

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Парадокс Бернштейна с запутанными квантовыми состояниями

А.В. Белинский, А.С. Чиркин

Классический парадокс Бернштейна с правильным разноцветным тетраэдром, иллюстрирующий тонкости теории вероятностей, имеет заметный недостаток — он асимметричен. Грани в тетраэдре неэквивалентны: три окрашены монотонно, а четвёртая — разноцветная. Поэтому ещё до проведения формальных расчётов закрадывается подозрение, что статистика выпадающих состояний вряд ли будет независимой. Другое дело — запутанные квантовые состояния. В предложенных схемных решениях разные каналы регистрации фотонов полностью симметричны и эквивалентны, тем не менее происходящие в них события оказываются статистически зависимыми, что делает парадокс Бернштейна более ярким благодаря необычному поведению квантовых частиц, не подчиняющихся классическим законам. Парадокс вероятностей иллюстрируется на примере анализа многокубитовых состояний Гринбергера — Хорна — Цайлингера.

PACS numbers: 03.65.Ud, 42.65.Lm

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201311e.1231

В истории развития науки большую роль играли противоречия взглядов — парадоксы. Два рода взглядов вступают в конфликт, и он вызывает дальнейшее движение науки вперёд, дающее развитие этого конфликта.

Л.И. Мандельштам

Вынесенные в эпиграф слова были произнесены Л.И. Мандельштамом при чтении лекции по избранному вопросу оптики более 80 лет тому назад [1]. Л.И. Мандельштам отмечал важную роль парадоксов в учебном процессе. "Есть две ступени понимания, — говорил он. — Первая, когда вы изучили какой-нибудь вопрос и как будто знаете всё, что нужно, но вы ещё не можете самостоятельно ответить на новый вопрос, относящийся к изучаемой области. И вторая степень познания, когда появляется общая картина, ясное понимание всех связей. Такие вопросы, на которые нельзя ответить, пока этой второй степени понимания нет, мы называем парадоксами. Разбор подобных парадоксов очень полезен для достижения такого полного понимания" ([1, с. 8]).

Развитие квантовой оптики за последние несколько десятилетий изобилует постановкой и разрешением целого ряда парадоксов, способствующих более глубокому пониманию особенностей запутанных квантовых состоя-

ний. Речь идёт о парадоксе Эйнштейна — Подольского — Розена (ЭПР) [2]¹, теореме, неравенствах и серии парадоксов Дж. Белла [10], парадоксе Гринбергера — Хорна — Цайлингера (ГХЦ) [11, 12] (см. также обзор [13]). Последний интересен тем, что, в отличие от неравенств Белла, он сводится к равенству типа $+1 = -1$, т.е. классическое описание эксперимента даёт результат $+1$, а квантовое — минус единицу. Это усиление эффекта достигнуто за счёт увеличения количества наблюдателей, регистрирующих тройки, четвёрки и т.д. коррелированных фотонов. Вместе с тем не только $+1 = -1$ реализуется при числе наблюдателей более двух, но и статистические неравенства типа Белла становятся более сильными, т.е. отличие квантовых и классических результатов оказывается более контрастным. В этом плане интересно рекуррентное обобщение неравенств Клаузера — Хорна — Шимони — Хольта [14] для случая произвольного числа наблюдателей — парадокс Мермина — Ардехаля — Белинского — Клышко [15–17] (см. также [18, 19]) и серия неравенств, учитывающих реальные потери детектирования [20, 21]. Удивителен и парадокс нелинейного светоделителя [22]. Число ссылок по парадоксам в оптике может быть продолжено, например, в [23–28] обсуждается парадокс Зенона, который ставит под сомнение сам принцип причинности, т.е. квантовая нелокальность проявляется не только в пространстве, но и во времени (см. также книгу [29] и недавнюю работу [30]).

Почему интерес к этой тематике до сих пор не ослабевает? Дело в том, что на пути поиска адекватной интерпретации квантовой теории важную роль играет

А.В. Белинский, А.С. Чиркин. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Международный лазерный центр, Ленинские горы, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: belinsky@inbox.ru, aschirkin@rambler.ru

Статья поступила 22 апреля 2013 г.,
после доработки 13 июня 2013 г.

¹ См. перевод статьи [2] на русский язык, опубликованный в УФН [3] с комментариями В.А. Фока и переводом отклика Н. Бора [4] на статью [2], а также обзоры [5–9].

выявление существенно неклассических эффектов, описания которых квантовой и классической теориями дают радикально отличающиеся друг от друга результаты. Собственно говоря, именно такой эффект — ультрафиолетовая катастрофа — и положил начало новому разделу физики.

