Ноябрь 2013 г. *Том 183, № 11*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Влияние идей Б.Б. Кадомцева на современные представления о турбулентном переносе

О.Г. Бакунин

Рассмотрены модели, предложенные Б.Б. Кадомцевым для описания турбулентной диффузии. Представлены некоторые из современных подходов описания эффектов "длинных корреляций", непосредственно основанные на идеях Б.Б. Кадомцева о диффузионной перенормировке квазилинейных уравнений, перколяционном подходе к описанию сильной турбулентности, влиянии стохастической неустойчивости и поперечной диффузии частиц плазмы на перенос в "заплетённом" магнитом поле. Показано, что методы анализа, использованные Б.Б. Кадомцевым, обладают большой "эвристической силой" и, несомненно, окажут влияние на дальнейшее развитие теории турбулентного переноса.

PACS numbers: **05.40.–a**, **47.27.–i**, **47.53.+n** DOI: 10.3367/UFNr.0183.201311f.1237

Содержание

Наука захватывает нас только тогда, когда, заинтересовавшись жизнью великих исследователей, мы начинаем следить за историей развития их открытий.
Джеймс Клерк Максвелл

1. Введение

Имя Б.Б. Кадомцева хорошо известно физикам, работающим в различных областях науки. Тем не менее "токамачная" специфика многих фундаментальных работ Бориса Борисовича затрудняет понимание их значимости для учёного, непосредственно не вовлечённого в исследования по магнитному удержанию плазмы. В этом нет ничего удивительного, поскольку высокий уровень теоретических исследований в области физики высокотемпературной плазмы требует использования сложных математических инструментов, позволяющих учесть особенности тороидальной геометрии плазменного шнура в токамаке.

Борис Борисович Кадомцев (1928 – 1998) в Курчатовском институте (1992 г.).

О.Г. Бакунин. Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", Институт физики токамаков, пл. Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 196-78-55. E-mail: oleg_bakunin@yahoo.com

Статья поступила 15 сентября 2013 г., после доработки 14 октября 2013 г.

Неожиданным для читателя, желающего разобраться в оригинальных работах Б.Б. Кадомцева, является то, что он часто использовал удивительно ясные физические модели, а математический аппарат вполне доступен, если использовать присущую физикам интуицию. В настоящей статье представлены некоторые из идей Кадомцева на языке, понятном широкому кругу исследователей. Конечно, невозможно в короткой статье рассмотреть весь спектр работ Бориса Борисовича [1, 2], и мы сосредоточимся на анализе предложенных им новых моделей турбулентного переноса и их современном развитии.

Одной из главных проблем, с которой пришлось столкнуться Б.Б. Кадомцеву при анализе аномального переноса в условиях сильной турбулентности высокотемпературной замагниченной плазмы, стала необходимость учитывать вклад крупномасштабных вихревых структур. С подобными проблемами сталкиваются и в гидродинамической турбулентности, где впервые и было введено понятие обратного каскада, определяющее направление перекачки энергии в сторону больших масштабов. Однако в задачах классической гидродинамики перенос частиц не связан с вопросами удержания "рабочего вещества", имеющего температуру в миллион градусов. Серьёзные трудности связаны и с учётом взаимодействия плазмы с магнитным полем, да и сама геометрия тороидальных ловушек создаёт не только технические проблемы.

В таких условиях создание теоретической модели, адекватно передающей основные свойства исследуемой физической системы, является настоящим искусством. Действительно, при анализе работ Б.Б. Кадомцева мы видим, как широк был его кругозор и насколько его идеи опередили своё время. Так, начатое им в 1965 г. исследование влияния конвективных ячеек на процессы переноса привело к построению адекватных моделей только в середине 1980-х годов. Аналогичная ситуация сложилась и с предложением Бориса Борисовича в 1978 г. учесть нетривиальную (фрактальную) топологию эквипотенциалей в двумерной турбулентности. Первые скейлинги для коэффициентов переноса электронов, использующие эту концепцию, появились только в 1991 г.

Многие идеи Б.Б. Кадомцева носят междисциплинарный характер, и поэтому они могут быть представлены в достаточно универсальной для физиков форме. Эта задача не может быть решена одной или двумя статьями. Более того, с течением времени проявляются всё новые взаимосвязи между работами Бориса Борисовича в области физики плазмы и другими научными направлениями. Тем не менее круг проблем, связанных с описанием турбулентного переноса, уже сейчас представляется достаточно ясно. В настоящей статье мы проведём краткий обзор влияния идей Б.Б. Кадомцева на современные представления о турбулентном переносе.

2. Колмогоровский спектр и заочная дискуссия с Крейчнаном

В этом разделе мы кратко обсудим важные замечания Б.Б. Кадомцева, сделанные им в одном из первых обзоров по теории турбулентности плазмы [3]. Интересно, что эти часто цитируемые в современной литературе комментарии относились не к вопросам теории плазмы, а касались общего подхода к описанию развитой турбулентности, который был представлен в работах Колмогорова и Обухова в начале 1940-х годов [4–7]. В основном обзор [3] посвящён вопросам, связанным с исследованием многочисленных плазменных неустойчивостей, возникающих в замагниченной плазме, однако автор, очевидно, осознавал неизбежность перехода от описания отдельных неустойчивостей к скейлинговому описанию турбулентного состояния в целом.

Б.Б. Кадомцев уже на этом первом этапе своих исследований был хорошо знаком с колмогоровскими представлениями о турбулентности, которые являются одним из наиболее общих подходов к проблеме. Действительно, судя по воспоминаниям его коллег по работе в Обнинске над одним из вариантов термоядерного заряда, он выполнял подробный теоретический анализ воспламенения большой сферической массы дейтерия [8]. Взрыв такой мощности неизбежно приводит к турбулентному перемешиванию вещества.

С другой стороны, качественное описание турбулентного каскада, данное в работах Колмогорова и Обухова, стимулировало теоретиков к построению теории турбулентности, основанной на "первых принципах". Сразу отметим, что и сейчас, спустя 70 лет, такой теории не удалось построить. Однако в 1960-е годы многие физики считали построение стройной теории турбулентности перспективной задачей и старались использовать весь имеющийся арсенал для достижения этой цели. Здесь мы сначала очень кратко изложим колмогоровский подход, а затем покажем, как Б.Б. Кадомцев смог указать на принципиальные ошибки, сделанные одним из ведущих американских теоретиков в области теории турбулентности.

Согласно современным представлениям, впервые чётко сформулированным Колмогоровым, пульсационное движение в турбулентном потоке рассматривается как результат одновременного существования "вихрей" различного масштаба, обусловливающих пульсации скорости различного порядка. В рамках рассматриваемого подхода только наибольшие по размеру вихри возникают как результат неустойчивости среднего движения. Действительно, пусть в некоторой области ламинарного потока, имеющего размер l, по какой-то причине возникает пульсация скорости порядка V_l. Энергия, связанная с этой пульсацией, по порядку величины пропорциональна V_l^2 или V_k, если рассматривать масштабы в терминах фурье-гармоник, где $k \propto 1/l$, а время, необходимое для её возникновения,

$$\tau_{\mathrm{K}} \approx \frac{l}{V_l} \approx \frac{1}{kV_k} \,. \qquad (1)$$

Заметим, что в единицу времени от основного движения к пульсационному передаётся энергия, по порядку величины равная

$$\frac{V_l^2}{\tau_{\mathrm{K}}(l)} \approx \frac{V_l^3}{l} \approx V_k^3 k \,, \qquad (2)$$

$$l < l_v \approx \frac{1}{k_v} \approx \left(\frac{v_{\mathrm{F}}^3}{\varepsilon_{\mathrm{K}}}\right)^{1/4} .$$

Предполагается, что в турбулентном течении существует непрерывный поток энергии от больших вихрей к малым. При больших числах Рейнольдса, $\mathrm{Re} = V_0 L_0 / v_{\mathrm{F}} \gg 1$, вследствие ничтожно малого влияния трения на вихри всех масштабов, за исключением наименьших, в турбулентном течении нет существенной диссипации (она будет иметь место только при $l < l_\nu \approx 1/k_\nu \approx (\nu_{\mathrm{F}}^3/\varepsilon_{\mathrm{K}})^{1/4}$). Здесь V_0 — характерный масштаб скорости, L_0 — характерный пространственный (внешний) масштаб течения, ν_{F} — вязкость, $\varepsilon_{\mathrm{K}} = \mathrm{const}$ — колмогоровский поток по спектру. Следовательно, при $l \gg l_\nu \approx 1/k_\nu$

$$V_k^3 k \approx \frac{V_l^3}{l} \approx \varepsilon_{\mathrm{K}} = \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

Тогда $V_k \approx (\varepsilon_{\mathrm{K}} k)^{1/3}$, т.е. пульсационная скорость, связанная с вихрями масштабом l, является пропорциональной $l^{1/3}$ и зависит только от единственного параметра ε_{K}:

$$V_l(l) \approx (\varepsilon_{\mathrm{K}} l)^{1/3}\,. \tag{4}$$

Сохранение потока ε_{K} связано с сохранением энергии при нелинейном взаимодействии. В рассматриваемом нами общем случае однородной изотропной турбулентности удобно ввести понятие спектральной плотности энергии $E(k)$, приняв [4–7]

$$\frac{V_0^2}{2} = \int E(k)\,\mathrm{d}k\,, \tag{5}$$

где $V_k^2/2 \propto kE(k)$. Тогда несложно получить скейлинг Колмогорова–Обухова для спектра турбулентности [4, 5]:

$$E(k) \propto \frac{V_k^2}{k} \propto \frac{(\varepsilon_{\mathrm{K}} k)^{2/3}}{k} \propto C_{\mathrm{K}} \frac{\varepsilon_{\mathrm{K}}^{2/3}}{k^{5/3}}\,. \tag{6}$$

Здесь $C_{\mathrm{K}} \approx 1{,}6–1{,}7$ — константа Колмогорова. Несмотря на феноменологический характер подхода, скейлинг для спектра турбулентности $E(k) \propto 1/k^{5/3}$ прекрасно согласуется с экспериментальными данными и является одним из главных достижений теории турбулентности [6, 7].

В начале 1960-х годов, когда вопрос о турбулентности плазмы вышел на первый план в исследованиях по удержанию горячей плазмы, одной из главных являлась проблема взаимодействия волн и частиц [9, 10]. Несмотря на успехи квазилинейной теории [11], описание нелинейных эффектов потребовало использования кинетического уравнения для волн [3, 9, 10]. Подобная техника (приближение прямых взаимодействий) стала применяться Крейчнаном и для описания взаимодействия вихрей [12]. Схематично этот метод можно представить как введение случайных связей (корреляций) между многочисленными "копиями" уравнений Навье–Стокса со случайной гауссовой силой:

$$V_\alpha(1) + \frac{1}{N}\,\Gamma(1,2,3)\,V_\beta(2)\,V_\delta(3) = S_\alpha(1)\,. \tag{7}$$

Здесь N — число "копий", Γ — нелинейный оператор, V_α, V_β, V_δ — скорости, S_α — случайные силы. Такое представление отражало формальный математический подход Хопфа к записи уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t}\,V + \hat{\Gamma}(V,V) = \hat{L}V\,, \tag{8}$$

где $\hat{\Gamma}$ — билинейный оператор, описывающий нелинейные эффекты, $\hat{L}$ — линейный оператор, описывающий вязкостные эффекты. Мы здесь не будем приводить описания довольно сложной диаграммной техники, используемой в этом направлении исследований, поскольку ему посвящена обширная литература [6, 7]. Мы приведём качественные оценки, которые позволяют понять аргументы Б.Б. Кадомцева, доказавшего некорректность метода прямых взаимодействий (Direct Interaction Approximation — DIA), несмотря на то что получаемые в нём уравнения имеют ряд общих свойств (законы сохранения, масштабные преобразования, инвариантность относительно временны́х и пространственных сдвигов) с уравнениями Навье–Стокса. Заметим также, что к моменту публикации работы [3] имя Крейчнана было хорошо известно специалистам в области теории турбулентности как ведущего американского исследователя процессов турбулентного переноса [13].

Работая с интегральным уравнением, описывающим нелокальное взаимодействие вихрей, Крейчнан получил для инерционного интервала спектр, существенно отличающийся от колмогоровского:

$$E(k) \propto C_{\mathrm{K}} V_0^{1/2}\,\frac{\varepsilon_{\mathrm{K}}^{1/2}}{k^{3/2}}\,. \tag{9}$$

Кадомцев сознавал, что, несмотря на использованный мощный формализм, вывод спектра содержит принципиальную ошибку. Действительно, Крейчнан переоценил роль крупномасштабных структур при описании эволюции мелкомасштабной компоненты. Он фактически представил поток энергии по спектру в виде произведения напряжения σ_{T} на скорость деформации $\omega_l \propto 1/\tau_0$. Поскольку напряжение можно представить как произведение турбулентной вязкости

$$\nu_{\mathrm{T}} \propto V_l^2 \tau_0 \approx V_l^2\,\frac{l}{V_0} \tag{10}$$

на скорость деформации ω_l, получаем

$$\varepsilon_{\mathrm{K}} \propto V_l^2 \tau_0 \left(\frac{V_l}{l}\right)^2 \approx kE(k)\,\frac{1}{V_0 k}\,k^3 E(k)\,. \tag{11}$$

Простые вычисления дают спектр Крейчнана в виде

$$E(k) \propto V_0^{1/2}\,\frac{\varepsilon_{\mathrm{K}}^{1/2}}{k^{3/2}}\,. \tag{12}$$

Теперь можно заметить, что использование внешнего масштаба V_0 как раз и отражает неверно учтённое влияние больших вихрей, которые на самом деле только переносят малые вихри, вызывая при этом их небольшую деформацию (адиабатическое взаимодействие далёких гармоник). Кадомцеву в работе [3] удалось достаточно быстро разобраться в сложной технике вычислений Крейчнана, и его аргументы сразу были приняты большинством исследователей. Возможно, именно эта ошибка послужила причиной для формулирования Крейчнаном полуфилософского тезиса: "With scaling we can explain everything without understanding anything", — широко известного не только гидродинамикам. В русском переводе это звучит ещё более жёстко, но поучительно: "С помощью скейлинга мы можем объяснить всё, не понимая ничего".

Несмотря на указанные Крейчнаном "опасности", Борис Борисович при рассмотрении вопросов аномального переноса эффективно использовал концепцию скейлинга во многих работах. Более того, аргументы Крейчнана о существовании при больших числах Рейнольдса ярко выраженных, очень протяжённых и сильно запутанных вихревых нитей, имеющих пространственные масштабы, сравнимые с внешним масштабом течения, были в дальнейшем использованы Кадомцевым при формулировке его оригинального подхода к описанию аномального переноса при наличии крупномасштабных вихревых структур.

