

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Дробно-дифференциальная феноменология аномальной диффузии космических лучей

B.B. Учайкин

Рассматривается эволюция диффузионной концепции в физике космических лучей от обычной (эйнштейновской) модели броуновского движения к дробно-дифференциальному моделям распространения галактических космических лучей, появившимся в последнее десятилетие. Обсуждаются математические и физические основы этих моделей, вытекающие из них следствия и дальнейшие перспективы.

PACS numbers: 02.50.-r, 05.40.-a, 98.70.Sa

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201311b.1175

Содержание

- 1. Введение (1175).**
- 2. Классические источники (1178).**
 - 2.1. Броуновское движение. 2.2. Несколько замечаний к выводу Эйнштейна. 2.3. Турбулентная диффузия. 2.4. Перколяция.
 - 2.5. Комбинированное уравнение и его интерпретация.
 - 2.6. Дробно-устойчивая статистика.
- 3. Изотропная аномальная диффузия (1186).**
 - 3.1. Ловушки и пустоты. 3.2. Первые работы с дробно-дифференциальной моделью.
 - 3.3. Излом в спектре и параметризация модели.
 - 3.4. Уравнения ограниченной аномальной диффузии.
 - 3.5. Аномальные диффузионные распределения.
 - 3.6. Корреляции пробег – время.
 - 3.7. Анизотропия.
 - 3.8. Достижение границы галактического диска.
- 4. Анизотропная аномальная диффузия (1203).**
 - 4.1. Составная модель диффузии.
 - 4.2. Дробно-броуновская модель силовых линий.
 - 4.3. Поперечная диффузия в дробных операторах.
 - 4.4. Продольные блуждания с конечной скоростью.
- 5. Диффузионные модели ускорения (1211).**
 - 5.1. Классическая модель Ферми.
 - 5.2. Дробно-дифференциальное кинетическое уравнение.
 - 5.3. Дробно-дифференциальные уравнения Фоккера – Планка.
 - 5.4. Интегро-дробно-дифференциальная модель.
- 6. Проблемы и перспективы (1217).**
 - 6.1. О дробной производной по времени.
 - 6.2. О дробном лапласиане.
 - 6.3. О градиенте и материальной производной.
- 7. Заключение (1220).**

Список литературы (1222).

1. Введение

Физические основания применимости модели классической изотропной диффузии к описанию распространения космических лучей в Галактике можно усмотреть ещё в пионерских работах Ферми и Гинзбурга. Ферми в своей первой статье о происхождении космического излучения [1] выдвигает гипотезу, согласно которой «космические лучи образуются и ускоряются главным образом в межзвёздном пространстве, причём предполагается, что магнитные поля не позволяют им выйти за пределы Галактики... Такие поля поразительно устойчивы, что обусловлено их большими размерами (порядка световых лет) и относительно высокой электропроводностью межзвёздного пространства. Действительно, проводимость настолько велика, что магнитные силовые линии можно считать "прикреплёнными" к веществу и принимающими участие в тех "течениях", которые существуют в нём... Существуют указания на то, что это вещество распределено неравномерно и что имеются области концентрации с плотностью в 10–100 раз выше, средний размер которых составляет около 10 парсек... Такие относительно плотные облака занимают около 5 % межзвёздного пространства [2]». Аргументируя предложенные им механизмы ускорения, Ферми рассматривал процесс движения частицы в межзвёздной среде как последовательность её рассеяний при столкновениях с намагниченными облаками.

Пятью годами позднее Гинзбург писал: «Движение заряженных частиц в межзвёздной среде напоминает броуновское движение или движение молекул в газе. Действительно, присутствие межзвёздного магнитного поля приводит к тому, что в области, где это поле квазиоднородно, траектория частицы навивается на силовую линию поля и в среднем по периоду обращения близка к прямой линии. Но при переходе в область с другим направлением поля траектория изменяется и в целом представляет собой ломаную линию. Если размер участков, на которых поле заметно изменяет своё на-

В.В. Учайкин. Ульяновский государственный университет,
ул. Л. Толстого 42, 432917 Ульяновск, Российская Федерация
E-mail: vuchaikin@gmail.com

Статья поступила 3 декабря 2012 г.,
после доработки 12 апреля 2013 г.

правление, мал по сравнению с размерами областей с квазиоднородным полем, то движение частицы можно рассматривать подобно движению молекулы в газе: в области однородного поля движение является свободным, а изменение направления скорости на границе подобно соударению с другой молекулой и обычно может считаться происходящим мгновенно. Размеры области с квазиоднородным полем играют, таким образом, роль длины свободного пробега l . Время свободного пробега $\tau = l/v_0$, где v_0 — скорость поступательного движения по траектории, по порядку величины равная обычно скорости самой частицы (поэтому ниже мы будем полагать $\tau \sim l/v$, где v — скорость частицы). Если магнитные поля не изменяются во времени, то описанный процесс соударений приводит только к диффузии частиц и "перемешиванию" их скоростей по направлениям, но не к изменению энергии частиц. Среднее квадратичное расстояние L , проходимое частицей за время t , как известно из теории диффузии, равно

$$L = \sqrt{6Dt} \sim \sqrt{lvt},$$

где $D \sim lv/3$ — коэффициент диффузии. По астрономическим данным, в межзвёздной среде $l > 10^{19}$ см и при $v \sim c$ и $t \sim T \sim 10^{16}$ с (время жизни протонов) $L \sim 3 \times 10^{22}$ см, т.е. порядка размеров Галактики. Таким образом, при $l < 10^{19}$ см протоны, а ядра и подавно, действительно не успеют в значительном количестве покинуть Галактику» [3, с. 368, 369].

Изначально, конечно, было ясно, что описание сложного процесса переноса космических лучей не может быть исчерпано классической диффузионной моделью. В первой монографии по космическим лучам Гинзбург и Сыроватский пишут [4]: «Высокая степень изотропии космических лучей послужила одним из первых указаний на то, что космические лучи попадают на Землю не непосредственно от источников, а после сложного движения и рассеяния в межзвёздных магнитных полях. Это движение можно рассматривать как некоторую "диффузию" космических лучей в межзвёздном пространстве, в процессе которой частицы "забывают" о своём первоначальном направлении движения. Однако выяснение истинного характера такой диффузии представляет собой довольно сложную проблему». Отдавая должное модели адиабатического движения частиц по силовым линиям, авторы отмечают, что необходимое условие для этого (радиус кривизны много меньше размеров неоднородности магнитного поля) выполняется не везде и его нарушение (в ударных волнах с малой шириной фронта или в областях с нулевой напряжённостью магнитного поля) приводит в конечном итоге к диффузионному процессу.

Несмотря на такие, казалось бы, скорее интуитивно-феноменологические¹, чем физико-математические осно-

вания, диффузионное направление в физике космических лучей благополучно существует и продолжает развиваться. Чтобы учесть изменение энергетического спектра частиц по мере удаления от источника вследствие ионизации, синхротронного излучения и доускорения на флуктуациях магнитных полей, ударных волнах и остатках сверхновых, была введена зависимость единственного (в модели *изотропной диффузии*) материального параметра — коэффициента диффузии — от энергии. С учётом наблюдаемого уменьшения доли вторичных ядер с энергией, коэффициент диффузии был аппроксимирован степенной функцией

$$D(E) = D_0 E^\delta, \quad (1)$$

где E — энергия частиц в гигаэлектронвольтах, а показатель $\delta \simeq 0,3 - 0,7$, что согласовалось, в частности, с данными по анизотропии космических лучей [6].

Наряду с изотропной моделью в локальных задачах переноса галактических космических лучей широко используется модель *анизотропной диффузии*, начало которой положили теоретические исследования движения заряженных частиц в квазиоднородных областях с флуктуирующим магнитным полем, мало отличающимся от однородного постоянного поля. Развитие этой модели привело к разделению диффузии заряженных частиц на продольную и поперечную составляющие, каждая из которых описывается диффузионным уравнением соответствующей размерности со своим коэффициентом диффузии [7–10]. Поперечная диффузия явila собой первый образец *аномальной диффузии*. Аномальность поперечной диффузии проявлялась не просто в её замедленности (которой можно было бы достичь просто введением уменьшенного коэффициента диффузии) по сравнению с нормальной диффузией, а в ином законе расширения диффузионного пакета и другой его форме. Некоторые авторы усматривают возможность распространения локальной интерпретации такой *составной* модели аномальной диффузии (*compound diffusion*) на весь галактический диск. Так, Хаякава пишет: «В этой модели межзвёздные магнитные поля считаются почти однородными вдоль спиральных рукавов. Частицы дрейфуют вдоль силовых линий и отражаются в зеркальных точках... Частицы, захваченные и удерживаемые на силовой линии, продолжают дифундировать... в согласии с хаотическим движением силовой линии... Так как однородность магнитного поля существует только в масштабе расстояний в несколько килопарсек, то можно считать частицы уходящими за пределы Галактики, если они прошли путь больше длины однородности поля» [10].

Предвестниками появления дробных производных в феноменологии космических лучей можно, по-видимому, считать работы Урча [11, 12] 1977 г., исследовавшего движение заряженных частиц в случайно неоднородных магнитных полях. Обсуждая применимость уравнения Фоккера–Планка в предположении, что траектории частиц, проходящих расстояния, во много раз превышающие корреляционную длину на невозму-

¹ В связи с этим не могу не привести цитату из замечательной заметки Гейзенберга [5]: «Под "феноменологической" теорией понимают такую формулировку закономерностей в области наблюдаемых физических явлений, в которой не делается попытки свести описываемые связи к лежащим в их основе общим законам природы, через которые они могли бы быть понятыми. В развитии физики такие феноменологические теории всегда играли значительную роль... Конечно, феноменологические теории развиваются всегда там, где наблюдаемые явления ещё не могут быть сведены к общим законам

природы. Причина этой невозможности может состоять либо в чрезвычайной сложности соответствующих явлений, которая ещё не допускает такое сведение из-за математических трудностей, либо в незнании упомянутых законов».

щённой траектории, лишь слегка возмущаются и выполняется ряд других условий (гирорадиус r'_g частиц, обусловленный возмущением поля, пренебрежимо мал по сравнению с корреляционной длиной поля L_c , стохастическое магнитное поле состоит из неполяризованных альвеновских волн, распространяющихся вдоль основного поля \mathbf{H}_0 , направленного вдоль оси z , скорость частиц v много больше скорости альвеновских волн). Урч приходит к выводу, что при

$$\frac{v_z}{v} < \sqrt{\frac{L_c}{r'_g}}$$

уравнение Фоккера – Планка, приводящее к закону Фика $J_x = -D \partial f / \partial x$ и вытекающей из него нормальной диффузии, неприменимо. Выполнив вычисления, не связанные с уравнением Фоккера – Планка, Урч нашёл, что связь между поперечной компонентой плотности тока частиц J_x и концентрацией частиц N в условиях данной задачи отличается от обычного закона Фика наличием третьей производной вместо первой:

$$J_x = -D_{\parallel} D_L^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

В работах [11, 12] ещё не говорилось о дробных производных, но позднее Вебб с соавторами [13] заметили, что формула Урча в сочетании с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = 0$$

приводит к уравнению с четвёртой производной по координате

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_{\parallel} D_L^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) f(x, t) = 0,$$

расщепление оператора в левой части которого,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} - D_{\parallel} D_L^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} &= \left(\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}} + \sqrt{D_{\parallel}} D_L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \times \\ &\times \left(\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}} - \sqrt{D_{\parallel}} D_L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

как раз и приводит (формально) к оператору дробного (порядка 1/2) дифференцирования.

Следующей работой, попадающей "в окрестность дробной производной", можно назвать препринт Чувильгина и Птускина [14], в котором проведено уже более детальное исследование различных режимов компаунд-диффузии — при описании одного из них и возникло уравнение, близкое к уравнению с дробной производной (развёрнутое изложение дано в их статье [15]). Содержащийся в этом уравнении интеграл от решения по временному интервалу, предшествующему моменту наблюдения, может быть интерпретирован как своего рода эффект "магнитных ловушек", характерный для динамики плазмы [16]. В то же время оценки, выполненные в монографии [6, с. 90] на основании сопоставления анизотропии $\delta \sim 10^{-3}$ и среднего проходного в диске пути $L \lesssim 10^{21}$ см с размерами самого диска, подтвердили давнее предположение Паркера [17] о том, что "космические лучи не могут свободно двигаться

вдоль диска, а должны эффективно смещаться и поперёк него. Видимо, такое движение связано с перемешиванием и запутыванием самих силовых линий, увлекающих вмороженный релятивистский газ космических лучей к границам диска. Таким образом, нечто подобное диффузии заведомо должно иметь место".

Естественно, впрочем, предположить, что результаты тех расчётов поперечной диффузии, которые выполнены в приближении теории возмущений, не следует пролонгировать до больших времён: по мере накопления совокупного эффекта возмущений этот метод исчерпывает свои возможности. Так, расчёты Зыбина и Истомина [18] показали, что прямое решение задачи о составной диффузии, доступное в простой модели, даёт в асимптотике больших времён нормальную диффузию и в поперечных направлениях. Там же показано, что к этому выводу можно прийти и в рамках теории возмущений, если изменить последовательность операций усреднения. Факт достаточно примечателен, чтобы относиться к расчётам по теории возмущений с осторожностью.

Другой важный аспект распространения галактических космических лучей связан с механизмом конвективного переноса, обусловленного крупномасштабными движениями среды как целого с некоторой скоростью конвекции $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. "Крупномасштабные движения среды могут носить случайный характер, и тогда в среднем в масштабах, много больших основного масштаба турбулентности L , движение частиц в некоторых случаях (при $D \ll uL/3$) сводится к диффузии с эффективным коэффициентом турбулентной диффузии порядка $uL/3$ " [6]. Важнейшее отличие турбулентной диффузии от молекуллярной состоит в её нелокальном (теперь уже пространственно нелокальном) характере: наличие вихревых образований разных масштабов порождает далёкие пространственные корреляции поля скоростей.

Прослеживая эволюцию диффузационной модели по мере включения дополнительной информации, нельзя избавиться от ощущения, что её имитационные возможности уже исчерпываются. Причина этого понятна: диффузионный процесс определяется единственным (за исключением пространственно-временных масштабов) параметром — коэффициентом диффузии — и одного его (даже расщеплённого на компоненты, как в случае составной диффузии) оказывается недостаточно. Естественный выход — замена коэффициента диффузии его случайнным аналогом с последующим усреднением уравнения и получение его усреднённого решения — математически найден лишь в случае малых флуктуаций, представляющих в наших задачах малый интерес: в турбулентной межзвёздной среде "правят бал" перемежаемые разномасштабными пустотами большие флуктуации, характеризующиеся далёкими корреляциями степенного типа. Для описания переноса такой "ключковатой" (фрактальной) среды потребовался специальный математический аппарат, и он был развит в рамках дробно-дифференциального исчисления (fractional calculus).

Внедрение нами дробно-дифференциального метода в круг рассматриваемых проблем [19, 20] было связано с увлечением дробно-дифференциальной техникой [21, 22] и моим накопленным к тому времени опытом работы с устойчивыми негауссовыми распределениями, отражённым в монографии [23]. Появление двух новых параметров — дробных порядков пространственной (α) и временной (β) производных — впечатляющее расширило

семейство решений диффузионного уравнения, сохранив формально его вид. Важнейшим качеством новых решений явился степенной закон их асимптотик, прекрасно согласующийся с известными свойствами турбулентной межзвёздной среды, механизмом ускорения Ферми и другими процессами, влияющими на космические лучи. В то же время дробно-дифференциальный подход, в отличие от других нелокальных подходов, демонстрировал своего рода "принцип соответствия": он включил в себя нормальную диффузию как частный случай, соответствующий $\alpha = 2, \beta = 1$.

Начиная с указанных выше работ в течение уже более десяти лет была опубликована серия статей, развивающих это направление, но, перебирая их, я ощущал дефицит ясной физической мотивации вовлечения дробных производных в этот процесс. Изложение было сухим, лаконичным, основной объём статей (большинство из них, правда, представляют собой тексты докладов на конференциях по космических лучам) занимали необычные для читателя формулы и традиционный числовый материал: графики, таблицы, сопоставление с экспериментальными данными, согласие с которыми, казалось, избавляло авторов от необходимости дополнительных разъяснений. Другие работы, появившиеся в рамках дробно-дифференциального направления в последние годы, тоже не свободны от этого недостатка.

В настоящем обзоре я пытаюсь по возможности заполнить этот пробел, показать естественность возникновения дробно-дифференциальной феноменологии в физике космических лучей как прямое логическое развитие идей, заложенных её основателями.

2. Классические истоки

2.1. Броуновское движение

Для того чтобы яснее представить себе вероятностную природу диффузионного процесса, обратимся к статье Эйнштейна [24] 1905 г., в которой уравнение диффузии выводится на основе вероятностных рассуждений относительно броуновского движения. Вот фрагмент этой работы:

"Очевидно, необходимо допустить, что каждая отдельная частица движется независимо от остальных частиц; кроме того, движения одной и той же частицы в разные промежутки времени должны рассматриваться как независимые друг от друга, пока эти промежутки не остаются слишком малыми".

Обозначив через $f(x, t)$ плотность распределения вероятностей координаты частицы, совершающей случайные блуждания вдоль оси x , и определив $\varphi(\Delta)$ как симметричную плотность распределения случайного смещения частицы за время τ , Эйнштейн записывает уравнение

$$f(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t) \varphi(\Delta) d\Delta. \quad (2)$$

(Вместо $x + \Delta$ в аргументе f должно быть $x - \Delta$, однако условие симметричности $\varphi(\Delta)$ нейтрализует эту ошибку Эйнштейна.) Далее цитируется по русскому переводу [24, с. 115]: "Так как τ очень мало, мы можем написать

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Разложим далее $f(x + \Delta, t)$ в ряд по степеням Δ :

$$\begin{aligned} f(x + \Delta, t) &= f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \dots \text{до бесконечности.} \end{aligned}$$

Это разложение мы можем внести под интеграл, так как для него существенны только очень малые значения Δ . Получаем

$$\begin{aligned} f + \frac{\partial f}{\partial t} \tau &= f \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \varphi(\Delta) d\Delta + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta + \dots \end{aligned}$$

В правой части благодаря равенству $\varphi(\Delta) = \varphi(-\Delta)$ второй, четвёртый и т.д. члены обращаются в нуль, в то время как из первого, третьего, пятого и т.д. членов каждый следующий очень мал по сравнению с предыдущим. Принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Delta) d\Delta = 1,$$

и полагая

$$\frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} \varphi(\Delta) d\Delta = D,$$

получим из этого уравнения, ограничиваясь только первым и третьим слагаемыми в правой части,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Это — известное дифференциальное уравнение диффузии, и D здесь коэффициент диффузии".