Существует установившееся предубеждение, что классическая физика получается из квантовой предельным переходом постоянной Планка $\hbar$ к нулю. Если бы это было так, то классическое описание было бы лишь частным случаем квантового. На самом деле в целом ряде случаев существуют радикальные отличия, в то время как уменьшение $\hbar$ приводило бы только к количественным изменениям. Качественный скачок наступает лишь при $\hbar = 0$. Об этом свидетельствует не только целый класс макроскопических квантовых эффектов (таких как, например, квантование тока в сверхпроводящем замкнутом кольце или сжатие квантовых флуктуаций квадратурной компоненты светового поля), но и перечисленное выше семейство квантовых парадоксов, не укладывающихся в наши привычные классические интуиции. Один из таких парадоксов — квантовый аналог парадокса Бернштейна [31] — мы предлагаем читателям. Этот парадокс, может быть, не столь ярок, как квантовая нелокальность или нарушение причинности, но, на наш взгляд, тоже интересен и весьма поучителен.

Классический парадокс Бернштейна (см., например, [32, 33]) прекрасно иллюстрирует нетривиальность критериев статистической независимости случайных процессов. Если таких процессов более двух, то, казалось бы, вывод о их независимости с очевидностью должен следовать из всех возможных попарных статистических независимостей, по аналогии, например, с тем, что из попарного равенства всех чисел из некоторого замкнутого множества необходимо следует равенство друг другу всех чисел этого множества. Такой "здравый смысл", однако, далёк от истинно достаточного критерия статистической независимости, и интуиция тут даёт осечку.

Применительно к трём событиям, А, В и С, одной попарной независимости:

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) &= P(B)P(C), \end{aligned} \quad (1)$$

из которой следует, что

$$P(A)P(B)P(C) = [P(AB)P(BC)P(CA)]^{1/2},$$

может оказаться недостаточно для того, чтобы все три события были независимыми. Чтобы в этом убедиться, возьмём, следуя [33], правильный тетраэдр, три грани

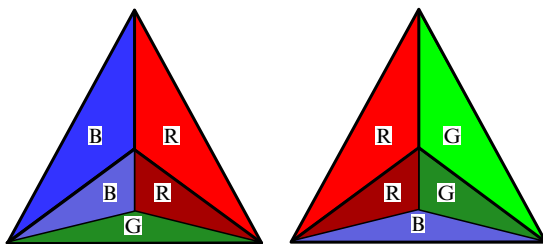


Рис. 1. Трёхцветный правильный тетраэдр, демонстрирующий классический парадокс Бернштейна.

которого окрашены однотонно: красная (R), зеленая (G) и синяя (B); а четвёртая является разноцветной, точнее трёхцветной, т.е. содержит все три цвета (рис. 1). Бросим тетраэдр на стол. Пусть событие R состоит в том, что тетраэдр упал на грань, содержащую красный цвет. Вероятность события R, как и вероятности двух других возможных событий, G и B, определяемых аналогично:

$$P(R) = P(G) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad (2)$$

поскольку случаев всего четыре (по числу граней тетраэдра), а каждому событию соответствуют две грани — одноцветная и разноцветная.

Нетрудно рассчитать и вероятности пересечений любых из двух рассматриваемых событий, поскольку одновременному выпадению двух цветов соответствует лишь одна разноцветная грань:

$$P(RG) = P(RB) = P(GB) = \frac{1}{4}. \quad (3)$$

Таким образом, условия попарной независимости (1) выполнены, однако пересечению всех трёх событий, RGB, благоприятствует тоже падение на разноцветную грань, т.е.

$$P(RGB) = \frac{1}{4} \neq P(R)P(G)P(B) = \frac{1}{8}. \quad (4)$$

Следовательно, рассматриваемые события в совокупности оказались, против ожидания, статистически зависимыми, а для констатации их независимости требуется к условиям (1) добавить ещё и выполнение правого равенства в (4). В общем случае N событий требуется проверка $2^N - N - 1$ условий.

Хотя парадокс и поражает своей красотой, с самого начала чувствуется некоторый подвох. Ведь грани тетраэдра не эквивалентны: три — одноцветные, а одна — разноцветная. Поэтому подозрение закрадывается ещё до выполнения формальных расчётов. А вот в квантовом мире этой "натяжки" можно избежать. Там больше свободы в поведении элементарных частиц и достижима полная симметрия схемных решений.

Как отмечалось выше, в оптике в последние десятилетия предсказан и экспериментально проверен целый ряд парадоксов, связанных с запутанными состояниями с дискретными или непрерывными квантовыми переменными. Для ознакомления с методами генерации квантовых состояний с непрерывными переменными мы рекомендуем читателю обратиться к обзору [34], а для ознакомления с методами генерации квантовых состояний с дискретными переменными — к недавнему обзору [13]. Ниже мы обсудим ещё одну возможность наблюдения квантового парадокса — аналога классического парадокса Бернштейна — на примере запутанных состояний с дискретными переменными, в качестве которых рассмотрим трёх- и четырёхфотонные состояния.