3. "Аномальная" диффузия плазмы в магнитном поле

Слова "аномальная диффузия" впервые появляются в совместной работе Б.Б. Кадомцева и А.В. Недоспасова, опубликованной в 1960 г. в виде как препринта Курчатовского института [14], так и журнальной статьи [15]. Эта работа появилась в результате обсуждения с В.Д. Шафрановым вопросов неустойчивости положительного столба разряда в магнитном поле. Авторы показали, что продольное магнитное поле приводит к потере устойчивости плазменного шнура с током и возникающие как следствие колебания вызывают появление азимутального электрического поля. Это неизбежно приводит к возникновению дрейфовых движений электронов в радиальном направлении. Такие дрейфовые движения поперёк магнитного поля и рассматривались авторами как причина наблюдаемой в эксперименте "аномальной" диффузии.

Авторы отчётливо понимали, что развитие колебаний приведёт к возникновению турбулентности плазмы. В связи с этим в конце статьи они указали на ставшую теперь классической идею Бома о природе коэффициента турбулентной диффузии [16]. Схематически аргументы Бома можно представить, основываясь на уравнении для скорости дрейфа заряженных частиц плазмы в скрещённых электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях:

$$\mathbf{V}_E = c\,\frac{\mathbf{B}\times\mathbf{E}}{B^2} \propto \frac{\nabla\varphi}{B_0}\,. \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{V}_E$ — дрейфовая скорость, φ — электрический потенциал. Для флуктуаций электрического поля, меньших, чем ионная циклотронная частота (низкочастотный предел), движение частиц в плазме может быть представлено как суперпозиция вращательного движения вокруг магнитной силовой линии и дрейфового движения ведущего центра со скоростью $\mathbf{V}_E$.

В условиях развитой плазменной турбулентности можно ожидать появления вихревых структур, подобных тем, которые возникают в гидродинамической турбулентности, что приведёт к хаотическим флуктуациям электрического поля. Введём характерный размер возникающих структур L_B. В рамках традиционного представления для коэффициента диффузии частиц несложно получить оценку

$$D_B(L_B) \propto \frac{L_B^2}{\tau_{\mathrm{cor}}}\,, \tag{14}$$

где L_B играет роль характерного корреляционного масштаба, а τ_{cor} — характерное корреляционное время. Опираясь на размерностные соображения, можно оценить характерное корреляционное время в терминах дрейфовой скорости частиц V_E в скрещённых электрическом и магнитном полях:

$$\tau_{\mathrm{cor}} \approx \frac{L_B}{\delta V_E} \approx \frac{L_B^2}{c\delta\varphi}\,B_0\,, \tag{15}$$

где дрейфовая скорость оценивается как

$$\delta V_E \approx \frac{c}{B_0}\,\delta E_{\mathrm{p}} \approx \frac{c}{B_0}\,\frac{\delta\varphi}{L_B}\,. \tag{16}$$

Здесь $\delta\varphi \approx \delta E_{\mathrm{p}} L_B$ — возмущение потенциала на масштабах вихря, δE_{p} — соответствующее возмущение напряжённости электрического поля. Такая упрощённая оценка корреляционного времени может считаться оправданной на данном этапе, поскольку даже в более сложном по структуре подходе Колмогорова – Обухова использовалась чисто размерная оценка для времени взаимодействия вихрей размером l в виде $\tau_{\mathrm{K}}(l) \propto l/V(l)$, где $V(l)$ — характерная скорость турбулентных пульсаций на масштабах l. Флуктуации электрического поля несложно связать с температурой плазмы T_{p} соотношением

$$e\delta\varphi \approx e\delta E_{\mathrm{p}} L_B \approx T_{\mathrm{p}}\,. \tag{17}$$

После подстановки получаем скейлинг Бома для аномальной диффузии частиц в турбулентной плазме:

$$D_{\mathrm{B}} \approx L_B \delta V_E \approx \frac{c}{B_0}\,\delta\varphi \approx \frac{cT_{\mathrm{p}}}{eB_0}\left\langle\left(\frac{e\delta\varphi}{T_{\mathrm{p}}}\right)^2\right\rangle^{1/2}. \tag{18}$$

В полученном выражении отсутствует характерный пространственный масштаб вихревых структур L_B, введённый не первом этапе вычислений. В каком-то смысле это может рассматриваться как универсальность полученной Бомом оценки. Действительно, колмогоровская теория турбулентности опиралась на существование иерархической структуры вихрей и постоянства потока энергии по спектру. В этом смысле наличие фиксированного масштаба вихревой структуры выглядит чрезмерно упрощённым, и то, что данный параметр выпал из окончательного выражения, является большой удачей этого подхода.

Начиная с работы [14], вопросы турбулентности плазмы и аномального переноса становятся главными темами работ Б.Б. Кадомцева. Это ясно видно, если посмотреть публикации Бориса Борисовича в сборнике его трудов [1, 2]. Слова "турбулентность", "турбулентный перенос" и "аномальная диффузия" встречаются в подавляющем большинстве статей на протяжении почти 40 лет. Сам Б.Б. Кадомцев уделял особое внимание аномальному (турбулентному) переносу в связи с исследованиями удержания плазмы в токамаках. Так, в статье "Мой взгляд на управляемый термоядерный синтез" [17], опубликованной в 1995 г., есть следующие слова: "В 1967 году Арцимович и я опубликовали (независимо друг от друга) короткие статьи в журнале *Успехи физических наук*, где обсудили перспективы развития установок типа токамак... В моей работе обсуждались проблемы аномального переноса. Я всегда был убеждён, что полное подавление плазменных неустойчивостей невозможно и, следовательно, слабая дрейфовая турбулентность всегда будет присутствовать в плазме токамака. Я считал, что это не является препятствием. Используя теоретические оценки для получения скейлингов, описывающих дрейфовую турбулентность (в настоящее время называемые гиро-Бом-скейлинг), я оценил величину

$$r_0 B_0 \approx 10\ [m \times T] \tag{19}$$

как критерий "плазменного зажигания". Здесь r_0 — малый радиус токамака, B_0 — тороидальное магнитное поле. Все экспериментаторы рассматривали эту оценку как недостижимо большую. Однако на сегодняшний день эта оценка скорректирована и рассматривается величина $r_0 B_0 \approx 15\ [m \times T]$ как необходимое условие для работы токамака-реактора с некруглым сечением плазменного шнура. Эти мои теоретические аргументы убедили Арцимовича сделать заявки на оборудование для строительства токамака Т-10, который вступил в строй спустя 8 лет в 1975 году".

Действительно, Кадомцев отчётливо понимал важность концепции скейлинга при описании турбулентного состояния плазмы. Так, например, при рассмотрении высокочастотных осцилляций плазмы традиционной является оценка корреляционного времени в виде

$$\tau_{\rm cor}(\omega) \approx \frac{1}{\omega}\,. \tag{20}$$

Здесь ω — характерная частота плазменных осцилляций. Тогда стандартное выражение для коэффициента турбулентной диффузии принимает квазилинейную форму [18], основанную на определении автокорреляционной функции скорости $\langle V_E(0)\, V_E(t)\rangle$:

$$D_{\rm T} \approx \int \left\langle V_E(0)\, V_E(t)\right\rangle {\rm d}t \approx \delta V_E^2\, \tau_{\rm cor} \approx \frac{\delta V_E^2}{\omega} \approx \left(\frac{c\,\delta E_{\rm p}}{B_0}\right)^2 \frac{1}{\omega}\,. \tag{21}$$

Естественно, опираясь на это выражение, нельзя описать низкочастотные режимы плазменной турбулентности, поскольку уменьшение характерной частоты не может приводить к бесконечному увеличению коэффициента диффузии, как это следует из приведённого скейлинга $D_{\rm T}|_{\omega\to 0} \to \infty$.

При описании низкочастотных режимов важно принимать во внимание перестройку топологии течения. При этом характерные корреляционные времена, определяющие перенос, оказываются только косвенно связанными с внешней частотой. Так, если мы введём параметр, формально характеризующий путь, проделываемый частицей за время $1/\omega$, то несложно заметить, что в низкочастотных режимах он будет существенно превышать характерный масштаб L_B структур, которые вносят основной вклад в перенос,

$$l_\omega \approx \frac{\delta V_E}{\omega} \propto c\,\frac{\delta E_{\rm p}}{B_0}\,\frac{1}{\omega}\bigg|_{\omega\to 0} \gg L_B\,. \tag{22}$$

При наличии процессов пересоединения турбулентное перемешивание неизбежно окажется ключевым фактором. Поэтому характерное корреляционное время необходимо связать как с масштабом структур, так и с эффективным коэффициентом переноса. Простая размерностная оценка для высоких значений коэффициента турбулентной диффузии $D_{\rm T}$ даётся выражением, неоднократно использованным Кадомцевым:

$$\tau_{\rm cor} \approx \frac{L_B^2}{D_{\rm T}} \approx \frac{1}{k_\perp^2 D_{\rm T}} < \frac{1}{\omega}\,. \tag{23}$$

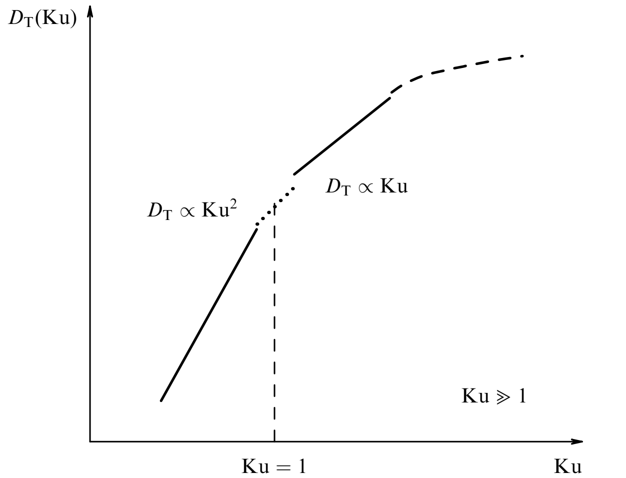


Рис. 1. Зависимость коэффициента турбулентной диффузии от числа Кубо. Область ${\rm Ku} < 1$ соответствует квазилинейному режиму переноса, где $D_{\rm T} \propto {\rm Ku}^2$. В области ${\rm Ku} \geqslant 1$ режим переноса описывается бомовской линейной зависимостью $D_{\rm T} \propto {\rm Ku}$. В режимах с сильной турбулентностью зависимость становится более плавной и определяется специфическим характером возникающих в плазме вихревых структур.

Заметим, что этот подход в дальнейшем получил более строгое математическое оформление в известной работе Кадомцева и Погуце [19], посвящённой аномальному переносу электронов в стохастическом магнитном поле. Мы рассмотрим этот подход позднее. Кроме того, здесь очевидным образом проявляется важность учёта феноменологического принципа выбора самой быстрой моды, который доказал свою эффективность не только при описании процессов переноса в плазме, но и при анализе как турбулентной диффузии частиц скаляра, так и процессов тепловой конвекции [20].

Подставляя полученное выражение для корреляционного времени в исходную формулу, находим

$$D_{\rm T} \propto \left(\frac{\delta E_{\rm p}}{B_0}\right)^2 \frac{L_B^2}{D_{\rm T}}\, c^2\,. \tag{24}$$

Учитывая оценку $\delta E_{\rm p} L_B \approx \delta\varphi$, несложно получить окончательное выражение для коэффициента турбулентной диффузии в низкочастотных режимах, которое совпадает по форме со скейлингом Бома:

$$D_{\rm T} \propto c\,\frac{\delta E_{\rm p} L_B}{B_0} \approx c\,\frac{\delta\varphi}{B_0} \propto {\rm Ku}\,. \tag{25}$$

Переход от квазилинейных режимов с квадратичной зависимостью $D_{\rm T} \propto {\rm Ku}^2$ к линейным (бомовским) режимам, $D_{\rm T} \propto {\rm Ku}$ [21], происходит при числах Кубо ${\rm Ku} \approx 1$, которые характеризуют переход от режимов слабой турбулентности к развитой структурной турбулентности (рис. 1). Эти сильно турбулентные режимы требуют более тщательного анализа возникающих в них когерентных структур, и, как мы увидим позднее, Кадомцевым был предложен эффективный метод анализа переноса в таких течениях.

4. "Заплетённое" магнитное поле и квазилинейное приближение

Специфика магнитной конфигурации тороидальных плазменных ловушек приводит к появлению резонансных магнитных поверхностей и образованию островных

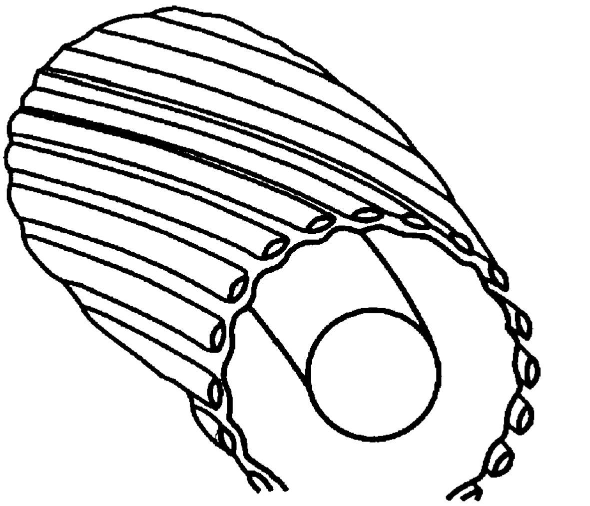


Рис. 2. Островные структуры в токамаке, возникающие в результате разрушения аксиальной симметрии.

структур (рис. 2), в окрестности сепаратрис которых происходит стохастизация магнитного поля. Б.Б. Кадомцев в своих работах неоднократно обращался к этой проблеме, начиная со статьи [21] 1970 г. Уже в этой работе были сделаны попытки объяснить аномальный характер переноса электронов в плазме токамака на основе модели стохастического магнитного поля.

Однако принципиально новый подход был им предложен в совместной с О.П. Погуце работе [19]. К сожалению, эта работа была опубликована только в трудах конференции и поэтому известна многим физикам лишь по косвенным ссылкам. В разделах 5–10 мы подробно рассмотрим несколько важных для теории турбулентного переноса идей, предложенных в этом докладе.

