

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

**Синхронизация автоколебательных сетей
с запаздывающими связями**

В.В. Клиньшов, В.И. Некоркин

Представлены результаты исследований в области синхронизации сетей автоколебательных элементов, взаимодействующих с временным запаздыванием. Выделено несколько основных подходов к изучению таких сетей, различающихся по виду используемых моделей и методов. Дано описание этих подходов и рассмотрены наиболее значимые результаты, полученные с их помощью. Проведено обобщение результатов и выделены наиболее типичные свойства, характерные для систем с запаздыванием в связях.

PACS numbers: 05.45.-a, 05.45.Xt, 87.10.-e

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323

Содержание

1. Введение (1323).
 2. Фазовое описание (1324).
 3. Учёт амплитудной динамики (1327).
 4. Описание на основе импульсных связей (1329).
4.1. Система из двух элементов. 4.2. Малые сети. 4.3. Большие сети.
 5. Заключение (1333).
- Список литературы (1334).

1. Введение

Синхронизация автоколебаний — фундаментальное явление, которое наблюдается в системах самой различной природы в физике, технике, биологии и других областях. Суть эффекта синхронизации состоит в том, что связь между подсистемами часто приводит к качественному изменению динамики системы в целом, а именно к подстройке и согласованию ритмов взаимодействующих частей. История изучения синхронизации, которая насчитывает более трёх столетий, начинается с классических работ Гюйгенса [1] по маятниковым часам и Рэля [2] по органам трубам и камертонам. В первой половине XX в. новым толчком к изучению явления синхронизации стало рождение вакуумной электроники: Ван-дер-Поль и Эплтон исследовали экспериментально

синхронизацию электрических генераторов [3, 4], Андронов и Витт развили теорию этого явления [5, 6]. С тех пор вплоть до настоящего времени наблюдается непрерывающийся рост исследований в области синхронизации одновременно по двум направлениям. С одной стороны, синхронизация обнаруживается во всё новых областях науки и техники. В качестве далеко не полного списка примеров здесь можно привести исследования механических вибраторов [7, 8], турбулентных потоков [9, 10], оптических лазерных систем [11, 12], систем связи и управления [13–15], химических реакций [16] и живых систем [17–21]. С другой стороны, развиваются и совершенствуются теоретические методы изучения синхронизации, ставшие важной частью общей теории нелинейных колебаний. Теория синхронизации, которая восходит к трудам Ван-дер-Поля [4], Андроннова и Витта [22], Крылова и Боголюбова [23, 24], получила дальнейшее развитие в многочисленных работах российских и зарубежных исследователей (см., например, [16, 25–41]). Создание общей теории синхронизации стало возможным благодаря тому удивительному факту, что синхронизация автогенераторов совершенно различной природы часто оказывается основанной на качественно схожих между собой динамических механизмах. Синхронизации как универсальному фундаментальному нелинейному явлению посвящена монография [42], а с некоторыми математическими аспектами синхронизации можно ознакомиться в [43].

Несмотря на столь длительную и богатую историю изучения синхронизации, в данной области остаётся ещё немало направлений, требующих исследования. Одной из важных задач является изучение влияния временных задержек в связях между взаимодействующими подсистемами. Научная значимость и актуальность данной проблемы определяются следующими факторами.

Во-первых, наличие временных задержек в связях между элементами характерно для многих систем совершенно различной природы, что может быть обусловлено конечной скоростью распространения сигналов или дру-

В.В. Клиньшов. Институт прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: vladimir.klinshov@gmail.com
В.И. Некоркин. Институт прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского,
просп. Гагарина 23, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация

Статья поступила 5 февраля 2013 г.,
после доработки 18 апреля 2013 г.

гими факторами. Системы с временной задержкой в связях типичны для электроники и радиофизики [44–54], нелинейной оптики [55–66], нейродинамики [67–73], биологии и физиологии [18, 74–76], а также экологии, экономики, социальных наук [51, 77, 78] и др. В качестве яркого примера системы с существенными задержками в связях можно привести головной мозг млекопитающих. Распространение нервных импульсов между нейронами различных его областей может занимать время, сравнимое с характерным периодом их колебаний или даже большее. Крайне любопытно, что при этом иногда наблюдается полная синхронизация удалённых областей мозга [79–86], что важно для протекающих в нём когнитивных процессов. Другим примером могут служить современные беспроводные системы коммуникации [87, 88]. К задержкам в связях в последнем случае приводят конечность скорости распространения радиосигнала и конечная длительность сообщения, которое для корректного приёма необходимо прослушать полностью. При этом синхронизация различных устройств беспроводной системы необходима для управления их доступом к среде [89, 90]. В качестве ещё одного, наиболее свежего, примера системы, в которой запаздывание играет важную роль, можно привести устройство для так называемых резервуарных вычислений, реализованное недавно на основе лазера с длинной петлёй обратной связи [91, 92].

Во-вторых, временное запаздывание в связях может приводить к существенному изменению и усложнению коллективной динамики системы. Интуитивно кажется понятным, что запаздывание в связях должно препятствовать установлению синхронизации, что действительно наблюдается в ряде случаев. Однако в других случаях наблюдается противоположный эффект, выражающийся в том, что добавление временного запаздывания в межэлементные связи приводит, напротив, к установлению синхронизации в системе. Часто запаздывание вызывает развитие в системе мультистабильности, при которой при одних и тех же параметрах реализуются, в зависимости от начальных условий, различные режимы коллективной динамики, например синхронные и асинхронные. Кроме того, наблюдаются более сложные обусловленные запаздыванием динамические эффекты, которые далее будут описаны подробно.

Также необходимо отметить, что изучение систем с временным запаздыванием часто ставит перед исследователем существенные математические трудности, так как системы такого типа описываются дифференциально-разностными уравнениями и имеют в общем случае фазовое пространство бесконечной размерности. Исследованию систем с запаздыванием в связях и их математической теории посвящён значительный объём литературы (см., например, [93–96]).

В настоящем обзоре представлены наиболее значимые результаты в области синхронизации сетей автоколебательных элементов, взаимодействующих с временным запаздыванием. Ввиду чрезвычайной обширности темы обсудить все относящиеся к ней исследования в одном обзоре не представляется возможным, поэтому за рамками нашего рассмотрения остаются такие направления, как синхронизация хаотических автоколебаний и систем с дискретным временем (ссылки на некоторые работы по данным направлениям приведены в заключении). В данном обзоре основное внимание уделяется синхронизации регулярных автоколебаний. Среди под-

ходов, применяемых в большом числе работ по данной тематике, можно условно выделить несколько основных, различающихся по виду используемых моделей и методам исследования. Ниже мы последовательно описываем данные подходы, приводя для каждого из них основные результаты, полученные с его использованием. Раздел 2 посвящён подходу, основанному на фазовом описании автоколебаний. В разделе 3 описывается подход, учитывающий также амплитудную динамику. В разделе 4 рассматривается подход на основе импульсных связей. В заключении (раздел 5) мы кратко подводим итоги нашего рассмотрения и формулируем общие свойства, наиболее характерные для систем с запаздывающими связями.

В данном обзоре для обозначения систем, состоящих из идентичных или близких автоколебательных подсистем, взаимодействующих между собой, мы используем термины "сеть" или "ансамбль", не делая между ними различия. Для обозначения отдельных подсистем мы употребляем термины "элемент" или "автогенератор". При фазовом описании автоколебаний мы часто, следуя традициям зарубежной литературы, называем автогенераторы "фазовыми осцилляторами". В случае импульсных связей мы также иногда называем автогенераторы "пульсаторами".

2. Фазовое описание

Наиболее распространённый подход к моделированию динамики сетей автогенераторов, взаимодействующих с запаздыванием, основан на так называемом фазовом приближении. Если связь между автоколебательными подсистемами слаба, то она влияет в основном на динамику фаз колебаний, оставляя неизменной их амплитуду. В этом случае, следуя подходу, развитому Курамото [16], можно вывести замкнутые уравнения для фаз автогенераторов в виде

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \omega_j + \sum_{k \neq j} H_{jk}(\varphi_k - \varphi_j). \quad (1)$$

Здесь φ_j — фазы автогенераторов, ω_j — частоты их автономных колебаний, H_{jk} — описывающие межэлементные связи функции, зависящие только от разности фаз взаимодействующих элементов. Часто связь задают в виде гармонической функции: $H(\varphi) \sim \sin \varphi$.

Модели типа (1) давно широко применяются для исследования фазовых эффектов (см., например, [97–101]). В случае двух симметрично связанных автогенераторов система (1) сводится к простейшей одномерной системе на окружности для разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$. В этом случае в системе наблюдается захват частоты, если сила связи между элементами достаточно велика по сравнению с расстройкой их собственных частот. При этом система имеет синхронное решение на единственной общей частоте.

Изучались также более сложные случаи больших ансамблей фазовых осцилляторов. В классической работе [16] был рассмотрен ансамбль с глобальными связями типа "каждый с каждым". Данная модель, изначально предложенная Курамото для описания химических и биологических осцилляторов, впоследствии была признана в качестве универсальной модели для описания синхронизации ансамблей автоколебательных элемен-

тов любой природы [102]. Модель имеет вид

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \omega_j + \frac{K}{N} \sum_{k \neq j} \sin(\varphi_k - \varphi_j), \quad (2)$$

где K — коэффициент связи. Собственные частоты автоколебаний ω_j распределены в некотором интервале около центральной частоты $\bar{\omega}$ с плотностью вероятности $g(\omega)$. Динамика системы (2) при больших N изучена в работе [16], где для характеристики степени синхронизации ансамбля вводится понятие среднего поля

$$Z = R \exp(i\theta) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(i\varphi_j). \quad (3)$$

Амплитуда среднего поля R является параметром порядка системы, характеризующим степень когерентности элементов ансамбля, обусловленную их взаимной синхронизацией. При полном отсутствии синхронизации, т.е. в случае, когда все элементы колеблются на разных частотах, параметр R близок к нулю. При синхронизации какой-либо части элементов ансамбля на определённой частоте их колебания когерентно складываются и возникает ненулевое среднее поле. Курамото показал, что при увеличении силы связи K происходит переход от асинхронного режима к синхронному, аналогичный фазовому переходу второго рода. При превышении силой связи некоторой критической величины K_c , зависящей от распределения частот $g(\omega)$, в системе возникает ненулевое среднее поле, амплитуда которого возрастает пропорционально квадратному корню из надкритичности: $R \sim \sqrt{K - K_c}$. Такой переход соответствует суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Возрастание среднего поля при увеличении надкритичности происходит вследствие захвата частот всё большего числа осцилляторов.