Обратимся к трёхкубитовому и четырёхкубитовому ГХЦ-состояниям:

$$|GHZ_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|HHH\rangle + |VVV\rangle), \quad (5)$$

$$|GHZ_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|HHHH\rangle + |VVVV\rangle), \quad (6)$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} |HHH\rangle &= |H\rangle|H\rangle|H\rangle = |1\rangle_H^a|0\rangle_V^a|1\rangle_H^b|0\rangle_V^b|1\rangle_H^c|0\rangle_V^c, \\ |VVV\rangle &= |V\rangle|V\rangle|V\rangle = |0\rangle_H^a|1\rangle_V^a|0\rangle_H^b|1\rangle_V^b|0\rangle_H^c|1\rangle_V^c. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогичное представление можно записать для четырёхкубитовых состояний. Далее, $|H\rangle = |1\rangle_H^a = \hat{a}_H^{a+}|0\rangle_H^a$ — однофотонное состояние моды a с горизонтальной поляризацией ($|0\rangle_H^a$ — вакуумное состояние). Аналогично, $|V\rangle = |1\rangle_V^a = \hat{a}_V^{a+}|0\rangle_V^a$ — однофотонное состояние моды a с вертикальной поляризацией. Операторы рождения $\hat{a}^+$ и уничтожения $\hat{a}$ для моды a с одной и той же поляризацией удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}_F^g, \hat{a}_F^{g+}] = 1, \quad F = H, V; \quad g = a, b, c. \quad (8)$$

Операторы, относящиеся к разным модам и поляризациям, коммутируют между собой.

Вектор квантового состояния $|\text{GHZ}_3\rangle$ не факторизуется: его нельзя представить в виде произведения

$$|\text{GHZ}_3\rangle \neq |\psi^a\rangle|\psi^b\rangle|\psi^c\rangle, \quad |\psi^j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle).$$

Именно такие состояния называют *запутанными* [13, 35]. Состояние поляризации в них "запутывается" с конкретной тройкой фотонов: либо все три фотона поляризованы в одной плоскости, либо — в ортогональной. Между тем поляризация каждого одиночного фотона в одном канале будет абсолютно случайной. Не случайна лишь тройная корреляция.

Одновременная генерация тройки фотонов (фотон накачки с частотой ω_p распадается на три фотона, a, b, c , с частотами $\omega_p = \omega_a + \omega_b + \omega_c$) возможна в нелинейных кристаллах или оптическом волокне за счёт кубической нелинейности $\chi^{(3)}$ под действием когерентного лазерного света [36, 37]. При этом можно достичь идеальной корреляции состояний поляризации всех трёх фотонов: все они поляризованы либо горизонтально (H), либо вертикально (V).

Читатель, не желающий углубляться в тонкости математического обоснования расчёта корреляций, может сразу перейти к рис. 2.

Для описания корреляционных свойств трёхкубитовых ГХЦ-состояний воспользуемся нормально-упорядоченной характеристической функцией [38, 39]

$$C_3(\eta, \xi) = \text{Tr} \left(\rho \prod_{j=a,b,c} \hat{Q}_H(\eta_j) \hat{Q}_V(\xi_j) \right), \quad (9)$$

где $\rho = |\text{GHZ}_3\rangle\langle\text{GHZ}_3|$ — матрица плотности состояния. Операторы $\hat{Q}_H$ имеют вид

$$\hat{Q}_H(\eta_j) = \exp(\eta_j \hat{a}_H^{j+}) \exp(-\eta_j^* \hat{a}_H^j), \quad (10)$$

η_j — комплексный коэффициент. В (9) усреднение производится по состояниям всех мод. Производные от характеристической функции (9) по η_j, η_j^* приводят к нормально-упорядоченным моментам операторов рождения и уничтожения.

В силу того что мы имеем дело с однофотонными состояниями в моде (6), при вычислении характеристической функции (9) можно ограничиться таким разложе-

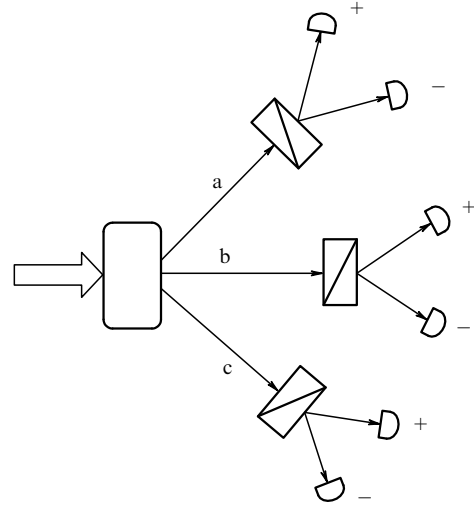


Рис. 2. Схема трёхфотонной квантовой реализации парадокса Бернштейна: под действием лазерной накачки (слева) в нелинейной среде рождаются коррелированные тройки фотонов с произвольными ориентациями плоскостей поляризации, но строго коррелированными относительно друг друга. Далее фотоны попадают на поляризационные призмы Вуллстона, которые разделяют взаимно ортогональные поляризации фотонов на положительный и отрицательный каналы, в которых и происходит их детектирование. При этом все попарные вероятности регистрации одновременно двух плюсов оказываются равными произведению одиночных вероятностей, что, казалось бы, свидетельствует о независимости событий, а трёх плюсов — нет.