Уже в первых теоретических работах (см. [22] и приведённые там ссылки), посвящённых описанию стохастического магнитного поля, предлагалось использовать аналогию с поведением частиц скаляра в поле гидродинамической турбулентности. Такой подход основывается на стохастическом уравнении для силовых линий:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\perp}{\mathrm{d}z} = \mathbf{b}(z, \mathbf{r}_\perp)\,, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}'}{B_0} \approx \mathbf{b}_0\,. \tag{26}$$

Здесь малое случайное поле $\mathbf{B}'(B_x, B_y, 0)$ наложено на большое постоянное поле $\mathbf{B}(0, 0, B_0)$, направленное по оси z, b_0 — характерный относительный масштаб возмущений. В задачах о диффузии магнитных силовых линий в высокотемпературной плазме порядок возмущений b_0 даётся оценкой $b_0 \approx 10^{-3}-10^{-4}$ [23]. Тогда классическое тейлоровское выражение [19] для коэффициента поперечной диффузии силовых линий магнитного поля принимает вид

$$D_\mathrm{m} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \big\langle \mathbf{b}(z, 0)\, \mathbf{b}(0, 0)\big\rangle \propto b_0^2 \lambda_z\,. \tag{27}$$

Здесь $\langle\ \rangle$ — традиционный знак усреднения, λ_z — продольный корреляционный масштаб стохастического магнитного поля,

$$\lambda_z = \frac{1}{b_0^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \big\langle \mathbf{b}(z, 0)\, \mathbf{b}(0, 0)\big\rangle\,. \tag{28}$$

Это позволило рассматривать коэффициент диффузии магнитных силовых линий D_m с корреляционной точки зрения. В нашем анизотропном случае необходимо тщательно анализировать продольные и поперечные корреляционные эффекты. Поэтому пренебрежение поперечным смещением $\lambda_\perp$ в тейлоровском выражении

$$\mathbf{b}(z, \lambda_\perp) \approx \mathbf{b}(z, 0) \tag{29}$$

является серьёзным недостатком и будет справедливым только в случае, когда диффузионное смещение в поперечном направлении много меньше поперечного корреляционного масштаба: $b_0\lambda_z \ll \lambda_\perp$. Однако для задач сильной турбулентности наибольший интерес представляет случай, в котором поперечные корреляционные эффекты играют значительную роль: $b_0\lambda_z \geqslant \lambda_\perp$. Кадомцев и Погуце [19] предложили использовать новый подход и сформулировали критерий его применимости в терминах безразмерного параметра магнитного числа Кубо, характеризующего отношение продольных и поперечных корреляционных эффектов:

$$\mathrm{Ku_m} = \frac{b_0 \lambda_z}{\lambda_\perp} > 1\,. \tag{30}$$

Кадомцев и Погуце связали такой режим с перколяционным характером [24] поведения токовых линий, позволяющим исследовать эффекты "длинных корреляций". Фактически здесь предполагается, что реально возникающая кинематическая декорреляция $b_0\lambda_z$ оказывается больше, чем формально введённый поперечный корреляционный масштаб $\lambda_\perp$.

Для вычисления коэффициента магнитной диффузии в этом пределе было предложено модифицировать квазилинейные уравнения для описания частиц скаляра [25] с учётом "турбулентного перемешивания". Кадомцев и Погуце рассмотрели трёхмерную задачу, опираясь на уравнение неразрывности для плотности магнитных силовых линий n_b,

$$\frac{\partial n_b}{\partial z} + \mathbf{b}\nabla_\perp n_b(\mathbf{r}_\perp, z) = 0\,. \tag{31}$$

Величина n_b была представлена как сумма средней плотности $n_0 = \langle n_b \rangle$ и флуктуационной части n_1,

$$n_b(z, \mathbf{r}) = n_0 + n_1\,. \tag{32}$$

Тогда после усреднения получим

$$\frac{\partial n_0}{\partial z} + \nabla_\perp \langle \mathbf{b} n_1 \rangle = 0\,, \tag{33}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial z} + \mathbf{b}\nabla_\perp n_0 = v_1\,\frac{\partial n_1}{\partial x} - \left\langle v_1 \frac{\partial n_1}{\partial x}\right\rangle. \tag{34}$$

В квазилинейном приближении нелинейный член в уравнении для средней плотности сохраняют, но в уравнении для возмущения члены второго порядка $v_1\,\partial n_1/\partial x-$ $-\langle v_1\,\partial n_1/\partial x\rangle$ обычно отбрасывают. Это позволяет легко решить уравнение для возмущений и перейти к усреднению в уравнении для средней плотности.

Важным шагом Кадомцева и Погуце стала "перенормировка" уравнения для возмущений, основанная на представлении о диффузионном характере турбулентного перемешивания, связанного с эффектами длинных корреляций. Они заменили члены второго порядка в уравнении для n_1 диффузионным членом $D_{\mathrm{m}}\nabla_{\perp}^2 n_1$:

$$\frac{\partial n_1}{\partial z} + \mathbf{b}\nabla_{\perp} n_0 = D_{\mathrm{m}}\nabla_{\perp}^2 n_1 \,. \tag{35}$$

Причём, в отличие от коэффициента диффузии в моделях переноса скаляра Коррсина [26] и Дыхне [27], был использован эффективный коэффициент диффузии магнитных силовых линий D_{m}, который ещё предстоит найти из решения этих перенормированных уравнений. На качественном уровне мы применили такой подход в разделе 3 при анализе скейлинга Бома в низкочастотном пределе.

В результате преобразований система перенормированных уравнений сохранила удобный для решения вид. Линейность уравнения для возмущений не нарушилась, но уравнение вместо гиперболического, каковым оно являлось в стандартном квазилинейном приближении для пассивного скаляра, стало параболическим (диффузионным). Используя математический аппарат функций Грина для параболического уравнения, описывающего возмущение плотности, получим

$$\frac{\partial G}{\partial z} - D_{\mathrm{m}}\nabla_{\perp}^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \,. \tag{36}$$

Окончательное выражение для средней плотности n_b принимает вид диффузионного уравнения:

$$\frac{\partial n_b(z, \mathbf{r})}{\partial z} = D_{\mathrm{m}}\nabla_{\perp}^2 n_b \,, \tag{37}$$

где коэффициент магнитной диффузии и спектр Фурье возмущённых амплитуд выражаются как

$$D_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int \frac{b^2(\mathbf{k})}{\mathrm{i}k_z + k_{\perp}^2 D_{\mathrm{m}}}\,\mathrm{d}\mathbf{k} \,, \tag{38}$$

$$b^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \langle b(0)\, b(\mathbf{r})\rangle \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} \,. \tag{39}$$

При $\Delta k_z > k_{\perp}^2 D_{\mathrm{m}}$ получается классическое квазилинейное выражение:

$$D_{\mathrm{m}} = \frac{\pi}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{k}\, b^2(\mathbf{k})\,\delta(k_z) \propto b_0^2\lambda_z \propto \mathrm{Ku}_{\mathrm{m}}^2 \,, \tag{40}$$

где λ_z — продольный корреляционный масштаб. В случае сильных поперечных корреляций, $\Delta k_z < k_{\perp}^2 D_{\mathrm{m}}$, приходим к выражению бомовского типа

$$D_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}\int \frac{b^2(\mathbf{k})}{k_{\perp}^2}\,\mathrm{d}\mathbf{k} \propto (b_0\lambda_{\perp})^2 \propto \mathrm{Ku}_{\mathrm{m}}^2 \,. \tag{41}$$

Несмотря на простую форму полученной оценки $D_{\mathrm{m}} \approx b_0\lambda_{\perp}$, линейный характер зависимости эффективного коэффициента диффузии D_{eff} от ширины "стохастического слоя" $\lambda_{\perp}$ широко используется для описания турбулентного переноса в моделях с конвективными ячейками и перколяционными линиями тока, что позволило получить многочисленные скейлинги и провести сравнение теоретических оценок с данными лабораторных и численных экспериментов.

5. Скейлинг Кадомцева – Погуце

Широкий круг проблем турбулентного переноса связан с исследованием анизотропных сред, что приводит к необходимости описания взаимодействия между продольными и поперечными корреляционными механизмами. Эта проблема тесно связана с исследованиями процессов турбулентной диффузии частиц плазмы в стохастическом магнитном поле. Кадомцев и Погуце [19] рассмотрели несколько декорреляционных механизмов, ответственных за эффективный перенос электронов в стохастическом магнитном поле. В основе рассмотрения лежит представление о случайных блужданиях магнитных силовых линий в поперечном направлении (рис. 3).

Для перехода к описанию переноса частиц удобно ввести коэффициент диффузии силовых линий магнитного поля в классическом виде [21]:

$$D_{\mathrm{m}} \propto \frac{r_{\perp}^2}{L_{||}} \,, \tag{42}$$

где $L_{||} > \lambda_z$. Здесь $r_{\perp}$ — смещение возмущённой силовой линии в поперечном направлении при смещении вдоль линии тока на длину $L_{||}$. Установление связи между коэффициентом магнитной диффузии D_{m} и эффективным коэффициентом поперечной диффузии частиц в заплетённом магнитном поле $D_{\perp}$ является сложной задачей, поскольку заряженные частицы могут "покидать" силовую линию.

Если мы считаем, что частица в своём движении строго следует направлению смещения изначально выбранной силовой линии (частицы как бы нанизаны на токовую линию, как бусины), то тогда несложно получить выражение для коэффициента поперечной диффузии частиц

$$D_{\perp} \propto \frac{r_{\perp}^2}{L_{||}}\,\frac{L_{||}}{t} \approx D_{\mathrm{m}}\,\frac{L_{||}}{t} \,. \tag{43}$$

В случае баллистического движения частиц вдоль линии тока оценка поперечного коэффициента диффузии при-

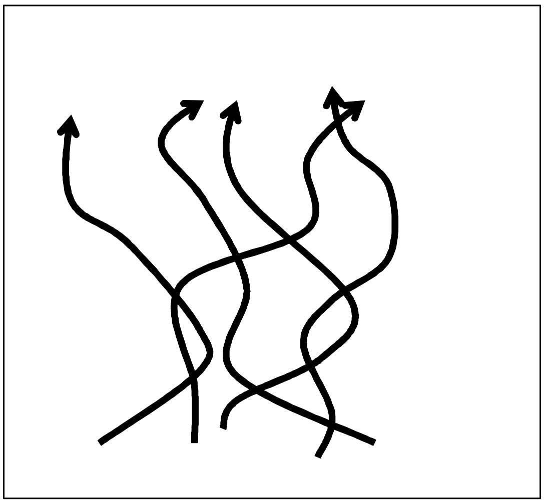


Рис. 3. Случайные блуждания силовых линий магнитного поля, которые могут быть описаны в рамках диффузионного приближения.

нимает вид

$$D_\perp \approx D_\mathrm{m} V_{||}\,. \qquad (44)$$

Здесь $V_{||}$ — скорость частицы в условиях движения вдоль силовой линии.

Нестандартная ситуация возникает при рассмотрении столкновений между частицами, находящимися в заплетённом магнитном поле. Здесь естественно предположить, что движение в продольном направлении носит диффузионный характер (случайные блуждания вдоль силовой линии без возможности смены первоначально "выбранной" силовой линии):

$$\chi_{||} \approx \frac{L_\mathrm{cor}^2}{2\tau} \approx \frac{L_{||}^2}{2t}\,. \qquad (45)$$

Здесь L_cor — продольная корреляционная длина, τ — корреляционное время. Тогда оценка продольного смещения имеет вид

$$L_{||}(t) \approx \sqrt{2\chi_{||} t}\,. \qquad (46)$$

Подставляя эту диффузионную оценку в формулу для поперечного коэффициента диффузии, получим скейлинг Гетманцева [28]:

$$D_\perp(t) \approx D_\mathrm{m}\,\frac{\sqrt{2\chi_{||} t}}{t} \approx \sqrt{2\chi_{||}}\,\frac{D_\mathrm{m}}{\sqrt{t}}\,. \qquad (47)$$

Результат демонстрирует существенное отличие поперечного (компаунд-диффузия) переноса от классического диффузионного переноса, поскольку

$$\Delta_\perp^2 \approx D_\mathrm{m}\sqrt{2\chi_{||}}\,\sqrt{t} \propto t^{1/2} \ll t \quad \text{для} \quad t \gg \tau\,. \qquad (48)$$

Это соответствует субдиффузионному характеру переноса [29] с показателем Хёрста $H = 1/4$. Полученный результат указывает на нетривиальный характер связи между продольными и поперечными корреляционными эффектами в случае описания переноса в стохастическом магнитном поле.

Заметим, что в этой модели частицы никогда не покидают своей силовой линии магнитного поля, что является существенным ограничением, которое было преодолено Кадомцевым и Погуце посредством рассмотрения декорреляционного механизма, основанного на смене частицами силовой линии вследствие поперечной диффузии $\chi_\perp$. В случае задачи удержания высокотемпературной плазмы в установках типа токамак коэффициент продольной диффузии частиц много больше поперечного коэффициента диффузии, $\chi_{||} \gg \chi_\perp$. Это условие несложно переписать в плазмо-физических терминах: $\chi_{||} \approx V_\mathrm{T}^2 \tau_\mathrm{ei}$, $\chi_\perp \approx r_\mathrm{e}^2/\tau_\mathrm{ei} \approx 1/\tau_\mathrm{ei}(V_\mathrm{T}/\Omega_\mathrm{He})^2$. Здесь V_T — тепловая скорость электронов, $\nu_\mathrm{ei} \approx 1/\tau_\mathrm{ei}$ — электрон-ионная частота столкновений, r_e — ларморовский радиус электронов, $\Omega_\mathrm{He} \gg \nu_\mathrm{ei}$ — гирочастота электронов. Тогда получаем условие $\chi_{||}/\chi_\perp \approx (\Omega_\mathrm{He}\tau_\mathrm{ei})^2 \gg 1$. Для учёта поперечных декорреляционных эффектов необходимо в формуле Гетманцева для эффективного коэффициента поперечной диффузии заменить временной параметр t характерным корреляционным временем:

$$D_\perp(\tau) \propto D_\mathrm{m}\sqrt{\frac{\chi_{||}}{\tau}}\,. \qquad (49)$$

Подставляя, получаем формулу Кадомцева – Погуце для эффективного коэффициента поперечной диффузии частиц в стохастическом магнитном поле:

$$D_\mathrm{KP} \approx D_\mathrm{m}\,\frac{\sqrt{\chi_{||}\chi_\perp}}{r_0}\,, \qquad (50)$$

где $\chi_\perp \propto r_0^2/\tau$, r_0 — характерный поперечный пространственный масштаб, который в задачах об аномальной диффузии электронов в заплетённом магнитном поле равняется ларморовскому радиусу электронов.

Часто рассмотрение проводят в терминах коэффициентов теплопроводности, чтобы не усложнять задачу вопросами, связанными с амбиполярностью плазмы. Однако мы сохраним диффузионные обозначения ради единообразия.

Напомним, что коэффициент магнитной диффузии D_m, коэффициенты продольной и поперечной диффузии $\chi_{||}$, $\chi_\perp$ предполагаются известными и $D_\mathrm{KP}(\chi_{||}, \chi_\perp) > \chi_\perp$. В условиях сильной турбулентности $D_\mathrm{m}(b_0) \propto b_0\lambda_\perp$ и, следовательно, получаем выражение

$$D_\mathrm{KP} \propto b_0\sqrt{\chi_{||}\chi_\perp} > \chi_\perp\,, \qquad (51)$$

которое преобразуется в условие $b_0\Omega_\mathrm{He}\tau_\mathrm{ei} > 1$. Кроме того, режим Кадомцева – Погуце предполагает малость поперечного декорреляционного времени в сравнении с продольным временны́м масштабом (принцип доминирования быстрой моды),

$$\tau(\chi_\perp) \propto \frac{r_0^2}{\chi_\perp} \approx \frac{\lambda_\perp^2}{\chi_\perp} < \tau_{||} \approx \frac{\lambda_z^2}{\chi_{||}}\,. \qquad (52)$$

Тогда условие применимости поперечной декорреляции принимает вид

$$b_0\Omega_\mathrm{He}\tau_\mathrm{ei} < \mathrm{Ku_m} \approx \frac{b_0\lambda_z}{\lambda_\perp}\,, \qquad (53)$$

где $\mathrm{Ku_m} > 1$ (рис. 4).