Введение запаздывающих связей в системах связанных фазовых осцилляторов приводит к возникновению в них новых динамических свойств, не наблюдаемых в системах с мгновенными связями. Как показано в [103], при малых коэффициентах связи учёт запаздывания, если оно не слишком велико, приводит лишь к изменению вида функции связи. Однако в случае более сильных связей и больших времён запаздывания в системе возникают принципиально новые эффекты.

Начало исследования влияния запаздывающей связи на динамику системы связанных фазовых осцилляторов положила пионерская работа Шустера и Вагнера [104], в которой был рассмотрен ансамбль из двух фазовых осцилляторов, взаимодействующих с симметричным запаздыванием:

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt} = \omega_1 - K \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t - \tau)), \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} = \omega_2 - K \sin(\varphi_2(t) - \varphi_1(t - \tau)), \quad (5)$$

где $\omega_{1,2}$ — собственные частоты автоколебаний. Авторы работы [104] исследовали синхронные решения системы (4), (5) вида $\varphi_{1,2} = \Omega t \pm \alpha/2$, где Ω — общая частота, α — фазовый сдвиг. Такие решения были найдены аналитически и исследованы на устойчивость. Наиболее интересным эффектом, возникающим в системе с запаздывающими связями, является одновременное существование

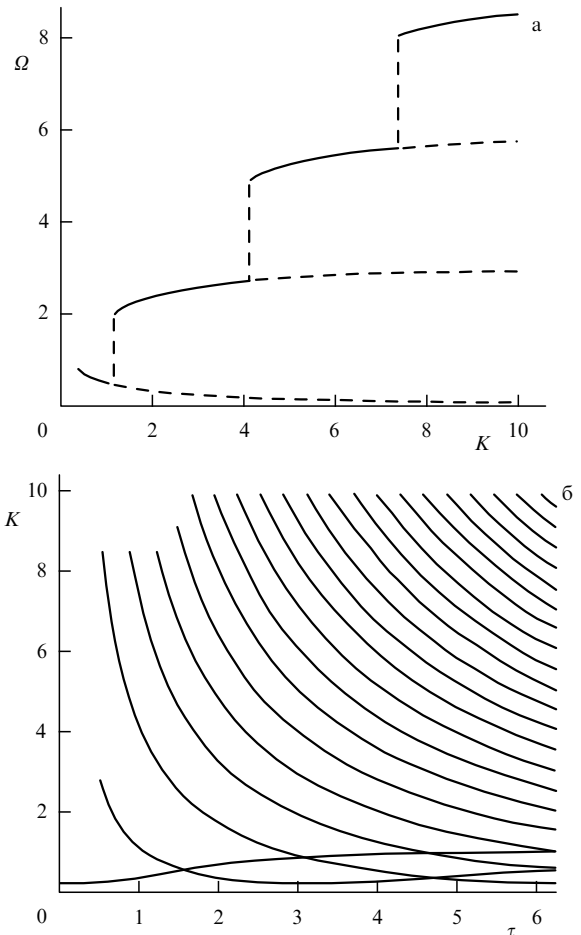


Рис. 1. Синхронные решения при $\tau = 1$ (а) и линии бифуркаций, соответствующих возникновению новых периодических решений (б), в системе двух связанных фазовых осцилляторов (4), (5). Параметры системы $\omega_1 = 0,6$, $\omega_2 = 1,4$. (Из работы [104].)

устойчивых синхронных решений на различных общих частотах. Данное свойство иллюстрируется рис. 1а, на котором изображены устойчивые решения системы в зависимости от силы связи (сплошная линия соответствует решению, характеризующемуся максимальной локальной устойчивостью¹). При превышении коэффициентом связи некоторой величины K_c в системе возникает синхронное решение на частоте, близкой к средней частоте автогенераторов, как и в случае мгновенной связи. Однако дальнейшее увеличение силы связи приводит к возникновению всё новых и новых решений, которые появляются при переходе через точки бифуркаций $K = K_{c_i}$. Вновь возникающие решения характеризуются большей частотой и более сильной локальной устойчивостью, однако при этом решения на меньших частотах не теряют устойчивости. Мультистабильность системы тем выше, чем больше время запаздывания τ и коэффициент связи K . Число различных решений, одновременно существующих в системе при заданных параметрах, может быть оценено как $N \sim (K - K_c)\tau$. Линии бифуркаций, соответствующих возникновению новых решений, приведены на рис. 1б.

¹ В качестве меры локальной устойчивости авторы работы [104] рассматривают наименьший по модулю ненулевой отрицательный ляпуновский показатель.

Позднее модели в виде фазовых осцилляторов с запаздывающими связями использовались для изучения динамики более сложных ансамблей. Так, Енг и Строгатц [105] изучили влияние запаздывающих связей на динамику модели Курамото, модифицировав её следующим образом:

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt} = \omega_j + \frac{K}{N} \sum_{k \neq j} \sin(\varphi_k(t - \tau) - \varphi_j(t)). \quad (6)$$

Вначале авторы [105] изучили систему идентичных фазовых осцилляторов ($g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$, $\omega_0 = 2/\pi$). Рассматривая уравнение Фоккера–Планка для плотности $\rho(\varphi, \omega, t)$, они получили аналитические условия устойчивости режима асинхронных колебаний, а затем рассмотрели глобально синхронные решения системы в виде $\varphi_j(t) = \varphi(t) = \Omega t + \beta$. Из условия самосогласованности ими были получены выражение для общей частоты колебаний

$$\Omega = \omega_0 - K \sin \Omega \tau \quad (7)$$

и условие устойчивости синхронного решения

$$\cos \Omega \tau > 0. \quad (8)$$

Карта динамических режимов системы (6) приведена на рис. 2а. Чёрным цветом обозначены области, в которых единственным устойчивым решением системы является асинхронный режим. Интересно, что данные области формируют периодическую структуру вдоль оси τ с характерным периодом, соответствующим периоду автономных колебаний изолированных осцилляторов. Белым цветом обозначена область, в которой устойчив только режим синхронизации. При увеличении силы связи переход от асинхронного режима к синхронному происходит через области бистабильности, обозначенные серым цветом. Наличие области бистабильности между областями синхронного и асинхронного режимов является принципиально новым динамическим свойством, не наблюдающимся в системе Курамото с мгновенными связями.

При введении разброса частот автогенераторов картина, наблюдаемая в пространстве параметров, несколько изменяется (рис. 2б). Области асинхронных колебаний "приподнимаются" по оси K , и теперь асинхронный режим возможен при любых временах задержки. Однако периодический характер границы области синхронизации сохраняется, и критическое значение коэффициента связи K_c , при котором происходит переход от асинхронного режима к синхронному, зависит от задержки периодическим образом. Отметим также, что в зависимости от значений τ данный переход может осуществляться как через суперкритическую, так и через субкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа. В последнем случае этот переход реализуется через область бистабильности и характеризуется гистерезисом (см. вставки на рис. 2б).

Эрл и Строгатц обобщили приведённые выше результаты для случая произвольного вида функции связи и более широкого класса топологий связей [106]. Предложенная ими модель имеет вид

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt} = \omega + \frac{K}{M} \sum_{k=1}^N a_{jk} f(\varphi_k(t - \tau) - \varphi_j(t)). \quad (9)$$

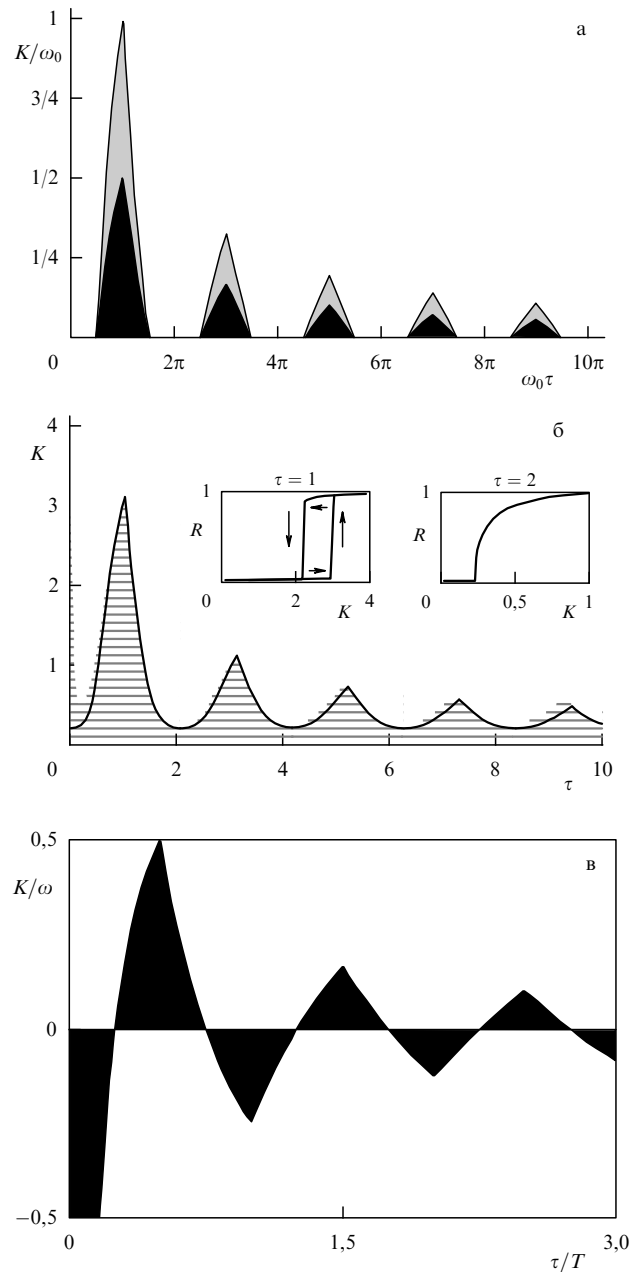


Рис. 2. (а) Карта динамических режимов системы (6) в случае идентичных осцилляторов. Чёрным цветом показаны области устойчивости асинхронных режимов, белый цвет соответствует области устойчивости синхронизации, серый — области бистабильности (из работы [105]). (б) Та же карта при наличии разброса частот. Кривой обозначена граница области синхронизации. На вставках изображены переходы к синхронизации в случае субкритической бифуркации Хопфа при $\tau = 1$ (левая вставка) и $\tau = 2$ (правая вставка) (из работы [105]). (в) Карта динамических режимов ансамбля (9) для функции связи $f(\varphi) = \sin^m \varphi$ для нечётных m . Чёрным цветом показаны области устойчивости асинхронных режимов (из работы [106]).

Здесь $f(\varphi)$ — произвольная 2π -периодическая функция, а матрица a_{jk} отражает топологию связей: $a_{jk} = 1$, если j -й осциллятор воздействует на k -й, и $a_{jk} = 0$ в противном случае. На матрицу связей накладывается следующее ограничение: каждый осциллятор должен быть связан с фиксированным числом M других осцилляторов. Этому условию удовлетворяет, в частности, топологии типа кольца или ансамбля с глобальными связями.