Заметим, что, вводя временной промежуток τ , Эйнштейн определил его как "очень малый по сравнению с наблюдаемыми промежутками времени, но всё же настолько большой, что движения частицы в двух следующих друг за другом промежутках могут рассматриваться как независимые друг от друга события" [24, с. 114]. Промежутки времени, много меньшие τ , частица может провести без столкновений с атомами среды, в свободном движении, корреляции в котором жёстко определяются ньютоновским законом движения. Именно поэтому Эйнштейн определяет $\varphi(\Delta)$ в уравнении (2) отдельно, не отождествляя эту переходную плотность с $f(x, \tau)$. Такой шаг привёл бы его к уравнению Колмогорова — Чепмена для марковских процессов

$$f(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t) f(\Delta, \tau) d\Delta, \quad f(x, 0) = \delta(x), \quad (4)$$

образующему основу теории случайных процессов с независимыми приращениями (см. обзор [25]). Именно к этому классу процессов принадлежит броуновское движение: чтобы выделить его из всего класса, достаточно потребовать выполнения двух условий:

1) движение должно быть автомодельным,

$$f(x, t) = t^{-\gamma} f(xt^{-\gamma}, 1); \quad (5a)$$

2) движение должно иметь конечную дисперсию,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t) dx < \infty. \quad (56)$$

В результате получим уравнение (3) с $\gamma = 1/2$, решение которого при начальном условии $f(x, 0) = \delta(x)$ имеет вид (5а), где $f(x, t)$ — гауссова плотность,

$$f(x; 1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D}\right),$$

с дисперсией, равной $2D$, и коэффициент диффузии

$$D = \frac{\langle [X(t)]^2 \rangle}{2t}.$$

Подчеркнём, что в эйнштейновском выводе диффузионное уравнение (3) получается как асимптотика интегрального уравнения (2) при $t \rightarrow \infty$, тогда как выполнение условий (5) обеспечивает эквивалентность уравнений (3) и (4) *при всех временах*. Такой процесс называют *винеровским* (часто под броуновским движением понимают именно винеровский процесс).

Траекториями винеровского процесса являются непрерывные, нигде не дифференцируемые линии. С каким бы увеличением мы ни разглядывали такую траекторию, мы всё время будем видеть бесконечно изломанную, без единого плавного участка линию. Длина участка такой траектории между двумя любыми, даже близко расположеными на ней точками, бесконечна, и, следовательно, бесконечна скорость движения такой частицы. Невозможно представить себе ни магнитную линию с такими свойствами, ни траекторию реальной физической частицы, обладающей зарядом и массой. Но об этом обычно не задумываются: знакомый со студенческой скамьи "старый добрый" гауссиан внушает уверенность...

2.2. Несколько замечаний к выводу Эйнштейна

Для более ясного понимания эйнштейновской модели блужданий представляются уместными следующие замечания. Во-первых, не отождествив $\varphi(\Delta)$ с $f(\Delta, \tau)$, Эйнштейн оставил возможность введения в свою модель дополнительной физической информации (например, скорости свободного движения частиц). Если же положить $\varphi(\Delta) = f(\Delta, \tau)$, как это сделано в уравнении (4), но ослабить требования, удержав только (5а) и сняв ограничение (5б), то мы придём к более богатому семейству случайных процессов, называемых *движением Леви* (в англоязычной литературе *Levy motion*, по аналогии с *Brownian motion*). Это семейство занимает центральное место в теории вероятностей, благодаря тому что включает в себя все те и только те распределения, которые являются предельными в схеме суммирования независимых, одинаково распределённых случайных величин. Именно этот факт объясняет столь широкое распространение диффузионной модели в физике: от атомных до космических масштабов, и он же заставляет обратить внимание на остальные члены семейства, порождаемого уравнением (4) при условии (5а). В работе [25] показано, что задача (4), (5а) тождественным образом преобразуется в уравнение с дробными производными без дополнительных предположений и каких бы то ни было упрощений.

3*

Во-вторых, в окончательном уравнении оставлен только первый член разложения в правой части, хотя можно было бы оставить и другие. Написав "до бесконечности", Эйнштейн предполагает функцию бесконечно дифференцируемой, что, конечно, излишне. В данном случае достаточно предположить существование только второй производной и воспользоваться *формулой Тейлора*, содержащей саму функцию в точке x , слагаемые с первой и второй производными и остаточный член, скажем, в интегральной форме:

$$f(x + \Delta) = f(x) + \Delta f'(x) + \frac{\Delta^2}{2!} f''(x) + \\ + \frac{1}{2!} \int_0^{\Delta} (\Delta - \xi)^2 f^{(3)}(x + \xi) d\xi.$$

Это точная формула, тогда как уравнение Эйнштейна выведено на основе её усечённого варианта (с отброшенным остаточным членом). В принципе, ничто не мешает продолжить это разложение, несколько усилив требования к функции, например потребовав существования производной 4-го порядка. Из физических соображений такое уравнение,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + D_4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4},$$

было выведено Барнеттом [26], что положило начало серии работ в направлении, позднее обозначенном термином "обобщённая гидродинамика".

Учитывая, что речь всё время идёт о симметричной диффузии, можно перейти в этих уравнениях к производным по абсолютной координате:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 f}{\partial |x|^2} + \dots + D_{2n} \frac{\partial^{2n} f}{\partial |x|^{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Проблему сходимости несобственных интегралов

$$\int_A^B \Delta^{2n} \varphi(\Delta) d\Delta \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{2n} \varphi(\Delta) d\Delta, \quad A \rightarrow -\infty, \quad B \rightarrow \infty,$$

Эйнштейн деликатно обходит, положив $\varphi(\Delta) = 0$ за пределами узкого симметричного интервала вблизи нуля, тогда все моменты сходятся. С уравнением (4) это уже не пройдёт: мы не можем наложить такое условие на *решение* задачи, которым теперь является функция $\varphi(\Delta) \equiv f(\Delta, \tau)$. Однако если дополнить условие марковости процесса требованиями, чтобы процесс был автомодельным, а его дисперсия являлась конечной, то мы с необходимостью приходим к уравнению нормальной диффузии (3) [25]. Следующий (четвёртый) момент может быть бесконечным, это неважно, мы не используем бесконечный ряд, а берём только его два первых члена с конечными коэффициентами, а всё остальное включает в себя остаточный член, который мы не разлагаем, поэтому высшие коэффициенты просто не появляются, тогда как сам остаточный член конечен.

Теперь понятнее, как действовать в случае, если уже коэффициент при второй производной (т.е. коэффициент диффузии) расходится: необходимо оборвать ряд на производной дробного порядка $\alpha < 2$, такого, чтобы соответствующий момент сходился. В этом случае

Эйнштейн пришёл бы к уравнению

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D_\alpha \frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial |x|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Появившийся в правой части дробный оператор можно рассматривать как одномерную версию дробного оператора Лапласа:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} = \frac{\partial^{2\alpha/2}}{\partial (x^2)^{\alpha/2}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{\alpha/2},$$

к обсуждению которого мы ещё вернёмся.

И последнее замечание: Эйнштейн не был вполне удовлетворён этим своим детищем, которое явно противоречило важнейшему принципу его теории относительности: диффузионный пакет, будучи сконцентрированным в начальный момент в начале координат, в следующее мгновение уже заполняет собой всё пространство, включая самые отдалённые его области. Практически это не доставляло неудобств ввиду исчезающей малой вероятности пребывания там диффузионного пакета, но концептуально Эйнштейн не мог не испытывать некоторого, как сейчас стало модным говорить, дискомфорта. Однако развивать далее эту тему он не стал.

2.3. Тurbulentная диффузия

Как мы видели в разделах 2.1, 2.2, дробно-дифференциальные идеи аномальной диффузии, можно сказать, коренятся в том самом уравнении, которое вывел Эйнштейн для броуновского движения. Потребовалось, однако, полвека, чтобы этот факт был осознан, и связано это было с очень популярной в 1950-х годах тематикой — природой турбулентности, точнее с турбулентной диффузией (ТД). Специфика ТД обусловлена действием на частицу вихрей разных размеров, существующих в турбулентной среде. Расстояние между двумя пробными частицами может существенно изменяться за короткое время только под действием вихря, размеры которого сравнимы с этим расстоянием. Именно так обстоит дело в турбулентной среде, которая заполнена вихрями самых разных размеров. Чем дальше друг от друга находятся частицы, тем больше размеры вихрей, разносящих их друг от друга, и тем с большей скоростью возрастает расстояние l между ними. В рамках классической теории диффузии такой эффект может быть достигнут введением зависимости коэффициента диффузии D от относительных координат, т.е. от расстояния: $D = D(l)$. Этот подход был использован Ричарсоном, записавшим уравнение ТД для плотности распределения $p(l, t)$ случайного расстояния между двумя частицами примеси, находящимися в момент $t = 0$ в одной точке, в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial l} \left(D(l) \frac{\partial p}{\partial l} \right)$$

с коэффициентом диффузии

$$D(l) \propto l^{4/3},$$

соответствующим увеличению ширины диффузионного пакета по закону $\propto t^{3/2}$, существенно отличающемуся от нормального диффузионного закона $t^{1/2}$.

Ричардсоновский "закон четырёх третей" был теоретически обоснован в работах Колмогорова [27, 28] и Обухова [29, 30] на основе гипотезы о самоподобии локально изотропной турбулентности, определяемой единственным размерным параметром — скоростью диссипации турбулентной энергии ε . Из соображений размерности следует, что

$$D(l) = c\varepsilon^{2/3}l^{4/3}.$$

Качественно эти результаты согласовались с экспериментом, однако тот факт, что в однородной в среднем среде коэффициент диффузии должен зависеть от пространственной переменной, порождал определённые неудобства. Способ совместить ускоренный характер ТД с постоянством коэффициента, характеризующего среду, предложил А.С. Монин в работе [31], с которой, можно сказать, началось проникновение негауссовых устойчивых распределений и уравнений с производными дробного порядка в теорию ТД (сама же эта терминология была введена в теорию турбулентной диффузии десятилетием позднее [32]). Рассматривая диффузию облака частиц примеси в системе координат, связанной с центром облака, Монин выразил распределение концентрации $f(\mathbf{r}, t)$ в момент времени t через начальное распределение $f(\mathbf{r}, 0)$ с помощью зависящего от времени линейного оператора $A(t)$:

$$f(\mathbf{r}, t) = A(t)f(\mathbf{r}, 0), \quad t > 0.$$

В модели стационарной однородной локально изотропной турбулентности оператор $A(t)$ можно считать инвариантным относительно сдвигов и вращений системы координат и зависящим от единственного (если пренебречь молекулярной диффузией) размерного параметра ε . При преобразовании Фурье оператор $A(t)$ переходит в функцию $a(k, t, \varepsilon)$ модуля $k \equiv |\mathbf{k}|$ волнового вектора \mathbf{k} . Ссылаясь на соображения размерности, Монин представляет эту величину как функцию аргумента $\varepsilon^{1/3}k^{2/3}t$, так что

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = a(\varepsilon^{1/3}k^{2/3}t)\tilde{f}(\mathbf{k}, 0).$$

Гипотеза Монина, как пишут Монин и Яглом во втором томе *Статистической гидромеханики* [32], состоит в предположении, что операторы $A(t)$ образуют полугруппу,

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_1 + t_2),$$

и, следовательно,

$$a(\varepsilon^{1/3}k^{2/3}t_1)a(\varepsilon^{1/3}k^{2/3}t_2) = a(\varepsilon^{1/3}k^{2/3}(t_1 + t_2)). \quad (6)$$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$a(\varepsilon^{1/3}k^{2/3}t) = \exp(-c\varepsilon^{1/3}k^{2/3}t),$$

а трансформанта Фурье искомой концентрации

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \exp(-c\varepsilon^{1/3}k^{2/3}t)\tilde{f}(\mathbf{k}, 0)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{f}(\mathbf{k}, t)}{dt} = -c\varepsilon^{1/3}k^{2/3}\tilde{f}(\mathbf{k}, t).$$

Воспользовавшись интерпретацией множителя $k^{2/3}$, данной Мониным и Ягломом ("фурье-образ оператора Лапласа в степени $1/3$ " [32, с. 510]), приходим к уравнению

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -D_{2/3}(-\Delta)^{1/3} f(\mathbf{r}, t), \quad D_{2/3} = ce^{1/3},$$

являющемуся представителем целого семейства уравнений

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -D_\alpha(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{r}, t), \quad 0 < \alpha < 2.$$

Разумеется, эти уравнения обретают смысл лишь после определения операторов с дробным показателем α . Существует несколько способов сделать это, простейший из способов определяет их действие через преобразование Фурье дифференцируемых функций:

$$\begin{aligned} \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} &= |\mathbf{k}|^\alpha \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \\ &= |\mathbf{k}|^\alpha \tilde{f}(\mathbf{k}, t). \end{aligned}$$

Обратное преобразование (для d -мерного случая) приводит к следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t) &= \frac{2^\alpha \Gamma((\alpha+d)/2)}{\pi^{d/2} \Gamma(-\alpha/2)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d+\alpha}} d\mathbf{x}', \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in (0, 1), \end{aligned}$$

где $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция. При $\alpha \in (1, 2)$ разность в числителе заменяется разностью второго порядка. Решения этих уравнений выражаются через *изотропные устойчивые плотности* (ИУП)

$$\Psi_3^{(\alpha)}(r) = \Psi_3^{(\alpha)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \exp(-|\mathbf{k}|^\alpha) d\mathbf{k},$$

$0 < \alpha \leq 2$:

$$f(\mathbf{r}, t) = [D_\alpha t]^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha)}(r[D_\alpha t]^{-1/\alpha}).$$

При $\alpha = 2$ это выражение представляет плотность нормального распределения, соответствующего броуновскому движению, остальные значения параметра α относятся к движению Леви. Зафиксировав значение аргумента $r[D_\alpha t]^{-1/\alpha} = \xi$, видим, что ширина этого распределения возрастает со временем пропорционально $t^{1/\alpha}$, т.е. при $\alpha < 2$ — быстрее, чем в случае нормальной диффузии, что и оправдывает введение термина "супердиффузия".

Дальнейшее развитие дробно-дифференциального подхода к проблеме описания турбулентности читатель может проследить по монографиям [33–35] и обзорам [36, 37].

2.4. Перколяция

В неоднородных средах с нерегулярной пористой, крупнозернистой, извилистой структурой может наблюдаться замедленная диффузия (*субдиффузия*) жидкости (*просачивание, перколяция*). Существует несколько моделей такого процесса, приводящих к дробно-дифференциальным уравнениям [33]. В качестве одной из них представляется периодическая решётка, каждый узел которой с определённой вероятностью может быть занят или свободен. Совокупность соседних свободных узлов обра-

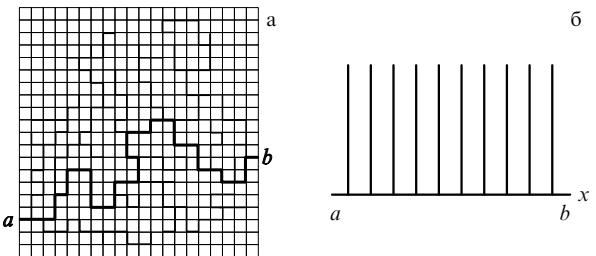


Рис. 1. Перколяционный процесс (а) и его гребешковая модель (б).

зует кластер. Линии (пути), соединяющие эти узлы, могут быть как проводящими (концы которых выходят на поверхность кластера), так и тупиковыми. Возьмём одну проводящую линию и вытянем её вдоль прямой, аккуратно направив исходящие из её узлов другие линии перпендикулярно к ней. Последние могут в свою очередь ветвиться или, наоборот, обрываться; не вдаваясь в дальнейшие детали, будем считать их для простоты неветвящимися бесконечными линиями. Так мы получим "гребешок" (рис. 1).

Теперь проследим за частицей жидкости (материальной точкой), входящей на основную линию: надо задать закон её движения вдоль линии: будем считать, что это обычная диффузия. Дойдя до первого узла, частица переходит на боковую ветвь. По законам диффузии, даже в случае бесконечной (точнее, полубесконечной) ветви частица обязательно (т.е. с вероятностью 1) вернётся, но распределение времени возвращения имеет степенной хвост, $P(T > t) \propto (t/\tau_0)^{-\beta}$ с показателем $\beta = 1/2$ и характерным временем τ_0 . Следя только за x -координатой, мы можем сказать, что в этой точке она остановилась на некоторое время (оказалась захваченной ловушкой), затем продолжила диффузию вдоль оси x с коэффициентом D_x , потом вновь попала в ту же или соседнюю ловушку и провела в ней уже другое время и т.д. В пределе малых расстояний между ловушками, таких, что

$$\frac{\tau_1 D_x}{\tau_0^\beta} \rightarrow D > 0,$$

где τ_1 — среднее время диффузии в промежутках между попаданиями в ловушки, этот процесс описывается интегральным уравнением

$$f(x, t) = \delta(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} D \Delta f(x, \tau) d\tau, \quad \beta = \frac{1}{2},$$

ядро которого и отражает задержку в диффузии x -координаты, вызванную пребыванием частицы вне этой оси.

Напомним формулу Коши, представляющую n -кратный интеграл $I^n[f(t)]$ через однократный,

$$I^n[f(t)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и имеющую аналитическое продолжение на дробные (и даже комплексные) значения показателя n :

$$I^\beta[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \quad \beta > 0.$$

Введя операцию дробного дифференцирования Римана – Лиувилля²

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} f(t) = \frac{\partial}{\partial t} I^{1-\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}, \quad 0 < \beta < 1,$$

и применив её к записанному выше интегральному уравнению, получим дробно-дифференциальное уравнение субдиффузии

$$\frac{\partial^\beta f(x, t)}{\partial t^\beta} = D\Delta f(x, t) + \delta(x) \delta_\beta(t),$$

где $\delta_\beta(t) = t^{-\beta}/\Gamma(1-\beta)$.

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, "дробная дельта-функция" называется так потому, что она является продолжением известного определения дельта-функции как производной (в обобщённом смысле) от единичной ступенчатой функции

$$1_+(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

а именно

$$\delta_\beta(t) = \frac{d^\beta 1_+(t)}{dt^\beta}.$$

Во-вторых, решение уравнения субдиффузии имеет смысл плотности вероятности и $\delta_\beta(t)$ обеспечивает постоянство интеграла от решения по x (нормировку). Наконец, дробный характер производной является здесь следствием бесконечной длины боковых ветвей. Если ограничить их длину, то вместо дробной производной в уравнении для x -диффузии мы снова будем иметь первую производную по времени, т.е. получим обычное диффузионное уравнение (с уменьшенным, правда, коэффициентом диффузии).

Частная, на первый взгляд, задача о просачивании жидкости в пористой среде привлекла внимание специалистов из разных областей (в том числе исследующих физику космических лучей), благодаря тому что процесс просачивания оказался *критическим*. Признаком этого важного свойства является существование некоторого числа — *порога перколяции* — наименьшей плотности свободных узлов решётки, при значениях плотности выше порога перколяции жидкость растекается по всей бесконечной решётке, а при меньшей плотности распространение жидкости ограничено конечной областью среды. При плотности, близкой к пороговой, перколяция происходит по фрактальному множеству и этот процесс управляет исключительно законами критичности, вне зависимости от микроскопических свойств среды [34, 38]. Глубокая связь между перколяционной моделью и космической электродинамикой (многомасштабное взаимодействие полей и токов в дальнем хвосте магнитосферы Земли, процессы самоорганизации в замагни-

ченной плазме, эволюция крупномасштабных магнитных полей в фотосфере Солнца и межпланетном пространстве, построение самосогласованной модели турбулентного токового слоя) продемонстрирована в замечательном обзоре Зелёного и Милованова [39].