В заключение этого раздела заметим, что результат Кадомцева – Погуце также можно представить в другом виде, используя бесстолкновительный коэффициент диффузии с дополнительным корректирующим множителем. Продольная скорость частицы входит в выражение

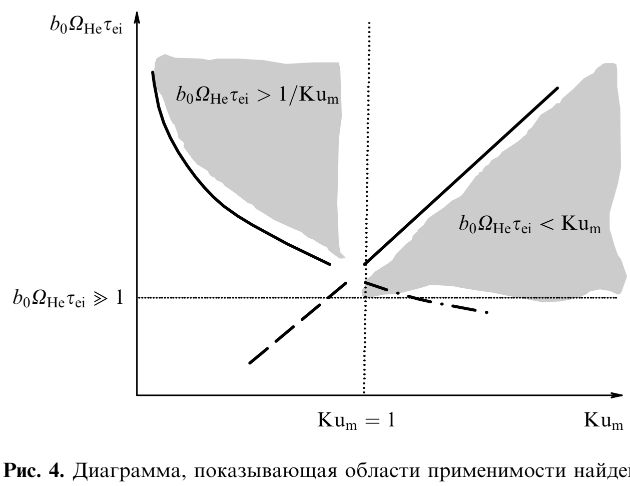


Рис. 4. Диаграмма, показывающая области применимости найденных Кадомцевым и Погуце аномальных режимов переноса электронов в стационарном "заплетённом" (стохастическом) магнитном поле.

для продольного коэффициента диффузии:

$$\chi_{\parallel} \approx V_{\parallel}^2 \tau_{\rm coll} \, . \tag{54}$$

С другой стороны, коэффициент поперечной диффузии имеет вид $\chi_{\perp} \approx \lambda_{\perp}^2/\tau_{\rm coll}$, где $\lambda_{\perp}$ — поперечный корреляционный масштаб. В результате несложных вычислений находим выражение для эффективного коэффициента диффузии для режима Кадомцева – Погуце:

$$D_{\rm eff} \approx D_{\rm m} V_{\parallel} \, \frac{\lambda_{\perp}}{r_0} \, . \tag{55}$$

Мы рассмотрели модель Кадомцева – Погуце в терминах корреляционного масштаба $\lambda_{\perp}$ и характерного времени $\tau_{\rm coll}$. Для описания задач физики плазмы [19] легко связать эти величины с ларморовским радиусом электрона $\rho_{\rm e}$ и частотой электрон-ионных столкновений $\nu_{\rm ei}$.

6. Стохастическая неустойчивость и перенос

Кадомцев и Погуце также рассмотрели принципиально отличный от поперечной диффузии декорреляционный, связанный с разбеганием первоначально близких силовых линий, механизм, основанный на эффекте стохастической неустойчивости [19, 30], которая играет важную роль в задачах физики плазмы и астрофизике (рис. 5). Предполагается, что в среднем две первоначально близкие силовые линии отклоняются друг от друга согласно закону

$$l(z) = l_0 \exp\left(\frac{z}{\lambda_{\rm K}}\right) . \tag{56}$$

Здесь l_0 — первоначальное расстояние между силовыми линиями, z — расстояние, пройденное вдоль силовой линии. Величина $h_{\rm K} = 1/\lambda_{\rm K}$ названа колмогоровской энтропией,

$$\frac{1}{L_{\rm K}} \approx h_{\rm K} = \lim_{l_0 \to 0,\, z \to \infty} \left(\frac{1}{z} \ln \frac{\Delta(z)}{l_0} \right) . \tag{57}$$

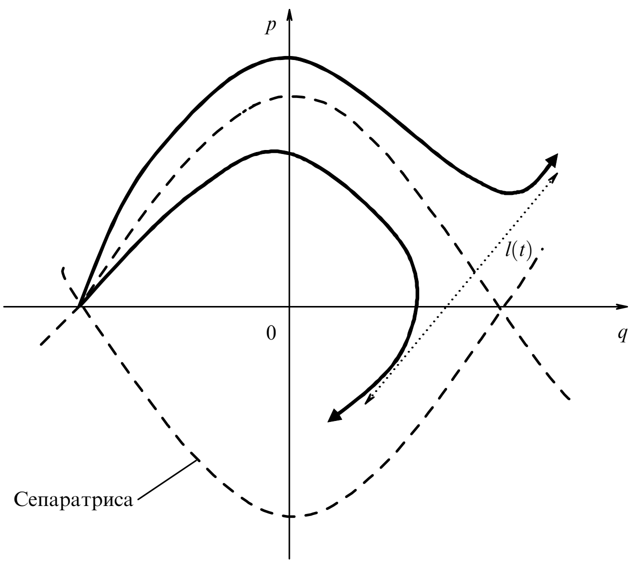


Рис. 5. Стохастическая неустойчивость фазовых траекторий в окрестности сепаратрисы. Две первоначально близкие траектории расходятся с течением времени экспоненциально на расстояние порядка $l(t)$.

Основываясь на уже использованном ранее для анализа диффузии силовых линий уравнении движения в форме Лагранжа

$$\frac{{\rm d}\mathbf{r}_{\perp}}{{\rm d}t} = \mathbf{b}(z, \mathbf{r}_{\perp}) \, , \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}'}{B_0} \approx \mathbf{b}_0 \, , \tag{58}$$

Кадомцев и Погуце получили выражение

$$\frac{\partial}{\partial z}\,(r_2 - r_1) = b(z, r_2) - b(z, r_1) \approx \frac{\partial b}{\partial r}\,(r_2 - r_1) \, , \tag{59}$$

описывающее разбегание силовых линий стохастического поля при малой разности $r_2 - r_1$ [19]. Формальные вычисления позволяют получить экспоненциальную зависимость:

$$r_2(z) - r_1(z) \approx \Delta r(z=0) \exp\left(\int_0^z \frac{\partial b}{\partial r}\,{\rm d}z \right) . \tag{60}$$

Инкремент стохастической неустойчивости можно найти, усредняя это выражение с использованием предположения о гауссовом характере поведения случайной величины b, которое позволяет вычислить среднее по стандартной формуле:

$$\langle \exp A \rangle = \exp \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \, . \tag{61}$$

Отсюда получаем

$$\Delta_{\perp}(z) = \big\langle r_2(z) - r_1(z) \big\rangle = \\ = \Delta_0 \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^z \int_0^z {\rm d}z'\,{\rm d}z'' \left\langle \frac{\partial b(z', r)}{\partial r} \, \frac{\partial b(z'', r)}{\partial r} \right\rangle \right) . \tag{62}$$

Интегральное выражение в формуле (62) является аналогичным выражению для квазилинейного коэффициента диффузии и позволяет после несложных преобразований получить инкремент стохастической неустойчивости γ_z в виде

$$\gamma_z = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{\partial b(0,0)}{\partial r} \, \frac{\partial b(z,0)}{\partial r} \right\rangle {\rm d}z \, . \tag{63}$$

В терминах безразмерного параметра — магнитного числа Кубо ${\rm Ku_m}$ — этот результат принимает вид

$$\gamma_z \approx \frac{b_0^2 \lambda_z}{\lambda_{\perp}^2} \approx \frac{D_{\rm m}}{\lambda_{\perp}^2} \approx \frac{1}{\lambda_z}\,{\rm Ku_m^2} \, . \tag{64}$$

Естественно, пределы применимости этой оценки совпадают с пределами применимости квазилинейного приближения ${\rm Ku_m} \approx b_0 \lambda_z/\lambda_{\perp} < 1$.

Кадомцев и Погуце воспользовались полученным скейлингом для оценки эффектов переноса, в которых главным декорреляционным механизмом является стохастическая неустойчивость (рис. 6). Записав корреляционное время, опираясь на размерностные соображения, в виде

$$\tau \approx \frac{1}{\gamma_z^2 \chi_{\parallel}} \approx \frac{\lambda_z^2}{\chi_{\parallel}}\,{\rm Ku_m^{-4}} \, , \tag{65}$$

они модифицировали выражение для коэффициента поперечной диффузии на масштабах $z > \lambda_z$:

$$D_{\perp}(\tau) \propto D_{\rm m} \sqrt{\frac{\chi_{\parallel}}{\tau}} \, , \tag{66}$$

получив формулу

$$D_{\perp} \propto D_{\rm m}\,\chi_{\parallel}\gamma_z \approx D_{\rm m}\,\chi_{\parallel}\,\frac{{\rm Ku_m^2}}{\lambda_z} \, . \tag{67}$$

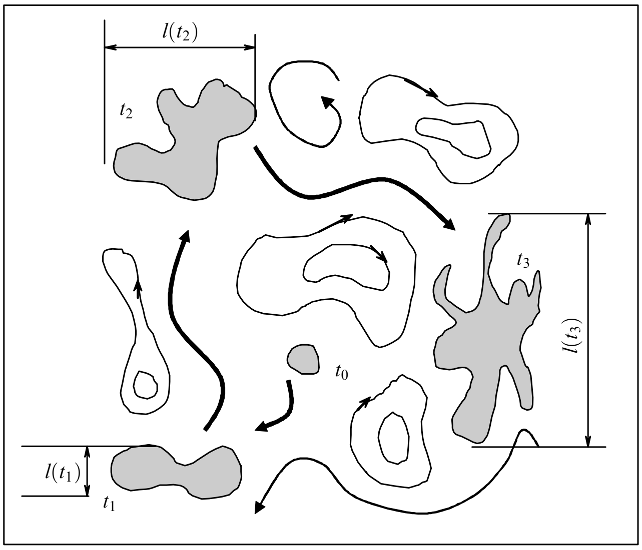


Рис. 6. Эволюция ячейки в результате стохастической неустойчивости. Характерный размер ячейки растёт с течением времени под действием случайного (турбулентного) поля, $l_0 \ll l(t_1) \ll l(t_2) \ll l(t_3)$.

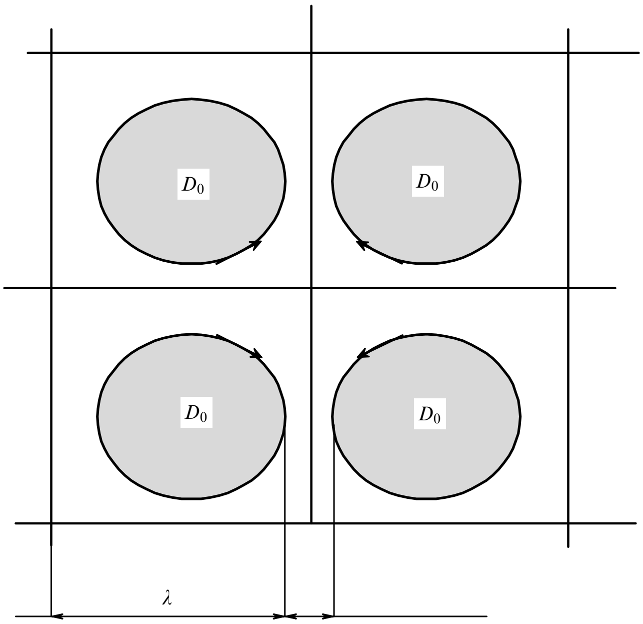


Рис. 7 Конвективные ячейки: λ — характерный размер ячейки, Δ — ширина стохастического (диффузионного) слоя, D_0 — коэффициент молекулярной (затравочной) диффузии, которая обеспечивает декорреляцию частиц в стационарном вихревом течении.

Заметим, что поскольку для инкремента стохастической неустойчивости использовалось квазилинейное приближение, такое же квазилинейное приближение должно быть использовано и для коэффициента диффузии силовых линий, $D_{\mathrm{m}} \propto b_0^2 \lambda_z$. Тогда получаем принципиально новый скейлинг для эффективного поперечного коэффициента диффузии частиц в стохастическом магнитном поле:

$$D_{\perp} \propto \chi_{\|} b_0^2 \,\mathrm{Ku}_{\mathrm{m}}^2 \approx \chi_{\|} b_0^4 \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_{\perp}}\right)^2 . \tag{68}$$

Такой режим для переноса электронов позднее был получен в известной работе [31]. Условие применимости этого режима также устанавливается на основе принципа выбора быстрой моды $1/\gamma_{\perp} \approx \lambda_{\perp}^2/[D_{\perp}(\chi_{\|})] < \lambda_{\perp}^2/\chi_{\perp} \approx \tau_{\perp}$, который соответствует условию $D_{\perp} \propto \chi_{\|} b_0^4 (\lambda_z/\lambda_{\perp})^2 > \chi_{\perp}$. После вычислений получаем область применимости исследуемого режима (см. рис. 4) $b_0 \Omega_{\mathrm{He}} \tau_{\mathrm{ei}} > 1/(\mathrm{Ku}_{\mathrm{m}}) \approx \approx \lambda_{\perp}/(b_0 \lambda_z)$, где $\mathrm{Ku}_{\mathrm{m}} \ll 1$. Заметим, что это условие может быть интерпретировано и в терминах характерных пространственных масштабов, $l_{\mathrm{cor}}(\chi_{\|}) \propto (\chi_{\|}/\gamma_{\perp})^{1/2} \approx \approx \lambda_z/\mathrm{Ku}_{\mathrm{m}} \gg \lambda_z$.

Необходимо отметить, что в случае диффузии частиц в стохастическом магнитном поле мы сталкиваемся с большим разнообразием режимов. Рассмотрение всех существующих вариантов выходит за рамки данной статьи, и мы использовали простейшую модель случайных блужданий силовых линий, чтобы на основе простых размерностных оценок показать важность идей Кадомцева о принципиальной взаимозависимости продольных и поперечных корреляций при рассмотрении задач анизотропного переноса.

7. Вихревые структуры и аномальный перенос

Развитие представлений о сильной плазменной турбулентности привело к осознанию важности возникающих при тепловой конвекции плазмы с током конвективных ячеек. Этот вопрос подробно рассматривался в обзоре Кадомцева и Погуце [32] в 1966 г. и в *Вопросах теории плазмы* [33], где были получены первые оценки коэффициентов переноса в плазме токамака, учитывающие присутствие конвективных ячеек больших масштабов. Любопытно, что в дискуссии, посвящённой докладу Кадомцева на конференции Международного агентства по атомной энергии (МАГАТЭ), эти результаты были названы выдающимися.

Дальнейшие работы в области дрейфово-конвективной турбулентности подтвердили необходимость учёта влияния вихревых структур на процессы турбулентного переноса. Простые оценки удаётся получить, рассматривая регулярные вихревые структуры (конвективные ячейки) (рис. 7), как это было сделано в работе [34].