Исследуя синхронные решения системы (9) в виде $\varphi_j(t) = \Omega t$, авторы [106] получили выражение для общей частоты синхронных колебаний

$$\Omega = \omega + Kf(-\Omega\tau) \quad (10)$$

и доказали, что синхронное решение является устойчивым тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$Kf'(-\Omega\tau) > 0. \quad (11)$$

Заметим, что при выборе функции связи в виде $f(\varphi) = -\sin \varphi$ критерий устойчивости (11) совпадает с условием (8).

Примечательно, что критерий устойчивости оказывается очень простым: устойчивость или неустойчивость синхронного решения зависит только от знака производной функции связи. Вследствие периодичности функции связи границы области синхронизации также имеют явно выраженную периодическую структуру. Это видно из рис. 2в, на котором приведена карта динамических режимов системы (9) для функции связи в виде $f(\varphi) = -\sin^m \varphi$ для нечётных m .

В литературе также рассматривались сети фазовых осцилляторов с более сложными типами и топологиями связей. В работе [107] показано, что в случае ансамбля с глобальной обратной связью (так называемого компораторного типа) введение запаздывания приводит к десинхронизации системы. В [108] была изучена двумерная решётка с локальными запаздывающими связями, для которой также показано существование целого набора синхронных режимов, характеризующихся различными частотами. Однако устойчивым среди этих режимов оказывается только режим с наименьшей частотой, остальные режимы являются метастабильными. Даже при небольшом запаздывании частота устойчивого режима синхронизации оказывается существенно меньшей собственных частот индивидиальных элементов. Данный эффект был назван "подавлением частоты" системы.

В случае цепочки осцилляторов с локальными связями, рассмотренной в работе [109], было изучено возникновение частотных кластеров. В работе [110] показано, что для различных топологий задержки в связи вызывают различные эффекты. Например, в кольце однонаправленно связанных осцилляторов задержка усиливает мультистабильность системы, а в кольце двунаправленно связанных осцилляторов, напротив, увеличивает область притяжения одного из решений, характеризующихся наибольшей симметрией.

Интересные результаты получаются при рассмотрении ансамблей фазовых осцилляторов, в которых задержка сигнала между элементами зависит от их взаимного расположения. Данная модель предполагает, что элементы находятся в некоторой среде, скорость распространения сигналов по которой равна некоторой постоянной величине c . Тогда взаимодействие между элементами, разделёнными расстоянием r_{jk} , характеризуется задержкой $\tau_{jk} = r_{jk}/c$. В работах [111, 112] рассмотрены ансамбли глобально связанных фазовых осцилляторов, расположенных в виде одномерной цепочки с периодическими граничными условиями (кольцо). Показано, что введение пространственно зависимых задержек в связи приводит к разрушению режима глобальной

синхронизации и возникновению в кольце распространяющихся структур — фазовых волн. Похожий результат наблюдается при рассмотрении двумерной плоской топологии [113, 114]. В этом случае при достаточно больших задержках глобальная синхронизация нарушается и в системе возникают различные фазовые структуры: ролики, прямоугольные и ромбовидные решётки, кольцевые и спиралевидные волны и др.

3. Учёт амплитудной динамики

Фазовое описание автоколебаний является хорошим приближением, если связь между автоколебательными подсистемами мала. Если же связь автогенераторов становится достаточно большой, то она оказывает влияние не только на фазовую динамику автогенераторов, но и на их амплитуды. В случае слабонелинейных автоколебаний для изучения возникающих эффектов можно использовать метод усреднения Ван-дер-Поля. Взаимная синхронизация двух автогенераторов с учётом амплитудной динамики изучена Аронсоном и др. в работе [115], где рассмотрен ансамбль из двух связанных систем Ван-дер-Поля вблизи бифуркации Андронова–Хопфа. Такой ансамбль описывается следующей системой уравнений для амплитуд и фаз:

$$\frac{dr_1}{dt} = r_1(1 - \kappa\gamma - r_1^2) + r_2\gamma \cos \phi, \quad (12)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = r_2(1 - \kappa\gamma - r_2^2) + r_1\gamma \cos \phi, \quad (13)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta + q_1 r_1^2 - q_2 r_2^2 - \gamma \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} \right) \sin \phi. \quad (14)$$

Здесь r_1 и r_2 — амплитуды колебаний автогенераторов, $\phi = \theta_1 - \theta_2$ — разность фаз колебаний, γ — сила связи, параметр κ определяет тип связи (например, $\kappa = 1$ соответствует так называемой диффузной связи). Параметр Δ определяет частотную расстройку между автогенераторами, q_1 и q_2 задают зависимость частоты колебаний от амплитуды в несвязанных системах.

Наиболее интересным эффектом, обнаруженным в системе (12)–(14), является так называемое вымирание колебаний (oscillations death). Данный эффект заключается в том, что при связывании автогенераторов колебания в них прекращаются и амплитуды r_j принимают нулевые значения. С точки зрения фазового пространства, этот эффект соответствует устойчивому в целом состоянию равновесия в начале координат. Авторы работы [115] провели линейный анализ устойчивости данного состояния равновесия и показали, что оно может быть устойчивым только при условии $|\Delta| > 2/\kappa$. Таким образом, в случае диффузной связи "гибель" колебаний наблюдается лишь при достаточно большой частотной расстройке, $\Delta > 2$.

В работе [115] был проведён также полный бифуркационный анализ системы (12)–(14) в случае изохронных автоколебаний и диффузионной связи ($q_j = 0$, $\kappa = 1$). Пространство параметров системы разбивается на три области с качественно различным поведением (рис. 3а). При малых расстройках Δ и больших силах связи γ в системе наблюдается синхронизация, при которой автогенераторы колеблются с постоянным сдвигом фаз. При больших расстройках и слабых связях динамика системы

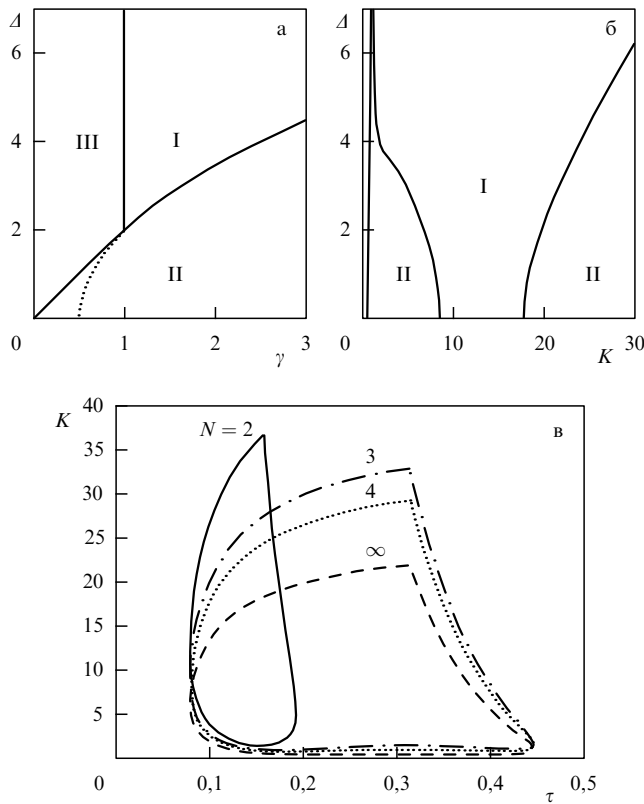


Рис. 3. (а) Бифуркационная диаграмма системы двух связанных слабонелинейных автогенераторов (12)–(14) в плоскости параметров сила связи–частотная расстройка. I — область вымирания колебаний, II — область синхронизации, III — область асинхронных колебаний (из работы [115]). (б) Бифуркационная диаграмма в плоскости параметров K – Δ для системы двух автогенераторов с запаздывающей связью (15)–(18), параметры $\tau = 0,0817$, $\bar{\omega} = 10$ (из работы [116]). (в) Область вымирания колебаний в системе идентичных автогенераторов (19) в плоскости задержка–сила связи для различных значений N (из работы [116]).

является асинхронной — разность фаз автогенераторов неограниченно возрастает. В случае больших расстройек и сильных связей в системе происходит вымирание колебаний. При введении неизохронности автоколебаний ($q_j \neq 0$) бифуркационная диаграмма системы усложняется, на ней появляются зоны мультистабильности.

Включение в рассмотрение амплитудной динамики может вызывать качественное изменение коллективного поведения и более сложных ансамблей автоколебательных элементов. Так, в случае цепочек и решёток связанных автогенераторов изменение амплитуд автоколебаний может приводить к сложной динамике фазовых кластеров [30]. В системе глобально связанных автогенераторов учёт амплитуд приводит к формированию фазово-амплитудных кластеров [117].

Исследование влияния задержки в связи на фазово-амплитудную динамику автоколебательной системы впервые было проведено в работах Редди и др. [116, 118, 119]. Авторы указанных работ рассмотрели систему двух диффузионно связанных автогенераторов:

$$\frac{dr_1}{dt} = r_1(1 - K - r_1^2) + Kr_2 \cos[\theta_2(t - \tau) - \theta_1], \quad (15)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = r_2(1 - K - r_2^2) + Kr_1 \cos[\theta_1(t - \tau) - \theta_2], \quad (16)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 + K \frac{r_2(t - \tau)}{r_1} \sin[\theta_2(t - \tau) - \theta_1], \quad (17)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 + K \frac{r_1(t - \tau)}{r_2} \sin[\theta_1(t - \tau) - \theta_2]. \quad (18)$$

Здесь r_j и θ_j — амплитуды и фазы автогенераторов, ω_j — частоты автономных автоколебаний, K — сила связи, τ — временная задержка связи. Было проведено также исследование линейной устойчивости состояния равновесия в начале координат, соответствующего вымиранию колебаний, и в итоге был получен достаточно неожиданный результат. Оказалось, что в случае связи с запаздыванием вымирание колебаний может наблюдаться даже для идентичных автогенераторов, т.е. при нулевой частотной расстройке $\Delta = \omega_1 - \omega_2$. Данное свойство иллюстрируется рис. 3б: область вымирания колебаний здесь распространяется вплоть до значения $\Delta = 0$. Этот эффект был назван "смертью от запаздывания" (death by delay) [120]: в отсутствие задержки в связи автогенераторы синхронизируются, тогда как введение данной задержки вызывает вымирание колебаний. Качественное объяснение этого эффекта дано Стругатцем в работе [120]. В случае мгновенной связи точки, изображающие автогенераторы в фазовом пространстве, "притягиваются" друг к другу и стремятся сблизиться на предельном цикле, тогда как в случае запаздывающей связи каждая точка "притягивается" к позиции, в которой другая точка находилась некоторое время назад. При соответствующем выборе запаздывания это может приводить к "затягиванию" точек с цикла в начало координат и вымиранию колебаний.

