 (1990)
26. Smith R D et al. *Mass Spectrom. Rev.* **10** 359 (1991)
27. Balakin A A et al. *J. Electrostat.* **40–41** 615 (1997)
28. Balakin A A, Gridin V V, Schechter I *J. Phys. Chem. A* **102** 9470 (1998)
29. Hines R L *J. Appl. Phys.* **37** 2730 (1966)
30. Безруков В И *Основы электрокаплеструйных технологий* (СПб.: Судостроение, 2001)
31. Bustin W M, Dukek W G *Electrostatic Hazards in the Petroleum Industry* (New York: Wiley, 1983)
32. Калинин Т Д, Петров Г И, Технические заметки НИИ-1 (4) 20 (1947); воспроизведено в сб.: Петров Г И *Избранные труды. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования* (Под ред. Ю В Чудецкого) (М.: Наука, 1992) с. 88
33. Bellan J *Combust. Flame* **51** 117 (1983)
34. Siefert W *Thin Solid Films* **120** 267 (1984)
35. Jones A R , Thong K C *J. Phys. D Appl. Phys.* **4** 1159 (1971)
36. Park D G, Burlitch J M *J. Sol-Gel Sci. Technol.* **6** 235 (1996)
37. Salata O V *Current Nanosci.* **1** 25 (2005)
38. Бураев Т К, Верещагин И П, Пашин Н М, в сб. *Сильные электрические поля в технологических процессах* Вып. 3 (М.: Энергия, 1979) с. 87
39. Попов С И, Петрянов-Соколов И В *ДАН СССР* **195** 893 (1970)
40. Кириченко В Н и др. *ДАН СССР* **301** 814 (1988) [Kirichenko V N et al. *Sov. Phys. Dokl.* **33** 564 (1988)]
41. Кириченко В Н, Михайлова А Д, Полевов В Н *ДАН СССР* **315** 819 (1990)
42. Горшков В Н, Чабан М Г *ЖТФ* **69** (11) 1 (1999) [Gorshkov V N, Chaban M G *Tech. Phys.* **44** 1259 (1999)]
43. Bogy D B *Phys. Fluids* **22** 224 (1979)
44. Gomez A, Tang K *Phys. Fluids* **6** 404 (1994)
45. Gañán-Calvo A M *Phys. Rev. Lett.* **79** 217 (1997)
46. Higuera F J *J. Fluid Mech.* **484** 303 (2003)
47. Higuera F J *J. Fluid Mech.* **513** 239 (2004)
48. Schneider J M et al. *J. Appl. Phys.* **38** 2599 (1967)
49. Michael D H, O'Neill M E *Can. J. Phys.* **47** 1215 (1969)
50. Saville D A *Phys. Fluids* **13** 2987 (1970)
51. Saville D A *J. Fluid Mech.* **48** 815 (1971)
52. Bogy D B *J. Appl. Mech.* **45** 469 (1978)
53. Герценштейн С Я и др. *ДАН СССР* **306** 1073 (1989) [Gertsenshtein S Ya et al. *Sov. Phys. Dokl.* **34** 497 (1989)]
54. Ширяева С О, Григорьев А И, Левчук Т В *ЖТФ* **73** (11) 22 (2003) [Shiryaeva S O, Grigor'ev A I, Levchuk T V *Tech. Phys.* **48** 1380 (2003)]
55. Саранин В А *Устойчивость, равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях* (М.–Ижевск: РХД, 2009)
56. Taylor G *Proc. R. Soc. Lond. A* **313** 453 (1969)
57. Кириченко В Н и др. *ДАН СССР* **289** 817 (1986) [Kirichenko V N et al. *Sov. Phys. Dokl.* **31** 611 (1986)]
58. Кириченко В Н, Супрун Н Н, Петрянов-Соколов И В *ДАН СССР* **295** 308 (1987) [Kirichenko V N, Suprun N N, Petryanov-Sokolov I V *Sov. Phys. Dokl.* **32** 544 (1987)]
59. Кириченко В Н, Супрун Н Н, Петрянов-Соколов И В *ДАН СССР* **295** 553 (1987) [Kirichenko V N, Suprun N N, Petryanov-Sokolov I V *Sov. Phys. Dokl.* **32** 546 (1987)]