2.5. Комбинированное уравнение и его интерпретация

Рассмотрим теперь комбинированное уравнение, содержащее дробные производные как по координатам (дробный лапласиан), так и по времени:

$$\frac{\partial^\beta G}{\partial t^\beta} = -D_\alpha(-\Delta)^\alpha/2 G(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r}) \delta_\beta(t), \quad \alpha \in (0, 2], \quad \beta \in (0, 1]. \quad (7)$$

Отметим, что размерность каждого слагаемого в этом уравнении $L^{-3} T^{-\beta}$, а коэффициент D_α , стоящий на месте коэффициента диффузии, имеющий размерность $L^\alpha T^{-\beta}$, является таковым, строго говоря, только при $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Обычно уравнение (7) выводится из схемы случайных блужданий (см., например, [40]). Чтобы "прочитать" физическое содержание уже готового уравнения, надо пройти обратным путём. С этой целью представим (7) в переменных Фурье–Лапласа:

$$(\lambda^\beta + D_\alpha |\mathbf{k}|^\alpha) \tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = \lambda^{\beta-1}. \quad (8)$$

Правую часть (8) легко понять и без дополнительных вычислений. Действительно, при $\mathbf{k} = 0$ это уравнение принимает вид

$$\lambda^\beta \tilde{G}(0, \lambda) = \lambda^{\beta-1},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}(0, \lambda) &= \int_0^\infty \exp(-\lambda t) \left[\int G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right] dt = \\ &= \int_0^\infty \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

(интеграл по пространству от плотности пространственного распределения, содержащийся в квадратных скобках, равен единице, согласно условиям нормировки). Умножив теперь обе части уравнения (8) на положительную постоянную B и обозначив BD_α через C , преобразуем оператор в левой части:

$$\begin{aligned} B\lambda^\beta + C|\mathbf{k}|^\alpha &= 1 - (1 - B\lambda^\beta - C|\mathbf{k}|^\alpha) = \\ &= 1 - (1 - B\lambda^\beta)(1 - C|\mathbf{k}|^\alpha) + BC\lambda^\beta|\mathbf{k}|^\alpha. \end{aligned}$$

При $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$

$$B\lambda^\beta + C|\mathbf{k}|^\alpha \sim 1 - (1 - B\lambda^\beta)(1 - C|\mathbf{k}|^\alpha),$$

и подстановка последнего выражения в уравнение (8),

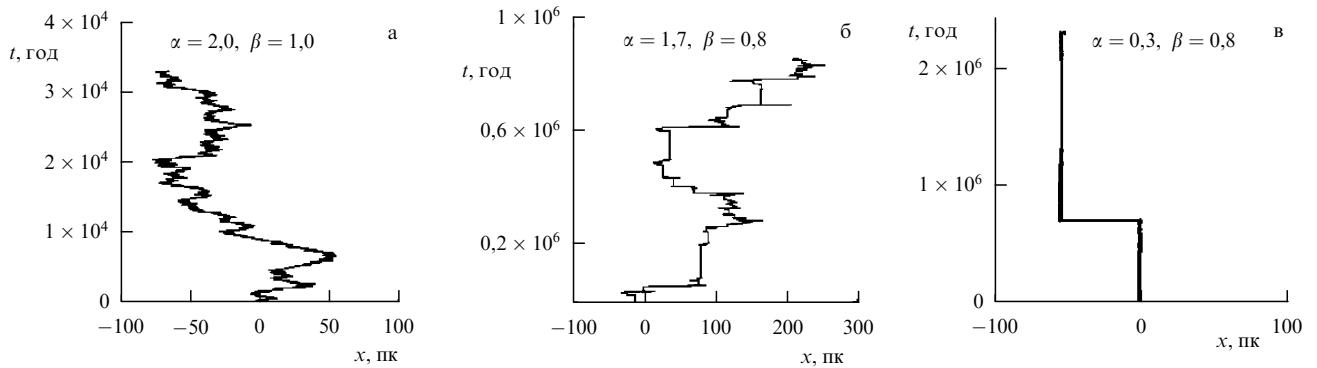
$$[1 - (1 - B\lambda^\beta)(1 - C|\mathbf{k}|^\alpha)] \tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = B\lambda^{\beta-1},$$

приводит его к виду

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = (1 - B\lambda^\beta)(1 - C|\mathbf{k}|^\alpha) \tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) + B\lambda^{\beta-1}. \quad (9)$$

Содержимое двух круглых скобок в первом члене правой части можно трактовать как асимптотические выраже-

² При $\beta = 1$ в формулах для производных возникает неопределенность, но доопределение по непрерывности позволяет включить в рассматриваемый интервал дробного параметра и эту крайнюю точку. Переход в последующие интервалы единичной длины осуществляется дополнительным дифференцированием целой кратности [33].

Рис. 2. Типичные реализации $x-t$ -траекторий частиц в трёх рассматриваемых моделях.

ния для характеристических функций временной и пространственной плотностей вероятностей $q(t)$ и $p(\mathbf{r})$:

$$\hat{q}(\lambda) \equiv \int_0^\infty \exp(-\lambda t) q(t) dt \sim 1 - B\lambda^\beta, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad \beta \leq 1, \quad (10)$$

и при изотропном распределении $p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = p_R(r) dr d\Omega / 4\pi$,

$$\tilde{p}(\mathbf{k}) \equiv \int \exp(-ikr) p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \sim 1 - C|\mathbf{k}|^\alpha, \quad \mathbf{k} \rightarrow 0, \quad \alpha \leq 2. \quad (11)$$

Заметим также, что

$$B\lambda^{\beta-1} \sim \tilde{Q}(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) Q(t) dt, \quad Q(t) = \int_t^\infty q(t) dt. \quad (12)$$

Заменяя в уравнении (9) содержимое круглых скобок и свободный член левыми частями выражений (10)–(12),

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = \tilde{p}(\mathbf{k}) \hat{q}(\lambda) \tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) + \tilde{Q}(\lambda),$$

и проводя обратное преобразование Фурье–Лапласа, приходим к интегральному уравнению с факторизованным ядром:

$$G(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty dt' p(\mathbf{r}') q(t') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') + Q(t) \delta(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Конечно, переходные плотности $p(\mathbf{r})$ и $q(t)$ не определяются однозначно асимптотиками своих трансформант (10), (11), но, во-первых, как плотности вероятностей, они являются неотрицательными и удовлетворяют условиям нормировки $\int_{R^3} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1$, $\int_0^\infty q(t) dt = 1$, а во-вторых, тауберовы теоремы, связывающие асимптотическое поведение трансформант в окрестности нуля с далёкими асимптотиками оригиналов,

$$1 - \tilde{p}(\mathbf{k}) \propto |\mathbf{k}|^\alpha, \quad |\mathbf{k}| \rightarrow 0 \Leftrightarrow p(\mathbf{r}) \propto |\mathbf{r}|^{-\alpha-3}, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \\ 1 - \hat{q}(\lambda) \propto \lambda^\beta, \quad \lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow q(t) \propto t^{-\beta-1}, \quad t \rightarrow \infty,$$

определяют степенной характер поведения переходных плотностей при больших значениях пространственных и временных аргументов³.

Физический смысл *допредельного* (по отношению к дробно-дифференциальному) уравнения (13) уже более

ясен. Действительно, представляя решение этого интегрального уравнения в виде ряда Неймана,

$$G(\mathbf{r}, t) = Q(t) \delta(\mathbf{r}) + \int_0^t dt' Q(t - t') p(\mathbf{r}) q(t') + \dots,$$

мы видим, что вероятность обнаружить в момент измерения t частицу в точке \mathbf{r} складывается из вероятности постоянного пребывания частицы в исходной точке без перемещений (первый член) и вероятности того, что в один из промежуточных моментов $t' \in (0, t)$ частица совершил мгновенный перескок из точки рождения $\mathbf{r}_0 = 0$ в точку наблюдения \mathbf{r} и останется в ней до момента наблюдения t ; следующий член дал бы вероятность обнаружения частицы, совершившей два мгновенных перелёта, разделённых между собой случайнм временем интервалом с плотностью $q(t)$ и т.д. Длины этих перелётов случайны, взаимно независимы и никак не связаны с временами задержки частицы в состояниях покоя (ловушках). Этот скачкообразный процесс носит название *случайное блуждание с непрерывным временем* (СБНВ) (Continuous Time Random Walk — CTRW). Если выполнить преобразование Фурье–Лапласа уравнения (13), не налагая никаких условий на переходные вероятности p и q , получим известное выражение [41]

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{\hat{Q}(\lambda)}{1 - \tilde{p}(\mathbf{k}) \hat{q}(\lambda)} = \frac{1 - \hat{q}(\lambda)}{\lambda(1 - \tilde{p}(\mathbf{k}) \hat{q}(\lambda))}. \quad (14)$$

При $\alpha = 2, \beta = 1$ уравнение (7) описывает движение Броуна (рис. 2a), а при $\alpha < 2, \beta = 1$ — движение Леви, отличающееся от броуновского многочисленными разрывами траектории вдоль оси x (на что указывают горизонтальные отрезки, отражающие мгновенные перелёты на конечные расстояния). До тех пор пока производная по x имела целый (второй) порядок, разрывов не было (существовали только изломы), порядок производной стал дробным — появились разрывы. Распределение скачков координаты в этих разрывах степенное, поэтому разрывы видны на разных масштабах. Процесс, в котором диффузионный пакет расширяется быстрее, чем в нормальном случае, т.е. пропорционально t^γ с $\gamma > 1/2$, принадлежит классу *супердиффузионных*.

Превращение первой производной ($\beta = 1$) по времени в дробную ($\beta < 1$) наделяет траекторию разрывами вдоль оси времени (частица замирает: время идёт, а она не движется). При $\alpha < 1, \beta < 1$ вместо траектории мы увидим уже сгустки точек — кластеры, разделённые

³ Тауберовы теоремы хорошо представлены во втором томе Феллера [42] (см. также обзор [25]).

между собой областями перелётов (горизонтальные отрезки) и пребывания в ловушках (вертикальные отрезки) (рис. 2б, в) [25].

2.6. Дробно-устойчивая статистика

Решение уравнения (7) автомодельным образом выражается через специальные функции, названные нами *изотропными дробно-устойчивыми плотностями* (ИДУП) и исследованные нами в серии работ (см. статью [40] и приведённые там ссылки). Мы обозначаем ИДУП символом $\Psi_d^{(\alpha, \beta)}(r)$ (d — размерность пространства), так что

$$G(\mathbf{x}, t) = [Dt^\beta]^{-3/\alpha} \Psi_d^{(\alpha, \beta)}(|\mathbf{x}|[Dt^\beta]^{-1/\alpha}), \quad (15)$$

$$0 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

ИДУП не имеют общего явного выражения в элементарных функциях, а определяются характеристической функцией:

$$\tilde{\Psi}_d^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{k}) = \int_0^\infty \tilde{\Psi}_d^{(\alpha)}(|\mathbf{k}| \tau^{-\beta/\alpha}) g_+(\tau; \beta) d\tau, \quad (16)$$

где $g_+(\tau; \beta)$ — односторонняя устойчивая плотность, определяемая трансформантой Лапласа

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda \tau) g_+(\tau; \beta) d\tau = \exp(-\lambda^\beta).$$

Поскольку $g_+(\tau; 1) = \delta(\tau - 1)$, класс ИДУП включает в себя как подмножество семейство

$$\tilde{\Psi}_d^{(\alpha)}(\mathbf{k}) \equiv \tilde{\Psi}_d^{(\alpha, 1)}(\mathbf{k}) = \exp(-|\mathbf{k}|^\alpha), \quad (17)$$

в частности

$$\tilde{\Psi}_d^{(2)}(\mathbf{k}) \equiv \tilde{\Psi}_d^{(2, 1)}(\mathbf{k}) = \exp(-|\mathbf{k}|^2). \quad (18)$$

Для того чтобы яснее представить место дробно-устойчивых законов в иерархии вероятностных распределений, пройдём снизу вверх по формулам (16)–(18). Формула (18) — характеристическая функция нормаль-

ного (гауссова) распределения с дисперсией 2 — характеризует предельное распределение должным образом нормированных сумм детерминированного (неслучайного) числа независимых, одинаково распределённых случайных векторов с конечным вторым моментом. Формула (17) относится к аналогичной сумме векторов с бесконечным вторым моментом, но со степенным хвостом распределения, $P(|\mathbf{R}| > r) \propto r^{-\alpha}$; соответствующие предельные распределения выражаются через изотропные устойчивые плотности, отличительной чертой которых является расходимость дисперсии. Наконец, формула (16) характеризует асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение распределения суммы *случайного* числа таких слагаемых. Именно это расширение семейства устойчивых законов до дробно-устойчивых и обеспечивает представление решений дробно-дифференциальных уравнений.

Одномерные симметричные и односторонние устойчивые плотности приведены на рис. 3. При $\alpha = 2$ функции $\Psi_1^{(2)}(\xi)$ и $\Psi_3^{(2)}(\xi)$ представляют собой одномерную и трёхмерную нормальные (гауссовые) плотности с дисперсией, равной 2,

$$\Psi_1^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right), \quad -\infty < \xi < \infty,$$

$$\Psi_3^{(2)}(\xi) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right), \quad \xi > 0.$$

С уменьшением α распределения становятся всё более узкими и высокими в центральной части и в то же время всё большая доля вероятности перемещается из промежуточной области в хвосты. При $\alpha = 1$ имеем плотности распределения Коши:

$$\Psi_1^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\pi(1 + \xi^2)}, \quad -\infty < \xi < \infty,$$

$$\Psi_3^{(1)}(\xi) = \frac{1}{[\pi(1 + \xi^2)]^2}, \quad \xi > 0.$$

При других значениях α устойчивые плотности не выражаются в элементарных функциях. На больших

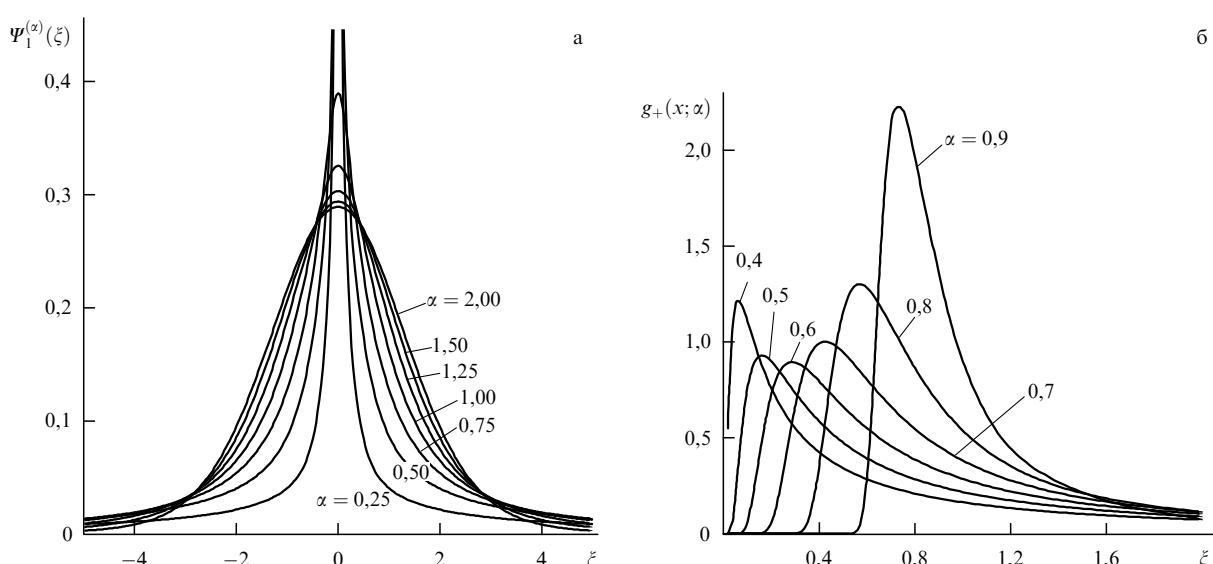


Рис. 3. Одномерные симметричные (а) и односторонние (б) устойчивые плотности.

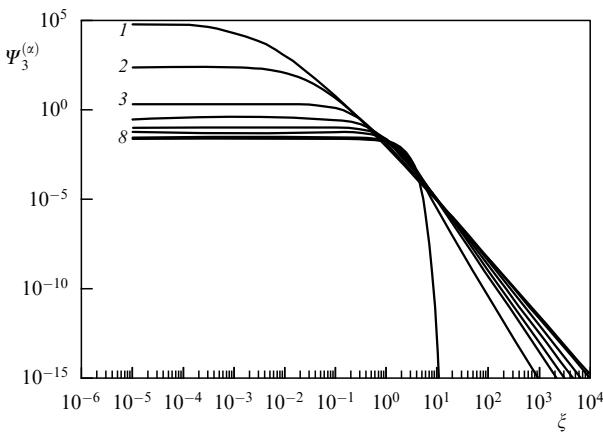


Рис. 4. Трёхмерные изотропные устойчивые плотности. Кривым 1–8 (сверху вниз) соответствуют значения $\alpha = 0,3; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,7; 2,0$.

расстояниях они убывают степенным образом,

$$\Psi_3^{(\alpha)}(\xi) \sim \frac{\alpha 2^{\alpha-1}}{\pi^{3/2}} \frac{\Gamma((\alpha+3)/2)}{\Gamma(1-\alpha/2)} \xi^{-(\alpha+3)}, \quad \xi \rightarrow \infty,$$

а в начале координат характеризуются колоколообразной вершиной со значением

$$\Psi_3^{(\alpha)}(0) = \frac{\Gamma(1+3/\alpha)}{(4\pi)^{3/2} \Gamma(1+3/2)}.$$

В двойном логарифмическом масштабе, охватывающем многие порядки, мы наблюдаем горизонтальную "полочку", сменяющуюся в правой части наклонным "пандусом" (рис. 4). Дробно-устойчивые плотности $\Psi_d^{(\alpha, \beta)}(\xi)$ сохраняют тот же тип асимптотики при $r \rightarrow \infty$, но обладают, в отличие от устойчивых, степенной особенностью и в нуле:

$$\Psi_3^{(\alpha, \beta)}(\xi) \propto \begin{cases} \xi^{-(3-\alpha)}, & \xi \rightarrow 0, \\ \xi^{-(3+\alpha)}, & \xi \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Соответственно, график в двойном логарифмическом масштабе представляется уже двумя полупрямыми с разными наклонами, плавно сопрягающимися между собой (рис. 5).