Вымирание колебаний в системе идентичных автогенераторов из-за наличия запаздывающей связи наблюдается в случае не только двух связанных элементов, но и больших ансамблей. В работах [116, 119] Редди и др. рассмотрели данный эффект для различных топологий связи — глобальной и кольцевой. В случае связи типа "каждый с каждым" ансамбль из N автогенераторов описывается следующей системой уравнений для комплексных амплитуд $Z_j = r_j \exp(i\theta_j)$:

$$\frac{dZ_j(t)}{dt} = (1 + i\omega_j - |Z_j(t)|^2)Z_j(t) + \frac{K}{N} \sum_{k \neq j} [Z_k(t - \tau) - Z_j(t)]. \quad (19)$$

В случае $\tau = 0$ такая система была изучена Миролло и Стругатцем [121], которые получили аналитические условия вымирания колебаний. Результат [121] заключается в том, что, как и в случае двух связанных автогенераторов, вымирание колебаний происходит только при существенном разбросе частот и достаточно сильной связи. Редди и др. [122] показали, что в больших ансамблях с запаздывающими связями вымирание колебаний возможно даже без частотных расстройек. Ими были получены границы области вымирания колебаний (death island) для ансамбля идентичных автогенераторов. Вид данных областей показан на рис. 3в для различных значений N и в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Таким образом, вымирание колебаний из-за наличия запаздывающих связей является достаточно общим эффектом, характерным для ансамблей автогенераторов различных топологий с неслабыми связями. Добавим, что данный эффект обнаружен экспериментально в системе двух нелинейных LC-контуров, связанных через цифровую линию задержки [122].

Подход к исследованию ансамблей автогенераторов с запаздывающими связями, учитывающий не только фазовую, но и амплитудную динамику, был развит в ряде более поздних работ. Так, Д'Хьюис с соавторами [123] показали, что учёт амплитудной динамики может приводить к возникновению хаотических режимов. Был также проведён детальный анализ системы из двух [124] и трёх [125] генераторов Ван-дер-Поля с диффузионной запаздывающей связью. В последнее время целая серия работ была посвящена динамике ансамблей осцилляторов Стюарта–Ландау (нормальная форма бифуркации Андронова–Хопфа) с так называемыми запаздывающими фазово-зависимыми связями (phase-dependent coupling). В этом случае выбирается комплексный коэффициент связи: $\tilde{K} = K \exp(i\theta)$, где θ — фаза связи (coupling phase). Показано, что, выбирая фазу связи, можно эффективно управлять динамикой системы посредством переключения между различными колебательными режимами [126–129].

4. Описание на основе импульсных связей

Подход к изучению систем с запаздывающими связями, альтернативный описанным в разделе 2 и 3 фазовому и фазово-амплитудному подходам, основан на идее так называемых импульсных связей. К системам, для которых характерна импульсная связь, относятся нейронные сети, пейсмейкерные клетки сердца, популяции светлячков и пр. [130–133]. В таких системах динамика автоколебательных элементов характеризуется периодической генерацией коротких сигналов — импульсов — на фоне длительных периодов затишья. Воздействие таких импульсов на другие элементы приводит к скачкообразному изменению их состояния. При этом переходные процессы нередко затухают достаточно быстро и автогенератор, испытавший воздействие, быстро возвращается в устойчивое колебательное состояние. Это позволяет считать, что автогенератор постоянно находится в автоколебательном режиме, а импульсные воздействия приводят к мгновенному изменению, или переустановке, фазы его колебаний.

При моделировании систем с импульсными связями в качестве базовых элементов обычно используются модели типа фазового осциллятора. Состояние базового элемента при этом описывается единственной переменной — фазой φ , возрастающей монотонно с постоянной скоростью $d\varphi/dt = \omega$. При достижении фазой максимального значения, например единичного, элемент генерирует импульс и переходит в состояние с нулевой фазой. Таким образом, в автономном случае динамика базового элемента заключается в периодической генерации импульсов с постоянным периодом $T = 1/\omega$. Иногда такие элементы называют также пульсаторами. Взаимодействие пульсаторов представляет собой обмен импульсами. При воздействии импульса, сгенерированного одним из элементов, на другой элемент происходит мгновенный сдвиг фазы последнего на некоторую величину, так что $\varphi(t+0) = \varphi(t-0) + \Delta\varphi$.

Сдвиг $\Delta\varphi$ зависит только от мгновенного значения $\varphi(t-0)$ фазы непосредственно перед воздействием. Величина $\Delta\varphi$ может быть как положительной, что соответствует "ускорению" осциллятора, так и отрицательной, что соответствует его "замедлению". Зависимость $\Delta\varphi = f(\varphi)$, называемая "кривой переустановки фазы" (phase

resetting curve, phase response curve, PRC [134]), определяет ускорение/замедление ритма осциллятора, обусловленное изменением его фазы внешним воздействием. Понятие кривой переустановки фазы широко использовалось в работах, посвящённых колебаниям в биологических системах: клетках сердечной мышцы, нейронных сетях [135–141]. Универсальность подхода на основе кривых переустановки фазы заключается в том, что соответствующим выбором формы кривой к модели фазовых осцилляторов могут быть сведены другие популярные модели, например модели накопления и сброса, изохронных часов и др. [139].

В наиболее общем виде сеть из N фазовых осцилляторов с запаздывающими импульсными связями описывается системой уравнений [142]

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt} = \omega_j + \sum_{k=1}^N f_{jk}(\varphi_j(t)) \sum_{t_k^p} \delta(t - t_k^p - \tau_{jk}). \quad (20)$$

Здесь φ_j и ω_j — мгновенные фазы и собственные частоты элементов соответственно, $j = 1, 2, \dots, N$. Функция $f_{jk}(\varphi)$ описывает кривую переустановки фазы k -го элемента под действием импульсов, приходящих от j -го элемента. Обычно можно считать, что форма кривой $f_{jk}(\varphi)$ одинакова для всех элементов и связи между ними различаются только количественно и характеризуются различными коэффициентами связи μ_{jk} , так что $f_{jk}(\varphi) = \mu_{jk} f(\varphi)$. В таких случаях мы будем называть $f(\varphi)$ функцией связи. Запаздывание между элементами определяется величинами τ_{jk} . Вторая сумма в правой части (20) берётся по всем моментам t_k^p генерации импульсов k -м элементом. Данная сумма принимает ненулевое значение только в моменты времени $t_k^p + \tau_{jk}$, в которые данные импульсы воздействуют на j -й элемент. Именно в эти моменты происходит мгновенный сдвиг фазы j -го элемента.

Строго говоря, подход на основе импульсных связей является частным случаем фазового описания автоколебательных сетей со специфическим видом функции связи в виде дельта-функции (ср. системы (1) и (20)). Однако такой выбор функции связи приводит к скачкообразной динамике фаз элементов сети и делает задачу её описания и изучения принципиально иной с методологической точки зрения, что позволяет выделить модели с импульсными связями в отдельное направление. Удобным и естественным инструментом при исследовании систем с импульсными связями являются точечные отображения [143]. При отсутствии временных задержек в каждый момент t_1 возбуждения одного из элементов происходит мгновенное воздействие сгенерированного импульса на другие элементы ансамбля и, соответственно, мгновенное изменение их состояния. По значениям фаз элементов непосредственно перед этим моментом можно вычислить сдвиги фаз под действием импульса, а по новым значениям фаз — определить следующий момент возбуждения одного из автогенераторов. В результате возникает отображение, описывающее изменение состояния ансамбля между двумя последовательными моментами генерации импульсов его элементами.

Однако если в системе присутствуют временные задержки, то построение точечного отображения затрудняется. Информации о мгновенных значениях фаз элементов в этом случае недостаточно для предсказания динамики системы, так как на неё могут оказывать влияние сигналы, сгенерированные системой ранее. Таким обра-

зом, для полного описания состояния ансамбля необходима информация не только о его мгновенном состоянии, но и о его активности в прошлом. При этом чем больше величина задержек, тем длиннее промежутки времени в прошлом, который может повлиять на динамику системы в будущем. Благодаря импульсному характеру связей в системе (20) из всей информации об активности ансамбля в прошлом важны только моменты генерации элементами импульсов t_k^p .

Важный вопрос заключается в том, какое именно число ранее сгенерированных импульсов необходимо учитывать и является ли это число конечным. Ответ на этот вопрос дан нами в работе [142], где показано, что при не слишком сильных связях и определённых начальных условиях для полного описания состояния системы достаточно информации о не более чем конечном числе P последних импульсов каждого элемента². В этом случае для описания системы удобно ввести конечномерный вектор состояния, который определяется как

$$\xi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t), x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^P, x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^P, \dots, x_N^1, x_N^2, \dots, x_N^P), \quad (21)$$

где $x_j^p = t - t_j^p$ — время, прошедшее с момента генерации j -м элементом p -го импульса, x_j^1 соответствует последнему сгенерированному импульсу, x_j^2 — предпоследнему и т.д. Вектор $\xi(t)$ полностью описывает состояние системы (20). В работе [142] сконструировано точечное отображение, определяющее эволюцию системы. Динамика системы при этом рассматривается как последовательность некоторых дискретных событий, так называемых N -событий, каждое из которых связано с мгновенным скачкообразным изменением компонент вектора состояния. Такие события могут быть двух типов: связанные либо с генерацией импульса одним из элементов, либо с воздействием ранее сгенерированного импульса на какой-либо элемент ансамбля. Сконструированное точечное отображение описывает изменение вектора состояния между последовательными N -событиями и позволяет исследовать динамику ансамблей с произвольной структурой связей.