60. Шутов А А, Захарьян А А *Журн. приклад. мех. техн. физ.* **39** (4) 12 (1998) [Shutov A A, Zakhar'yan A A *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **39** 489 (1998)]
61. Gamero-Castaño M, Hruby V *J. Fluid Mech.* **459** 245 (2002)
62. López-Herrera J M, Gañán-Calvo A M *J. Fluid Mech.* **501** 303 (2004)
63. Blanchard D C *J. Meteor.* **15** 383 (1958)
64. Taylor G *Proc. R. Soc. Lond. A* **291** 159 (1966)
65. Taylor G I, McEwan A D *J. Fluid Mech.* **22** 1 (1965)
66. Melcher J R, Schwarz W J *Phys. Fluids* **11** 2604 (1968)
67. Melcher J R, Smith C V *Phys. Fluids* **12** 778 (1969)
68. Бриксман В А, Шайдуров Г Ф *Ученые записки Пермского университета. Гидродинамика* (2) 229 (1970)
69. Воронин В П *Вестн. МГУ Сер. 3 Физ. Астрон.* (6) 655 (1973)
70. He J et al. *J. Appl. Phys.* **68** 1475 (1990)
71. Саранин В А, Жаров А Н, Белоножко Д Ф *Письма в ЖТФ* **23** (16) 41 (1997) [Saranin V A, Zharov A N, Belonozhko D F *Tech. Phys. Lett.* **23** 633 (1997)]
72. Белоножко Д Ф, Григорьев А И, Ширяева С О *ЖТФ* **68** (9) 13 (1998) [Belonozhko D F, Grigor'ev A I, Shiryaeva S O *Tech. Phys.* **43** 1023 (1998)]
73. Белоножко Д Ф, Григорьев А И, Ширяева С О *Изв. РАН Мех. жидкости и газа* (6) 116 (1998) [Belonozhko D F, Grigor'ev A I, Shiryaeva S O *Fluid Dyn.* **33** 907 (1998)]
74. Жакин А И *Журн. приклад. мех. техн. физики* (4) 69 (1981) [Zhakin A I *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **22** 499 (1981)]
75. Жакин А И *Магнитная гидродинамика* (3) 74 (1981) [Zhakin A I *Magnetohydrodyn.* **17** 270 (1981)]
76. Жакин А И *Физ. низких темп.* **10** 237 (1984)
77. Жакин А И *Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа* (3) 94 (1984) [Zhakin A I *Fluid Dyn.* **19** 422 (1984)]
78. Жакин А И *УФН* **182** 495 (2012) [Zhakin A I *Phys. Usp.* **55** 465 (2012)]
79. Adamson A W *Physical Chemistry of Surfaces* (New York: Wiley, 1976) [Адамсон А *Физическая химия поверхностей* (М.: Мир, 1979)]
80. Волькенштейн Ф Ф *Электронные процессы на поверхности полупроводников при хемосорбции* (М.: Наука, 1987) [Wolkenstein T *Electronic Processes on Semiconductor Surfaces During Chemisorption* (New York: Consultants Bureau, 1991)]
81. Жакин А И *Физико-химическая гидродинамика многокомпонентных дисперсных сред* (Курск: КГТУ, 1999)
82. Радченко И В *Молекулярная физика* (М.: Наука, 1965)
83. Волькенштейн Ф Ф *УФН* **90** 275 (1966) [Vol'kenshtein F F *Sov. Phys. Usp.* **9** 743 (1967)]
84. Шутов А А, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (М.: ФГУП НИФХИ им. Л.Я. Карпова, 2008)
85. Бабский В Г и др. *Гидромеханика невесомости* (Под ред. А Д Мышкиса) (М.: Наука, 1976); Myshkis A D et al. *Low-gravity Fluid Mechanics* (Ed. A D Myshkis) (Berlin: Springer-Verlag, 1987)
86. Tonks L *Phys. Rev.* **48** 562 (1935)
87. Монарха Ю П, Шикин В Б *ФНТ* **8** 563 (1982) [Monarkha Yu P, Shikin V B *Sov. J. Low Temp. Phys.* **8** 279 (1982)]
88. Шикин В Б, Монарха Ю П *Двумерные заряженные системы в гелии* (М.: Наука, 1989)