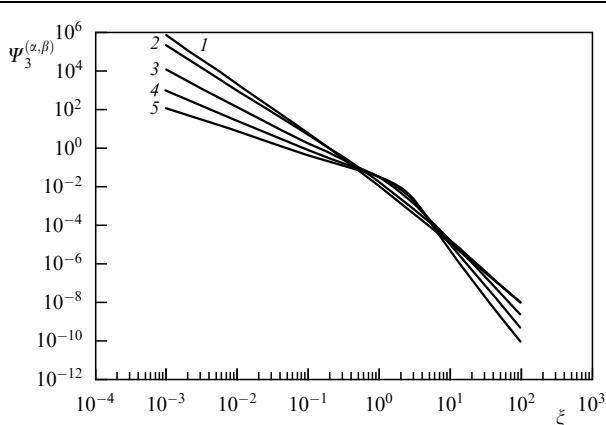


Рис. 5. Трёхмерные изотропные дробно-устойчивые плотности, $\beta = 0,8$. Кривым 1–5 соответствуют значения $\alpha = 0,3; 0,5; 1,0; 1,4; 1,7$.

К настоящему времени собрана богатая коллекция физических явлений, демонстрирующих степенные распределения (см. [33]). Мы приведём здесь пример явления, в котором наблюдается дробно-устойчивое распределение диффундирующих в турбулентной среде частиц. Речь идёт о результатах численного моделирования движения заряженных частиц в бесконечно длинном цилиндре, заполненном плазмой, находящейся под действием постоянного однородного магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра [43]. Турбулентность плазмы, возбуждаемая шумовой компонентой давления, описывалась системой магнитогидродинамических уравнений для флуктуирующих компонент давления и электростатического потенциала. Магнитное поле предполагалось фиксированным; недиффузионный характер переноса заряженных частиц в такой среде обусловлен только случайными флуктуациями электростатического потенциала, порождёнными генератором шумовой компоненты давления. Задача была сведена, таким образом, к расчёту диффузии частиц в поле случайных скоростей \mathbf{V} , которое и определило статистические свойства ансамбля случайных траекторий через уравнение

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t).$$

Конкретные детали модели и вычислительной процедуры можно найти в цитируемой работе и содержащейся в ней библиографии. Нас в данном случае интересует лишь вывод, к которому приходят авторы статьи. Проследив в ходе численного эксперимента за 25×10^3 частиц, первоначально равномерно распределённых по боковой поверхности $r = a/2$ цилиндра радиусом $r = a$, и получив их распределения по переменной $x = (r - a/2)/a$ в несколько последующих моментов времени, авторы установили следующее.

- Плотность распределения частиц по переменной x в разные моменты времени хорошо аппроксимируется автомодельной функцией $t^{-v} f(xt^{-v})$, $v = 0,66 \pm 0,20$.
- Функция $f(\xi)$ симметрична относительно $\xi = 0$, и её хвосты спадают как $|\xi|^{-\alpha-1}$, $\alpha \approx 3/4$.
- В фиксированной точке x плотность при малых временах возрастает $\sim t^\beta$, а при больших убывает по закону $t^{-\beta}$, где $\beta \approx 1/2$.

Сопоставление результатов этих расчётов (рис. 6) с нашим представлением этого распределения через дробно-устойчивую плотность

$$P(x, t) = [D_\alpha t^\beta]^{-1/\alpha} \Psi_1^{(\alpha, \beta)}(x[D_\alpha t^\beta]^{-1/\alpha}), \quad \alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2},$$

показывает вполне удовлетворительное согласие. Авторы [43] интерпретируют смысл дробно-дифференциального уравнения в рамках СБНВ-процесса, полагая, что частицы, попадающие в вихрь, могут проводить там длительное время, до того как будут выброшены из него, и в одном полёте минуют несколько вихрей, прежде чем будут захвачены следующей ловушкой.

Впечатляющее совпадение результатов моделирования с решением дробно-дифференциального уравнения не избавляет, однако, от некоторых сомнений. Средние значения пробегов с $\alpha < 1$ бесконечны, а авторы [43] сообщают о том, что моменты смещений ведут себя "супердиффузионным образом": $\langle X^n(t) \rangle \propto t^{n\beta/\alpha}$. Пространственный дробный оператор записан для бесконечной среды, хотя конечные размеры цилиндра никак не могут

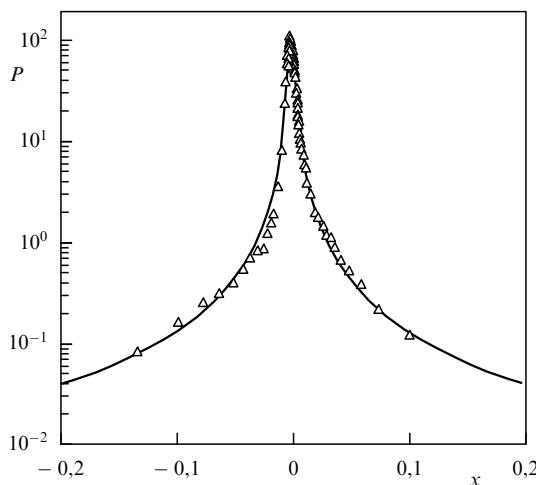


Рис. 6. Дробно-устойчивое распределение в плазме. Треугольниками показаны результаты численного моделирования [43], кривая — решение одномерного дробно-дифференциального уравнения, выраженное через ИДУП $\Psi_1^{(3/4, 1/2)}(x)$.

быть игнорированы при таком α . Предположение о бесконечно большой скорости перелётов также не совместимо с этим значением α . Наконец, турбулентность должна иметь какую-то особую структуру для того, чтобы последовательные пробеги можно было считать статистически независимыми.

Другой пример негауссовой статистики в плазме, относящийся уже к распределению скоростей, приведён в разделе 5.3.

3. Изотропная аномальная диффузия

3.1. Ловушки и пустоты

Представление Ферми о магнитных облаках, о котором говорилось во введении, со временем дополнилось понятием магнитных ловушек, в которые попадают заряженные частицы и проводят там долгое время. Вот что пишет об этом Дорман [44, с. 53]:

"Космические лучи в космосе заключены, по существу, в магнитных ловушках тех или иных масштабов, а не распространяются свободно в пространстве (за исключением гамма-квантов и нейтрино космических лучей, для которых ловушек нет). Гигантские ловушки космических лучей весьма разнообразны по своим свойствам, и поведение заряженных частиц в них существенно зависит от энергии последних. Ловушка в окрестности Земли, образованная магнитным полем, близким к дипольному, отличается высокой степенью стабильности и большим временем жизни частиц в ловушке. В то же время ловушки в окрестности хромосферных вспышек или в солнечных корпоскулярных потоках намагниченной плазмы значительно более прозрачны для частиц, и характер выхода частиц из них подобен диффузии в нерегулярных магнитных полях. Различного рода ловушки образуются также в окрестностях обычных звёзд, в частности в Солнечной системе и в оболочках сверхновых. С другой стороны, Галактика (галактический диск вместе с гало) также образует своеобразную ловушку с размерами в десятки тысяч парсек, хорошо (со временем жизни $\sim 10^7$ лет) удерживающую частицы умеренных и

высоких энергий и весьма прозрачную для частиц сверхвысоких энергий. Вполне возможно, что скопления галактик образуют ещё более гигантские ловушки для частиц сверхвысоких энергий.

(...) представляется целесообразным рассматривать в качестве космических магнитных ловушек любые магнитные образования, в которых движение и время нахождения заряженных частиц существенно отличается от таковых в свободном пространстве такого же объёма".

При таком разбросе размеров объектов невозможно себе представить их равномерное или даже просто независимое положение в пространстве. Распределение видимой материи в космосе (скопления звёзд, галактики, скопления галактик) даёт нам примеры иерархических структур, приближённо сохраняющих свой тип неоднородности при изменении масштабов в широких пределах. Математической моделью таких несглаживаемых масштабными преобразованиями неоднородностей являются *фракталы*, характеризующиеся степенными корреляциями пространственных структур. В конце XX в. сформировалось, можно сказать, целое направление в астрофизике межзвёздной среды, анализирующее структуру магнитных полей в рамках фрактальной концепции [45].

Для того чтобы прояснить связь схемы СБНВ с реальным процессом переноса космических лучей в галактическом магнитном поле, возьмём однородную (в диффузионном отношении) среду и разобьём её на кубические объёмы (ячейки) (рис. 7). Каждой частице, вошедшей в i -ю ячейку с центром в точке r_i в момент времени t и покинувшей её в момент $t + T$, припишем координату r_i , игнорируя перемещения частицы внутри самой ячейки. Спустя некоторое (случайное) время T частица перейдёт в одну из шести соседних ячеек и приписанный к частице вектор переместится из центра прежней ячейки в центр этой новой ячейки в момент пересечения разделяющей их грани. По истечении случайного времени T' частица переместится в другую соседнюю ячейку и т.д. Таким образом, огрублённая координата частицы скачкообразно движется по узлам трёхмерной решётки, застревая в каждой из них на неопределённое (случайное) время. В большом масштабе мы будем видеть блуждание, очень близкое по типу к броуновскому (каковым оно, по существу, и остается).

Однако сильное турбулентное магнитное поле отнюдь не является непременным атрибутом каждой ячейки. Значительная часть космического пространства между магнитными облаками заполнена более слабыми

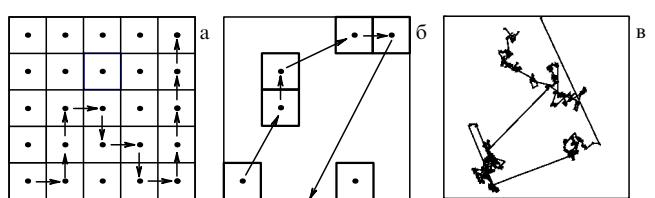


Рис. 7. Переход от броуновской диффузии в сплошной однородной среде (а) к блужданиям в среде, перемежаемой пустотами (б), и пример траектории блуждания Леви, полученной методом Монте-Карло, с $\alpha = 1,67$ (в).

и спокойными полями, магнитные силовые линии которых могут сохранять плавный ход на большом протяжении. Именно вдоль них и движутся заряженные частицы космических лучей, попадая иногда в облака-ловушки, в которых они могут надолго задерживаться, забывая своё начальное направление. Чтобы построить такую модель, уберём часть элементов (ячеек), оставив другие на своих местах. Теперь переход из одной ловушки в другую не мгновенен, как это было при пересечении грани между соседними ловушками, теперь частица пересекает "почти пустые" ячейки, проходя случайные расстояния R . Время, затраченное на эти переходы, пропорционально расстоянию, проходимому в пустом пространстве (свободному пробегу). Характер всего процесса будет зависеть от взаимного расположения оставшихся частей. Если они разбросаны равномерно (в статистическом смысле) и независимо друг от друга, как в модели Бершадского [46], то мы получим нормальный процесс с большим коэффициентом диффузии. Если они расположены фрактальным образом, так что сгустки (кластеры) и полости наблюдаются на разных масштабах (метод построения таких распределений показан в статье [47]), то частицы имеют возможность за время одного пробега уйти достаточно далеко. Результирующий процесс в последнем случае определяется порядком сходящихся моментов пробега. Назовём процесс аномальной диффузии процессом *первого рода*, если средний пробег $\langle R \rangle = \infty$, и процессом *второго рода*, если $\langle R \rangle < \infty$, а $\langle R^2 \rangle = \infty$. Ниже мы увидим существенное различие между этими двумя типами аномальной диффузии.

Нельзя, однако, не обратить внимания на то, что эти рассуждения, несмотря на их заведомо схематичный, иллюстративный, характер, качественно согласуются с картиной разбросанных случайным образом в пространстве магнитных облаков, нарисованной ещё Ферми. Количество согласия можно попытаться достичь, задавая: 1) подходящие распределения облаков, порождающие соответствующие распределения свободных пробегов частиц между ними; 2) законы взаимодействия частиц с отдельными облаками. В такой постановке задача легко укладывается в рамки стандартной теории многократного рассеяния, предусматривающей, в частности, возможность разделенного изучения процесса взаимодействия частицы с облаком (расчёт "сечений рассеяния") и собственно переноса частиц в пространстве (решение кинетического уравнения). При переходе к диффузионному пределу интегро-дифференциальное кинетическое уравнение преобразуется в дифференциальное диффузионное, а сечение взаимодействия, содержащее информацию о механизмах этого взаимодействия (включая резонансное взаимодействие, рассеяние на альвеновских и магнито-звуковых волнах и др.) трансформируется в коэффициент диффузии, который и становится теперь "держателем" этой информации.

Что касается самой кинетики, то нет особых оснований считать, что магнитные облака расположены равномерно и движутся независимо друг от друга. В этом случае было бы естественным принять экспоненциальный закон распределения пробегов между рассеяниями. Примером является идеальный газ, молекулы которого не взаимодействуют между собой, откуда и следует независимость и экспоненциальность в распределении пробега. Но измерения электромагнитного излучения заряженной компоненты космических лучей свидетель-

ствуют об обратном: межзвёздная среда отнюдь не идеальный газ, она характеризуется далёкими корреляциями степенного типа, и это может быть выражено в виде повышенной вероятности длинных пробегов частиц, совершаемых ими при пересечении пустот. Математическая модель такого процесса уже готова — это движение Леви: блуждание частицы с асимптотически степенным распределением пробегов. Пример траектории такого процесса приведён на рис. 7в. Видно, что возрастание доли длинных пробегов сопровождается и возрастанием доли коротких. Это происходит вследствие уменьшения вероятности пробегов промежуточной длины. Теперь можно говорить, что траектория состоит из групп (кластеров) коротких пробегов, разделённых длинными. Локализованные в пространстве кластеры коротких пробегов способны имитировать поведение частицы в ячейках, о которых мы говорили выше. Вместе с тем устойчивые законы, управляемые движением Леви, непосредственно и строго связаны с дробными производными [23, 25].

Всё это выглядело достаточно интригующе, что и побудило нас 13 лет назад заняться дробно-дифференциальной моделью переноса частиц в Галактике.

3.2. Первые работы с дробно-дифференциальной моделью

К числу первых работ по переносу космических лучей в Галактике, результаты которых уже вполне укладываются в рамки дробно-дифференциального подхода, можно отнести препринт Птускина и Чувильгина [14] (хотя сам этот термин авторами не употреблялся) и статью Рагот и Кирка [48]. Отложив обсуждение первой из них до раздела 4.4, обратимся ко второй.

Как отмечают авторы [48], несмотря на то что галактические магнитные поля лежат преимущественно в галактической плоскости (см. [49]), а заряженные частицы с малыми (по сравнению со свободными пробегами) ларморовскими радиусами движутся вдоль этих линий, лишь слегка диффундируя в поперечных направлениях, наблюдаемое угловое распределение частиц характеризуется удивительно высокой степенью изотропии. Причины этого авторы усматривают в крупномасштабных флюктуациях межзвёздных полей и экспоненциальном разбегании магнитных силовых линий. Важным механизмом активного перемешивания космических лучей является также их ускорение на фронтах ударных волн сверхновых, этих космических цунами, срывающих частицы со своих силовых линий и ввергающих их в хаотический режим [50–52]. Под влиянием этих и других факторов частицы, первоначально придерживающиеся "своих" силовых линий, по истечении некоторого времени корреляции теряют с ними связь и переходят в режим изотропной диффузии. Теперь турбулентный характер межзвёздной среды, проявляющийся в перемежаемости слабонерегулярных магнитных полей случайно разбросанными островами (облачами, областями) сильных флюктуаций, оказывается лишь на распределениях пробегов и времён пребывания частиц в разных областях. Приняв в качестве обобщения стандартной диффузионной модели модель СБНВ со степенными распределениями пробегов и времён пребывания в ловушках, соответствующими (10), (11), Рагот и Кирк записали средний квадрат результирующего распределения в момент наблюдения t в

виде

$$\int |\mathbf{r}|^2 G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d\lambda \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{r} |\mathbf{r}|^2 \exp(\lambda t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) \tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda), \quad (19)$$

где

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{B\lambda^{\beta-1}}{B\lambda^\beta + C|\mathbf{k}|^\alpha} \quad (20)$$

(в наших обозначениях). Последняя формула согласуется с выражением (8), представляющим собой дробно-дифференциальное уравнение (7) в переменных Фурье–Лапласа. Мотивируя выбор представлений (10), (11), авторы ссылаются на существование "островков стабильности" (ловушек) в плазме, захватывающих частицы на длительное время, что замедляет диффузионный процесс [52], и на свойство силовых линий совершать быстрые (по сравнению с диффузионными) и далёкие смещения ("полёты"), сохраняя при этом своё направление [8, 53]. Конкуренцию между этими двумя процессами и отражает получающееся распределение.

Два замечания напрашиваются к работе [48]⁴. Во-первых, выражение (19) не имеет смысла при $\alpha \neq 2$, поскольку интеграл расходится, и для ширины пакета следует использовать другую характеристику. Впрочем, далее авторы используют лишь $\alpha = 2$, так что в этом отношении претензий к ним нет. Второе замечание касается пределов изменения параметра β (в их работе он обозначен через α). Рагот и Кирк решали задачу о синхротронном излучении электронов при $\beta = 0,5; 1,0; 1,5$, особо подчеркнув, что они, в отличие от авторов работ [14–16], расширили интервал значений параметра β , выйдя в область $\beta > 1$, и это расширение можно считать переходом от субдиффузии к супердиффузии. На первый взгляд, такая интерпретация весьма ожидаема: $\beta < 1$ соответствует субдиффузии, а $\beta = 1$ — нормальной диффузии, так что $\beta > 1$ должно соответствовать супердиффузии, и авторы не усомнились в этом. Между тем повод усомниться был: достаточно взглянуть внимательнее на формулу (14) статьи [48], имеющую вид

$$q(t) \sim \frac{1}{\tau} \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\beta-1}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Очевидно, что функция с такой асимптотикой никак не может служить плотностью вероятности при $\beta > 1$ — она отрицательна ($\Gamma(1-\beta) < 0$). Дело, впрочем, не в степенной асимптотике функции $q(t)$ — ничто не мешает выбрать её, скажем, в виде

$$q(t) \sim \frac{\beta'}{\tau} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\beta'-1}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (22)$$

где β' — любое положительное число, а в том, что формула (21) явилась следствием разложения (10), спрашивалого лишь при $\beta' = \beta \leq 1$. Если $1 < \beta' \leq 2$, то вместо (10) имеет место разложение

$$\tilde{q}(\lambda) \sim 1 - \langle T \rangle \lambda + B' \lambda^{\beta'}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

⁴ Работа достаточно давняя, и не было бы необходимости здесь останавливаться на некоторых её некорректностях, если бы они не повторялись в других, более поздних, работах.

При малых λ , отвечающих за далёкие времена, член с $\lambda^{\beta'}$ асимптотически мал по сравнению с линейным и он может быть опущен. Таким образом, при $\beta' > 1$ и $\alpha = 2$ мы получаем (и Рагот с Кирком должны были получить) нормальную диффузию, а вовсе не супердиффузию⁵. Последняя получится лишь при $\alpha < 2\beta$. Однако может возникнуть вопрос: как обстоит дело с $\alpha > 1$? Не должен ли и в этом случае в дополнение к лапласиану возникнуть член, пропорциональный градиенту? Верно, должен, но при изотропной диффузии $\langle \mathbf{R} \rangle = 0$ и такой член благополучно исчезает. Продолжительность интервала T не может быть отрицательной, поэтому, полагая $\langle T \rangle = 0$, мы автоматически полагаем $T = 0$, т.е. избавляемся от ловушек. Поскольку скорость частицы бесконечна, в отсутствие ловушек частица сразу улетает в бесконечность и никакой развёртки процесса во времени мы не наблюдаем.