4.1. Система из двух элементов

Наиболее простым примером ансамбля с импульсными запаздывающими связями является ансамбль из двух элементов. В случае малого запаздывания система из двух связанных пульсаторов была изучена Эрнстом и др. [144, 145] в контексте динамики нейронных ансамблей. Рассматривались два случая: случай возбуждающих связей, в котором внешнее воздействие ускоряет генерацию очередного импульса, и случай подавляющих связей, в котором внешнее воздействие тормозит генерацию импульса. Было показано, что динамика системы в этих двух случаях существенно различна. При наличии запаздывания возбуждающая связь приводит к внефазовой синхронизации ансамбля: элементы возбуждаются с одинаковым периодом, но не одновременно. В этом заключается отличие от случая мгновенного взаимодей-

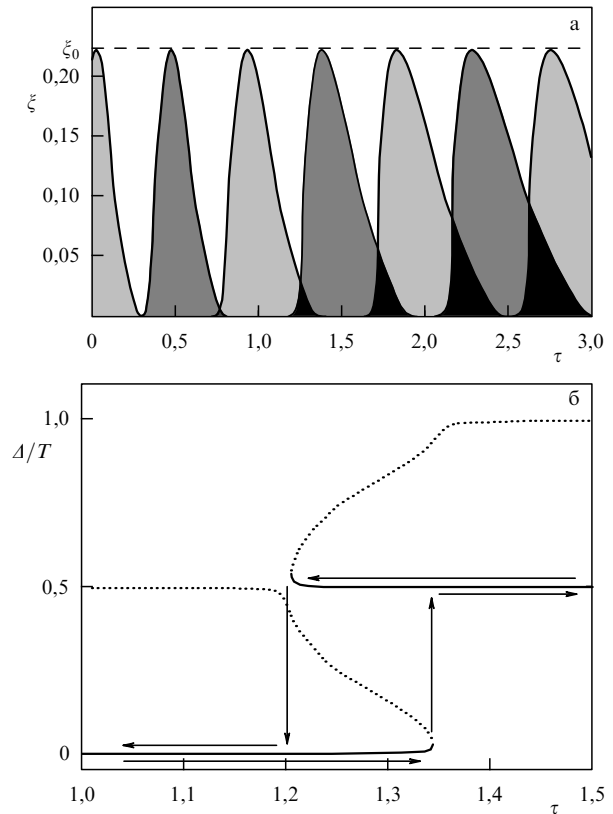


Рис. 4. (а) Бифуркационная диаграмма ансамбля двух связанных пульсаторов (20) в плоскости запаздывание (τ) – частотная расстройка (ξ). Параметры системы $\mu = 0,1$, $\omega_1 = 1$. Светло-серые области соответствуют зонам синфазной синхронизации, темно-серые — противофазной. Чёрные области соответствуют наложению различных зон и мультистабильности. (б) Бифуркация перескока фазы в ансамбле двух связанных пульсаторов (20). Зависимость разности фаз элементов Δ , соответствующей периодическим решениям системы, от времени задержки τ . Сплошные линии — устойчивые ветви решений, пунктирные — неустойчивые. (Из работы [149].)

ствия, в котором ансамбль с возбуждающими связями синхронизируется строго синфазно [130]. Достаточно сильные подавляющие связи, напротив, синхронизируют элементы ансамбля в фазе даже при наличии запаздывания.

Исследовалось также влияние на динамику пары связанных пульсаторов различных факторов, таких как несимметричность связей [146] или конечность длительности импульсов [147, 148].

В случае произвольных, в том числе больших, задержек ансамбль из двух элементов был изучен в работе [149], где рассматривался случай с симметричными связями, характеризующимися функцией связи $f_{12}(\varphi) = f_{21}(\varphi) = f(\varphi)$ и запаздыванием $\tau_{12} = \tau_{21} = \tau$. Для описанной системы были получены решения методом точечных отображений Пуанкаре, соответствующие режимам и устойчивости. Было показано, что в пространстве параметров существует набор областей, в которых наблюдается синхронизация малого ансамбля, — так называемые зоны синхронизации. На рисунке 4а данные зоны изображены на плоскости задержки τ и частотной расстройки элементов $\xi = \omega_2 - \omega_1$ для синусоидальной функции связи $f(\varphi) = -\mu \sin 2\pi\varphi$. Синхронизация наблюдается в ограниченной полосе частотных расстройек ξ_0 ,

² В работе [142] также приведён пример нетривиальной динамики системы с сильными связями, для которой данное условие не выполняется.

определяемой как

$$\xi_0 = \frac{2\mu\omega_1}{1-\mu}. \quad (22)$$

Вдоль оси τ зоны синхронизации образуют периодическую структуру. Зоны синхронизации простираются вдоль оси τ до бесконечности, и синхронные режимы наблюдаются в системе при сколь угодно больших задержках связи. Примечательно наблюдаемое чередование зон различных типов, отвечающих синфазной и противофазной синхронизации элементов ансамбля. При увеличении задержки τ "ширина" зон возрастает, что приводит к наложению зон различных типов и возникновению бистабильности между синфазным и противофазным режимами. Остановимся более подробно на данном явлении.

Наложение соседних зон синхронизации происходит в областях малых частотных расстройок ξ . При этом в определённом интервале задержек τ в системе одновременно существуют режимы синфазной и противофазной синхронизации. В этом случае поведение ансамбля при медленном изменении параметра τ характеризуется наличием гистерезиса. Пример такого поведения приведён на рис. 4б. Пусть ансамбль изначально находится в режиме синфазной синхронизации, а параметр τ медленно возрастает от $\tau = 1$ до $\tau = 1,5$. При достижении параметром τ критического значения $\tau = \tau_1 \approx 1,34$ происходит резкое переключение ансамбля в режим противофазной синхронизации. Данное явление получило название "бифуркации перескока фазы" (phase flip bifurcation [150–152]). Динамический механизм наблюдаемого эффекта связан с исчезновением в фазовом пространстве системы устойчивого синфазного решения через седло-узловую бифуркацию при $\tau = \tau_1$. При обратном движении по параметру τ в сторону его уменьшения, от $\tau = 1,5$ до $\tau = 1,0$, происходит противоположное переключение ансамбля — из противофазного режима в синфазный — при $\tau = \tau_2 \approx 1,21$. При данном значении τ противофазное устойчивое решение также исчезает через седло-узловую бифуркацию.

Ширина интервалов бистабильности синфазного и противофазного режимов, на границах которых наблюдается бифуркация перескока фазы, возрастает с увеличением τ . Для больших τ характерно также возникновение мультистабильности иного типа, связанной с одновременным существованием устойчивых синхронных и асинхронных режимов. Ещё одним специфическим свойством системы с большим запаздыванием является значительное возрастание длительности переходных процессов, предшествующих установлению синхронного режима. В [149] для длительности этих переходных процессов получена оценка $T \sim \tau^3$.

4.2. Малые сети

Следующей по сложности после системы из двух элементов является сеть из небольшого числа элементов. В качестве примера такой сети в [153] рассмотрен ансамбль из четырёх пульсаторов с гетерогенными симметричными связями (рис. 5а). Величины запаздывания между каждой парой элементов представлены на рис. 5б, частоты пульсаторов одинаковы и равны $\omega = 1$, связи также являются одинаковыми для каждой пары и описываются функцией $f(\varphi) = -\mu \sin 2\pi\varphi$. При мгновен-

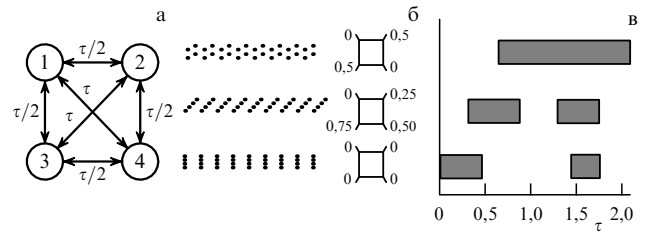


Рис. 5. (а) Ансамбль из четырёх связанных пульсаторов. (б) Динамические режимы этого ансамбля: тёмными кружками показаны моменты возбуждения элементов ансамбля, квадратами с числами обозначены фазовые соотношения соответствующих паттернов. (в) Затемнёнными полосами показаны интервалы значений параметра τ , в которых наблюдаются динамические режимы, изображённые на рис. б. (Из работы [153].)

ных связях ($\tau = 0$) в ансамбле наблюдается режим глобальной синхронизации, в котором фазы возбуждения всех четырёх элементов равны: $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (0, 0, 0, 0)$. В случае малого запаздывания глобальная синхронизация сохраняется, но при достаточно большом запаздывании она разрушается. В ансамбле возникают различные паттерны ритмической активности, которые характеризуются периодическим возбуждением элементов ансамбля с разными фазовыми соотношениями. Таких паттернов наблюдается два вида: 1) паттерн последовательного возбуждения, в котором все элементы возбуждаются поочерёдно со сдвигом фазы в четверть периода: $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (0, 0,25, 0,5, 0,75)$, или симметричный ему; 2) паттерн попарной синхронизации, в котором элементы разбиваются на две пары. Каждая пара синхронизована в фазе, а различные пары синхронизованы в противофазе: $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (0, 0,5, 0, 0,5)$. Каждый из указанных паттернов существует в определённых интервалах параметра τ , что проиллюстрировано на рис. 5в.

Таким образом, как и в случае двух элементов, введение запаздывания в малом ансамбле приводит к возникновению в нём новых динамических режимов. Так же как и в случае двух элементов, переключение ансамбля между различными динамическими режимами при медленном изменении задержки имеет гистерезисный характер: интервалы, соответствующие различным паттернам синхронизации, частично перекрываются. Кроме того, вблизи границ областей существования паттернов наблюдаются области со сложной нерегулярной динамикой. Отметим, что свойство запаздывания формировать в системе новые динамические режимы сильно зависит от структуры связей. Так, в работе [154] для ансамбля из четырёх пульсаторов с возбуждающими и подавляющими связями показано, что наличие связей обоих типов позволяет ансамблю сохранять режим глобальной синхронизации в широком диапазоне значений задержек.

С увеличением числа элементов в ансамбле его динамика усложняется. Например, в работе [155] рассматривался ансамбль из пяти элементов с симметричными связями. В таком ансамбле наблюдается большое разнообразие динамических режимов с различными конфигурациями разбиения элементов на кластеры и фазовыми соотношениями между кластерами. Под действием небольших внешних возмущений возможны переходы между различными конфигурациями, подчиняющиеся

определённым правилам, что позволяет эффективно управлять динамикой ансамбля.

4.3. Большие сети

Перейдём к случаю сетей, состоящих из большого числа пульсаторов с запаздывающими связями. Герстнером [156] была изучена динамика таких сетей произвольной топологии, но для определённого вида функции связи: $f_{jk}(\varphi) = J_{jk} = \text{const}$. Накладывается также ограничение на суммарный вес связей, который должен быть нормированным и одинаковым для всех элементов: $\sum_j J_{ij} = A < 1$ для всех i . Показано, что если максимальная задержка в сети не превышает величины $\Delta = 1 - A$, то в сети возникает периодический режим. При этом периоды колебания всех элементов равны, однако фазовые соотношения между ними не определены: элементы могут возбуждаться не в фазе. В случае дискретных однородных задержек система достигает синхронного состояния за конечное время, а в общем случае — асимптотически.