89. Шикин В Б *УФН* **181** 1241 (2011) [Shikin V B *Phys. Usp.* **54** 1203 (2011)]
90. Malkus W V R, Veronis G *Phys. Fluids* **4** 13 (1961)
91. Melcher J R, in *Theoretical and Applied Mechanics. Proc. of the Thirteenth Intern. Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Moscow Univ., August 21–26, 1972* (Eds E Becker, G K Mikhailov) (Berlin: Springer-Verlag, 1973); Мелчер Дж *Магнитная гидродинамика* (2) 3 (1974)
92. Остроумов Г А *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей* (М.: Наука, 1979)
93. Вайнберг М М, Треногин В А *Теория ветвления решений нелинейных уравнений* (М.: Наука, 1969) [Vainberg M M, Trenogin V A *Theory of Branching of Solutions of Non-linear Equations* (Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1974)]
94. Ляпунов А М, Записки Императорской Академии наук, Ч. 1 (Санкт-Петербург, 1906)
95. Капица П Л *ЖЭТФ* **18** (1) 3 (1948)

96. Зайцев В М, Шлиомис М И *ДАН СССР* **188** 1261 (1969) [Zaitsev V M, Shliomis M I *Sov. Phys. Dokl.* **14** 1001 (1970)]
97. Шлиомис М И *УФН* **112** 427 (1974) [Shliomis M I *Sov. Phys. Usp.* **17** 153 (1974)]
98. Гайлитис А *Магнитная гидродинамика* (1) 68 (1969) [Gailitis A *Magnetohydrodyn.* **5** 44 (1969)]
99. Twombly E, Thomas J *IEEE Trans. Magn.* **16** 214 (1980)
100. Malic S K, Singh M *Quart. Appl. Math.* **42** 359 (1984)
101. Bacri J-C, Salin D *J. Physique Lett.* **44** 415 (1983)
102. Bacri J-C, Salin D *J. Physique Lett.* **45** 558 (1984)
103. Rosensweig R E *Ferrohydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985) [Розенцвейг Р *Феррогидродинамика* (М.: Мир, 1989)]
104. Карпман В И *Нелинейные волны в диспергирующих средах* (М.: Наука, 1973) [Karpman V I *Non-linear Waves in Dispersive Media* (Oxford: Pergamon Press, 1975)]
105. Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974) [Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)]
106. Ablowitz M J, Segur H *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (Philadelphia: SIAM, 1981) [Абловиц М, Сигур Х *Солитоны и метод обратной задачи* (М.: Мир, 1987)]
107. Leibovich S, Seebass A R (Eds) *Nonlinear Waves* (Ithaca, N.Y.: Cornell Univ. Press, 1974) [Лейбович С, Сибас А Р (Ред.) *Нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)]
108. Yuen H C, Lake B M *Adv. Appl. Mech.* **22** 67 (1982) [Перевод на русск. яз.: Юэн Г, Лэйк Б *Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде* (М.: Мир, 1987)]
109. Захаров В Е, Шабат А Б *ЖЭТФ* **61** 118 (1971) [Zakharov V E, Shabat A B *Sov. Phys. JETP* **34** 62 (1972)]
110. Горьков Л П, Черникова Д М *ДАН СССР* **228** 829 (1976) [Gor'kov L P, Chernikova D M *Sov. Phys. Dokl.* **21** 328 (1976)]
111. Таланов В И *Письма в ЖЭТФ* **2** 218 (1965) [Talanov V I *JETP Lett.* **2** 138 (1965)]
112. Никифоров А Ф, Уваров В Б *Специальные функции математической физики* (М.: Наука, 1984) [Nikiforov A F, Uvarov V B *Special Functions of Mathematical Physics* (Basel: Birkhäuser, 1988)]