Если по каким-то причинам хочется увидеть в уравнении дробную производную по времени порядка $\beta \in (1, 2)$, то её, как следует из предыдущего разложения, надо вводить вместе с первой производной:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial^\beta G(x, t)}{\partial t^\beta} + C \Delta_x^{\alpha/2} G(x, t) = \\ = \langle T \rangle \delta(t) \delta(x) + B \delta_\beta(t) \delta(x), \quad 1 < \beta < 2. \end{aligned}$$

Теперь всё в порядке. Необходимо только иметь в виду, что долговременную асимптотику решения уже будет определять уравнение с производной по времени младшего порядка, т.е. асимптотическое решение по-прежнему будет характеризоваться индексом $\beta = 1$.

Наша первая работа, выполненная в рамках дробно-дифференциальной модели [19], была связана с обсуждением причин укручения (излома) в энергетическом спектре первичного космического излучения при $E \sim 3 \times 10^{15}$ эВ. Дробно-дифференциальный характер диффузионного уравнения был обоснован следующим образом.

Основываясь на обычном диффузионном уравнении

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \Delta N(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t),$$

указанный излом ("колено") связывают с уменьшением эффективности удержания частиц высоких энергий в Галактике, что в свою очередь предполагает большое время жизни (10^7 – 10^8 лет) протон-ядерной компоненты в системе и наличие удалённых источников [6]. Однако замена диффузионного уравнения супердиффузионным с дробным лапласианом

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -D_\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} N(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t) \quad (23)$$

показала наличие укручения спектра и без специального предположения об утечке частиц, если в качестве источников частиц рассматривать взрывы ближайших к Солнечной системе сверхновых. Причиной излома в данном случае оказывается дробный лапласиан, обусловленный степенным распределением пробегов, которое в

⁵ Тип аномальной диффузии мы определяем по показателю $\gamma = \beta/\alpha$ в законе расширения диффузионного пакета $\Delta \propto t^\gamma$: субдиффузия при $\gamma < 1/2$ и супердиффузия при $\gamma > 1/2$. Процесс с $\gamma = 1/2, \alpha \neq 2$ лучше называть *квазинормальной диффузией*, поскольку форма диффузионного пакета в этом случае отличается от нормальной.

свою очередь можно интерпретировать как результат усреднения экспоненциального распределения пробегов по разномасштабным (фрактальным) флуктуациям межзвёздного магнитного поля (см., например, [54, 55]).

Уравнение (23) для описания переноса космических лучей введено нами в [19, 20] как предел скачкообразного процесса в трёхмерном пространстве, описываемого интегро-дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial s} + \sigma f_\epsilon(\mathbf{r}, s) = \sigma \int f_\epsilon(\mathbf{r}', s) W\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\epsilon}\right) \frac{d\mathbf{r}'}{\epsilon^3} + S_\epsilon(\mathbf{r}, t),$$

где ϵ — служебный параметр, устремление которого к нулю обеспечивает (как и в нормальном случае) переход от схемы СБНВ к диффузионному приближению. Это уравнение может быть также представлено в виде

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial s} = \sigma \int [f_\epsilon(\mathbf{r}', s) - f_\epsilon(\mathbf{r}, s)] W\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\epsilon}\right) \frac{d\mathbf{r}'}{\epsilon^3} + S_\epsilon(\mathbf{r}, t).$$

Уравнение в первой форме описывает процесс независимых мгновенных скачков, разделённых случайными временными интервалами, распределёнными по экспоненциальному закону со средним значением $1/\sigma$. Ядро W интегрального оператора играет роль плотности распределения вектора смещения в таком скачке, поэтому оно должно быть интегрируемым. Для уравнения, представленного во второй форме, требования, предъявляемые к ядру W , ослаблены, наличие в качестве сомножителя разности решения в близких точках оказывает регуляризующее действие, и интеграл может сходиться, даже если ядро расходится. Предполагая степенной характер асимптотики ядра при больших пробегах ("полёты Леви"), характерный для фрактальных структур,

$$W(\mathbf{r}) \sim A r^{-3-\alpha}, \quad r \rightarrow \infty,$$

и вводя обозначения $A' = A\sigma$, $t = \epsilon^\alpha s$, $N(\mathbf{r}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\mathbf{r}, t\epsilon^{-\alpha})$, $S(\mathbf{r}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^\alpha S_\epsilon(\mathbf{r}, t)$, в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ приходим к уравнению для трёхмерного изотропного леви-движения:

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = A' \int \frac{N(\mathbf{r}', t) - N(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{3+\alpha}} d\mathbf{r}' + S(\mathbf{r}, t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Указанная здесь область значений α диктуется условием сходимости интеграла в окрестности $\mathbf{r}' \sim \mathbf{r}$: $N(\mathbf{r}, t)$ предполагается дифференцируемой функцией координат, поэтому при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0$

$$|N(\mathbf{r}', t) - N(\mathbf{r}, t)| \propto |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$$

и при $\alpha < 1$ интеграл сходится. Продолжить этот интегральный оператор в область больших значений α можно несколькими способами [33]. Регуляризация вычислением конечной (по Адамару) части интеграла приводит его к виду

$$J = \int \frac{[N(\mathbf{r}', t) - N(\mathbf{r}, t)]_2}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{3+\alpha}} d\mathbf{r}', \quad 1 < \alpha < 2,$$

где $[\dots]_2$ означает разность второго порядка.

Во всех этих случаях уравнение для трансформанты Фурье по пространственным переменным

$$\frac{\partial \tilde{N}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -A_\alpha |\mathbf{k}|^\alpha \tilde{N}(\mathbf{k}, t) + \tilde{S}(\mathbf{k}, t)$$

содержит член, пропорциональный дробной степени α волнового числа $|\mathbf{k}|$. С учётом того что $-|\mathbf{k}|^2$ является образом оператора Лапласа, этот член может быть представлен как

$$|\mathbf{k}|^\alpha \tilde{N}(\mathbf{k}, t) \equiv (|\mathbf{k}|^2)^{\alpha/2} \tilde{N}(\mathbf{k}, t) \Leftrightarrow (-\Delta)^{\alpha/2} N(\mathbf{r}, t),$$

а само уравнение записывается в виде (23).

С физической точки зрения дробный лапласиан можно рассматривать как результат некоторого усреднения диффузионного оператора со случайным коэффициентом диффузии \tilde{D} ,

$$\langle \nabla (\tilde{D} \nabla N(\mathbf{r}, t)) \rangle \mapsto -D_\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} \langle N(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Общего вывода этого соотношения из фрактальной структуры среды, в которой происходит диффузия, по-видимому, не существует, но есть хороший пример конкретного процесса: распространение возбуждений в плазме резонансным излучением. В процессе усреднения уравнения переноса с экспоненциальным распределением пробега (эквивалентным в асимптотике обычному диффузионному уравнению) по лоренцеву распределению частоты интегральный оператор переноса действительно превращается в лапласиан дробного порядка (см. [33]), и уравнение в точности совпадает с приведённым выше.

Главное отличие дробно-дифференциального уравнения диффузии от обычного обусловлено различием в распределении пробегов — степенного распределения в первом случае и экспоненциального во втором. Чтобы нагляднее представить себе проблему движения космических лучей в хаотических магнитных полях, ещё раз обратимся к книге Гинзбурга и Сыроватского [4, с. 181]: "Допустим, что движение происходит только вдоль силовых трубок, но сами эти трубы хаотическим образом запутаны, например, состоят из прямолинейных участков со средней длиной l , причём любой угол между направлениями соседних участков равновероятен. Тогда при анализе вопроса об усреднённом по достаточно большим областям пространственном распределении частиц (космических лучей) диффузионное приближение полностью применимо". Что мы знаем о длинах этих отрезков? Да, естественно считать их случайными. Как непрерывная случайная величина, эта длина характеризуется некоторой плотностью распределения $p(\xi)$, $\xi > 0$. Упоминание о средней длине прямолинейного участка можно принять за неявное предположение о существовании (т.е. сходимости) несобственного интеграла

$$\int_0^\infty p(\xi) \xi d\xi = \langle R \rangle = l.$$

Однако для диффузионного характера блуждания частиц этого ещё недостаточно: необходимо существование второго момента этого распределения,

$$\int_0^\infty p(\xi) \xi^2 d\xi = \langle R^2 \rangle,$$

именно через него выражается стандартный коэффициент диффузии. В обычной кинетике эти вопросы не возникают потому, что изначально распределение пробега берётся экспоненциальным, а у экспоненциального

распределения все моменты конечны. Можно, конечно, сказать, что оно "выводится", получается как решение дифференциального уравнения первого порядка, $d\rho/d\xi = -\sigma\rho(\xi)$, но если присмотреться к его выводу, то мы увидим в основе вывода предположение о том, что случайные числа атомов на отрезке $[0, \xi]$ и прилегающем к нему элементе $d\xi$ взаимно независимы. В классической кинетике частица движется в идеальном газе невзаимодействующих и никак не связанных между собой атомов. В рассматриваемом нами случае роль таких атомов, при "столкновениях" с которыми частицы космических лучей меняют направление своего движения, играют концы (или, лучше сказать, точки излома) прямолинейных участков магнитных силовых линий. Можно ли без толики сомнения согласиться с тем, что две такие точки, лежащие на концах одного и того же отрезка, взаимно независимы? Думается, нет. Но, не принимая эту гипотезу независимости, мы подвергаем сомнению правомочность экспоненциального распределения. В этом ещё нет ничего страшного, существует множество других распределений с двумя первыми конечными моментами, но начало уже положено. Любое такое распределение в пределе больших времён вновь приведёт нас к классической диффузии, но уже напрашивается вопрос: а что стоит за сходимостью второго момента? Чем мы жертвуем, принимая предположение о сходимости второго момента? И здесь оказывается, что мы жертвуем целым классом устойчивых законов, имеющих асимптотики степенного типа. И это в задачах с плазмой, турбулентностью, хаотической кинетикой, с которыми мы имеем дело, занимаясь космическими лучами! Не слишком ли высока цена того, чтобы сохранить приверженность экспоненциальному распределению? Разница между процессами переноса с экспоненциальным и степенным распределениями свободного пробега такая же, как между молекулярной и турбулентной диффузией, а перенос космических лучей в Галактике — это турбулентная диффузия.

3.3. Излом в спектре и параметризация модели

Из всех измерений, выполняемых в физике космических лучей, лишь данные по энергетическим спектрам протираются более чем на десять порядков, диапазон изменения других характеристик гораздо меньше. Это даёт повод ожидать, что влияние замены нормального пространственного распределения распределениями со степенными асимптотиками проявится в энергетических спектрах в первую очередь. Очевидно, однако, что простого введения в уравнение переноса энергетического спектра источника $S(E)$,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -D_\alpha(-\Delta)^{\alpha/2}N(\mathbf{r}, t, E) + \delta(\mathbf{r})\delta(t)S(E),$$

для оценки этого эффекта недостаточно: спектр источника без изменений переходит в наблюдаемый,

$$N(\mathbf{r}, t, E) = [D_\alpha t]^{-3/\alpha}\Psi_3^{(\alpha)}([D_\alpha t]^{-1/\alpha}r)S(E),$$

поскольку частицы с разными энергиями перемещаются в пространстве с одним и тем же "коэффициентом диффузии". Ситуация изменится, если ввести зависимость этого коэффициента от энергии: тогда разным энергиям будут соответствовать разные значения безразмерной переменной $\xi = [D_\alpha(E)t]^{-1/\alpha}r$. Выбор степенной

зависимости, наподобие (1), означает, что параметр $\xi = [D_{0z}tE^\delta]^{-1/\alpha}r \equiv \xi_1 E^{-\delta/\alpha}$ высокоэнергетической частицы лежит вблизи вершины устойчивой плотности (левая асимптотика, условно примем $\xi < \xi_0$), тогда как частичам с малыми энергиями соответствуют большие значения ξ , лежащие на периферии пространственного распределения $\Psi_3^{(\alpha)}(\xi)$ (правая асимптотика, $\xi > \xi_0$). В первом случае

$$N(\mathbf{r}, t, E) \sim S_0 r^{-3} E^{-p} [\xi^3 \Psi_3^{(\alpha)}(0)] \propto E^{-p-3\delta/\alpha}, \quad E \rightarrow \infty,$$

при любом допустимом $\alpha \in (0, 2]$. Во втором случае ($E \rightarrow 0$) степенная асимптотика наблюдается только при аномальной диффузии ($\alpha < 2$):

$$N(\mathbf{r}, t, E) \propto \begin{cases} E^{-(p+3\delta/2)} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{4E^\delta}\right), & \alpha = 2, \\ E^{-(p-\delta)}, & \alpha < 2. \end{cases}$$

Последнее обстоятельство и послужило в [19, 20] поводом для перехода от обычного диффузионного уравнения к уравнению с лапласианом в дробной степени (23), что позволяет увязать его "дробность" с фрактальными свойствами среды, благодаря которым пробеги частицы приобретают степенной вид. Проявляющееся при $\alpha < 2$ различие показателей степенных асимптотик спектра при малых и больших энергиях было интерпретировано как указание на обсуждаемый излом.

С использованием экспериментальных данных о положении переходной области излома ($E_<, E_>$) и показателе спектра при $E < E_<$ и $E > E_>$ были найдены основные параметры модели (D_{0z} , δ) и показатель генерации частиц в источнике p в зависимости от показателя α . В оригинальной работе [19] расчёты проведены для источника, находящегося на расстоянии r от точки наблюдения и действующего с постоянной интенсивностью в течение некоторого интервала времени τ_S , предшествующего наблюдению; в этом случае

$$N(\mathbf{r}, t, E) = S_0 E^{-p} [D_{0z} E^\delta]^{-3/\alpha} \times \int_{\max\{0, t-\tau_S\}}^t \Psi_3^{(\alpha)}\left(r [D_{0z} E^\delta \tau]^{-1/\alpha}\right) \tau^{-3/\alpha} d\tau$$

и показатель наблюдаемого спектра изменяется от $p - \delta$ при $E \leq E_<$ до $p + \delta$ при $E \geq E_>$. Результаты расчётов показали, что наилучшее согласие с экспериментальными данными по спектрам протонов, ядер и суммарному спектру всех частиц достигается при значениях параметров $\alpha \approx 5/3$, $E_{rad} = (E_> + E_<)/2 = 3 \times 10^4$ ГэВ на нуклон, $\delta = 0,25$ и показателе спектра инъекции всех ядер в источнике ($r \sim 200$ пк, $\tau_0 \sim 10^5$ лет) $p \approx 2,9$. При этом показатель наблюдаемого спектра в области излома изменяется от 2,65 до 3,15 (рис. 8), что не противоречит гипотезе, согласно которой источниками космических лучей могли быть взрывы ближайших сверхновых в течение последних 100 тыс. лет.

В [57] (см. также [58]) мы перешли к уравнению более общего типа, содержащему, наряду с дробным лапласианом, дробную производную по времени, чтобы учесть влияние магнитных ловушек (которые, без сомнения, имеются в галактической среде):

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -D_\alpha(E) \frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}} (-\Delta)^{\alpha/2} N(\mathbf{r}, t, E) + S(\mathbf{r}, t, E). \quad (24)$$

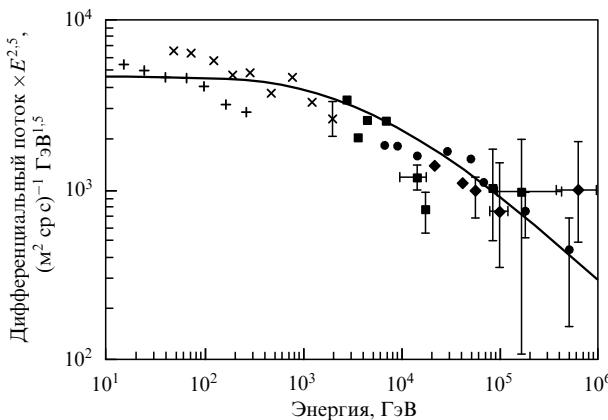


Рис. 8. Результат первых расчётов в модели с дробным лапласианом ($\alpha = 5/3$) [19, 20]: сопоставление вычисленного в этой модели спектра протонов (кривая) с данными различных экспериментов (см. подробности в [56]).

Поскольку в семействе этих уравнений сохранялось как частный случай ($\beta = 1$) и уравнение (23), мы ничем не пожертвовали, а просто расширили класс решений: вместо однопараметрического семейства решений, выражаемых через устойчивые плотности $\Psi_3^{(\alpha)}$, получили двухпараметрическое семейство решений, определяемых дробно-устойчивыми плотностями $\Psi_3^{(\alpha, \beta)}$ [40]. Для точечного мгновенного источника решение имеет вид

$$N(\mathbf{r}, t, E) = S_0 E^{-p} [D_{0z} E^\delta t^\beta]^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha, \beta)}(r [D_{0z} E^\delta t^\beta]^{-1/\alpha}),$$

откуда следует (см. раздел 2.6), что

$$N(\mathbf{r}, t, E) \approx \begin{cases} S_0 D_{0z} t^\beta r^{-3-\alpha} E^{-p+\delta}, & E < E_<, \\ S_0 [D_{0z} t^\beta]^{-1} r^{-3+\alpha} E^{-p-\delta}, & E > E_>. \end{cases}$$

Таким образом, с увеличением энергии происходит укручение спектра, проявляющееся в увеличении абсолютного значения показателя степени спектра на величину 2δ при переходе через интервал $(E_<, E_>)$. В случае источника, действующего с постоянной интенсивностью в течение конечного времени, укручение также имеет место, но показатель изменяется на величину $(1 + 1/\beta)\delta$. Заметим, что в обоих случаях показатели, характеризующие асимптотическое поведение спектра за пределами области излома, не зависят от параметра α , но в переходной области наблюдается заметный эффект: чем меньше α , тем шире область перехода и тем более плавно он происходит (это видно из рис. 5).

Выбор численных значений этих параметров был прокомментирован в работе [59]: "Чтобы оценить параметр β , мы использовали результаты, представленные в статье [60], где исследована аномальная диффузия солнечных магнитных элементов. Авторы показали, что распределение времени пребывания в ловушке в асимптотике принимает вид распределения Леви со спектральным показателем $\beta \approx 0,8$. Предполагая, что механизм захвата характеризуется определённым самоподобием, можно ожидать такого же значения β на всех рассматриваемых масштабах. По этой причине мы использовали значение $\beta = 0,8$ в наших расчётах. Полагая затем $\eta_{E \ll E_0} \sim 2,63$ и $\eta_{E \gg E_0} \sim 3,24$, мы окончательно получаем $p \approx 2,9$, $\delta \sim 0,27$.