В работе [157] рассматривалась сеть, состоящая из идентичных элементов ($\omega_j = 1$) с глобальными связями типа "каждый с каждым", при произвольном виде функции связи $f_{jk}(\varphi) = f(\varphi)$ и запаздывании $\tau_{jk} = \tau$. Такой ансамбль описывается системой уравнений

$$\frac{d\varphi_j(t)}{dt} = \omega + \sum_{k=1}^N f(\varphi_k(t)) \sum_{t_k^p} \delta(t - t_k^p - \tau). \quad (23)$$

Основное внимание уделялось режиму глобальной синхронизации ансамбля, в котором все пульсаторы излучают импульсы периодически в одни и те же моменты времени. Общий период при этом определяется соотношением

$$T = 1 - \mu(N - 1) f(\tau \bmod T). \quad (24)$$

Исследование устойчивости периодического решения позволило сформулировать простой критерий устойчивости режима глобальной синхронизации. Оказалось, что устойчивость данного режима определяется знаком производной функции связи: синхронное решение устойчиво при

$$f'(\tau \bmod T) < 0, \quad (25)$$

где $f'(\varphi) = df(\varphi)/d\varphi$. Критерий устойчивости (25) определяет периодическую структуру пространства параметров ансамбля (23). Легче всего это проиллюстрировать в случае слабых связей, когда $\mu N \ll 1$. При этом период общих колебаний $T \approx 1$ и критерий устойчивости приобретает вид $f'(\tau \bmod 1) < 0$. Последнее неравенство является периодическим по параметру τ , поэтому области глобальной синхронизации в пространстве параметров ансамбля также имеют периодическую структуру. Для гармонической связи $f(\varphi) = -\mu \sin 2\pi\varphi$ эти области изображены на рис. 6а. При малых коэффициентах связи, $\mu \ll 1$, границы областей синхронизации определяются соотношением

$$\tau = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \quad (26)$$

где k — произвольное целое неотрицательное число. Синхронный режим устойчив при $\tau \bmod 1 < 1/4$ или

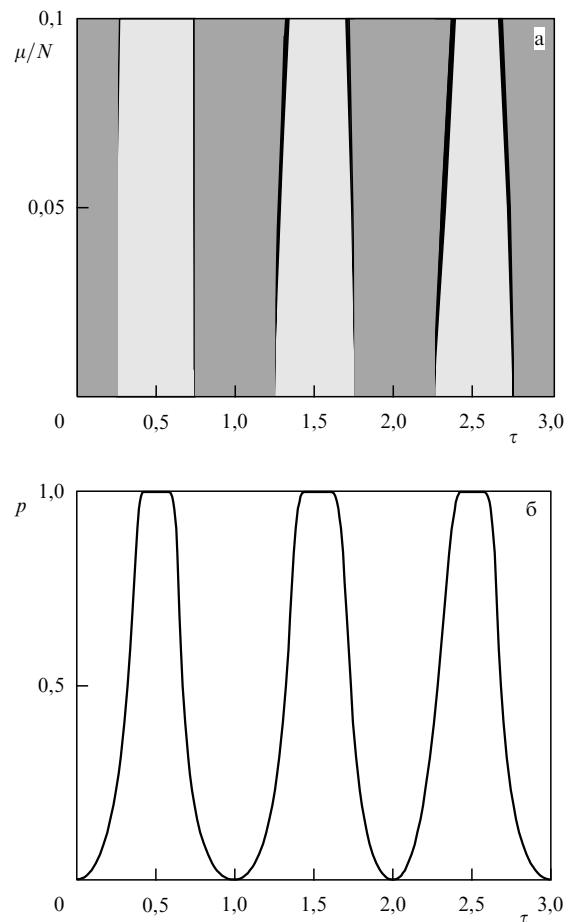


Рис. 6. (а) Карта динамических режимов ансамбля из 10 пульсаторов с гармонической связью $f(\varphi) = -\mu \sin 2\pi\varphi$. Тёмно-серым цветом обозначены области устойчивости режима глобальной синхронизации, узкие чёрные полосы — области бистабильности синхронного и асинхронного режимов. (б) Вероятность установления режима глобальной синхронизации в ансамбле из 10 пульсаторов со всюду убывающей функцией связи $f(\varphi) = \mu(1 - 2\varphi)$. Начальные условия выбирались случайно, $\mu = 0,01$. (Из работы [157].)

$\tau \bmod 1 > 3/4$, а при $1/4 < \tau \bmod 1 < 3/4$ — неустойчив. При больших коэффициентах связи области устойчивости синхронного режима расширяются. Вне областей синхронизации элементы ансамбля генерируют импульсы также периодически, но в различных фазах, причём при одних и тех же параметрах возможны различные фазовые соотношения между пульсаторами. Вблизи границ зон устойчивости синхронного режима наблюдаются узкие полосы мультистабильности синхронного и асинхронного режимов.

В работах, посвящённых коллективной динамике нейронных ансамблей, часто отмечается принципиальное различие между влиянием на синхронизацию возбуждающих и подавляющих связей. В частности, указывалось, что при наличии задержек синхронизация ансамбля чаще обусловлена подавляющими, а не возбуждающими связями [156, 158–161]. Интересно, что, согласно критерию (25), устойчивость режима глобальной синхронизации определяется только знаком производной функции связи $f(\varphi)$ независимо от знака и величины самой функции.

Таким образом, возможна синхронизация ансамбля как с положительными ("возбуждающими"), так и с

отрицательными ("подавляющими") связями, что подтверждено в [157]. Для моделирования ансамбля с возбуждающими связями функция связи выбиралась в виде $f(\varphi) = \mu(1 - \varphi)$, что даёт $f(\varphi) \geq 0$ для всех φ . Связь такого типа является возбуждающей, так как внешний стимул всегда ускоряет генерацию элементом очередного импульса. Для моделирования ансамбля с подавляющими связями функция связи имела вид $f(\varphi) = -\mu\varphi$. Здесь $f(\varphi) \leq 0$ для всех φ , поэтому внешний стимул всегда тормозит генерацию импульса и связь может быть названа подавляющей. Было показано, что в обоих описанных случаях в ансамблях наблюдается глобальная синхронизация.

Из критерия (25) следует, что глобальная синхронизация в ансамблях со всюду убывающей функцией связи будет устойчивой при любых значениях параметра τ . Однако данный критерий ничего не говорит о единственности данного режима. Например, для всюду убывающей функции связи $f(\varphi) = \mu(1 - 2\varphi)$ глобальная синхронизация действительно наблюдается почти при всех значениях τ , кроме целых, попадающих на точки разрыва функции f , когда линейный анализ неприменим. Однако аттрактор, соответствующий глобальной синхронизации, не всегда является единственным в системе.

На рисунке 6б приведена зависимость вероятности установления режима глобальной синхронизации от величины запаздывания τ при случайных начальных условиях. Данная вероятность равна единице лишь в небольших окрестностях полужелтых значений параметра τ и быстро уменьшается до нуля при приближении к целым значениям τ . В областях, где эта вероятность меньше единицы, наблюдается сосуществование синхронных и асинхронных режимов. Аналогичный эффект наблюдался для малого запаздывания в [162].

5. Заключение

Мы описали основные подходы к изучению сетей автоколебательных элементов, взаимодействие между которыми происходит с запаздыванием. Исторически первый и наиболее распространённый подход основан на модели фазовых осцилляторов типа Курамото. Использование фазовых моделей позволило получить важные результаты и показать, что запаздывание в связях приводит к существенному изменению и усложнению динамики ансамбля. В рамках фазового подхода были исследованы такие динамические эффекты, как синхронизация, возникновение кластеров и волновых структур. Естественное развитие данного подхода связано с учётом амплитуды автоколебаний. Рассмотрение фазово-амплитудной динамики позволило выявить ряд новых эффектов, в первую очередь — эффект вымирания колебаний вследствие запаздывания.

Альтернативный подход к моделированию ансамблей автогенераторов с запаздывающими связями основан на концепции осцилляторов с импульсными связями. Данный подход имеет важное преимущество, упрощающее аналитическое и численное исследование. В общем случае ансамбль с запаздывающими связями описывается бесконечномерной системой дифференциально-разностных уравнений. Использование моделей с импульсными связями позволяет свести данную систему к конечномерному точечному отображению. Техника получения такого отображения и условия её применимости

представлены в [142]. Подобные методики применялись и ранее, однако только для частных случаев, например в случае малых задержек [144–146] или в предположении наличия в ансамбле определённого паттерна активности [163–165]. Методика, развитая в [142], позволяет исследовать динамику ансамблей произвольной конфигурации при любых начальных условиях. Сведение динамики ансамблей к точечным отображениям даёт возможность применять хорошо развитую технику работы с ними, позволяющую находить неподвижные точки и периодические решения, проводить анализ их устойчивости и бифуркаций. Кроме того, точечные отображения более удобны для численного исследования, чем системы с непрерывным временем.

Исследование динамики автоколебательных ансамблей с запаздывающими связями не ограничивается описанными в обзоре подходами. Большое число работ посвящено исследованию ансамблей различных сильно-нелинейных систем, например релаксационных автоколебаний [166, 167], хаотических автоколебаний [168–172], возбудимых [173] и бистабильных [174] элементов. Свойства динамики таких ансамблей сильно зависят от свойств составляющих их элементов, и классифицировать многочисленные результаты весьма затруднительно. Также нельзя не упомянуть принципиально иной подход, в котором в качестве элементов ансамбля выбираются системы с дискретным временем, т.е. точечные отображения (см., например, [175–179]). При всех описанных выше положительных сторонах, присущих точечным отображениям, данный подход имеет существенное ограничение: величины задержек в нём могут принимать только дискретные значения и не могут изменяться произвольно.

Обобщение результатов, полученных с использованием различных моделей и подходов, позволяет описать характерные свойства, присущие ансамблям с запаздывающими связями. Пожалуй, в качестве наиболее типичного свойства таких систем надо отметить периодичность в зависимости динамических режимов системы от величины запаздывания. Характерный период данной зависимости соответствует периоду автономных автоколебаний составляющих ансамбль элементов.

На первый взгляд данное свойство кажется очевидным: если колебания имеют период T , то запаздывание сигнала на величину τ эквивалентно его запаздыванию на величину $\tau + nT$, где $n \in \mathbb{N}$. В связи с этим может сложиться впечатление, что исследование систем с большими задержками вообще нецелесообразно и можно исследовать только случаи малых задержек, $\tau < T$. Однако данное заключение является неверным. Дело в том, что период колебаний элементов ансамбля определяется его коллективной динамикой, которая в свою очередь зависит от параметров ансамбля, в том числе от величины задержек. Несмотря на наличие характерной периодичности в структуре пространства параметров ансамбля, эта периодичность всё же не является строгой (см., например, рис. 2, 4а).

Ошибочно полагать, что система с большой задержкой τ полностью эквивалентна системе с малой задержкой $\tau \bmod T$. Исследования показали, что при больших значениях запаздывания в системе возникают новые динамические свойства, такие как существенное увеличение длительности переходных процессов, рост областей мультистабильности и появление новых типов мульти-

стабильности [149]. Мультистабильность, вообще, также является одним из характерных свойств ансамблей с запаздывающими связями. Данное свойство наблюдается, как правило, при больших временах задержки или больших силах межэлементных связей. Возможна мультистабильность двух различных типов: мультистабильность при сосуществовании различных периодических режимов и мультистабильность при сосуществовании как периодических, так и аperiodических режимов.