113. Зубарев Н М *ЖЭТФ* **114** 2043 (1998) [Zubarev N M *JETP* **87** 1110 (1998)]
114. Зубарев Н М *ЖЭТФ* **121** 624 (2002) [Zubarev N M *JETP* **94** 534 (2002)]
115. Зубарев Н М *ЖЭТФ* **134** 779 (2008) [Zubarev N M *JETP* **107** 668 (2008)]
116. Zubarev N M, Zubareva O V *Phys. Rev. E* **71** 016307 (2005)
117. Taylor G *Proc. R. Soc. Lond. A* **280** 383 (1964)
118. Ramos A, Castellanos A *Phys. Lett. A* **184** 268 (1994)
119. Suvorov V G, Zubarev N M *J. Phys. D Appl. Phys.* **37** 289 (2004)
120. de la Mora J F *Annu. Rev. Fluid Mech.* **39** 217 (2007)
121. Loeb L B *Fundamental Processes of Electrical Discharge in Gases* (New York: J. Wiley, 1939) [Лёб Л *Основные процессы электрических разрядов в газах* (М. – Л.: Гостехиздат, 1950)]
122. Barrero A, Loscertales I G *Annu. Rev. Fluid Mech.* **39** 89 (2007)
123. Larsen G et al. *J. Am. Chem. Soc.* **125** 1154 (2003)
124. Loscertales I G et al. *Science* **295** 1695 (2002)
125. Loscertales I G et al. *J. Am. Chem. Soc.* **126** 5376 (2004)
126. Barrero A, Marin A G, Loscertales I G, 58th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics (Washington: American Physical Society, 2005) NB.00004
127. Li D, Xia Y *Nano Lett.* **4** 933 (2004)
128. Sun Z et al. *Adv. Mater.* **15** 1929 (2003)
129. Yu J H, Fridrikh S V, Rutledge G C *Adv. Mater.* **16** 1562 (2004)
130. Castellanos A (Ed.) *Electrohydrodynamics* (CISM Courses and Lectures, No. 380) (Wien: Springer-Verlag, 1998)
131. Lin C *The Theory of Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Univ. Press, 1955) [Линь Ц *Теория гидродинамической устойчивости* (М.: ИЛ, 1958)]
132. Федорченко А М, Коцаренко Н Я *Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах* (М.: Наука, 1981)
133. Варгафтик Н Б *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей* (М.: Наука, 1972) [Vargaftik N B *Tables on the Thermophysical Properties of Liquids and Gases* (Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1975)]
134. Lide D R (Ed.-in-Chief) *Handbook of Chemistry and Physics* (Boca Raton: CRC Press, 2003)

Electrohydrodynamics of charged surfaces

A.I. Zhakin
Kursk State Technical University,
ul. 50-let Oktyabrya 94, 305040 Kursk, Russian Federation
Tel. + 7 (4712) 56 05 90. Fax + 7 (4712) 56 18 85
E-mail: *zhakin@mail.ru*

This review presents a methodology for, and basic theoretical and experimental results on, the effect of the electric field on dielectric liquids with free surfaces (plane surfaces, menisci, jets and drops). The role of the surface conductivity and the finite charge relaxation time in the development of instabilities is highlighted.

PACS numbers: 41.20.Cv, **67.25.–k**, 68.03.Hj DOI: 10.3367/UFNr.0183.201302c.0153

Bibliography — 134 references *Received 7 November 2011, revised 27 February 2012*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (2) 153 – 177 (2013) *Physics – Uspekhi* **56** (2) (2013)