В случае двумерного течения система линий тока в модели конвективных ячеек может быть описана в терминах стационарных функций тока $\Psi(x, y) = \Psi_0 \sin(k_x x) \times \times \sin(k_y y)$, тогда компоненты скорости выражаются как

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,, \quad V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,. \tag{69}$$

В качестве параметров выберем размер ячейки λ и характерную скорость конвективного потока V_0. Эффективный перенос на системе вихрей можно описать, опираясь на декорреляционный механизм, связанный с диффузионным выходом частиц из конвективного слоя шириной Δ. Естественно использовать характерное время покидания частицами пограничного (конвективного) слоя в качестве корреляционного времени $\tau \approx \Delta^2/D_0$. Здесь D_0 — коэффициент "затравочной диффузии" или диффузии, которая возникает вследствие стохастизации траектории частиц плазмы вблизи сепаратрис, разделяющих вихри. Представим коэффициент эффективной диффузии в конвективном виде

$$D_{\mathrm{eff}} \approx \lambda V_0 P_{\infty}\,, \tag{70}$$

где P_∞ — доля пространства, отвечающая за конвекцию. В случае конвективных ячеек величину P_∞ легко оценить:

$$P_\infty \approx \frac{\lambda\varDelta}{\lambda^2} \approx \frac{\varDelta}{\lambda}\,. \tag{71}$$

Теперь выражение для коэффициента турбулентной диффузии совпало с перенормированной квазилинейной оценкой Кадомцева–Погуце, рассмотренной в связи с диффузией силовых линий [19]:

$$D_{\rm eff} \propto \lambda V_0\,\frac{\varDelta}{\lambda} = V_0\varDelta\,. \tag{72}$$

Оценка для ширины стохастического слоя $\varDelta$ получается из баланса частиц в слое. Из конвективной ячейки в единицу времени поступает число частиц $N_D \propto D_0(n/\varDelta)\,\lambda$, а конвекцией вдоль пограничного слоя уносится число частиц $N_{\rm conv} \propto nV_0\varDelta$. В итоге получим

$$\varDelta(V_0) = \sqrt{\frac{D_0\lambda}{V_0}} \approx \sqrt{D_0\tau}\,. \tag{73}$$

Окончательно для коэффициента эффективной диффузии в системе конвективных ячеек находим

$$D_{\rm eff} = {\rm const}\sqrt{D_0V_0\lambda} \propto V_0^{1/2}\,. \tag{74}$$

Представление этого результата отличается как от квазилинейной оценки $D_{\rm eff} \propto V_0^2$, так и от линейной оценки $D_{\rm eff} \propto V_0$.

Недиффузионные режимы переноса можно получить и в случае хаотических структур [35]. Рассмотрим случайные флуктуации скорости, создающие узкие конвективные потоки шириной l_0 и скоростью V_0, которые в целом образуют систему случайно направленных плоскопараллельных течений (рис. 8). Эти течения воздействуют в поперечном направлении на диффундирующую с коэффициентом молекулярной диффузии D_0 частицу. Для вычисления коэффициента поперечной диффузии $D_\perp$ используем оценку

$$D_\perp(t) \approx \frac{\lambda_\perp^2}{t}\,, \tag{75}$$

где поперечное смещение даётся квазибаллистической оценкой $\lambda_\perp(t) \approx V_0tP_\infty(t)$. Здесь $\lambda_\perp$ — поперечное смещение за время t, P_∞ — относительная доля, $P_\infty(t) = \delta N(t)/N(t)$, нескомпенсированных в среднем пульсаций скорости δN [27]. Величина

$$N(t) \approx \frac{\sqrt{2D_0t}}{l_0} \tag{76}$$

представляет собой число пересечённых частицей шировых потоков за время её продольного (диффузионного) движения. Мы можем пренебречь диффузионным смещением частицы в поперечном направлении ввиду его малости в сравнении с конвективным переносом. Тогда, оценив с использованием "гауссовой статистики" $\delta N(t) \approx \sqrt{N(t)}$, несложно получить формулу для коэффициента эффективной диффузии

$$D_\perp(t) \propto V_0^2l_0\sqrt{\frac{t}{D_0}}\,, \tag{77}$$

или для среднеквадратичного смещения частицы

$$\lambda_\perp^2(t) \propto D_\perp(t)\,t \propto t^{3/2}\,. \tag{78}$$

Для рассматриваемого супердиффузионного случая получаем показатель Хёрста $H = 3/4 > 1/2$.

Рассмотренную модель удаётся обобщить посредством наложения двух взаимно перпендикулярных шировых течений, $\Psi(x,z) = \Psi^x(z) + \Psi^z(x)$. Так мы получаем случайную стационарную систему вихрей (рис. 9) для описания переноса частиц, в которой применим метод перенормировки Кадомцева–Погуце, основанный на "изотропизации", связанной с длинными корреля-

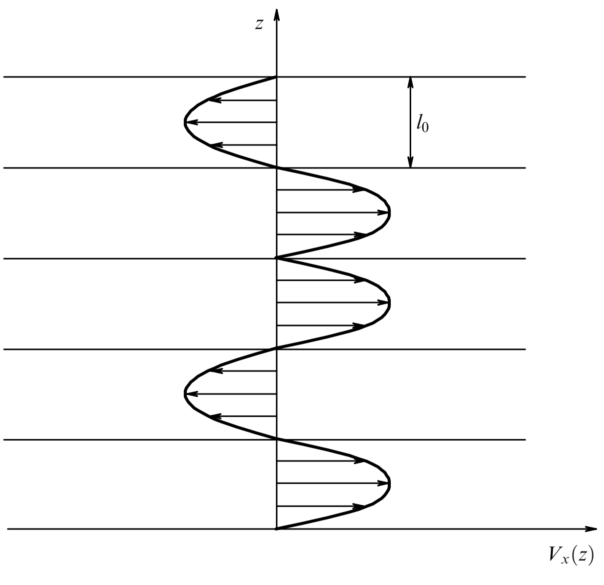


Рис. 8. Шировое течение Дрейзина–Дыхне, образованное совокупностью случайно расположенных плоскопараллельных потоков, l_0 — характерная ширина потока.

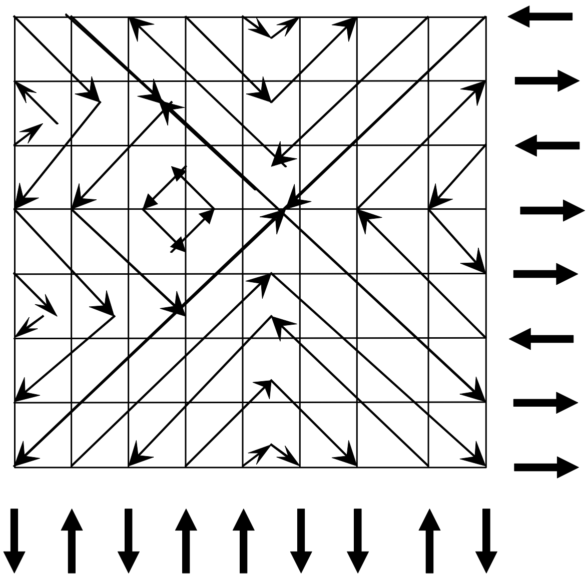


Рис. 9. Двумерное случайное течение (Manhattan grid flow), образованное суперпозицией двух взаимно перпендикулярных случайных шировых течений Дрейзина–Дыхне.

циями. Так, заменяя в формуле Дрейзина – Дыхне для коэффициента диффузии затравочную молекулярную диффузию эффективной диффузией,

$$D_{\rm eff}(t) \propto V_0^2 \frac{l_0}{\sqrt{D_{\rm eff}}}\, t^{1/2}\,, \tag{79}$$

получим выражение, совпадающее с точным решением задачи на основе ренормгрупповых методов [35 – 37]

$$D_{\rm eff}(t) \propto V_0 l_0 \left(\frac{V_0}{l_0}\, t\right)^{1/3}, \;\; R(t) \propto D_{\rm eff}(t)\, t \propto l_0 \left(\frac{V_0}{l_0}\, t\right)^{2/3}. \tag{80}$$

Этот пример супердиффузионного переноса в "математически" организованном случайном стационарном вихревом течении показывает, насколько нетривиальные режимы переноса могут возникать в присутствии структур.

Б.Б. Кадомцев, несомненно, понимал, что в условиях сильной турбулентности появление крупномасштабных вихревых структур неизбежно приведёт к турбулентному перемешиванию и возрастанию эффективного переноса. Он связывал аномальный характер диффузии в таких режимах с перколяционным характером поведения линий тока [19] в двумерных случайных течениях (рис. 10). Такие линии тока охватывают почти всё течение вследствие их большой извилистости (фрактальности). Сформулированный Кадомцевым и Погуце критерий сильной турбулентности в терминах магнитного числа Кубо несложно интерпретировать для системы линий тока двумерного турбулентного течения, $\mathrm{Ku} = V_0/(\lambda\omega) \geqslant 1$. Здесь V_0 — характерная амплитуда турбулентных пульсаций, λ — характерный масштаб вихрей, ω — характерная частота возмущений. В такой постановке удаётся рассмотреть не только стационарные случайные течения, но и принять во внимание важные для низкочастотной дрейфовой турбулентности механизмы перестройки топологии течения. Мы кратко рассмотрим, как удалось реализовать перколяционный подход для двумерных и квазидвумерных течений, в разделах 8 – 10.

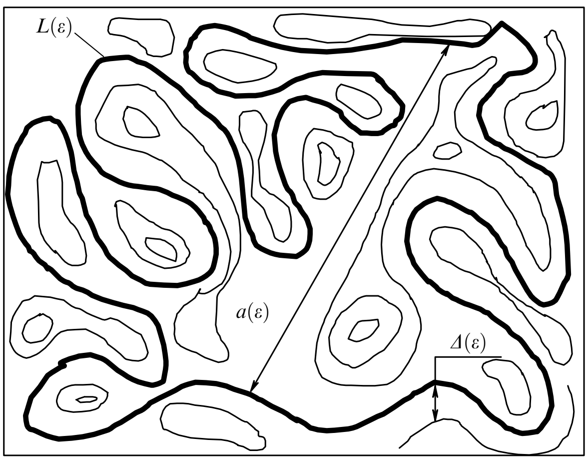


Рис. 10. Перколяционная линия тока в двумерном случайном течении: λ — характерный размер ячейки, $\Delta(\varepsilon)$ — ширина стохастического (диффузионного) слоя, $a(\varepsilon)$ — корреляционный масштаб, определяющий перенос, $L(\varepsilon)$ — длина перколяционной линии тока.

8. Когерентные структуры и перколяционный перенос

В разделе 2 мы кратко упоминали идею Крейчнана о важности крупномасштабных вихревых образований для описания гидродинамической турбулентности. Б.Б. Кадомцев указал на ошибки такого подхода при описании колмогоровского каскада энергии. Тем не менее сама идея о влиянии когерентных (вихревых) структур на связанные с турбулентностью процессы не осталась без внимания Бориса Борисовича. В 1978 г. ему удалось предложить подход [19], в котором вихревые нити большой протяжённости вносят значительный вклад в перенос частиц, несмотря на малую долю объёма, занимаемую ими (см. рис. 10).

На момент публикации работы Кадомцева и Погуце [19], в которой была предложена идея перколяционных эквипотенциалей, строгое математическое выражение для их описания ещё не было получено. Только в 1987 г. было строго показано, что "скорлупа" перколяционного кластера, которая в рамках топографической модели является прототипом перколяционной лини тока, описывается скейлингом [38]

$$L(\varepsilon) \propto \lambda \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\nu D_{\rm H}}, \quad \nu = \frac{4}{3}\,, \quad D_{\rm H} = 1 + \frac{1}{\nu}\,. \tag{81}$$

Здесь λ — характерный размер, $D_{\rm H}$ — показатель Хёрста, ν — корреляционный показатель, ε — малый параметр, описывающий, насколько система близка к перколяционному переходу [24].

Линии тока $\Psi = \Psi(x, y)$ в таком подходе рассматриваются как береговые линии, возникшие в результате затопления водой холмистого ландшафта (рис. 11). Ожидается, что имеется резкий переход от "отдельных озёр на бескрайней суше к отдельным островам в безграничном океане". Теория перколяции требует существования хотя бы одной береговой линии бесконечной протяжённости. Соответствующие функции тока можно смоделировать посредством "возмущения" рельефа, соответствующего системе конвективных ячеек [32, 36, 37, 39 – 44]. Фактически $\varepsilon \approx \delta\Psi/\lambda V_0$, где $\delta\Psi$ — величина функции тока в окрестности перколяционного перехода, V_0 — характерная скорость течения. В теории континуальной перколяции корреляционная длина (поперечный размер перколяционного кластера) $a(\varepsilon)$ вблизи перколяционного перехода, $\varepsilon \to 0$, даётся скейлингом:

$$a(\varepsilon) \approx \lambda \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\nu} \approx \lambda \left(\frac{L(\varepsilon)}{\lambda}\right)^{1/D_{\rm H}}. \tag{82}$$

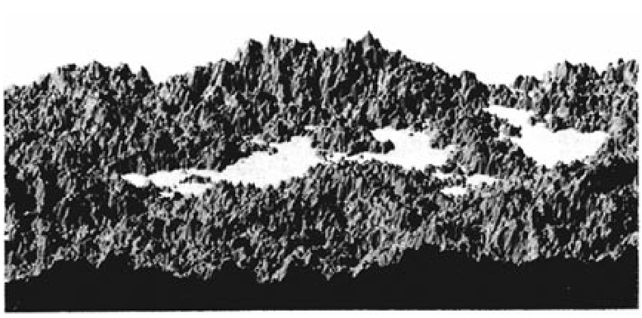


Рис. 11. Затопление водой холмистого ландшафта, позволяющее моделировать фазовый переход в рамках континуальной модели перколяции.

Предполагается, что частицы движутся вдоль линий тока и, следовательно, в перколяционном пределе $\Delta_{\text{cor}} \approx a(\varepsilon)_{\varepsilon\to 0} \to \infty$. Преодоление этой трудности возможно на основе перенормировки малого перколяционного параметра ε. Подробное изложение методов перенормировки можно найти в обзорах [25, 36, 45], а мы обсудим некоторые важные результаты теории турбулентного переноса, которые удалось получить, используя метод, предложенный Б.Б. Кадомцевым.

В работе [40] было исследовано одномасштабное нестационарное случайное течение с функцией тока $\Psi(x, y, t)$, такой что

$$\Psi_0 \approx \lambda V_0 \,, \quad \lambda \approx \left| \frac{\Psi}{\nabla \Psi} \right| , \tag{83}$$

где нестационарность обеспечивает перестройку топологии линий тока. В условиях низкочастотной дрейфовой турбулентности, когда

$$\text{Ku} = \frac{V_0}{\lambda\omega} \gg 1 \,, \quad \text{или} \quad \omega \ll \frac{V_0}{\lambda} \,, \tag{84}$$

именно перестройка течения является доминирующим декорреляционным механизмом. Здесь ω — характерная частота колебаний. Формальное выражение для коэффициента диффузии в перколяционном пределе записывается в виде

$$D_{\text{eff}} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\Psi_1} \, P_{\infty}(\Psi_1) \, \frac{a^2(\Psi_1)}{\tau(\Psi_1)} \,, \tag{85}$$

где, в рамках теории среднего поля, возмущение гамильтониана даётся выражением $\Psi_1 \approx \varepsilon_* \lambda V_0$. Вычисления приводят к скейлингу

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon) \approx \frac{a^2}{\tau} \, P_{\infty} \approx \frac{a^2}{\tau} \, \frac{L(\varepsilon) \, \Delta(\varepsilon)}{a^2} \approx V_0 \Delta(\varepsilon) \,. \tag{86}$$

Здесь время корреляции τ оценивается на основе представления о баллистическом движении частиц вдоль линий тока, $\tau \approx \tau_B \approx L(\varepsilon)/V_0$, $P_{\infty} = L(\varepsilon)\,\Delta(\varepsilon)/a^2(\varepsilon)$ — доля объёма, занятого перколяционными линиями тока, Δ — ширина перколяционного слоя, a — корреляционный масштаб. Фактически задача получения коэффициента турбулентной диффузии в рассматриваемом приближении свелась к вычислению ширины стохастического (перколяционного) слоя, а полученная оценка $D_{\text{eff}}(\varepsilon) \approx V_0 \Delta(\varepsilon)$ эквивалентна выражению, предложенному Кадомцевым и Погуце для режимов сильной турбулентности.