Говоря о роли запаздывания в синхронизации автоколебательных сетей, невозможно однозначно ответить на вопрос о том, способствует или препятствует наличие запаздывания в связях установлению синхронизации. Ответ на этот вопрос зависит от конкретного вида функции связи и параметров системы. В ряде работ показано, что наиболее значимым фактором, влияющим на установление синхронизации в ансамбле, является знак производной функции связи. Замечательно, что этот результат справедлив как при непрерывных [105, 106], так и при импульсных [157, 165] связях.

В заключение отметим, что синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями является важной областью современной физики, привлекающей неослабевающее внимание исследователей. В целом, довольно полно исследованы такие проблемы, как влияние запаздывания в связях на динамику малых ансамблей автогенераторов и глобальная синхронизация больших сетей с однородной структурой связей, однако остаётся ещё много актуальных неисследованных направлений, таких как динамика сетей с гетерогенными задержками, кластерная синхронизация и формирование паттернов активности, использование систем с запаздывающими связями в приложениях в области управления информацией и её обработки [180].

Работа выполнена при частичной поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 12-02-00526, 12-04-31963, 13-02-97050, 13-02-00858) и Федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (соглашения 8205, 8497 и 14.132.21.1354).

Список литературы

- Huygens Ch *Œuvres Complètes* (Amsterdam: Swets and Zeitlinger, 1967)
- Strutt J W (Baron Rayleigh) *The Theory of Sound* (New York: Dover Publ., 1945) [Стретт Дж В (лорд Рэлей) *Теория звука* (М.: Гостехиздат, 1955)]
- Appleton E V *Proc. Camb. Philos. Soc.* **21** 231 (1922)
- Van der Pol B *Philos. Mag.* **3** 64 (1927)
- Андронов А А, Витт А А *Журн. приклад. физики* **7** (4) 3 (1930); в кн. Андронов А А *Собрание трудов* (Отв. ред. М А Леонтович) (М.: Изд-во АН СССР, 1956) с. 70
- Andronow A, Witt A *Arch. Elektrotech.* **24** 99 (1930) [Андронов А А, Витт А А, в кн. Андронов А А *Собрание трудов* (Отв. ред. М А Леонтович) (М.: Изд-во АН СССР, 1956) с. 51]
- Блехман И И *Синхронизация динамических систем* (М.: Наука, 1971)
- Блехман И И *Синхронизация в природе и технике* (М.: Наука, 1981) [Blekhman I I *Synchronization in Science and Technology* (New York: ASME Press, 1988)]
- Гапонов-Грехов А В, Рабинович М И, Старобинец И М *Письма в ЖЭТФ* **39** 561 (1984) [Gaponov-Grekhov A V, Rabinovich M I, Starobinets I M *JETP Lett.* **39** 688 (1984)]
- Афраймович В С, Веричев Н Н, Рабинович М И *Изв. вузов. Радиофизика* **29** 1050 (1986) [Afraimovich V S, Verichev N N, Rabinovich M I *Radiophys. Quantum Electron.* **29** 795 (1986)]
- Siegman A E *Lasers* (Mill Valley, Calif.: Univ. Science Books, 1986)
- Roy R, Thornburg K S (Jr.) *Phys. Rev. Lett.* **72** 2009 (1994)
- Lindsey W C *Synchronization Systems in Communication and Control* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1972) [Линдсей В *Системы синхронизации в связи и управлении* (М.: Сов. радио, 1978)]
- Шахгильдян В В, Ляховкин А А *Фазовая автоподстройка частоты* (М.: Связь, 1966)
- Афраймович В С и др. *Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации* (Под общ. ред. А В Гапонова-Грехова, М И Рабиновича) (Горький: ИПФ АН СССР, 1989) [Afraimovich V S et al. *Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks* (Eds A V Gaponov-Grekhov, M I Rabinovich) (Singapore: World Scientific, 1994)]
- Kuramoto Y *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
- Winfree A T *The Geometry of Biological Time* (New York: Springer, 2001)
- Glass L, Mackey M C *From Clocks to Chaos: the Rhythms of Life* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1988) [Гласс Л, Мэки М *От часов к хаосу: ритмы жизни* (М.: Мир, 1991)]
- Glass L *Nature* **410** 277 (2001)
- Некоркин В И *УФН* **178** 313 (2008) [Nekorkin V I *Phys. Usp.* **51** 295 (2008)]
- Борисюк Г Н и др. *УФН* **172** 1189 (2002) [Borisjuk G N et al. *Phys. Usp.* **45** 1073 (2002)]
- Андронов А А *Собрание трудов* (Отв. ред. М А Леонтович) (М.: Изд-во АН СССР, 1956)
- Крылов Н М, Боголюбов Н Н *Изв. АН СССР. VII сер. Отд. матем. и естеств. наук* (4) 475 (1933)
- Боголюбов Н Н, Митропольский Ю А *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (М.: Физматгиз, 1958) [Bogoliubov N N, Mitropolsky Y A *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations* (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1961)]
- Ланда П С *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы* (М.: Наука, 1980)
- Неймарк Ю И, Ланда П С *Стохастические и хаотические колебания* (М.: Наука, 1988) [Neimark Yu I, Landa P S *Stochastic and Chaotic Oscillations* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992)]
- Анищенко В С и др. *Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний* (М. – Ижевск: РХД, 2008)
- Pecora L M, Carroll T L *Phys. Rev. Lett.* **64** 821 (1990)
- Pecora L M, Carroll T L *Phys. Rev. A* **44** 2374 (1991)
- Nekorkin V I, Velarde M G *Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos* (Berlin: Springer, 2002)
- Osipov G V, Kurths J, Zhou Ch *Synchronization in Oscillatory Networks* (Berlin: Springer, 2007)
- Трубецков Д И *Синхронизация: ученый и время* (Саратов: Колледж, 2006)
- Дмитриев А С, Панас А И *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи* (М.: Физматлит, 2002)
- Леонов Г А, Смирнова Б В *Математические проблемы теории фазовой синхронизации* (СПб.: Наука, 2000)
- Belykh V N, Belykh I V, Mosekilde E *Phys. Rev. E* **63** 036216 (2001)
- Belykh I, Belykh V, Hasler M *Chaos* **16** 015102 (2006)
- Kuznetsov A P, Stankevich N V, Turukina L V *Physica D* **238** 1203 (2009)
- Kim S-Y et al. *Phys. Rev. E* **67** 016217 (2003)
- Абарбанель Г Д и др. *УФН* **166** 363 (1996) [Abarbanel H D et al. *Phys. Usp.* **39** 337 (1996)]
- Рабинович М И, Мюезинолу М К *УФН* **180** 371 (2010) [Rabinovich M I, Muezzinoglu M K *Phys. Usp.* **53** 357 (2010)]
- Анищенко В С, Астахов С В *УФН* **183** 1009 (2013) [Anishchenko V S, Astakhov S V *Phys. Usp.* **56** (10) (2013)]
- Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001)