нием экспонент (см. ниже)

$$\exp(\eta_j \hat{a}_H^{j+}) = 1 + \eta_j \hat{a}_H^{j+} + \dots,$$

$$\exp(-\eta_j^* \hat{a}_H^j) = 1 - \eta_j^* \hat{a}_H^j + \dots,$$

и при их подстановке в (9) сохранить только слагаемые, содержащие первые степени коэффициентов η, η^*, ξ, ξ^* . В результате до выполнения расчёта следа имеем

$$\begin{aligned} C_3(\eta, \xi) &= \text{Tr} (\rho (\hat{H}_a \hat{H}_b \hat{H}_c + \hat{V}_a \hat{V}_b \hat{V}_c) - \\ &\quad - (\eta_a \hat{a}_H^a \eta_b \hat{a}_H^b \eta_c \hat{a}_H^c \xi_a^* \hat{a}_V^{a+} \xi_b^* \hat{a}_V^{b+} \xi_c^* \hat{a}_V^{c+} + \text{h.c.})), \end{aligned} \quad (11)$$

где h.c. означает эрмитово сопряжение,

$$\hat{H}_j = 1 - |\eta_j|^2 \hat{n}_H^j, \quad \hat{V}_j = 1 - |\xi_j|^2 \hat{n}_V^j, \quad j = a, b, c,$$

$\hat{n}^j = \hat{a}^{j+} \hat{a}^j$ — оператор числа фотонов.

Согласно (10), (11), корреляция троек чисел фотонов (или смешанные моменты фотонов) с горизонтальной поляризацией определяется как

$$\begin{aligned} G_H^{(3)} &= \langle \hat{n}_H^a \hat{n}_H^b \hat{n}_H^c \rangle = \text{Tr} (\rho \hat{n}_H^a \hat{n}_H^b \hat{n}_H^c) = \\ &= (-1)^3 \frac{\partial^6 C(\eta, \xi)}{\partial \eta_a \partial \eta_a^* \partial \eta_b \partial \eta_b^* \partial \eta_c \partial \eta_c^*} \Big|_{\eta=\eta^*=0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичным образом определяются тройные корреляции с вертикальной поляризацией $G_V^{(3)} = \langle \hat{n}_V^a \hat{n}_V^b \hat{n}_V^c \rangle$. Нетрудно увидеть, что корреляции числа фотонов с ортогональными поляризациями отсутствуют. Моменты числа фотонов вида (12) являются псевдоклассическими, они могут быть определены через совместные кумулянты по классическим формулам [31].

Чисто квантовые корреляции содержатся в интерференционных членах (11). С этими двумя последними слагаемыми и связан квантовый парадокс Бернштейна. В соответствии с (11) для суперпозиции полевых корреляций шестого порядка имеем

$$\Gamma_{\text{HV}}^{(6)} = \langle \hat{a}_{\text{H}}^{a+} \hat{a}_{\text{H}}^{b+} \hat{a}_{\text{H}}^{c+} \hat{a}_{\text{V}}^a \hat{a}_{\text{V}}^b \hat{a}_{\text{V}}^c \rangle + \text{с.с.} = (-1)^3 \frac{\partial^6 C(\eta, \xi)}{\partial \eta_a \partial \eta_b \partial \eta_c \partial \xi_a^* \partial \xi_b^* \partial \xi_c^*} \Big|_{\eta=\xi^*=0} + \text{с.с.}, \quad (13)$$

где с.с. означает комплексное сопряжение.

Подчеркнём, что в (13) все операторы относятся к разным модам, различающимся поляризациями или частотами. Отклик фотодетекторов связан с оператором числа фотонов. Поэтому при измерении корреляций вида (13) это выражение следует преобразовать таким образом, чтобы в него входили операторы числа фотонов.