Оценив время, за которое картина течения полностью меняется, как $T_0 \approx 1/\omega$, авторы [40] предположили, что главным параметром в случае низкочастотных возмущений является время жизни одной перколяционной линии тока τ, которое и представляет собой корреляционное время. Тогда уравнение для малого параметра ε можно записать в виде

$$\tau(\varepsilon_*) = \varepsilon_* \frac{1}{\omega} \,, \quad \text{или} \quad \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0} = \frac{\varepsilon_*}{\omega} \,. \tag{87}$$

Использовав скейлинг из теории перколяции, $L(\varepsilon) = \lambda(a/\lambda)^{D_{\text{H}}}$, и приняв ширину стохастического слоя "физическим аналогом" малого параметра, $\Delta \approx \lambda\varepsilon$, легко получим ε_* как функцию параметров течения ω, V_0, λ:

$$\varepsilon_* = \left(\frac{\lambda\omega}{V_0} \right)^{1/(2+\nu)} = \left(\frac{1}{\text{Ku}} \right)^{3/10} \propto \omega^{3/10} \,. \tag{88}$$

Теперь вычисления приводят к окончательному выражению для D_{eff} (см. рис. 1):

$$D_{\text{eff}}(\varepsilon_*) \approx \frac{a^2(\varepsilon_*)}{\tau(\varepsilon_*)} \, P_{\infty}(\varepsilon_*) \approx \lambda^2 \omega \, \text{Ku}^{7/10} \propto V_0^{7/10} \omega^{3/10} \,. \tag{89}$$

Зависимость $D_{\text{eff}}(\omega)$ здесь принципиально отличается от квазилинейной $D_{\text{eff}}(\omega) \propto V_0^2/\omega$. Длина перколяционной линии тока и корреляционный масштаб,

$$L(\varepsilon_*) \approx \lambda \, \frac{1}{\varepsilon_*^{\nu+1}} \approx \lambda \, \text{Ku}^{1+\nu/(2+\nu)} \,, \tag{90}$$

$$a(\varepsilon_*) = \lambda \, \frac{1}{\varepsilon_*^{\nu}} \approx \lambda \, \text{Ku}^{\nu/(2+\nu)} \,, \tag{91}$$

не являются в этом подходе бесконечно большими, так как малый параметр ε_* не стремится к нулю, а имеет конкретное значение ε_* для всех типов течения с характерными D_0, V_0, λ.

Несложно заметить, что, рассматривая низкочастотные режимы дрейфовой турбулентности плазмы, мы можем интерпретировать число Кубо в терминах дрейфовой скорости:

$$\text{Ku} \approx \frac{V_0}{\lambda\omega} \approx \frac{k^2 \varphi}{\omega B_0} \,. \tag{92}$$

Здесь k — волновое число, φ — возмущение электрического потенциала, B_0 — амплитуда магнитного поля.

Заметим, что трёхмерная, по существу, проблема переноса частиц в токамаке была сведена к двумерной задаче. Так, уравнение движения ведущих центров имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = V_{\parallel} \, \mathbf{e}_z + \mathbf{V}_{\perp} = V_{\parallel} \, \mathbf{e}_z + c \, \frac{\mathbf{B} \times \nabla\varphi(\mathbf{r}, z, t)}{B^2} \,. \tag{93}$$

В пределе, когда частота столкновений меньше, чем характерная частота колебаний, мы можем предположить, что продольные скорости постоянны, и представить электрический потенциал в упрощённом виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z_0 + V_{\parallel} t, t) \,, \tag{94}$$

где z_0 — первоначальная координата частицы. Соответствующий гамильтониан (двумерная функция тока) даётся выражением

$$\Psi(x, y, t) = -\frac{c}{B} \, \varphi(x, y, z_0 + V_{\parallel} t, t) \,. \tag{95}$$

Фактически мы имеем дело с гамильтоновой системой с 1,5 степенями свободы [46, 47]. Именно поэтому мы рассматривали реорганизацию эквипотенциалей в низкочастотной дрейфовой турбулентности на основе представлений, связанных с гамильтоновой диффузией,

$$V_x(x, y, t) = -\frac{\partial\Psi(x, y, t)}{\partial y} \,, \tag{96}$$

$$V_y(x, y, t) = \frac{\partial\Psi(x, y, t)}{\partial x} \,. \tag{97}$$

Так, полученный для эффективного коэффициента турбулентной диффузии скейлинг, учитывая флуктуации электрического потенциала, можно представить в виде

$$D_{\mathrm{T}} \approx \frac{\omega}{k^2}\left(\frac{k^2\varphi}{\omega B}\right)^{7/10} \propto \omega^{3/10}\left(\frac{\varphi}{B}\right)^{7/10}. \qquad (98)$$

Применимость этой формулы неоднократно проверялась в численных экспериментах, которые показали, что перенос частиц скаляра в дрейфовой турбулентности хорошо описывается перколяционной моделью [48–52].

9. Длинные корреляции и скейлинг Бома

Перколяционный подход к описанию переноса в двумерной дрейфовой турбулентности, изложенный в разделе 8, не учитывает многих аспектов, связанных с конфигурацией реальных плазменных ловушек. Действительно, описание переноса частиц в плазме токамака требует большей детализации, основанной на учёте тороидальной геометрии установки. Возникают здесь и специфические новые эффекты, связанные с тороидальным дрейфом [23, 51]. Мы используем классическое выражение для магнитного поля в токамаке с концентрическими магнитными поверхностями [1, 2, 23, 51]:

$$\mathbf{B} = \left(B_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + B_\theta(r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)(1 - \varepsilon_{\mathrm{T}} \cos\vartheta)\,. \qquad (99)$$

Здесь использованы традиционные для параметров плазмы токамака обозначения $\varepsilon_{\mathrm{T}} = r/R$, $B_\theta = \varepsilon_{\mathrm{T}} B_0/q$ (рис. 12). Уравнения движения ионов в магнитном поле токамака с учётом турбулентных флуктуаций имеют вид [53, 54]

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\perp}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{B_0}\,\mathbf{E}\times\mathbf{b} + V_\parallel \mathbf{b} + U_{\mathrm{d}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cos\vartheta(t) + \hat{\mathbf{r}}\sin\vartheta(t)\right). \quad (100)$$

Для продольных движений получаем уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{m}\,E_\parallel - \frac{\mu B_0 \varepsilon_{\mathrm{T}}}{qR}\sin\theta\,, \quad V_\parallel = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,, \qquad (101)$$

$$\theta(t) = \frac{z(t)}{qR}\,, \quad z(t) = \int^t V_\parallel(t')\,\mathrm{d}t'\,. \qquad (102)$$

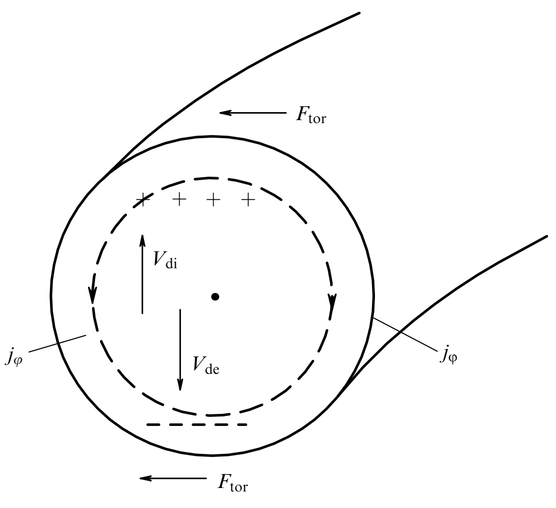


Рис. 12. Возникновение тороидального дрейфа в токамаке. Здесь V_{de} — дрейфовая скорость электронов, V_{di} — дрейфовая скорость ионов, F_{tor} — сила, создающая тороидальный дрейф, j_φ — ток в плазме токамака.

Магнитный момент даётся выражением $\mu = V_\perp^2/B$, а дрейфовая скорость — формулой [23, 51]

$$U_{\mathrm{d}} \approx \frac{V_\perp^2 + V_\parallel^2/2}{\omega_{B_{\mathrm{i}}} R} \approx \frac{V_{\mathrm{T_i}}^2}{\omega_{B_{\mathrm{i}}} R}\,. \qquad (103)$$

В рассматриваемой задаче мы предполагаем [23], что $\omega \approx k_\perp cT/(eB_0L_n) \approx (10^3 - 10^5)$ с$^{-1}$ $\ll \omega_{B_{\mathrm{i}}} \approx 10^8$ с$^{-1}$ и амплитуда турбулентных флуктуаций лежит в пределах $U_{\mathrm{d}} \leqslant V_0 \leqslant 10U_{\mathrm{d}}$. В результате использованных приближений получаем гамильтониан, описывающий движение частиц:

$$H(x,y,t) = \frac{c\widetilde{\Phi}(r,t) + V_\parallel(t)\,\widetilde{A}(r,t)}{B} + U_{\mathrm{d}}\cos\left[\theta(t) + \frac{y}{r_0}\right]. \qquad (104)$$

Здесь использованы обозначения $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\widetilde{\mathbf{A}}$, $x = r - r_0$ и $y = r_0\theta(t)$. Как и в разделе 8, мы имеем дело с гамильтонианом, описывающим систему с полутора степенями свободы. Это классическая проблема для теории динамических систем [55], поскольку в гамильтоновых системах с одной степенью свободы хаос не возникает. Описание динамического хаоса требует привлечения статистических методов анализа, что существенно осложняет применение традиционных методов гамильтоновой динамики. Возникающее в таких задачах расщепление сепаратрис, ведущее в свою очередь к появлению стохастических слоёв, приводит к необходимости учёта специфических особенностей поведения эквипотенциалей и новых декорреляционных механизмов [56–59]. В терминах функции тока получаем

$$\Psi(x,y,t) = \Psi_0(x,y,t) + \Psi_1(x,y,t)\,, \quad \langle\Psi_0\rangle = 0\,. \qquad (105)$$

В рассматриваемой нами проблеме влияние турбулентных флуктуаций описывается функцией

$$\Psi_0(x,y,t) = \frac{c\widetilde{\Phi}(r,t)}{B} \approx \frac{V_0}{k_\perp}\,. \qquad (106)$$

Вклад дрейфовых эффектов, связанных со скоростью тороидального дрейфа, описывается выражением

$$\Psi_1(x,y,t) = U_{\mathrm{d}}\,r\cos\left(\theta(t) + \frac{y}{r_0}\right). \qquad (107)$$

С точки зрения скейлингового анализа, мы имеем оценку отношения характерных скоростей выбранной модели

$$\frac{V_0}{U_{\mathrm{d}}} \approx \frac{\rho_{\mathrm{i}} V_{\mathrm{T_i}}}{L_n}\,\frac{\omega_{B_{\mathrm{i}}} R}{V_{\mathrm{T_i}}} \approx \frac{R}{L_n} \approx 10 \gg 1\,, \qquad (108)$$

$$\omega_{B_{\mathrm{i}}} = \frac{eB}{m_{\mathrm{i}}c}\,, \quad L_n = \frac{n}{\nabla n} \approx 15 \text{ см}, \qquad (109)$$

где мы использовали впервые предложенное Кадомцевым соотношение для возмущения потенциала (mixing rule) [21]

$$T\nabla n \approx en\nabla\widetilde{\Phi}\,, \qquad (110)$$

предполагающее, что электроны быстро приходят к равновесию и задача описания переноса сводится к исследованию диффузии ионов. Тогда несложно получить оценку для величины флуктуации потенциала

$$\frac{e\widetilde{\Phi}}{T} \approx \frac{\delta n}{n} \approx \frac{\rho_{\mathrm{i}}}{L_n} \approx \frac{1}{k_\perp L_n}\,. \tag{111}$$

Заметим, что мы приняли одинаковыми по порядку величины характерные частоты (стохастический резонанс), связанные со временем декорреляции дрейфовой турбулентности ω и частотой, характеризующей тороидальное движение частиц, $\omega_z = V_{\|}/(qR)$.

Декорреляционный механизм в рассматриваемой нами постановке задачи непосредственно связан как с наличием дрейфа, вызывающего перезамыкания эквипотенциалей, так и с перестройкой топологии в условиях низкочастотной турбулентности. Мы введём коэффициент гамильтоновой диффузии D_Ψ, учитывающий оба эти фактора [54]:

$$D_\Psi \approx (\delta\Psi)^2\omega \approx U_{\mathrm{d}}^2 a^2(\varepsilon)\omega\,. \tag{112}$$

Здесь $a(\varepsilon) \approx \lambda|\varepsilon|^{-\nu}$ — корреляционный масштаб в перколяционном приближении. Условие перенормировки для малого параметра запишем в виде $\tau_\Psi(\varepsilon_*) = \tau_B(\varepsilon_*)$ [54]

$$\frac{(\varepsilon_*\,\lambda V_0)^2}{U_{\mathrm{d}}^2 a^2(\varepsilon_*)\omega} = \frac{L(\varepsilon_*)}{V_0}\,, \tag{113}$$

где использованы обозначения

$$\tau_\Psi(\varepsilon) \approx \frac{\Delta^2}{D_\Psi(\varepsilon)}\,, \quad \tau_B(\varepsilon) \approx \frac{L(\varepsilon)}{V_0}\,. \tag{114}$$

Здесь Δ — ширина перколяционного слоя. Решение уравнения получаем в виде скейлинга:

$$\varepsilon_* \approx \left(\frac{U_{\mathrm{d}}}{V_0}\right)^{2/[3(1+\nu)]}\left(\frac{1}{\mathrm{Ku}}\right)^{1/[3(\nu+1)]} \propto U_{\mathrm{d}}^{2/7} V_0^{-3/7}\omega^{1/7}\,,\ \nu = \frac{4}{3}\,. \tag{115}$$

В итоге приходим к формуле для эффективного коэффициента переноса, учитывающего дрейфовые движения в низкочастотном перколяционном режиме,

$$D_{\mathrm{eff}} \propto D_{\mathrm{plato}}\left(\frac{V_0}{U_{\mathrm{d}}}\right)^{22/21}\left(\frac{1}{\mathrm{Ku}}\right)^{10/21},\quad D_{\mathrm{plato}} \propto U_{\mathrm{d}}^2\tau_B\,. \tag{116}$$

В условиях плазмы токамака $\mathrm{Ku} \approx V_0/(\lambda\omega) \approx 5$, $V_0/U_{\mathrm{d}} \approx \approx 10$, и, следовательно, перенос действительно превышает традиционные неоклассические значения в режимах, где частота столкновения несущественна, $D_{\mathrm{eff}}(\mathrm{Ku}, V_0, U_{\mathrm{d}}) \approx 5D_{\mathrm{plato}}$.