Чтобы определить следующий важный параметр — коэффициент аномальной диффузии D_{0z} , мы использовали экспериментальные данные по анизотропии потока частиц в области энергий $10^3 - 10^4$ ГэВ в рамках схемы, предложенной Осборном с соавторами (1976) [61] и Дорманом с соавторами (1985) [62]. В частности, мы нашли $D_{0z} \approx (1-4) \times 10^{-3}$ пк^{1,7} год^{-0,8} в случае $\alpha = 1,7$, $\beta = 0,8$ для трёх ближайших источников.

В рассматриваемой модели только один параметр α ($1 < \alpha < 2$), связанный с фрактальной структурой среды, был найден путём фитирования. Пробные расчёты спектров космических лучей показали, что наилучшее согласие с экспериментальными данными достигается при $\alpha \approx 1,7$. В заключение авторы [59] отметили, что при указанных параметрах расчётные результаты соглашаются не только с наблюдаемым укручением энергетического спектра, но и с массовым составом в области энергий $10^2 - 10^5$ ГэВ на нуклон, если принять следующий состав источника: $p = 72\%$, $\text{He} = 18\%$, $\text{CNO} = 5\%$, $\text{Ne-Si} = 3\%$, $\text{Fe} = 2\%$.

При $\alpha = 1$ устойчивая плотность записывается в простом аналитическом виде (трёхмерное распределение Коши (см. раздел 2.6)), что было использовано в работе [59] для решения уравнения (23) с источником

$$S(\mathbf{r}, t, E) = S_0 E^{-p} \delta(\mathbf{r}) 1_+(t).$$

В результате получена простая формула

$$N(\mathbf{r}, t, E) = \frac{S_0 E^{-p-\delta}}{2\pi D_{0,1} r^2 t} \frac{(E/E_{\text{rad}})^{2\delta}}{(E/E_{\text{rad}})^{2\delta} + 1} 1_+(t), \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1,$$

с $E_{\text{rad}} = [r/(D_{0,1} t)]^{1/\delta}$, позволяющая проследить переход от одной асимптотики спектра к другой. В частности, можно оценить ширину энергетического интервала $\Delta E = E_> - E_<$, разделяющего две рассматриваемые асимптотики. При 20%-ном допуске на согласие (отличии точного спектра от своих степенных асимптотик) получаем ширину этого перехода, несколько меньшую двух с половиной порядков, что, в общем, не противоречит наблюдаемым данным.

В [63] рассматривалась задача с постоянным (по времени) точечным источником. Решение вытекающего из (23) стационарного уравнения

$$D_\alpha(E)(-\Delta)^{\alpha/2} N(\mathbf{r}, E) = S_0 E^{-p} \delta(\mathbf{r}),$$

найденное с использованием известной трансформанты Меллина трёхмерной устойчивой плотности

$$\int_0^\infty \Psi_3^{(\alpha)}(r) r^{s-1} dr = \frac{2^s \Gamma(s/2) \Gamma((3-s)/\alpha)}{\alpha (4\pi)^{3/2} \Gamma((3-s)/2)}$$

при том же предположении относительно энергетической зависимости коэффициента диффузии, имеет вид

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}, E) &= S_0 E^{-p} [D_\alpha(E)]^{-3/\alpha} \int_0^\infty \Psi_3^{(\alpha)}(r [D_\alpha(E)t]^{-1/\alpha}) dt = \\ &= \frac{2^{-\alpha} S_0}{\pi^{3/2} D_{0z} r^{3-\alpha}} \frac{\Gamma((3-\alpha/2)/2)}{\Gamma(\alpha/2)} E^{-p-\delta}. \end{aligned}$$

Подчеркнём, что данная формула является точным решением стационарного уравнения, хотя само по себе это диффузионное уравнение является приближённым,

представляющим асимптотику процесса на больших расстояниях, и поэтому применять его решение на малых расстояниях рискованно. В заключение авторы [63] сделали попытку получить двухпараметрическое (с сохранением $\beta \neq 1$) стационарное решение как предел при $t \rightarrow \infty$ распределения частиц от источника, включённого в момент $t = 0$,

$$N_{\text{st}}(\mathbf{r}, E) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(\mathbf{r}, t, E) = \\ = \frac{S_0 E^{-p}}{|D_\alpha(E)|^{3/2}} \int_0^\infty \Psi_3^{(\alpha, \beta)} \left(r [D_\alpha(E) \tau^\beta]^{-1/\alpha} \right) \tau^{-3\beta/\alpha} d\tau,$$

однако этот интеграл разошёлся, и им пришлось ограничить интегрирование по времени большим верхним пределом (10^{10} лет), что имело бы смысл, если бы предел существовал. Физическое объяснение расходимости состоит в том, что часть частиц, застревающих в ловушках, со временем высвобождается из них и непрерывно подпитывает общий поток, но из-за бесконечности среднего времени пребывания в ловушке равновесие между частицами, попадающими в ловушки и покидающими их, не наступает. С математической точки зрения, дело заключается в том, что используемая в данной модели дробная производная Римана – Лиувилля при дифференцировании постоянной величины обращается в нуль только при целых порядках β , тогда как производная дробного порядка от постоянной нулю не равна [33]:

$$\frac{\partial^v C}{\partial t^v} = \frac{C t^{-v}}{\Gamma(1-v)}.$$

Поэтому для существования стационарного (не зависящего от времени) распределения частиц в среде, т.е. для выполнения условия $\partial N_{st} / \partial t = 0$, как следует из уравнения (24), плотность источника должна удовлетворять уравнению

$$S(\mathbf{r}, t, E) = D_z(E)(-\Delta)^{\alpha/2} \frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}} N_{\text{st}}(\mathbf{r}, E) = \\ = [D_z(E)(-\Delta)^{\alpha/2} N_{\text{st}}(\mathbf{r}, E)] \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

Подобное поведение источников можно было бы объяснить тем, что они сами являются ловушками такого же типа, как и остальные, т.е. испускают частицы с убывающей по степенному закону интенсивностью, что представляется более естественной картиной, чем источник, вечно излучающий частицы с постоянной интенсивностью.

С использованием результатов работы [59] группой Лагутина были проведены расчёты энергетических спектров и массового состава на основе разделения потока частиц на вклады частиц прямого (нерассеянного) потока близких ($r < 1$ кпк) и далёких ($r > 1$ кпк) источников, представленные тремя членами в выражении:

$$J_i = \frac{v_i}{4\pi} \left[C_{0i} E^{-p+\delta/\beta} + \sum_{j: r_j < 1 \text{ km}} N_i(r_j, t_j, E) + C_{1i} E^{-p-\delta/\beta} \right],$$

$i = \text{p, He, CNO, Ne-Si, Fe}$.

Постоянные C_{0i} , C_{1i} определялись по тем же самим экспериментальным данным, с которыми предполага-

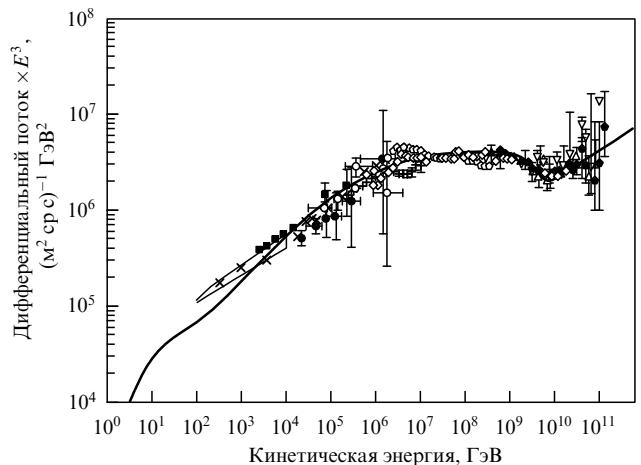


Рис. 9. Спектр всех частиц. Кривая — результат расчёта в дробно-дифференциальной модели с параметрами $\alpha = 1,7$, $\beta = 0,8$. Символами показаны данные различных экспериментов 1970–2001 гг. (см. подробности в [64]).

лось проводить сопоставление результатов. Введя поправку на солнечную модуляцию галактических лучей, авторы работ [63, 64] удовлетворительно воспроизвели энергетические спектры (суммарный спектр показан на рис. 9) и массовый состав компонент с разными энергиями.

В [65, 66] та же модель использовалась для расчёта спектра электронов и позитронов. Показано, что источники высокоэнергетических ($E \geq 100$ ГэВ) электронов и позитронов, наблюдавшихся в Солнечной системе, являются относительно молодыми локальными источниками (расстояние не более 200 пк, возраст порядка 10^5 лет).

Полученная с помощью этих расчётов доля позитронов оказалась в согласии с экспериментальными данными (рис. 10), а показатель спектра источников ($p_e = 2,95$) для электронов и позитронов оказался близким к найденному ранее значению для протонов ($p_p = 2,9$). Последнее обстоятельство авторы считают указанием на то, что механизм ускорения этих частиц — один и тот же. Правда, потери энергии релятивистских

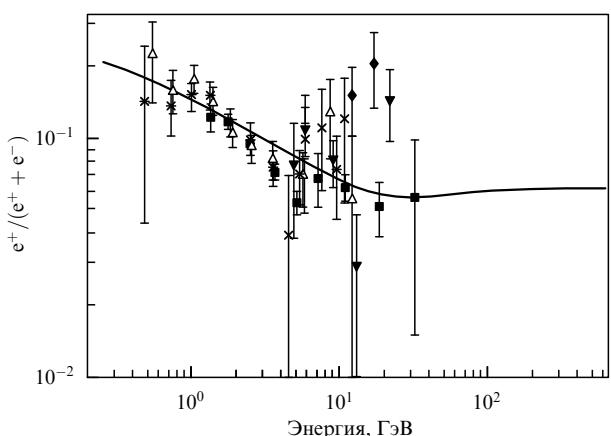


Рис. 10. Доля позитронов в электронно-позитронной компоненте первичных космических лучей. Символы — данные различных экспериментов 1987–2000 гг. (см. подробности в [66]), кривая — результат расчёта в модели ЛУ ($\alpha = 1.7$, $\beta = 0.8$).

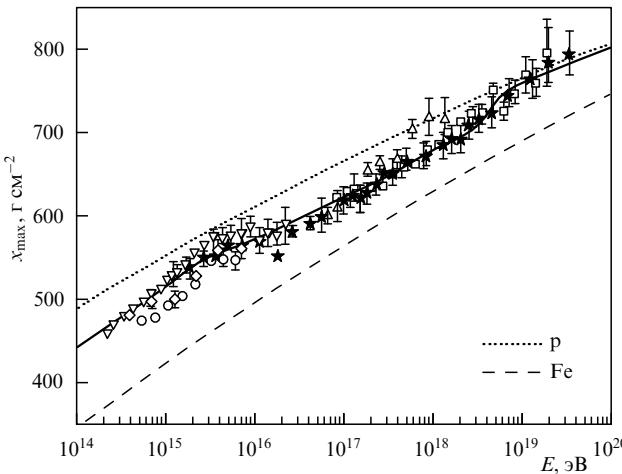


Рис. 11. Средняя глубина максимума широких атмосферных ливней x_{\max} в зависимости от первичной энергии. Символами показаны данные различных экспериментов, кривые (пунктирная для первичных протонов, штриховая — для первичных ядер железа, сплошная — для смешанного состава) — результаты расчёта с параметрами $\alpha = 1,7$, $\beta = 0,8$ [67].

электронов были взяты в виде

$$-\frac{dE}{dt} = b(E) = b_0 + b_1 E + b_2 E^2,$$

соответствующем однородной среде, тогда как неоднородности магнитного поля считаются фрактальными. Такой подход предполагает отсутствие корреляций между магнитным полем и веществом в межзвёздной среде, что противоречит общепринятым представлениям о "вмороженности" магнитных силовых линий в материальную среду. При полной корреляции член с потерями энергии должен войти в уравнение в составе оператора материальной производной, возводимого в дробную степень (см. раздел 3.4).

Расчёты Лагутина и др. с использованием параметров $\alpha = 1,7$, $\beta = 0,8$ (назовём эту модель исключительно для удобства ссылок моделью Лагутина–Учайкина (ЛУ)) продолжались [67, 68], серьёзных разногласий с экспериментом, кажется, не наблюдалось (рис. 10, 11).

Однако Ерлыкин, Лагутин и Вольфендейл [69], выполнив вычисления с $\alpha = 0,5$; $1,0$ и $1,5$, приходят к выводу, что значение $\alpha = 1,0$ обеспечивает лучшее согласие с наблюдаемыми данными и в то же время согласуется с известным в теории турбулентности спектром Крайчнана $F(k) \propto k^{-\chi}$ [70] (параметр α связан с индексом χ соотношением $\alpha = (3 - \chi)/2$ [71]; для магнитной энергии $\chi = 3/2$ и $\alpha = 3/4$)⁶. Двигаясь в этом направлении далее, Лагутин с Тюменцевым останавливаются на новом значении ведущего параметра: $\alpha = 0,3$ [73] (назовём этот вариант ЛТ-версией дробно-дифференциальной модели переноса галактических космических лучей) и проводят с ним в 2004–2010 гг. довольно большую серию расчётов (её легко проследить по трудам конференций по космическим лучам). Побудительным мотивом к такому выбору

послужили информация о том, что дробный показатель α в распределении пробегов не совпадает с фрактальной размерностью d_F среды [74], а также стремление согласовать пробеги с известными характеристиками реальной межзвёздной среды. Первые расчёты такого типа были проведены в нашей работе [75] (см. также [76]). Выполнив моделирование пробегов частиц в среде со случайнym распределением сферических мишеней, Лагутин и др. в [77] пишут, что, поскольку «для сред с фрактальной размерностью $1 < d_F < 2$

$$\alpha \approx 2 - d_F, \quad (25)$$

для галактической среды с $d_F = 1,7$ [51] находим $\alpha = 0,3$. Показатель β полагаем, как и в [58], равным 0,8. Ещё один важный параметр модели — коэффициент аномальной диффузии D_{0z} — можно оценить, сопоставив точку излома наблюдаемого спектра космических лучей с точкой "излома" дробно-устойчивых распределений $\Psi_3^{(\alpha, \beta)}(\xi)$. Поскольку излом $\Psi_3^{(0,3; 0,8)}(\xi)$ наблюдается при $\xi \approx 2,3$, получаем

$$r(D_{0z} E_{\text{изл}}^\delta t^\beta)^{-1/\alpha} \approx 2,3.$$

Считая, что в формировании излома в энергетическом спектре участвуют и близкие источники, при $r \approx 10^2$ пк, $t \approx 10^5$ лет, находим

$$D_{0z} \approx (3-5) \times 10^{-6} \text{ пк}^{0.3} / \text{г}^{0.8}.$$

При таком D_{0z} и установленных выше параметрах δ , α , β существует однозначная связь между r и t источников, обеспечивающих наблюдаемый излом спектра при $E_{\text{изл}} \approx 3 \times 10^6$ ГэВ.

Некорректность этого вывода состоит в том, что формула (25) справедлива лишь для предельно малых размеров элементов, из которых построен фрактал. Размеры магнитных неоднородностей галактической среды не относятся к этому типу: занимаемый ими 5%-ный объём (по давним оценкам Стрёмгрена [2], подтверждённым, однако, последующими астрономическими измерениями: например, в [57] объёмная доля межзвёздного пространства, не заполненного водородом, оценивается в 95 %) при переходе в линейный масштаб превращается в более чем 30%-ный. То, что формула (25) неприменима к таким масштабам, ясно видно, в частности, из работы [55], в которой по результатам экспериментальных исследований облачной структуры межзвёздного водорода принимается значение $d_F = 2,3$, явно несовместимое с формулой (25). Следует также напомнить, что одна только фрактальная размерность ещё не характеризует фракталоподобную структуру полностью: размеры составляющих её элементов и их концентрация в пространстве определяются не показателем d_F в формуле фрактала $V_F(R) = CR^{d_F}$, а коэффициентом $C = V_F(1)$, определяющим объёмную долю шара единичного радиуса, заполняемую фракталом. Увеличение размеров магнитных облаков при сохранении одной и той же фрактальной размерности d_F очевидным образом сокращает распределение пробегов, увеличивая тем самым показатель α (рис. 12). Эффект этот ясно виден и на рис. 13, взятом из [77].

Между тем первоначальная (ЛУ) модель стала применяться другими авторами. Так, Кетаби и Фатеми [78] воспользовались стационарным решением при $\alpha = 1,8$ при моделировании методом Монте-Карло диффузии

⁶ В [72] значение $\alpha = 1$ оставлено лишь для периферии Галактики, для внутренней её части предложено значение $\alpha = 0,8$. Такой подход представляется сомнительным, поскольку используемые пропагаторы получены для однородной безграничной среды с единственным показателем α .

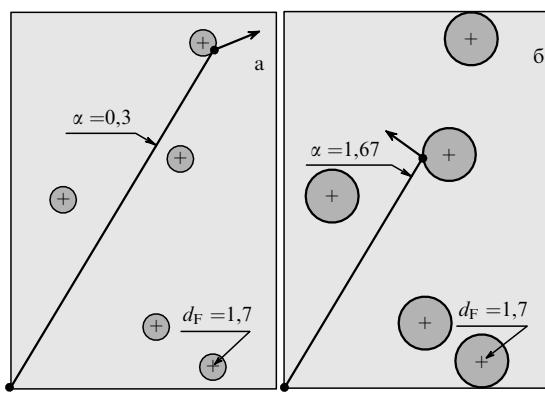


Рис. 12. Различие в распределении пробегов при одинаковом распределении центров и разных радиусах шаров, имитирующих магнитные облака: (а) ЛТ-модель, (б) ЛУ-модель.

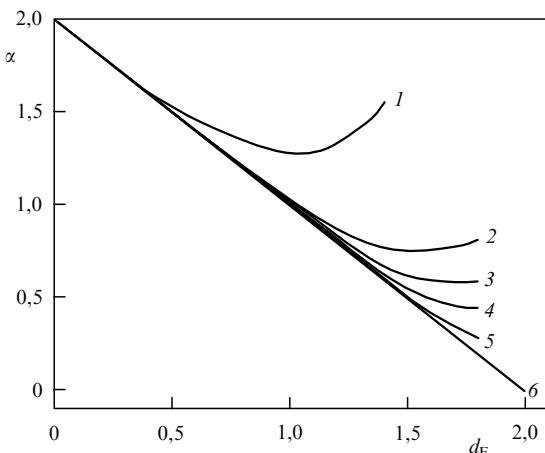


Рис. 13. Показатель α распределения пробегов в зависимости от фрактальной размерности распределения центров шаров и их радиусов $R = 10,0; 2,0; 1,0; 0,5; 0,25; 0,01$ отн. ед. соответственно для кривых 1–6 [77].