Возможная схема эксперимента представлена на рис. 2. Каждый фотон из тройки фотонов попадает на поляризационную призму типа Волластона (см. рис. 2), которая разделяет ортогональные поляризации по двум направлениям: к фотодетектору "+" или "-" (причина такого обозначения будет ясна из дальнейшего анализа). При этом призмы ориентированы симметрично относительно направлений поляризаций H и V, т.е. под углом $\pi/4$ к ним. Всё это сделано для достижения полной эквивалентности каналов. Фактически такая призма представляет собой 50%-ный светоделитель. Его действие в a -м канале в представлении Гейзенберга описывается следующими соотношениями:

$$\hat{a}_+^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_V^a + \exp(i\varphi_a) \hat{a}_H^a),$$

$$\hat{a}_-^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_V^a - \exp(i\varphi_a) \hat{a}_H^a).$$

Здесь $\hat{a}_+^a$ и $\hat{a}_-^a$ — операторы уничтожения фотона, соответствующие свету, распространяющемуся в направлении фотодетекторов "+" и "-" в канале a , а операторы $\hat{a}_H^a$ и $\hat{a}_V^a$ относятся к поляризациям света на входах светоделительной поляризационной призмы, φ_a — относительная фазовая задержка между ортогонально поляризованными фотонами в a -м канале. Аналогичные соотношения справедливы и для двух других каналов, "b" и "c" (также в силу их эквивалентности).

Операторы чисел фотонов, поступающих на фотодетекторы, которые мы для простоты считаем идеальными (обладающими единичной квантовой эффективностью), выражаются в виде

$$\hat{n}_+^a = \hat{a}_+^{a+} \hat{a}_+, \quad \hat{n}_-^a = \hat{a}_-^{a+} \hat{a}_-, \quad \hat{n}_+^b = \hat{b}_+^{b+} \hat{b}_+,$$

$$\hat{n}_-^b = \hat{b}_-^{b+} \hat{b}_-, \quad \hat{n}_+^c = \hat{c}_+^{c+} \hat{c}_+, \quad \hat{n}_-^c = \hat{c}_-^{c+} \hat{c}_-. \quad (14)$$

Разность операторов чисел фотонов после светоделителя, например, в канале a имеет вид

$$\hat{N}_a = \hat{n}_+^a - \hat{n}_-^a = \exp(-i\varphi_a) \hat{a}_H^{a+} \hat{a}_V^a + \exp(i\varphi_a) \hat{a}_V^{a+} \hat{a}_H^a. \quad (15)$$

Среднее значение оператора $\hat{N}_a$ по ГХЦ-состоянию (5) равно нулю, $\langle \hat{N}_a \rangle = 0$. В то же время среднее значение числа фотонов, регистрируемых фотодетекторами "+" и "-" по отдельности: $\langle \hat{n}_+^a \rangle = \langle \hat{n}_-^a \rangle = 1/2$, т.е. вероятности одинаковы и равны $1/2$.

Оператору $\hat{N}_a$, описывающему события в канале a , следует приписать числовое значение $+1$ или -1 в за-

висимости от того, регистрируется фотон фотодетектором "+" или "-". Для двух других каналов, b и c, ситуация аналогична. Факт регистрации фотона является, таким образом, дихотомным событием.

Значение корреляции зарегистрировать одновременно фотоны в двух каналах, например в каналах a и b, — события, описываемого оператором $\hat{N}_{ab} = \hat{N}_a \hat{N}_b$, тоже оказывается равным нулю, $\langle \hat{N}_{ab} \rangle = 0$. Результаты эксперимента приведены в табл. 1.

Таблица 1. Реализации регистрации фотонов в каналах a и b; + (–) соответствует регистрации детектором "+" ("–")

a	b
+	+
+	–
–	+
–	–

Корреляция фотонов определяется выражением

$$\langle \hat{N}_{ab} \rangle = \langle \hat{N}_a \hat{N}_b \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) = 0,$$

а события в каналах a и b оказываются некоррелированными. Очевидно, что таковыми будут и события в каналах a и c, а также в каналах b и c.

Картина радикально меняется при наблюдении тройных событий. Среднее значение тройных корреляций чисел фотонов

$$\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \hat{N}_c \rangle = \langle \text{GHZ}_3 | \hat{N}_a \hat{N}_b \hat{N}_c | \text{GHZ}_3 \rangle = \Gamma_{\text{HV}}^{(6)} = \cos(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c). \quad (16)$$

Тройные корреляции фотонов реализуют измерение корреляции $\Gamma_{\text{HV}}^{(6)}$ (12) в рассматриваемой схеме. Они имеют периодическую зависимость от фазовых задержек в каналах регистрации (см. также [13]). Рассмотренные выше парные корреляции фотонов такой зависимостью не обладают.

Пусть фазовые задержки удовлетворяют условию $\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c = 0$ и, следовательно, $\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \hat{N}_c \rangle = \Gamma_{\text{HV}}^{(6)} = 1$. Результаты одновременной регистрации трёх фотонов в рассматриваемом случае представлены в табл. 2.