Заметим, что вопрос о переносе частиц и тепла в токамаке является одним из самых важных, поскольку характерное время удержания плазмы τ_E, входящее в критерий зажигания термоядерной реакции Лоусона,

$$n\tau_E > 3\times 10^{20}\ \text{с м}^{-3}\,, \tag{117}$$

можно оценить через коэффициент эффективного переноса $\tau_E \propto r_0^2/(D_{\mathrm{eff}}(B_0, T_{\mathrm{p}}))$. Здесь n — плотность плазмы, r_0 — малый радиус токамака, B_0 — магнитное поле, T_{p} — температура плазмы.

С точки зрения мелкомасштабной турбулентности, классической оценкой турбулентного коэффициента диффузии является гиро-Бом-скейлинг:

$$D_{\mathrm{GB}} \approx \frac{\rho_{\mathrm{i}}}{L_n}\,D_{\mathrm{B}} \approx \frac{cT_{\mathrm{p}}}{eB_0}\,\frac{\rho_{\mathrm{i}}}{L_n} \propto \frac{1}{B_0^2}\,,\quad D_{\mathrm{B}} \approx \frac{cT_{\mathrm{p}}}{eB_0} \propto \frac{1}{B_0}\,, \tag{118}$$

где D_{B} — коэффициент диффузии Бома. Так, для $T_{\mathrm{p}} = 1$ кэВ и $B_0 = 1$ Тл скейлинг Бома даёт величины, на порядок превышающие наблюдаемые значения $D_{\mathrm{T}} \approx 1-5\ \text{м}^2\,\text{с}^{-1}$. Именно поэтому полученный ещё Кадомцевым гироскейлинг, содержащий множитель $\rho_{\mathrm{i}}/L_n \ll 1$, считался более подходящим кандидатом для описания удержания плазмы. Однако зависимость от магнитного поля представляется слишком оптимистичной,

$$\tau_E(B_0) \propto \frac{r_0^2}{D_{\mathrm{GB}}(B_0)} \propto B_0^2\,, \tag{119}$$

поскольку эксперименты указывают на гораздо более плавную зависимость.

Представленный перколяционный скейлинг, учитывающий дрейфовые эффекты и низкочастотную турбулентность, позволяет получить более плавную зависимость от магнитного поля и в то же время содержит понижающий фактор:

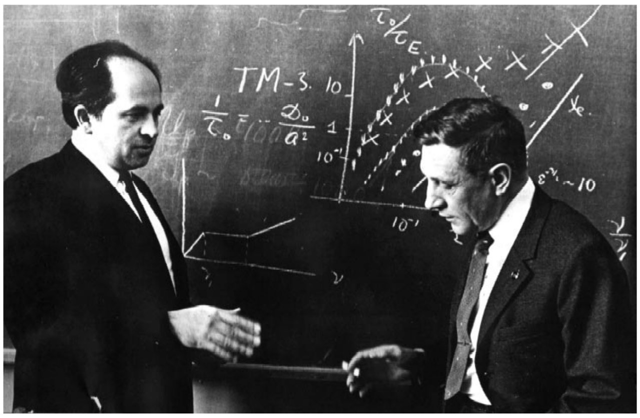
$$D_{\mathrm{eff}} \approx V_0\Delta \approx \lambda V_0\,\frac{\Delta}{\lambda} \approx D_{\mathrm{B}}\,\frac{\Delta}{\lambda}\,,\quad \frac{\Delta(\varepsilon)}{\lambda} \approx \varepsilon \ll 1\,. \tag{120}$$

Типичные параметры структур можно оценить по порядку величины ($U_{\mathrm{d}} \approx 10^3\ \text{м}\,\text{с}^{-1}$, $\lambda \approx 10^{-2}$ м, $V_0 \approx 10^{-4}\ \text{м}\,\text{с}^{-1}$). Действительно, вычисления дают

$$D_{\mathrm{eff}} \approx \lambda V_0\left(\frac{\lambda\omega}{V_0}\right)^{1/7}\left(\frac{U_{\mathrm{d}}}{V_0}\right)^{2/7} \propto \frac{1}{B_0^{6/7}}\,, \tag{121}$$

где λV_0 по порядку величины соответствует бомовской оценке. В итоге получаем

$$\tau_E(B_0) \propto \frac{r_0^2}{D_{\mathrm{eff}}(B_0)} \propto B_0^{6/7}\,. \tag{122}$$



Б.Б. Кадомцев (слева) и М.К. Романовский в 1975 г. на научном семинаре, посвящённом обсуждению турбулентной диффузии в токамаке Т-3 в сравнении с неоклассическими оценками.

Интересно сравнить полученные теоретические результаты с данными экспериментов на современных токамаках. Так, на токамаке JET (Joint European Torus) получен скейлинг $\tau_{\rm JET} \propto B_0^{0,26}$ [60, 61]. В рамках "одномашинных скейлингов" [60] нужно учесть инвариантность параметров $\beta_{\rm ex} = nT_{\rm p}/B_0^2 = {\rm const}$ и $\nu_{\rm ex} = (n/T_{\rm p}^2)\, L_{\rm ex} = {\rm const}$, которая приводит к зависимостям для температур и плотности плазмы вида $T_{\rm p} \propto B_0^{2/3}$, $n \propto B_0^{4/3}$. Тогда для гиробомовского скейлинга получаем $\tau_E \propto B_0$, для формулы Бома — $\tau_E \propto B_0^{0,333}$, а для перколяционной модели — $\tau_E \propto B_0^{0,285}$. Несложно заметить, что перколяционный подход обеспечивает лучшую аппроксимацию. Отметим также, что даже незначительное (15–20 %) ухудшение удержания плазмы способно воспрепятствовать достижению термоядерного зажигания в строящемся токамаке ITER — Международном экспериментальном термоядерном реакторе [61].

Мы видим, что эффекты длинных корреляций, позволяющие учесть влияние на перенос крупномасштабных структур, возникающих в плазме, могут быть проанализированы с помощью предложенной Кадомцевым и Погуце перколяционной концепции.

10. Эволюция стохастического слоя и скейлинги

Отличительной особенностью результатов, полученных Б.Б. Кадомцевым, является их универсальность, благодаря которой область применимости этих результатов оказывается значительно шире, чем можно было бы представить исходя из сделанных автором предположений. Так, в работах Исиченко [62, 63], посвящённых развитию идеи длинных корреляций, были проведены расчёты переноса электронов в стохастическом магнитном поле в перколяционном приближении. Предложенный автором указанных работ новый режим учитывал как эволюцию фрактальной структуры магнитной силовой трубки (рис. 13), так и столкновительную декорреляцию частиц посредством модификации баланса характерных масштабов. Тем не менее окончательное выражение для коэффициента диффузии совпало с предложенным Кадомцевым и Погуце скейлингом [19], полученным на качественном уровне.

Мы рассмотрим основные моменты анализа, проведённого в работах [62, 63], чтобы показать, как идеи Кадомцева получают развитие при рассмотрении всё более сложных механизмов переноса (рис. 14). Проследим стадию формирования перколяционных структур на основе формулы для периметра перколяционного кластера (скорлупа) $L(t)$. Так, характерный корреляционный размер будет выражаться формулой

$$a(t) \propto \lambda_\perp \left(\frac{L(t)}{\lambda_\perp}\right)^{1/D_{\rm H}}. \qquad (123)$$

Теперь мы можем выразить эволюционирующую ширину стохастического слоя следующим скейлингом (рис. 15):

$$\varDelta_\perp(t) \propto \lambda_\perp \left(\frac{\lambda_\perp}{a(t)}\right)^{1/\nu} \propto \lambda_\perp \left(\frac{\lambda_\perp}{L(t)}\right)^{1/(\nu D_{\rm H})}. \qquad (124)$$

Подставляя баллистическую оценку для проекции пройденного магнитной силовой линией пути на поперечное сечение плазменного шнура, $L(z(t)) \approx b_0 z(t)$, в это соотношение, получим скейлинг, описывающий уменьшение ширины стохастического слоя,

$$\varDelta_\perp(t) \approx \lambda_\perp \left(\frac{\lambda_\perp}{b_0 z(t)}\right)^{1/(\nu D_{\rm H})} \propto \frac{1}{(b_0 z)^{3/7}}. \qquad (125)$$

В соответствии с представлениями Бэтчелора, Рочестера и Розенблюта [65, 66], декорреляция наступит в результате перехода частиц с одной силовой линии на другую, когда характерный масштаб ширины стохастического слоя сравняется с характерным диффузионным масштабом, $\varDelta_\perp(\tau) \approx \varDelta_{\rm dis}$. В нашем случае это поперечная диффузия $\chi_\perp$,

$$\lambda_\perp \left(\frac{\lambda_\perp}{b_0 z(\tau)}\right)^{1/(\nu D_{\rm H})} \approx \sqrt{4\chi_\perp \tau}. \qquad (126)$$

Предполагая, как и в модели Кадомцева–Погуце, что продольные движения частиц имеют диффузионный характер, $z^2(\tau) \approx 2\chi_{||}\tau$, мы можем разрешить уравнение

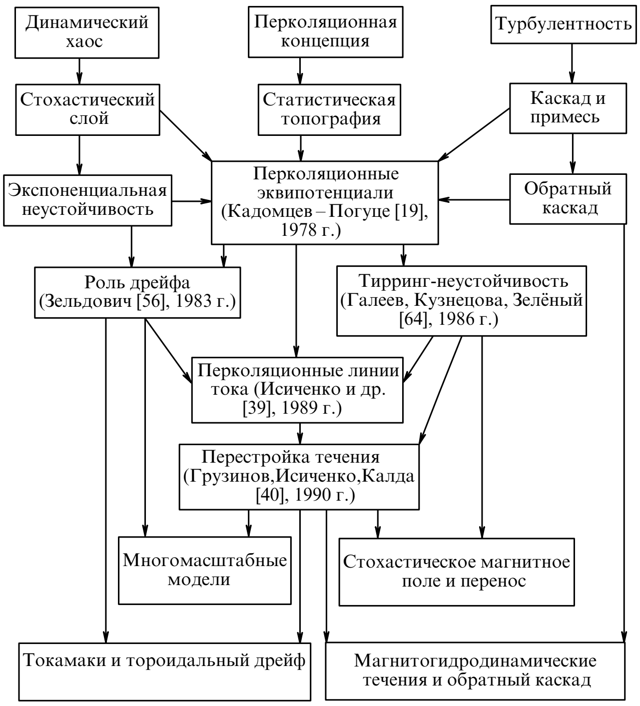


Рис. 14. Схема, иллюстрирующая возникновение и развитие перколяционного подхода к описанию аномального переноса в условиях сильной турбулентности в присутствии крупномасштабных вихревых структур.

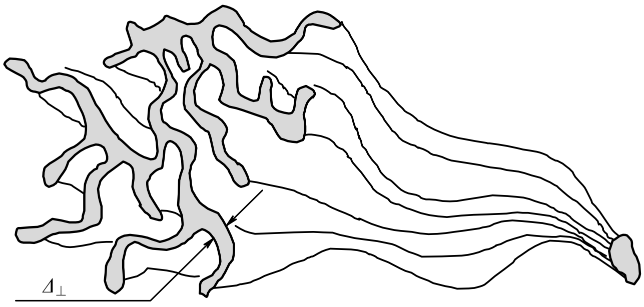


Рис. 13. Эволюция трубки силовых линий магнитного поля, возникающая в результате действия стохастической неустойчивости. Здесь $\varDelta_\perp$ — ширина стохастического слоя в перколяционном пределе.

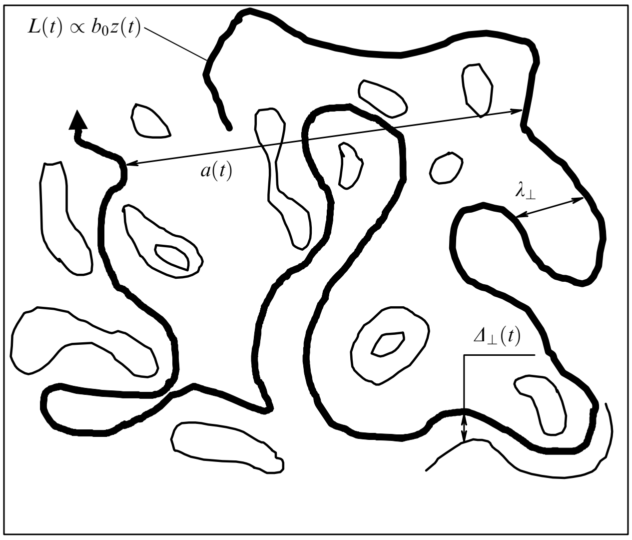


Рис. 15. Эволюционная стадия роста перколяционной структуры. Здесь λ — характерный размер ячейки, $\Delta(t)$ — ширина стохастического (диффузионного) слоя, $a(t)$ — корреляционный масштаб, определяющий перенос, $L(t) \propto b_0 z(t)$ — длина перколяционной линии тока.