космических лучей от сверхновой (в модели Ерлыкина – Вольфендейла) и получили хорошее согласие с наблюдаемыми характеристиками, интерпретируемое ими как подтверждение того, что источником космических лучей действительно является сверхновая. Авторы работы [79], повторившие, по существу, наши первые расчёты, снова пришли к выводу, что наилучшим значением α , с точки зрения соответствия получаемым в эксперименте энергетическому спектру и радиальному градиенту в окрестности Солнечной системы, является 1,65 и допустимой областью значений ещё можно считать 1,6–1,9, тогда как соответствующее классической диффузии значение $\alpha = 2$ оказывается неприемлемым. Работа [80], можно сказать, целиком посвящена оценке показателя α . Авторы исследовали перенос космических лучей с энергиями от 10^{12} до 10^{19} эВ от сверхновой с долей энергии, преобразуемой в космические лучи, от 0,01 до 0,10 и возрастом сверхновой от 10^4 до 10^7 лет при разных значениях $\alpha \in [0,5; 2,0]$ и пришли к выводу, что процесс распространения космических лучей в Галактике является аномальной диффузией 2-го рода ($\alpha = 1,7$) и не описывается нормальной диффузионной моделью ($\alpha = 2$). Таким образом, этот вывод отвергает и гипотезу Лагутина – Тюменцева об аномальной диффузии с $\alpha = 0,3$ (диффузии 1-го рода).

Таблица 1. Параметры дробно-дифференциальной модели в разных работах

α	β	p	δ	D_0 , пк $^\alpha$ год $^{-\beta}$	Литература (год)
1,7	0,8	2,90	0,27	$(1–4) \times 10^{-3}$	[64] (2001)
0,3	0,8	2,86	0,27	$(3–5) \times 10^{-6}$	[73] (2004)
0,7	1,0	2,60	0,27	2×10^{-5}	[84] (2008)
1,1	0,8	2,85	0,27	1×10^{-4}	[82] (2011)
1,7	0,8	2,90	0,27	$2,4 \times 10^{-3}$	[83] (2012)

Таблица 2. Массовый состав в ЛУ-модели и её ЛТ-версии

Мо- дель	α	β	p , %	He, %	CNO, %	Ne-Si, %	Fe, %	Литература (год)
ЛУ	1,7	0,8	72	18	5	3	2	[64] (2001) [83] (2012)
ЛТ	0,3	0,8	77	16	4	2	1	[73] (2004)

После моей критической статьи [81] 2010 г. авторы ЛТ-версии решили вернуться к исходной модели. По крайней мере, в 2011 г. они публикуют расчёты с $\alpha = 1,1$ [82], а на Европейском симпозиуме по космическим лучам 2012 года представляют результаты моделирования методом Монте-Карло с $\alpha = 1,7$ [83].

Наибольшему изменению при этих вариациях α подвергается коэффициент $D_{0\alpha}$ (табл. 1). Однако конечные результаты (спектр, состав) практически не изменялись (табл. 2). Очевидно, изменение параметра α компенсировалось соответствующим изменением коэффициента диффузии. Между тем с изменением α меняется и размерность коэффициента диффузии, и мы не можем оценить это изменение количественно, как не можем оценить разницу между значениями скорости и ускорения. Возможно, важную роль играют здесь коэффициенты C_i и C_{0i} , манипулируя которыми, можно влиять на результаты. В то же время, как мы увидим в разделах 3.7, 3.8, эти манипуляции резко меняют пространственно-временные формы траекторий частиц — факт, оказавшийся за пределами внимания авторов ЛТ-версии. Если динамика процесса, описываемого дробно-дифференциальным уравнением, не соответствует реальности, то моделирование превращается просто в многопараметрическую аппроксимацию известных экспериментальных результатов.

Наконец, ещё одно соображение. Параметр $\gamma = \beta/\alpha$, характеризующий закон расширения диффузионного пакета, в модели ЛУ оказывается подозрительно близким к классическому значению 1/2. Таким образом, если изначально поставить вопрос о поиске модели, в которой расширение диффузионного пакета согласуется со стандартной теорией, но форма обладает автомодельным свойством и характеризуется требуемыми для описания наблюдаемого излома степенными асимптотиками, то при $\beta = 0,8$ мы придём именно к ЛУ-модели ($\beta/\alpha \approx 0,5$), а не к ЛТ-версии ($\beta/\alpha \approx 2,66$). Очевидно, что динамика диффузионного пакета в ЛТ-версии в асимптотике больших времён противоречит физической реальности: скорость его расширения неограниченно возрастает вопреки естественному ограничению скоростей составляющих его частиц.

3.4. Уравнения ограниченной аномальной диффузии

В рассмотренном выше процессе перелёты предполагались мгновенными (этот процесс мы назвали *неограниц-*

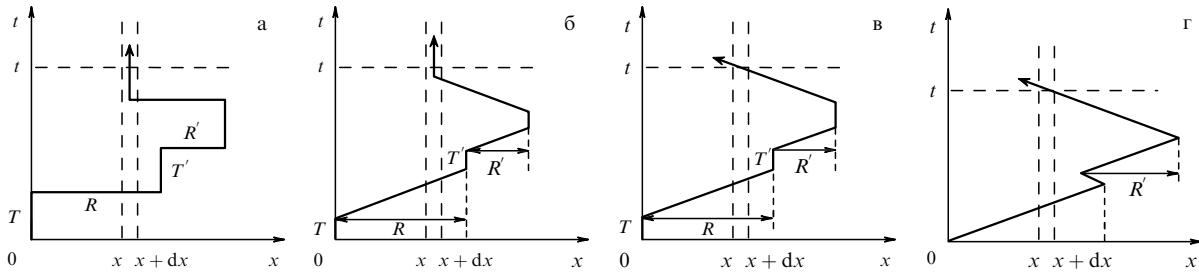


Рис. 14. Начальный фрагмент траектории в \$(x, t)\$-координатах: (а) с мгновенными перелётами, (б, в) с конечной скоростью перелётов в среде с ловушками (два возможных состояния в момент наблюдения \$t\$), (г) непрерывное движение (ловушек нет).

ченной аномальной диффузией — НАД). Решения задач о блуждании частиц космических лучей с конечной скоростью свободного движения рассматривались в наших работах [81, 85–88] (ограниченная аномальная диффузия — ОАД).

В случае конечной скорости перелётов в произвольный момент наблюдения частица может находиться в одном из двух состояний — покоя (0) или движения (1) (рис. 14б–г). Скорости переходов \$1 \rightarrow 0\$ и \$0 \rightarrow 1\$ в единице объёма окрестности точки \$\mathbf{r}\$ частицы, находившейся в начальный момент времени в начале координат, обозначим через \$F_{1 \rightarrow 0}(\mathbf{r}, t)\$ и \$F_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{r}, t)\$ соответственно. Единичный вектор \$\boldsymbol{\Omega}\$ направления движения частицы, покидающей источник или ловушку, имеет изотропное распределение. Частица, перешедшая в состояние покоя в точке \$\mathbf{r}\$ в момент времени \$t - t'\$, останется там к моменту наблюдения \$t\$ с вероятностью

$$Q(t') = \int_0^\infty q(t' + \tau) d\tau,$$

а частица, покинувшая ловушку в точке \$\mathbf{r} - \mathbf{r}'\$, пересечёт без взаимодействий единичную площадку в точке \$\mathbf{r}\$ с вероятностью

$$P(\mathbf{r}') = \int_0^\infty p(\mathbf{r}' + \xi \boldsymbol{\Omega}) d\xi.$$

Учитывая, что на этот переход частице придётся затратить \$r'/v\$ секунд, для суммарной плотности вероятности обнаружить частицу в точке \$\mathbf{r}\$ в момент \$t\$ получим

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty dt' Q(t') F_{1 \rightarrow 0}(\mathbf{r}, t - t') + \\ &+ \frac{1}{v} \int d\mathbf{r}' P(\mathbf{r}') F_{0 \rightarrow 1}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \frac{r'}{v}\right). \end{aligned} \quad (26a)$$

Скорости переходов (при условии, что частица начинает свою историю с попадания в начальный момент времени в ловушку, находящуюся в начале координат) связаны соотношениями

$$F_{1 \rightarrow 0}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' p(\mathbf{r}') F_{0 \rightarrow 1}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \frac{r'}{v}\right) + \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad (26b)$$

$$F_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t d\tau q(\tau) F_{1 \rightarrow 0}(\mathbf{r}, t - \tau). \quad (26b)$$

Применив теперь к системе интегральных уравнений (26) преобразование Фурье по пространственной переменной и Лапласа — по временнóй, получим систему

алгебраических уравнений:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = \hat{Q}(\lambda) \tilde{F}_{1 \rightarrow 0}(\mathbf{k}, \lambda) + \frac{1}{v} \tilde{P}\left(\mathbf{k}, \frac{\lambda}{v}\right) \tilde{F}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{k}, \lambda),$$

$$\tilde{F}_{1 \rightarrow 0}(\mathbf{k}, \lambda) = \tilde{p}\left(\mathbf{k}, \frac{\lambda}{v}\right) \tilde{F}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{k}, \lambda) + 1,$$

$$\tilde{F}_{0 \rightarrow 1}(\mathbf{k}, \lambda) = \hat{q}(\lambda) \tilde{F}_{1 \rightarrow 0}(\mathbf{k}, \lambda),$$

где

$$\hat{Q}(\lambda) = \frac{1 - \hat{q}(\lambda)}{\lambda},$$

$$\tilde{P}\left(\mathbf{k}, \frac{\lambda}{v}\right) = \int P(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{\lambda}{v} r\right) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

$$\tilde{p}\left(\mathbf{k}, \frac{\lambda}{v}\right) = \int p(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{\lambda}{v} r\right) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Решение этой системы имеет вид

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{\hat{Q}(\lambda) + (1/v)\tilde{P}(\mathbf{k}, \lambda/v)\hat{q}(\lambda)}{1 - \tilde{p}(\mathbf{k}, \lambda/v)\hat{q}(\lambda)}. \quad (27)$$

При \$v = \infty\$ выражение (27) принимает вид формулы Монтролла – Вейсса (14), которая описывает движение частицы как последовательность мгновенных скачков из одной точки пространства в другую: вне зависимости от величины расстояния между этими точками частица прибывает в одну из них в тот же момент времени, в который она покидает другую. Время задержки (пребывания в ловушке) при этом никак не связано ни с этим расстоянием, ни с движением вообще. Если из этой модели удалить ловушки (т.е. положить \$\hat{Q}(\lambda) = 0\$), то она вообще лишается смысла: частица мгновенно улетает на бесконечность, исчезая из рассматриваемой системы. Однако введение конечной скорости свободного движения возвращает всё в нормальное русло даже в отсутствие ловушек: частица непрерывно движется с течением времени, но всё время остаётся в пределах шара радиусом \$vt\$ с центром в точке начала траектории. Решение (27) при этом принимает вид

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{(1/v)\tilde{P}(\mathbf{k}, \lambda/v)}{1 - \tilde{p}(\mathbf{k}, \lambda/v)}. \quad (28)$$

Задержки в движении частиц осуществляются теперь не независимыми ловушками, а становятся тесно связанными (прямо пропорционально) с пробегами частиц, и это существенно меняет дело, особенно при \$\alpha < 1\$ (в оригинальной работе [81] уравнения ОАД выведены с учётом независимых ловушек).

Теперь перейдём от уравнения (28) в переменных Фурье–Лапласа к асимптотическому уравнению в естественных переменных. Для этого представим (28) в виде

$$\tilde{L}(\mathbf{k}, \lambda) \tilde{N}(\mathbf{k}, \lambda) \equiv \left[1 - \tilde{p}\left(\mathbf{k}, \frac{\lambda}{v}\right) \right] \tilde{N}(\mathbf{k}, \lambda) = v^{-1} \tilde{S}(\mathbf{k}, \lambda), \quad (29)$$

где функция $\tilde{S}(\mathbf{k}, \lambda)$ теперь не обязательно равняется функции $P(\mathbf{k}, \lambda/v)$, характеризующей точечный мгновенный источник, а относится к произвольному источнику (поэтому решение N теперь — не обязательно функция Грина). Положим, как и прежде,

$$P(R > r) \sim Ar^{-\alpha}, \quad r \rightarrow \infty,$$

так что

$$p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = p_R(r) dr \frac{d\Omega}{4\pi},$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, $p_R(r)$ — плотность распределения пробега,

$$p_R(r) = -\frac{dP(R > r)}{dr} \sim \alpha Ar^{-\alpha-1} dr, \quad r \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Принимая во внимание различное поведение лапласовской трансформанты этого распределения в окрестности $s = 0$ в зависимости от сходимости или расходимости среднего значения и дисперсии,

$$\hat{p}_R(s) = \int_0^\infty p_R(r) \exp(-sr) dr \sim \begin{cases} 1 - A_\alpha s^\alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ 1 - \langle R \rangle s + A_\alpha s^\alpha, & 1 < \alpha < 2, \\ 1 - \langle R \rangle s + \left\langle \frac{R^2}{2} \right\rangle s^2, & \alpha > 2, \end{cases} \quad (31)$$

получим

$$1 - \tilde{p}\left(\mathbf{k}, \frac{\lambda}{v}\right) = \int \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right)r\right] \right\} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \sim \begin{cases} A_\alpha \left\langle \left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right)^\alpha \right\rangle, & 0 < \alpha < 1, \\ \langle R \rangle \left\langle \left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right) \right\rangle - A_\alpha \left\langle \left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right)^\alpha \right\rangle, & 1 < \alpha < 2, \\ \langle R \rangle \left\langle \left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right) \right\rangle - \left\langle \frac{R^2}{2} \right\rangle \left\langle \left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right)^2 \right\rangle, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по изотропно распределённому вектору Ω , а степенные функции понимаются, как обычно, в смысле главной ветви аналитической функции z^α в плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси [89]:

$$z^\alpha = |z|^\alpha \exp(i\alpha \arg z), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arg z \Big|_{z=s+i\epsilon, s>0} = 0.$$

В соответствии с этим выбором

$$\left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right)^\alpha = \left[\left(\frac{\lambda}{v}\right)^2 + (\mathbf{k}\Omega)^2\right]^{\alpha/2} \exp(-i\phi\alpha),$$

где

$$\tan \phi = \frac{\mathbf{k}\Omega}{\lambda/v}.$$

Аналогичным образом находятся и соответствующие каждому из этих интервалов функции $P(\mathbf{k}, \lambda)$.

Вследствие изотропии распределения случайного направления Ω его среднее значение равно нулю и дробно-диффузационная асимптотика оператора \tilde{L} при $k \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ выражается как

$$\tilde{L}(\mathbf{k}, \lambda) \sim \begin{cases} A_\alpha \left\langle \left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right)^\alpha \right\rangle, & 0 < \alpha < 1, \\ \langle R \rangle \frac{\lambda}{v} - A_\alpha \left\langle \left(\frac{\lambda}{v} - i\mathbf{k}\Omega\right)^\alpha \right\rangle, & 1 < \alpha < 2, \\ \langle R \rangle \frac{\lambda}{v} + k^2 \left\langle \frac{R^2}{6} \right\rangle, & \alpha > 2. \end{cases}$$

В естественных переменных соответствующие уравнения принимают следующий вид:

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right)^\alpha \right\rangle N(\mathbf{r}, t) = S_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (32)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{A_\alpha}{v^{\alpha-1} \langle R \rangle} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right)^\alpha \right\rangle \right] N(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\langle R \rangle} S_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad \begin{cases} 1 < \alpha < 2, \\ \alpha > 2. \end{cases} \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{v \langle R^2 \rangle}{6 \langle R \rangle} \Delta \right) N(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\langle R \rangle} S_2(\mathbf{r}, t), \quad \alpha > 2. \quad (34)$$

Входящий в уравнения (32) и (33) псевдодифференциальный оператор может рассматриваться как дробная степень оператора материальной (полной) производной:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right)^\alpha N(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right)^{\alpha-1} N(\mathbf{r}, t) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \int_0^t \frac{N(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t-\tau), \tau)}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} d\tau. \end{aligned}$$

В случае однородного распределения частиц материальная производная дробного порядка от функции равна дробной производной Римана – Лиувилля по времени, а в стационарном случае — дробной производной по направлению.

Напомним, что уравнения (32), (33) описывают процессы супердиффузии первого и второго рода соответственно, причём (33) может быть ещё упрощено. Учитывая, что в представлении Фурье–Лапласа первый его член содержит λ в первой степени, а второй — в более высокой степени, можно сделать вывод, что при $\lambda \rightarrow 0$ слагаемым с λ во втором члене можно пренебречь и представить оператор в виде

$$\tilde{L}(\mathbf{k}, \lambda) \sim \langle R \rangle \frac{\lambda}{v} - A_\alpha \left\langle (-i\mathbf{k}\Omega)^\alpha \right\rangle, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Выполнив усреднение по направлениям в последнем члене,

$$\begin{aligned} \left\langle (-i\mathbf{k}\Omega)^\alpha \right\rangle &= \frac{1}{2} k^\alpha \int_{-1}^1 (-i\mu)^\alpha d\mu = \frac{i}{2} k^\alpha \int_i^{-i} z^\alpha dz = \\ &= \frac{i}{2(\alpha+1)} k^\alpha \left\{ \exp\left[-i(\alpha+1)\frac{\pi}{2}\right] - \exp\left[i(\alpha+1)\frac{\pi}{2}\right] \right\} = \\ &= \frac{A_\alpha \cos(\alpha\pi/2)}{\alpha+1} k^\alpha = -\frac{A_\alpha |\cos(\alpha\pi/2)|}{\alpha+1} k^\alpha, \quad 1 < \alpha < 2, \end{aligned}$$

придём к приближённому представлению ОАД-уравнения (32) в виде НАД-уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + D_\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} \right) N(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\langle R \rangle} S_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad 1 < \alpha < 2, \quad (35)$$

где

$$D_\alpha = \frac{A_\alpha |\cos(\alpha\pi/2)|}{v^{\alpha-1}(\alpha+1)\langle R \rangle}.$$

Наконец, третье уравнение представляет нормальную диффузию с коэффициентом диффузии

$$D_2 = \frac{v\langle R^2 \rangle}{6\langle R \rangle}.$$

В случае экспоненциального распределения свободных пробегов,

$$p_R(r) = \frac{1}{\langle R \rangle} \exp\left(-\frac{r}{\langle R \rangle}\right),$$

средний квадрат $\langle R^2 \rangle = 2\langle R \rangle^2$ и коэффициент диффузии принимает привычный вид:

$$D_2 = \frac{v\langle R \rangle}{3}.$$

Включение независимых ловушек степенного типа дополнит левые части этих уравнений частной производной по времени дробного порядка [81].

В заключение заметим, что решения приведённых выше уравнений не являются непрерывными функциями показателя α в области его значений: в точках $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ они изменяются скачкообразно. При $\alpha < 2$ коэффициент D_α не является коэффициентом диффузии и не переходит в него даже при $\alpha \uparrow 2$, поскольку D_α определяется асимптотическим поведением распределения пробегов при больших аргументах. Между тем классический коэффициент диффузии определяется дисперсией, которая при $\alpha = 2$ конечна, но при любом $\alpha < 2$ бесконечна, а значит, её предел при приближении α к 2 снизу тоже оказывается бесконечным и не может совпасть с классическим значением. Отсюда и разрыв.