Из таблицы 2 видно, что из возможных $2^3 = 8$ исходов при трёхфотонной регистрации реализуются только 4. При этом, в соответствии с полученными выше результатами, вероятности регистрации детекторами "+" и "-" фотонов в каждом из каналов одинаковы ($1/2$). Попарная же вероятность "+" в любых двух каналах равна $1/4$. Процессы в каналах, казалось бы, опять статистически независимы, однако вероятность всех трёх "+" также равна $1/4$, что, с одной стороны, подтверждает нефакторизуемость состояния (6), а с другой, полностью воспро-

Таблица 2. Реализации регистрации фотонов в каналах a, b и c; + (–) соответствует регистрации детектором "+" ("–")

a	b	c
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

изводит статистический парадокс Бернштейна. Важно, что каналы при этом совершенно равноправны, т.е. парадокс реализуется "в чистом виде", в отличие от тетраэдра.

В классическом парадоксе Бернштейна тройные корреляции заложены в конфигурации тетраэдра, т.е. в его конструкции, а в схеме на рис. 2 — в особенностях структуры ГХЦ-состояния (5). Поляризационные светоделители преобразуют эту изначальную структуру, а зависимость результата от фазовых задержек подтверждает волновую природу квантовых объектов. Вследствие этого в рассматриваемом эксперименте есть и квантовая специфика, отсутствующая в классическом парадоксе Бернштейна.

Из таблицы 2 видно, что вероятность одновременной регистрации трёх фотонов детекторами "—" равна нулю, тогда как вероятностная ситуация с регистрацией одним и двумя детекторами такая же, как в предыдущем случае с "+". Из сказанного можно сделать такой вывод. С точки зрения регистрации трёх плюсов фотоны коррелированы, а с точки зрения регистрации трёх минусов оказываются антикоррелированными. Нетрудно понять, что ситуация с регистрацией одновременно трёх фотонов инвертируется, если взять значение $\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \hat{N}_c \rangle = -1$. При выборе в (16) значения $\cos(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c) = 0$ корреляции фотонов в детекторах вообще отсутствуют.

Следует заметить, что некоторая идеализация схемного решения, предполагающая использование фотодетекторов с единичным квантовым выходом, на практике ничего не испортит: просто в итоговом списке экспериментальных реализаций следует учитывать только те, в которых одновременно сработали все три детектора, а остальные отбросить.

Ещё более впечатляет четырёхканальный вариант эксперимента с четырёхкубитовым состоянием (6), т.е. одновременная регистрация четвёрки запутанных фотонов. Для его формирования можно использовать пьезокристаллы, обладающие квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$, которая обычно сопровождается и нелинейностью четвёртого порядка $\chi^{(4)}$, хотя она и значительно меньше $\chi^{(2)}$, т.е. ждать появления четвёрки фотонов придётся достаточно долго (значительно дольше, чем коррелированной пары фотонов — *бифотонов*). Определённые перспективы в этом направлении могут быть связаны с использованием аperiодических фотонных кристаллов [40, 41], реализующих связанные квазисинхронные параметрические процессы. Именно такие состояния впервые были предложены для реализации квантового ГХЦ-парадокса (см., например, [17]).

Как и на рис. 2, установим в каналах светоделительные поляризационные призмы с такой же пространственной ориентацией. Если возникнет трудность в том, чтобы четвёрки фотонов имели то одну плоскую поляризацию, то взаимно ортогональную, можно установить два кристалла с общей лазерной накачкой, один из которых рождает фотоны с одной поляризацией, а другой — со взаимно ортогональной, как это показано на рис. 3. Результат будет тем же.

Расчёты, аналогичные уже проделанным ранее, приводят к похожему среднему, т.е. к полной корреляции произведения $\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \hat{N}_c \hat{N}_d \rangle$ при выполнении соотношения $\cos(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) = 1$:

$$\langle \hat{N}_a \hat{N}_b \hat{N}_c \hat{N}_d \rangle = \Gamma_{\text{HV}}^{(8)} = 1. \quad (17)$$

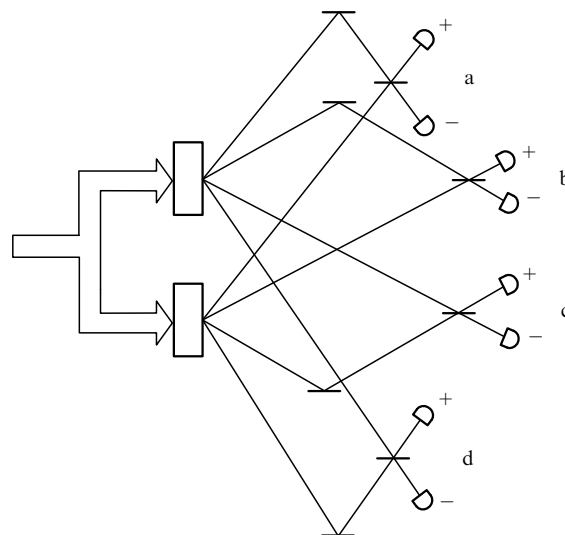


Рис. 3. Схема четырёхфотонной квантовой реализации парадокса Бернштейна: два нелинейных кристалла генерируют коррелированные четвёрки фотонов под действием общей лазерной накачки, причём один кристалл производит их исключительно в одной плоскости поляризации, а другой — во взаимно ортогональной. Далее фотоны из смежных каналов смешиваются на светоделителях, представляющих собой поляризационные призмы Волластона, и направляются на детектор либо со знаком +, либо со знаком —.