(126) и определить характерное корреляционное время

$$\tau \approx \frac{\lambda_\perp^2}{\chi_\perp}\left(\frac{\chi_\perp}{b_0^2\chi_{||}}\right)^{1/(\nu+2)} \approx \tau_\perp\left(\frac{\chi_\perp}{b_0^2\chi_{||}}\right)^{1/(\nu+2)}. \qquad (127)$$

Этот результат справедлив при условии $\tau < \tau_\perp \approx \approx \lambda_\perp^2/\chi_\perp$, что является корректным при выполнении неравенства

$$\frac{\chi_\perp}{b_0^2\chi_{||}} < 1\,, \qquad (128)$$

где $b_0 \ll 1$ и $\chi_\perp/\chi_{||} \ll 1$. В итоге получаем выражение в терминах малого перколяционного параметра и характерных параметров модели:

$$\tau \approx \tau_\perp\varepsilon_*^2\left[\frac{\chi_\perp}{\chi_{||}}\left(\frac{\lambda_{||}}{\lambda_\perp}\right)^2\right]^{1/(\nu+2)} \approx \tau_\perp\varepsilon_*^2\left(\frac{\tau_{||}}{\tau_\perp}\right)^{1/(\nu+2)}. \qquad (129)$$

Используя уже неоднократно обсуждённое в предыдущих разделах выражение для коэффициента эффективной диффузии в перколяционном пределе, получаем скейлинг

$$D \propto \frac{r_\perp^2(\tau)}{\tau} \approx \frac{a^2(\tau)\,P_\infty(\tau)}{\tau} \approx \frac{\lambda_\perp^2}{\tau}\left(\frac{L(z)}{\lambda_\perp}\right)^{1/D_{\rm H}}, \qquad (130)$$

где принято во внимание, что колмогоровский пространственный масштаб развития стохастической неустойчивости $\lambda_{\rm K}$ примерно равен масштабу перемешивания $\lambda_{\rm m}$

$$\lambda_z < z < \lambda_{\rm m} \approx \varepsilon_*\lambda_z \approx \lambda_z\left(\frac{1}{{\rm Ku_m}}\right)^{1/(\nu+2)}. \qquad (131)$$

Как и ранее, $P_\infty \approx \lambda_\perp/a$ — эффективная доля пространства, ответственная за перколяционный перенос, $L(z) \approx b_0 z \approx b_0\sqrt{2\chi_{||}\tau}$. После подстановки получаем скейлинг, описывающий эволюцию ширины стохастического слоя,

$$\Delta_\perp(t) \approx \lambda_\perp\left(\frac{\lambda_\perp}{b_0 z(t)}\right)^{1/(\nu D_{\rm H})} \propto \frac{1}{t^{3/14}}\,, \qquad (132)$$

и выражение для эффективного поперечного коэффициента диффузии, совпадающее с формулой Кадомцева и Погуце,

$$D_\perp(\tau) \approx \lambda_\perp^2\,\frac{b_0\sqrt{\chi_{||}}}{\lambda_\perp}\,\tau^{(\nu+2)/[2(\nu+1)]} \approx b_0\sqrt{\chi_{||}\chi_\perp}\,, \quad \nu = \frac{4}{3}\,, \qquad (133)$$

который справедлив при выполнении условий

$$1 > \frac{\chi_\perp}{b_0^2\chi_{||}} > \frac{1}{{\rm Ku_m^2}}\,. \qquad (134)$$

Фактически это условия сильной турбулентности, для которых и был предложен перколяционный метод, ${\rm Ku_m} \gg 1$ [19].

Эти результаты показывают работоспособность предложенной эволюционной модели. Кроме того, подобным методом удаётся получить принципиально новые режимы переноса электронов в стохастическом магнитном поле при учёте эффектов нестационарности [55, 62–64, 67], что доказывает эффективность моделей, допускающих аналитическое рассмотрение. Перколяционный подход к описанию аномального переноса в условиях сильной турбулентности стал только первым шагом Б.Б. Кадомцева в направлении поиска механизмов самоорганизации, ответственных за удержание плазмы в токамаке [59, 68–71]. Этот подход активно развивается и сейчас [69, 70]. С уверенностью можно сказать, что эта и другие идеи Бориса Борисовича будут неизменно привлекать всё новых и новых исследователей.

11. Заключение

В настоящей статье рассмотрены модели, предложенные Б.Б. Кадомцевым для описания турбулентной диффузии. Представлены некоторые из современных подходов описания эффектов "длинных корреляций", непосредственно основанных на идеях Б.Б. Кадомцева о диффузионной перенормировке квазилинейных уравнений, перколяционном подходе к описанию сильной турбулентности, влиянии стохастической неустойчивости и поперечной диффузии частиц плазмы на перенос в "заплетённом" магнитном поле. Показано, что методы анализа, использованные Б.Б. Кадомцевым, обладают большой "эвристической силой" и, несомненно, окажут влияние на дальнейшее развитие теории турбулентного переноса.

Автор выражает благодарность за ценные замечания и обсуждения К.В. Брушлинскому, Г.С. Голицыну, Ю.Н. Днестровскому, Н.С. Ерохину, В.И. Когану, М.Б. Кадомцеву, С.В. Коновалову, Е.А. Кузнецову, Л.К. Кузнецовой, В.М. Леонову, А.Б. Михайловскому, А.М. Попову, В.Д. Пустовитову, А.В. Тимофееву, В.Д. Шафранову и Э.И. Юрченко.

Список литературы

1. Кадомцев Б Б *Избранные труды* В 2-х т. (Под ред. В Д Шафранова) Т. 1 (М.: Физматлит, 2003)
2. Кадомцев Б Б *Избранные труды* В 2-х т. (Под ред. В Д Шафранова) Т. 2 (М.: Физматлит, 2003)
3. Кадомцев Б Б "Турбулентность плазмы", в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 4 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1964) с. 188–339 [Kadomtsev B B *Plasma Turbulence* (London: Academic Press, 1965)]
4. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941) [Kolmogorov A N *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR* **30** 299 (1941)]
5. Обухов А М *ДАН СССР* **32** 19 (1941) [Obukhov A M *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR* **32** 19 (1941)]

6. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика* Т. 1, 2 (М.: Наука, 1965, 1967) [Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics* Vol. 1, 2 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1971, 1975)]
7. Frisch U *Turbulence*: *The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Фриш У *Турбулентность*: *Наследие А.Н. Колмогорова* (М.: Фазис, 1998)]
8. Блохинцев Д И *Избранные труды* Т. 1 (Под ред. Б М Барбашова, В В Нестеренко) (М.: Физматлит, 2009)
9. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1988) [Kadomtsev B B, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 22 (Ed. V D Shafranov) (New York: Kluwer Acad./Plenum Publ., 2001) p. 1]
10. Balescu R *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas* (Bristol: IOP Publ., 2005)
11. Веденов А А, Велихов Е П, Сагдеев Р З "Устойчивость плазмы" *УФН* **73** 701 (1961) [Vedenov A A, Velikhov E P, Sagdeev R Z "Stability of plazma" *Sov. Phys. Usp.* **4** 332 (1961)]; Vedenov A A, Velikhov E P, Sagdeev R Z *Nucl. Fusion* **1** 82 (1961)
12. Kraichnan R H *J. Fluid Mech.* **5** 497 (1959)
13. Kraichnan R H "Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl number" *Phys. Fluids* **5** 1374 (1962)
14. Кадомцев Б Б, Недоспасов А В "Неустойчивость положительного столба в магнитном поле и "аномальная" диффузия", Препринт (М.: ИАЭ, 1960)
15. Kadomtsev B B, Nedospasov A V *J. Nucl. Energy C Plasma Phys.* **1** 230 (1960)
16. Guthrie A, Wakerling R K (Eds) *The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields* (New York: McGraw-Hill, 1949)
17. Kadomtsev B B "My view on the controlled nuclear fusion" *J. Plasma Fusion Res.* **71** 365 (1995)
18. Taylor G I *Proc. London Math. Soc. 2* **20** 196 (1921)
19. Kadomtsev B B, Pogutse O P, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1978. Proc. of the 7th Intern. Conf., IAEA, Innsbruck, Austria, August 23–30, 1978* Vol. 1 (Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1978) p. 649
20. Голицын Г С *Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями* (Л.: Гидрометеоиздат, 1980)
21. Кадомцев Б Б, Погуце О П "О диффузии плазмы в тороидальных системах" *ЖЭТФ* **58** 1675 (1970) [Kadomtsev B B, Pogutse O P "Plasma diffusion in toroidal systems" *Sov. Phys. JETP* **31** 898 (1970)]
22. Зельдович Я Б, Рузмайкин А А *УФН* **152** 263 (1987) [Zeldovich Ya B, Ruzmaikin A A Sov. Phys. Usp. **30** 494 (1987)]; Зельдович Я Б, Соколов Д Д *УФН* **146** 493 (1985) [Zel'dovich Ya B, Sokolov D D *Sov. Phys. Usp.* **28** 608 (1985)]; Зельдович Я Б, Молчанов С А, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *УФН* **152** 3 (1987) [Zel'dovich Ya B, Molchanov S A, Ruzmaikin A A, Sokolov D D *Sov. Phys. Usp.* **30** 353 (1987)]; Молчанов С А, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *УФН* **145** 593 (1985) [Molchanov S A, Ruzmaikin A A, Sokolov D D *Sov. Phys. Usp.* **30** 353 (1985)]; Zel'dovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1983) [Зельдович Я Б, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *Магнитные поля в астрофизике* (М.–Ижевск: РХД, Инст. компьют. исслед., 2006)]
23. Wesson J *Tokamaks* (Oxford: Clarendon Press, 1987)
24. Stauffer D *Introduction to Percolation Theory* (London: Taylor and Francis, 1985)
25. Bakunin O G *Turbulence and Diffusion. Scaling Versus Equations* (New York: Springer, 2008)
26. Corrsin S, in *Atmospheric Diffusion and Air Pollution* (Advances in Geophysics, Vol. 6, Eds F N Frenkiel, P A Sheppard) (New York: Academic Press, 1959) p. 161
27. Дрейзин Ю А, Дыхне А М *ЖЭТФ* **63** 242 (1972) [Dreizin Yu A, Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **36** 127 (1973)]
28. Гетманцев Г Г *Астрон. журн.* **39** 607 (1962) [Getmantsev G G *Sov. Astron.* **6** 477 (1962)]
29. ben-Avraham D, Havlin S *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
30. Aref H, El Naschie M S (Eds) *Chaos Applied to Fluid Mixing* (Oxford: Pergamon, 1995)
31. Галеев А А, Зеленый Л М *Письма в ЖЭТФ* **29** 669 (1979) [Galeev A A, Zelenyi L M *JETP Lett.* **29** 614 (1979)]
32. Kadomtsev B B, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Proc. of a Conf., September 6–10, 1965* (Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1966) p. 365
33. Кадомцев Б Б, Погуце О П "Турбулентные процессы в тороидальных системах", в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 5 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1967) с. 209 [Kadomtsev B B, Pogutse O P "Turbulence in toroidal systems", in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 5 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1970) p. 249]
34. Осипенко М В, Погуце О П, Чудин Н В *Физика плазмы* **13** 953 (1987) [Osipenko M V, Pogutse O P, Chudin N V *Sov. J. Plasma Phys.* **13** 550 (1987)]
35. Bouchaud J-P et al. *Phys. Rev. Lett.* **64** 2503 (1990)
36. Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
37. Bakunin O G *Chaotic Flows. Correlation Effects, Transport, and Structures* (Heidelberg: Springer, 2011)
38. Saleur H, Duplantier B *Phys. Rev. Lett.* **58** 2325 (1987)
39. Исиченко М Б и др. *ЖЭТФ* **96** 913 (1989) [Isichenko M B et al. *Sov. Phys. JETP* **69** 517 (1989)]
40. Грузинов А В, Исиченко М Б, Калда Я Л *ЖЭТФ* **97** 476 (1990) [Gruzinov A V, Isichenko M B, Kalda Ya L *Sov. Phys. JETP* **70** 263 (1990)]
41. Bakunin O G *Chaos Solitons Fractals* **23** 1703 (2005)
42. Horton W *Rev. Mod. Phys.* **71** 735 (1999)
43. Зелёный Л М и др. *УФН* **183** 365 (2013) [Zelenyi L M et al. *Phys. Usp.* **56** 347 (2013)]
44. Kleva R G, Drake J F *Phys. Fluids* **27** 1686 (1984)
45. Bakunin O G *Rep. Prog. Phys.* **67** 965 (2004)
46. Childress S, Gilbert A D *Stretch, Twist, Fold*: *The Fast Dynamo* (Berlin: Springer, 1995)
47. Arnold V I, Khesin B A *Topological Methods in Hydrodynamics* (New York: Springer, 1998) [Арнольд В И, Хесин Б А *Топологические методы в гидродинамике* (М.: Изд-во МЦНМО, 2007)]
48. Misguich J H et al. *Physicalia Mag.* **20** 103 (1998)
49. Zimbardo G, Veltri P, Pommois P *Phys. Rev. E* **61** 1940 (2000)
50. Reuss J-D, Misguich J H *Phys. Rev. E* **54** 1857 (1996)
51. Vlad M et al. *J. Plasma Phys.* **59** 707 (1998)
52. Isichenko M B et al. *Phys. Fluids B* **4** 3973 (1992)
53. Ottaviani M *Europhys. Lett.* **20** 111 (1992)
54. Бакунин О Г *УФН* **183** 257 (2013) [Bakunin O G *Phys. Usp.* **56** 243 (2013)]
55. Zaslavsky G M *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems* (River Edge, N.J.: Imperial College Press, 1998) [Заславский Г М *Физика хаоса в гамильтоновых системах* (М.–Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2004)]
56. Зельдович Я Б *Письма в ЖЭТФ* **38** 51 (1983) [Zel'dovich Ya B *JETP Lett.* **38** 57 (1983)]
57. Bakunin O G, in *Review of Plasma Physics* Vol. 24 (Ed. V D Shafranov) (Berlin: Springer-Verlag, 2008) p. 53
58. Вайнштейн С И, Зельдович Я Б, Рузмайкин А А *Турбулентное динамо в астрофизике* (М.: Наука, 1980)
59. Kadomtsev B B "Self-organization and transport in tokamak plasma" *Plasma Phys. Control. Fusion* **34** 1931 (1992)
60. Днестровский Ю Н *Самоорганизация горячей плазмы* (М.: НИЦ "Курчатовский институт", 2013)
61. "Progress in the ITER Physics Basis" *Nucl. Fusion* **47** (6) (2007)
62. Isichenko M B *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 795 (1991)
63. Isichenko M B *Plasma Phys. Control. Fusion* **33** 809 (1991)
64. Galeev A A, Kuznetsova M M, Zeleny L M *Space Sci. Rev.* **44** 1 (1986)
65. Batchelor G K *Quart. J. R. Meteorolog. Soc.* **76** 133 (1950)
66. Rechester A B, Rosenbluth M N *Phys. Rev. Lett.* **40** 38 (1978)
67. Зеленый Л М, Веселовский И С (Ред.) *Плазменная гелиогеофизика* Т. 1, 2 (М.: Физматлит, 2008)
68. Kadomtsev B B *Tokamak Plasma*: *a Complex Physical System* (Bristol: IOP Publ., 1992)
69. Diamond P H, Itoh S-I, Itoh K *Modern Plasma Physics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010)
70. Krommes J A "Fundamental statistical descriptions of plasma turbulence in magnetic fields" *Phys. Rep.* **360** 1 (2002)
71. Miyamoto K *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion* (Berlin: Springer, 2005) [Миямото К *Основы физики плазмы и управляемого синтеза* (М.: Физматлит, 2007)]

The role of B.B. Kadomtsev's ideas in shaping the current understanding of turbulent transport

O.G. Bakunin. *Institute of Tokamak Physics, National Research Center "Kurchatov Institute", pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation. Tel. + 7 (499) 196 78 55. E-mail: oleg_bakunin@yahoo.com*

B.B. Kadomtsev's turbulence diffusion models are reviewed. Some of the current approaches to describing 'long range correlation' effects are presented that are directly based on B.B. Kadomtsev's ideas (diffusion renormalization of quasilinear equations, the percolation approach to strong turbulence, stochastic instability and the transverse diffusion of plasma particles as factors affecting transport in a 'braided' magnetic field). It is shown that B.B. Kadomtsev's analytical methods have a large heuristic power and will undoubtedly influence the further development of turbulent transport theory.

PACS numbers: **05.40.–a, 47.27.–i, 47.53.+n**
Bibliography — 71 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (11) 1237–1254 (2013)
DOI: 10.3367/UFNr.0183.201311f.1237
Received 15 September 2013, revised 14 October 2013
Physics–Uspekhi **56** (11) (2013)