43. Шильников Л П и др. *Методы качественной теории в нелинейной динамике* Ч. 1 (М. – Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004)
44. Дмитриев А С, Кислов В Я *Стохастические колебания в радиоп физике и электронике* (М.: Наука, 1989)
45. Kiliyas T et al. *Int. J. Electron.* **79** 737 (1995)
46. Леонов Г А, Селеджи С М *Вестник СПбГУ. Сер. 10. Приклад. матем., информатика, процессы управления* (1) 36 (2004)
47. Рыскин Н М *Изв. вузов. Радиофизика* **47** 129 (2004) [Ryskin N M *Radiophys. Quantum Electron.* **47** 116 (2004)]
48. Leonov G, Seledzhi S *Int. J. Bifurcation Chaos* **15** 1347 (2005)
49. Леонов Г А, Селеджи С М *Автомат. и телемех.* (3) 11 (2005) [Leonov G A, Seledzhi S M *Automat. Remote Control* **66** 348 (2005)]
50. Leonov G, Seledzhi S *Int. J. Innovat. Comput. Inform. Control* **1** 779 (2005)
51. Arino O, Hbid M L, Ait Dads E (Eds) *Delay Differential Equations and Applications* (NATO Science Series, Ser. II, Vol. 205) (Dordrecht: Springer, 2006)
52. Balachandran B, Kalmár-Nagy T, Gilsinn D (Eds) *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions* (New York: Springer, 2009)
53. Рыскин Н М, Хаврошин О С *Радиотехника и электроника* **56** 741 (2011) [Ryskin N M, Khavroshin O S *J. Commun. Technol. Electron.* **56** 690 (2011)]
54. Usacheva S A, Ryskin N M *Physica D* **241** 372 (2012)
55. Kozyreff G, Vladimirov A G, Mandel P *Phys. Rev. E* **64** 016613 (2001)
56. Владимиров А Г, Тураев Д В *Изв. вузов. Радиофизика* **47** 857 (2004) [Vladimirov A G, Turaev D V *Radiophys. Quantum Electron.* **47** 769 (2004)]
57. Kim M-Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 088101 (2005)
58. Wünsche H-J et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 163901 (2005)
59. Vicente R et al. *Phys. Rev. E* **73** 047201 (2006)
60. Nizette M et al. *Physica D* **218** 95 (2006)
61. Flunkert V et al. *Phys. Rev. E* **79** 065201(R) (2009)
62. Zamora-Munt J et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 264101 (2010)
63. Masoller C et al. *Phys. Rev. A* **84** 023838 (2011)
64. Rebroya N et al. *Phys. Rev. E* **83** 066202 (2011)
65. Otto C et al. *New J. Phys.* **14** 113033 (2012)
66. Кащенко С А, Григорьева Е В *Релаксационные колебания в лазерах* (М.: ЛИБРОКОМ, 2013)
67. Golomb D, Ermentrout G B *Network* **11** 221 (2000)
68. Takamatsu A, Fujii T, Endo I *Phys. Rev. Lett.* **85** 2026 (2000)
69. Oprisan S A, Prinz A A, Canavier C C *Biophys. J.* **87** 2283 (2004)
70. Bazhenov M, Rulkov N F, Timofeev I J *Neurophysiol.* **100** 1562 (2008)
71. Friedrich J, Kinzel W J *Comput. Neurosci.* **27** 65 (2009)
72. Masoller C, Torrent M C, García-Ojalvo J *Philos. Trans. A* **367** 3255 (2009)
73. Кащенко С А, Майоров В В *Модели волновой памяти* (М.: URSS, 2009)
74. Faro J, Velasco S *Physica D* **110** 313 (1997)
75. Tass P et al. *Phys. Rev. E* **54** R2224 (1996)
76. Haken H *Eur. Phys. J. B* **18** 545 (2000)
77. Трубецков Д И, Мchedлова Е С, Красичков Л В *Введение в теорию самоорганизации открытых систем* (М.: Физматлит, 2005)
78. Lakshmanan M, Senthilkumar D V *Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems* (Berlin: Springer, 2010)
79. Gray C M et al. *Nature* **338** 334 (1989)
80. Engel A K et al. *Science* **252** 1177 (1991)
81. Frien A et al. *NeuroReport* **5** 2273 (1994)
82. Singer W, Gray C M *Annu. Rev. Neurosci.* **18** 555 (1995)
83. Courtemanche R, Lamarre Y J *Neurophysiol.* **93** 2039 (2005)
84. Schoffelen J-M, Oostenveld R, Fries P *Science* **308** 111 (2005)
85. Doesburg S M, Ward L M *Int. Congress Ser.* **1300** 551 (2007)
86. Uhlhaas P J et al. *Front. Integr. Neurosci.* **3** 17 (2009)
87. Wu J (Ed.) *Handbook on Theoretical and Algorithmic Aspects of Sensor, Ad Hoc Wireless, and Peer-to-Peer Networks* (New York: Auerbach Publ., 2005)
88. Akyildiz I F et al. *Comput. Networks* **38** 393 (2002)
89. Sundararaman B, Buy U, Kshemkalyani A D *Ad Hoc Networks* **3** 281 (2005)
90. Demirkol I, Ersoy C, Alagoz F *IEEE Commun. Mag.* **44** 115 (2006)
91. Larger L et al. *Opt. Express* **20** 3241 (2012)
92. Brunner D et al. *Nature Commun.* **4** 1364 (2013)
93. Bellman R, Cooke K L *Differential-Difference Equations* (New York: Academic Press, 1963) [Беллман Р, Кук К Л *Дифференциально-разностные уравнения* (М: Мир, 1967)]
94. Leonov G A, Ponomarenko D V, Smirnova V B *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications* (Singapore: World Scientific, 1996)
95. Leonov G A, Smirnova V B *Math. Nachr.* **177** 157 (1996)
96. Kaschenko D, Kaschenko S, Schwarz W *Int. J. Bifurcation Chaos* **22** 1250184 (2012)
97. Daan S, Berde C J *Theor. Biol.* **70** 297 (1978)
98. Neu J C *SIAM J. Appl. Math.* **37** 307 (1979)
99. Ermentrout G B *J. Math. Biol.* **12** 327 (1981)
100. Hoppensteadt F C, Keener J P *J. Math. Biol.* **15** 339 (1982)
101. Kopell N, Ermentrout G B *Commun. Pure Appl. Math.* **39** 623 (1986)
102. Acebroñ J A et al. *Rev. Mod. Phys.* **77** 137 (2005)
103. Izhikevich E M *Phys. Rev. E* **58** 905 (1998)
104. Schuster H G, Wagner P *Prog. Theor. Phys.* **81** 939 (1989)
105. Yeung M K S, Strogatz S H *Phys. Rev. Lett.* **82** 648 (1999)
106. Earl M G, Strogatz S H *Phys. Rev. E* **67** 036204 (2003)
107. Dorizzi B, Grammaticos B *Phys. Rev. A* **44** 6958 (1991)
108. Niebur E, Schuster H G, Kammen D M *Phys. Rev. Lett.* **67** 2753 (1991)
109. Nakamura Y, Tominaga F, Munakata T *Phys. Rev. E* **49** 4849 (1994)
110. D’Huys O et al. *Chaos* **18** 037116 (2008)
111. Zanette D H *Phys. Rev. E* **62** 3167 (2000)
112. Ko T-W, Ermentrout G B *Phys. Rev. E* **76** 056206 (2007)
113. Jeong S-O, Ko T-W, Moon H-T *Phys. Rev. Lett.* **89** 154104 (2002)
114. Campbell S A, Kobleviskiy I *Discrete Continuous Dyn. Syst.* **32** 2653 (2012)
115. Aronson D G, Ermentrout G B, Kopell N *Physica D* **41** 403 (1990)
116. Ramana Reddy D V, Sen A, Johnston G L *Physica D* **129** 15 (1999)
117. Клиньшов В В, Казанцев В Б, Негоркин В И *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **12** (6) 129 (2004)
118. Ramana Reddy D V, Sen A, Johnston G L *Phys. Rev. Lett.* **80** 5109 (1998)
119. Ramana Reddy D V, Sen A, Johnston G L *Phys. Rev. E* **69** 056217 (2004)
120. Strogatz S H *Nature* **394** 316 (1998)
121. Mirolo R E, Strogatz S H *J. Stat. Phys.* **60** 245 (1990)
122. Ramana Reddy D V, Sen A, Johnston G L *Phys. Rev. Lett.* **85** 3381 (2000)
123. D’Huys O et al. *Chaos* **20** 043127 (2010)
124. Wirkus S, Rand R *Nonlin. Dynamics* **30** 205 (2002)
125. Song Y, Xu J, Zhang T *Chaos* **21** 023111 (2011)
126. Choe C-U et al. *Phys. Rev. E* **75** 046206 (2007)
127. Choe C-U et al. *Phys. Rev. E* **81** 025205(R) (2010)
128. Zou W et al. *Phys. Rev. E* **84** 066208 (2011)
129. Selivanov A A et al. *Phys. Rev. E* **85** 016201 (2012)
130. Mirolo R E, Strogatz S H *SIAM J. Appl. Math.* **50** 1645 (1990)
131. Ermentrout G B, Kopell N *J. Math. Biol.* **29** 195 (1991)
132. Kuramoto Y *Physica D* **50** 15 (1991)
133. Bottani S *Phys. Rev. Lett.* **74** 4189 (1995)
134. Canavier C C, Achuthan S *Math. Biosci.* **226** 77 (2010)
135. Peskin C S *Mathematical Aspects of Heart Physiology* (New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York Univ., 1975)
136. Izhikevich E M *IEEE Trans. Neural Networks* **10** 508 (1999)
137. Glass L *Nature* **410** 277 (2001)
138. Glass L et al. *Phys. Rev. E* **65** 021908 (2002)
139. Goel P, Ermentrout B *Physica D* **163** 191 (2002)
140. Loskutov A, Rybalko S, Zhuchkova E *Int. J. Bifurcation Chaos* **14** 2457 (2004)

141. Rybalko S, Zhuchkova E *Int. J. Bifurcation Chaos* **19** 263 (2009)
142. Klinshov V V, Nekorkin V I *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **18** 973 (2013)
143. Неймарк Ю И *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний* (М.: Наука, 1972)
144. Ernst U, Pawelzik K, Geisel T *Phys. Rev. Lett.* **74** 1570 (1995)
145. Ernst U, Pawelzik K, Geisel T *Phys. Rev. E* **57** 2150 (1998)
146. Zeitler M, Daffertshofer A, Gielen C C A M *Phys. Rev. E* **79** 065203(R) (2009)
147. Coombes S, Lord G J *Phys. Rev. E* **55** R2104 (1997)
148. Coombes S, Lord G J *Phys. Rev. E* **56** 5809 (1997)
149. Klinshov V V, Nekorkin V I *Chaos Solitons Fractals* **44** 98 (2011)
150. Prasad A et al. *Phys. Rev. E* **74** 035204(R) (2006)
151. Prasad A et al. *Chaos* **18** 023111 (2008)
152. Adhikari B M, Prasad A, Dhamala M *Chaos* **21** 023116 (2011)
153. Klinshov V, Nekorkin V *Cybernetics Phys.* **1** 106 (2012)
154. Ermentrout G B, Kopell N *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **95** 1259 (1998)
155. Neves F S, Timme M *J. Phys. A Math. Theor.* **42** 345103 (2009)
156. Gerstner W *Phys. Rev. Lett.* **76** 1755 (1996)
157. Klinshov V V, Nekorkin V I *Discontinuity Nonlinearity Complexity* **1** 253 (2012)
158. Wu W, Chen T *Nonlinearity* **20** 789 (2007)
159. Wu W, Chen T *Int. J. Neural Syst.* **19** 425 (2009)
160. Wu W, Liu B, Chen T *Neural Networks* **23** 783 (2010)
161. Wang S et al. *PLoS Comput. Biol.* **8** e1002306 (2012)
162. Timme M, Wolf F, Geisel T *Phys. Rev. Lett.* **89** 258701 (2002)
163. Foss J, Milton J J. *Neurophysiol.* **84** 975 (2000)
164. Woodman M, Canavier C *Front. Syst. Neurosci. Conf. Abstract. Computational and Systems Neuroscience* (2009), doi: 10.3389/conf.neuro.06.2009.03.139
165. Woodman M M, Canavier C C J. *Comput. Neurosci.* **31** 401 (2011)
166. Campbell S R, Wang D *Physica D* **111** 151 (1998)
167. Rossoni E et al. *Phys. Rev. E* **71** 061904 (2005)
168. Burić N, Todorović D *Phys. Rev. E* **68** 066218 (2003)
169. Oguchi T, Nijmeijer H, Yamamoto T *Chaos* **18** 037108 (2008)
170. Michiels W, Nijmeijer H *Chaos* **19** 033110 (2009)
171. Jüngling T et al. *Phys. Rev. E* **84** 056208 (2011)
172. Manju Shrii M, Senthilkumar D V, Kurths J *Europhys. Lett.* **98** 10003 (2012)
173. Burić N, Todorović D *Phys. Rev. E* **67** 066222 (2003)
174. Huber D, Tsimring L S *Phys. Rev. Lett.* **91** 260601 (2003)
175. Jiang Y *Phys. Lett. A* **267** 342 (2000)
176. Masoller C, de S Cavalcante H L D, Rios Leite J R *Phys. Rev. E* **64** 037202 (2001)
177. Masoller C, Marti A C *Phys. Rev. Lett.* **94** 134102 (2005)
178. Wang Q et al. *Phys. Rev. E* **80** 026206 (2009)
179. Masoller C, Atay F M *Eur. Phys. J. D* **62** 119 (2011)
180. Короновский А А, Москаленко О И, Храмов А Е *УФН* **179** 1281 (2009) [Koronovskii A A, Moskalenko O I, Hramov A E *Phys. Usp.* **52** 1213 (2009)]

Synchronization of delay-coupled oscillator networks

V.V. Klinshov

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: vladimir.klinshov@gmail.com*

V.I. Nekorkin

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
prosp. Gagarina 23, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation*

Research on synchronization of delay-coupled oscillator networks is reviewed. A number of key research approaches using different models and methods are described and major results obtained through their use are presented and generalized. The most characteristic properties of time-delay coupled systems are discussed.

PACS numbers: **05.45. - a**, **05.45.Xt**, **87.10. - e**

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323

Bibliography — 180 references

Received 5 February 2013, revised 18 April 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (12) 1323–1336 (2013)

Physics – Uspekhi **56** (12) (2013)