Возможные экспериментальные результаты в данном случае представлены в табл. 3.

Здесь из возможных $2^4 = 16$ исходов реализуются только 8. Вероятности появления + и — в каждом канале, разумеется, равны (1/2). Попарная вероятность регистрации + в любой паре каналов равна 1/4. Более того, и вероятность появления трёх плюсов равна 1/8, т.е. для вывода о статистической независимости процессов в разных каналах оснований гораздо больше, чем в предыдущем случае. Всё "портит" вероятность появления всех четырёх плюсов: она равна 1/8!

Дальнейшее наращивание числа каналов будет давать ещё большую парадоксальность. Таковы возможности квантовых запутанных состояний.

Классическим аналогом описанного выше четырёхканального варианта, как заметил М.Б. Менский, является правильный октаэдр (восьмигранник), раскрашенный разными цветами, если рассматривать при этом результаты регистрации фотонов, представленные в табл. 3, как воспроизведение равновероятного выпадения граней многогранника. Аналогом трёхканальной схемы может быть также разноцветно раскрашенный правильный додекаэдр (двенадцатигранник).

Нанесение плюсов и минусов на каждой грани октаэдра согласно строкам табл. 3 ещё более упрощает эту ситуацию. Таким образом парадокс тоже реализуется.

Таблица 3. Реализации регистрации фотонов в каналах a, b, c, d: + (—) соответствует регистрации детектором "+" ("—")

a	b	c	d
+	+	+	+
+	+	—	—
+	—	+	—
+	—	—	+
—	+	+	—
—	+	—	+
—	—	+	+
—	—	—	—

Итак, предложенный нами квантовый парадокс, строга говоря, в чистом виде таковым не является: его результаты могут быть имитированы классическими правильными многогранниками. Квантовую специфику можно усмотреть в том, что наши экспериментальные схемы абсолютно симметричны. Раскрашенные же многогранные фигуры не симметричны, и асимметричный результат эксперимента с ними (бросания на стол) является следствием именно этой конструктивной асимметрии. Асимметрия квантового результата симметричной квантовой схемы является следствием специфики чисто квантовых перепутанных состояний. В этом смысле наш парадокс действительно является квантовым.

Ещё раз подчеркнём, что квантовый парадокс Бернштейна ярко демонстрирует особенности запутанных квантовых состояний в вероятностных понятиях. Следствием этих особенностей является нарушение соотношений, получаемых с позиций классических расчётов, — факт, который неоднократно демонстрировался экспериментально, как отмечалось в начале статьи. Никакие классические сигналы и волновые пакеты не могут дать подобного эффекта. Только трёх- и более компонентные запутанные квантовые состояния фотонов, спинов, фононов и т.п. позволяют проиллюстрировать парадокс Бернштейна в наиболее ярком, привлекательном и нетривиальном воплощении.

Авторы благодарят М.Б. Менского за плодотворные и полезные обсуждения и конструктивные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-00610).

Список литературы

- Мандельштам Л И *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике* (М.: Наука, 1972)
- Einstein A, Podolsky B, Rosen N *Phys. Rev.* **47** 777 (1935)
- Фок В А, Эйнштейн А, Подольский Б, Розен Н, Бор Н *УФН* **16** 436 (1936)
- Bohr N *Phys. Rev.* **48** 696 (1935)
- Клышко Д Н *УФН* **154** 133 (1988) [Klyshko D N *Sov. Phys. Usp.* **31** 74 (1988)]
- Клышко Д Н *УФН* **158** 327 (1989) [Klyshko D N *Sov. Phys. Usp.* **32** 555 (1989)]
- Кадо́мцев Б Б *УФН* **164** 449 (1994) [Kadomtsev B B *Phys. Usp.* **37** 425 (1994)]
- Кадо́мцев Б Б *УФН* **173** 1221 (2003) [Kadomtsev B B *Phys. Usp.* **46** 1183 (2003)]
- Reid M D et al. *Rev. Mod. Phys.* **81** 1727 (2009)
- Bell J S *Physics* **1** 195 (1964)
- Greenberger D M, Horne M, Zeilinger A, in *Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe* (Fundamental Theories of Physics, Vol. 37, Ed. M Kafatos) (Dordrecht: Kluwer Acad., 1989) p. 69
- Greenberger D M, Horne M A, Zeilinger A *Phys. Today* **46** (8) 22 (1993)
- Pan J-W et al. *Rev. Mod. Phys.* **84** 777 (2012)
- Clauser J F et al. *Phys. Rev. Lett.* **23** 880 (1969)
- Mermin N D *Phys. Rev. Lett.* **65** 1838 (1990)
- Ardehali M *Phys. Rev. A* **46** 5375 (1992)
- Белинский А В, Клышко Д Н *УФН* **163** (8) 1 (1993) [Belinskii A V, Klyshko D N *Phys. Usp.* **36** 653 (1993)]
- Brunner N, Sharam J, Vértesi T *Phys. Rev. Lett.* **108** 110501 (2012)
- Lee S, Lee J, Kim J *Phys. Rev. A* **79** 032309 (2009)
- Белинский А В *УФН* **167** 323 (1997) [Belinskii A V *Phys. Usp.* **40** 305 (1997)]
- Белинский А В *УФН* **173** 905 (2003) [Belinskii A V *Phys. Usp.* **46** 877 (2003)]
- Белинский А В, Грановский А А *Письма в ЖЭТФ* **93** 552 (2011) [Belinsky A V, Granovskiy A A *JETP Lett.* **93** 495 (2011)]
- Менский М Б *УФН* **168** 1017 (1998) [Menskii M B *Phys. Usp.* **41** 923 (1998)]
- Менский М Б *УФН* **181** 543 (2011) [Mensky M B *Phys. Usp.* **54** 519 (2011)]
- Mensky M B *Quantum Measurements and Decoherence. Models and Phenomenology* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000) [Менский М Б *Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология* (М.: Физматлит, 2001)]
- Facchi P, Pascazio S "Quantum Zeno and inverse quantum Zeno effects" *Prog. Opt.* **42** 147 (2001)
- Chirkin A S, Rodionov A V *J. Russ. Laser Res.* **26** 83 (2005)
- Белинский А В *Квантовые измерения* (М.: БИНОМ: Лаб. знаний, 2012)
- Кадо́мцев Б Б *Динамика и информация* 2-е изд. (М.: Редакция журнала "Успехи физических наук", 1999)
- Megidish E et al., arXiv:1209.4191
- Чиркин А С, Беляева О В, Белинский А В *ЖЭТФ* **143** 48 (2013) [Chirkin A S, Belyaeva O V, Belinsky A V *JETP* **116** 39 (2013)]
- Стоянов Й *Контрпримеры в теории вероятности* (М: Факториал, 1999); Stoyanov J M *Counterexamples in Probability* (Chichester: Wiley, 1997)
- Жукова И С, Малиновская Г А, Саичев А И *Анализ случайных процессов и полей* (Нижний Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2006)
- Furusawa A, Takei N *Phys. Rep.* **443** 97 (2007)
- Баргатын И В, Гришанин Б А, Задков В Н *УФН* **171** 625 (2001) [Bargatin I V, Grishanin B A, Zadkov V N *Phys. Usp.* **44** 597 (2001)]
- Elyutin P V, Klyshko D N *Phys. Lett. A* **149** 241 (1990)
- Bencheikh K et al. *C.R. Physique* **8** 206 (2007)
- Mandel L, Wolf E *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Мандель Л, Вольф Э *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000)]
- Belyaeva O V, Chirkin A S *Phys. Scripta* **87** 038101 (2013)
- Чиркин А С, Шутов И В *Письма в ЖЭТФ* **86** 803 (2007) [Chirkin A S, Shutov I V *JETP Lett.* **86** 693 (2007)]
- Чиркин А С, Шутов И В *ЖЭТФ* **136** 639 (2009) [Chirkin A S, Shutov I V *JETP* **109** 547 (2009)]

Bernstein's paradox of entangled quantum states

A.V. Belinsky, A.S. Chirkin

International Laser Center, Faculty of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: belinsky@inbox.ru, aschirkin@rambler.ru

Bernstein's classical paradox of right colored-faced tetrahedron, while designed to illustrate the subtleties of probability theory, is strongly flawed in being asymmetric: three of the tetrahedron's faces are single- and one, is multi-colored. Therefore, even prior to formal calculations, a strong suspicion as to the independence of outcoming statistics arises. Not so with entangled states. In the schematic solutions proposed, while photon detection channels are completely symmetric and equivalent, the events that occur in them turn out to be statistically dependent, making the Bernstein paradox even more impressive due to the unusual behavior of quantum particles not obeying classical laws. As an illustrative example of the probability paradox, Greenberger–Horne–Zeilinger multiqubit states are considered.

PACS numbers: 03.65.Ud, 42.65.Lm

Bibliography — 41 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (11) 1231–1236 (2013)

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201311e.1231

Received 22 April 2013, revised 13 June 2013

Physics – Uspekhi **56** (11) (2013)