3.5. Аномальные диффузионные распределения

Как видно из раздела 3.4, уравнения ОАД-модели имеют более сложный вид, чем уравнения НАД-модели, и решить их труднее. Есть, однако, одно несомненное преимущество ОАД-уравнений перед НАД-уравнениями: в силу ограниченности пространственной области ОАД-модели все моменты ОАД-уравнений конечны. Это не только открывает возможность применения такого испытанного в классической теории метода, как метод моментов, но и позволяет легко получить асимптотические оценки моментов в аналитическом виде.

В работах [85, 87] рассматривалась эволюция среднеквадратичного радиуса

$$\sqrt{\langle [R(t)]^2 \rangle} = \left[\int r^2 G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right]^{1/2}$$

диффузионного пакета со временем. Из уравнения (28) была найдена трансформанта Лапласа среднего квад-

рата,

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda t) \langle [R(t)]^2 \rangle dt = -\frac{\partial^2 \tilde{G}(\mathbf{k}, \lambda)}{\partial k^2} \Big|_{\mathbf{k}=0} \equiv -\tilde{G}''(0, \lambda),$$

с использованием асимптотик трансформант $p_R(\lambda)$ и $q_T(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$,

$$p_R(\lambda) \sim \begin{cases} 1 - A\lambda^\alpha, & 0 < \alpha < 1, \\ 1 - \langle R \rangle \lambda + C\lambda^\alpha, & 1 < \alpha \leq 2, \end{cases}$$

$$q_T(\lambda) \sim 1 - B\lambda^\beta, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

и с применением тауберовых теорем [42] было выполнено обратное преобразование, показавшее, что при $t \rightarrow \infty$

$$\langle [R(t)]^2 \rangle \sim \begin{cases} (1-\alpha)v^2 t^2, & \alpha < \beta < 1, \\ \frac{A(1-\alpha)v^2}{A+Bv^\alpha} t^2, & \alpha = \beta < 1, \\ \frac{2(1-\alpha)Av^{2-\alpha}}{B\Gamma(3-\alpha+\beta)} t^{2-\alpha+\beta}, & \beta < \alpha < 1, \\ \frac{2(\alpha-1)Cv^{2-\alpha}}{B\Gamma(3-\alpha+\beta)} t^{2-\alpha+\beta}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Из последней строки видно, что при $\alpha > 1$ и $\beta = \alpha - 1$ мы имеем нормальный закон расширения диффузионного пакета:

$$\langle [R(t)]^2 \rangle \sim 2(\alpha-1) \frac{C}{B} v^{2-\alpha} t.$$

Однако форма пакета отличается от нормальной и лишь при $\alpha = 2$, $\beta = 1$ совпадает с ней (квазинормальная диффузия становится нормальной). В случае $\beta < \alpha - 1$ пакет расплывается медленнее нормального (субдиффузионный режим), а в случае $\beta > \alpha - 1$ — быстрее (супердиффузия). Во всех остальных случаях условие $\alpha < 1$ порождает супердиффузию.

Работа [85] заканчивается следующими выводами. При $v = \infty$ средний квадрат распределения расходится и он не может быть использован в качестве характеристики ширины распределения. Таким образом, учёт конечности скорости движения между столкновениями в случае аномальной диффузии радикально изменяет асимптотическое поведение ширины диффузионного пакета при $t \rightarrow \infty$. При этом субдиффузия возникает только тогда, когда пробег имеет конечное значение (т.е. $\alpha > 1$), а время ожидания в ловушке распределено по степенному закону и выполняется условие $\beta < \alpha - 1$. При $\beta > \alpha - 1$, а также при любых $\alpha < 1$, $\beta < 1$ (средний пробег и среднее время ожидания бесконечны) имеет место супердиффузия. Линейная зависимость среднеквадратичного радиуса от времени при $\alpha \leq \beta$ означает, что основную роль в формировании асимптотического поведения здесь играет баллистический режим; при $\alpha \rightarrow 0$ мы получаем свободное движение частицы в чистом виде:

$$\sqrt{\langle [R(t)]^2 \rangle} \sim vt.$$

Обратимся теперь к распределениям. Выше отмечалось, что процесс супердиффузии в модели ОАД имеет два качественно различных режима: супердиффузию 1-го рода ($\alpha \in (0, 1)$) и супердиффузию 2-го рода ($\alpha \in (1, 2)$). Асимптотический анализ системы интегральных уравнений для процесса 2-го рода приводит к тому же дробно-

дифференциальному уравнению, что и для модели НАД, но с поправленным коэффициентом диффузии⁷.

Чтобы не загромождать обзор математическими выкладками, ограничусь качественными рассуждениями, приводящими к тому же результату [21]. Пусть T_i — длительность пребывания в ловушке перед i -м скачком, R_i — его случайная длина, тогда n -му скачку частицы соответствует случайный момент времени

$$\Theta_n = \sum_{i=1}^n \left(T_i + \frac{R_i}{v} \right).$$

В силу закона больших чисел можно положить

$$\Theta_n \approx t \sim \left(\langle T \rangle + \frac{\langle R \rangle}{v} \right) n.$$

Находя отсюда

$$n = \frac{t}{\langle T \rangle + \langle R \rangle / v}$$

и вводя обозначение

$$t_v = \frac{t}{1 + \langle R \rangle / \langle vT \rangle},$$

приходим к такому же распределению, как и в случае мгновенных скачков, но в смещённый момент времени:

$$G(\mathbf{r}, t) = [Dt_v^\beta]^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha, \beta)} \left(r [Dt_v^\beta]^{-1/\alpha} \right), \quad 1 < \alpha \leq 2.$$

Результат понятен: наличие конечной скорости свободного движения замедляет расширение диффузионного пакета по сравнению с таковым в процессе неограниченной диффузии, в котором $v = \infty$. Замена $t \rightarrow t_v$ как раз и учитывает (в асимптотическом смысле) это замедление. Удобно, впрочем, добавить корректирующий сомножитель к коэффициенту диффузии, введя обозначение

$$D_v = \frac{D}{(1 + \langle R \rangle / \langle vT \rangle)^\beta}$$

и записав результат в виде

$$G(\mathbf{r}, t) = [D_v t^\beta]^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha, \beta)} \left(r [D_v t^\beta]^{-1/\alpha} \right), \quad 1 < \alpha \leq 2. \quad (36)$$

Рисунок 15 демонстрирует применимость этой аппроксимации. Вначале, конечно, баллистические ограничения играют свою роль, ограничивая диффузионный пакет, но с течением времени баллистическая граница всё дальше уходит от пакета, расширяющегося с меньшей скоростью, и её влияние на форму распределения со временем убывает, а в асимптотике исчезает совсем (рис. 16). Таким образом, в процессе супердиффузии второго рода, который описывается ЛУ-моделью, учёт конечной скорости в асимптотике приводит лишь к изменению (уменьшению) коэффициента диффузии в уравнении, сохраняя вид самого решения, выраждающегося через сферически-симметричную трёхмерную устойчивую плотность и удовлетворяющего тому же дробно-

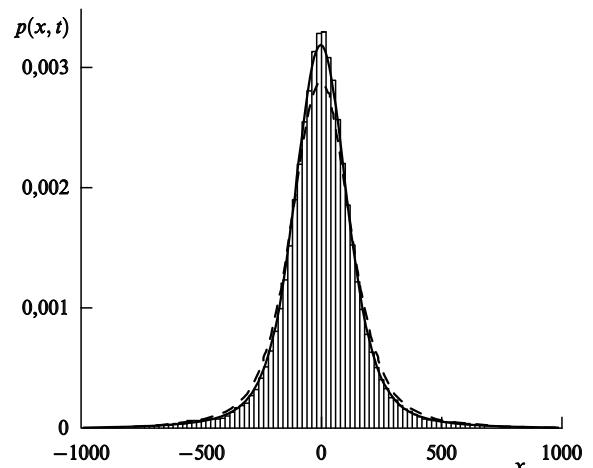


Рис. 15. Влияние конечной скорости на одномерное распределение в супердиффузии 2-го рода ($\alpha = 3/2$, $\beta = 1$, $\mu = 1$, $t = 10^3$). Штриховая кривая получена при $v = \infty$, сплошная кривая — результат расчёта по формуле (36) при $v = 5$, гистограмма — результат расчёта методом Монте-Карло для той же скорости $v = 5$ по 2×10^5 траекториям [21].

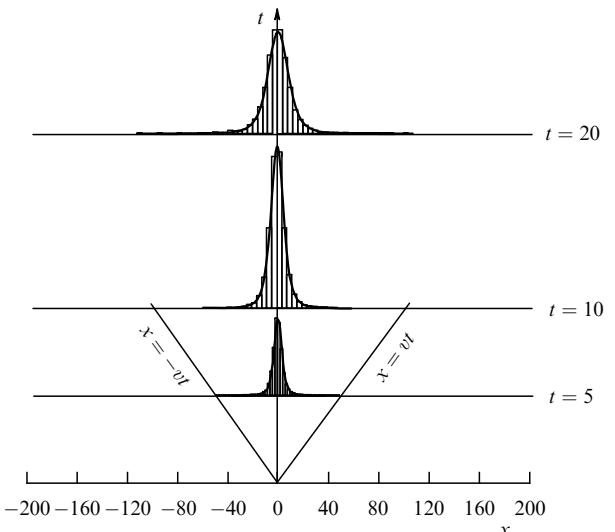


Рис. 16. Эволюция супердиффузионного пакета в процессе второго рода. Влияние скорости на форму распределения незаметно, само распределение быстро освобождается от "опеки" баллистических границ. Концентрация вероятности является максимальной в центре и практически исчезает задолго до достижения границы.

дифференциальному уравнению с поправленным коэффициентом.

Но этот вывод справедлив при выполнении двух условий. Во-первых, модифицированный процесс построен на основе скачкообразного процесса с мгновенными перелётами, сменяющимися состояниями покоя частицы, поэтому и в нём остаются состояния покоя, перемежающиеся теперь перелётами с конечной скоростью движения. В результате интервал времени между началом одного перелёта и началом следующего состоит из двух слагаемых, одним из которых является длительность пребывания частицы в ловушке, не зависящая от других переменных процесса, а другой пропорционален длине перелёта, что и создаёт частичные корреляции временных и пространственных интервалов, отсутствующие в исходном процессе. Ещё раз подчеркнём, что формула (36)

⁷ Речь идёт о центральной части распределений, хвосты, конечно, не могут быть совмещены никаким масштабным преобразованием.

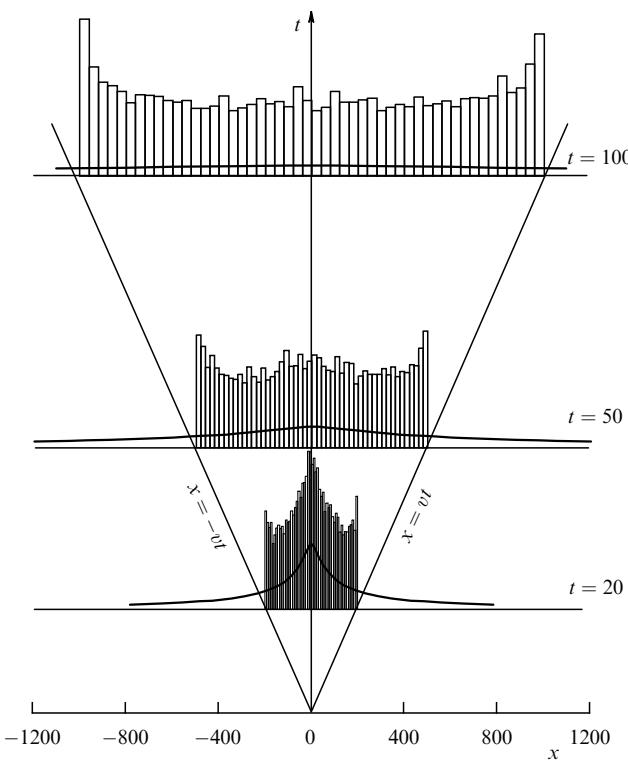


Рис. 17. Эволюция супердиффузионного пакета в процессе первого рода [21]. Конечная скорость оказывает радикальное влияние на распределение, придавая ему форму U-типа (гистограмма). При больших временах концентрация вероятности максимальна у баллистических границ и минимальна в центре. В случае $v = \infty$ распределение описывается быстро расплывающейся устойчивой плотностью (сплошные кривые вблизи горизонтальных осей).

является приближённой, выведенной при условии доминирующей роли ловушек. Вторым ограничением является условие $\alpha > 1$ (аномальная диффузия 2-го рода), которое использовалось при замене $\Theta_n \rightarrow t$.

При $\alpha < 1$ (процесс 1-го рода) ситуация коренным образом меняется, что легко увидеть из следующих соображений. Размер ("ширина") супердиффузионного пакета возрастает со временем пропорционально $t^{1/\alpha}$. Наличие конечной скорости обращает в нуль плотность распределения вне шара радиусом vt . При $\alpha < 1$ супердиффузионный пакет расплывается быстрее, чем vt (быстрее, чем при свободном движении!) и кинематическое ограничение становится основным фактором, определяющим асимптотическое распределение диффузионного пакета. Будучи ограниченным сферой радиусом vt , это распределение имеет совсем иной вид — W-образный при $\alpha > 1/2$ и U-образный при $\alpha < 1/2$ (см. [90], рис. 17, а также рис. 18, 25, приведённые ниже). Однако авторы ЛТ-версии, принимая $\alpha = 0,3$, по-прежнему используют неограниченное дробно-устойчивое распределение, уже не имеющее никакого отношения к рассматриваемому процессу. Аргументировать приемлемость этого шага можно было бы, если бы выбранный ими коэффициент в распределении времени пребывания в ловушках был настолько велик, что все рассматриваемые времена относились бы к начальному периоду процесса, в который диффузионный пакет ещё не дошёл до баллистических границ. Оставляя в стороне физическую интерпретацию столь одиозного предположения, отметим, что и в этом случае нет оснований для использования решений

дробно-дифференциальных уравнений: эти уравнения описывают асимптотическое поведение процесса, обусловленное большим числом переходов, а введение больших времён пребывания в ловушках сокращает это число и выводит процесс блужданий из асимптотической области, описываемой дробно-дифференциальным уравнением.

3.6. Корреляции пробег – время

Траектория заряженной частицы в межзвёздном магнитном поле представляет собой чрезвычайно сложную непрерывную вместе с её производной кривую в фазовом пространстве, описать которую в деталях можно дифференциальным уравнением в целых производных при условии столь же детального задания магнитного поля и других характеристик среды, влияющих на движение частицы. Излишне говорить, что такой информацией мы не располагаем.

Вернёмся ещё раз к идеи перехода от непрерывного описания к крупнозернистому описанию (см. раздел 3.1), сосредоточив внимание в этот раз на форме траекторий. Если бы речь шла об однородной среде, то элементы разбиения мало бы отличались друг от друга и в конечно-элементном представлении мы вновь пришли бы к аналогу классического диффузионного уравнения с несколько скорректированным вследствие укрупнения коэффициентом диффузии. Однако в действительности межзвёздная среда не просто неоднородна, её неоднородности имеют многомасштабный характер, о чём мы говорили во введении. Эта многомасштабность (фрактальность) структуры не позволяет выбрать такие размеры разбиения, при которых характеристики элементов можно было бы считать примерно одинаковыми. Выбрав один из таких элементов, мы обнаружим, что магнитное поле в соседних элементах оказывается на порядок меньше (и частица почти свободно уходит в далёкую область) или больше (и частица надолго застремляется в одном из элементов). Фрактальность структуры предполагает, что указанное свойство имеет место в широком диапазоне размеров разбиения. Но если пересечение поверхности раздела соседних элементов происходит мгновенно, то пересечение ряда крупномасштабных, почти прозрачных для частицы, элементов уже нельзя считать мгновенным: необходимо учесть затрачиваемое на переход время. Этим и отличается модель ОАД, учитывающая время, затраченное частицей на перемещение из одной ловушки в другую, от модели НАД, в которой такое перемещение считается мгновенным вне зависимости от его величины. Если понимать под T промежуток времени, разделяющий моменты попадания частицы в некоторый элемент разбиения и следующий непустой элемент, то T в модели ОАД будет состоять из двух слагаемых: времени T_0 пребывания частицы в первом элементе и времени T_1 , затраченного на переход в следующий, а в модели НАД — целиком из времени пребывания в ловушке. Длины пробегов и времена ожидания в обеих моделях независимы друг от друга, но времена перелёта в модели ОАД пропорционально пробегу (при постоянной скорости), и именно оно порождает корреляции между T и R :

$$T = T_0 + \frac{R}{v} .$$

Как показано в разделе 2.5, дробный порядок $\beta < 1$ производной по времени означает, что времена пребывания в ловушках распределены с плотностью, пропорциональной $t^{-\beta-1}$, $t \rightarrow \infty$, а дробный порядок лапласиана говорит о том, что пробеги распределены с плотностью, пропорциональной $r^{-\alpha/2}$, $r \rightarrow \infty$. Несвязанные слагаемые $(\partial/\partial t)^\beta$ и $(-\Delta)^{\alpha/2}$ в операторе уравнения НАД означают отсутствие корреляций между T и R и, как следствие, скачкообразный (разрывный) вид траекторий, тогда как наличие составного оператора $\langle(\partial/\partial t + v\nabla)^\alpha\rangle$ в уравнении ОАД свидетельствует о существовании $R-T$ -корреляций.

Включение в модель $R-T$ -корреляций:

1) превращает разрывные траектории в непрерывные, устранив тем самым такие нефизические фантомы, как длинные мгновенные перелёты и долгие пребывания в неподвижности, сменяемые мгновенным набором бесконечной скорости;

2) ограничивает пространственное положение частицы сферической областью радиусом vt с центром в начальной точке, что позволяет согласовать процесс с релятивистской концепцией, ограничивает закон расширения диффузионного пакета линейной скоростью и возвращает в арсенал вычислительных инструментов теории переноса метод моментов [88] (который ввиду расходимости моментов в модели НАД неприменим);

3) при $\alpha < 1$ существенно изменяет форму пространственного распределения, порождая всплески у баллистической границы $r = vt$ и преобразуя тем самым привычную колоколообразную форму диффузионного пакета в W-форму, а при $\alpha < 1/2$ — в U-форму.

Наиболее сильно различия между НАД- и ОАД-моделями проявляются при $\alpha, \beta < 1$, когда математические ожидания случайных переменных бесконечны и скачки пространственно-временных траекторий видны в любом масштабе. При $\alpha > 1$ и $\beta = 1$ ситуация иная: с увеличением размеров пространственно-временного обзора относительная роль скачков оказывается всё менее заметной и в случае многократного превышения математических ожиданий становится несущественной. Это хорошо видно на обычной броуновской траектории: несмотря на независимость пространственной и временной частей дифференциального оператора, эта траектория всюду непрерывна (хотя и не дифференцируема).

Чтобы прояснить роль $R-T$ -корреляций в рассматриваемой модели, проведём сравнение пропагаторов в ОАД- и НАД-моделях. В модели ОАД полагаем, что независимых ловушек нет ($T_0 = 0$), поэтому имеется полная корреляция между T и $R = vt$, так что их распределения с точностью до масштабного множителя v (который мы примем равным 1) совпадают. В модели НАД $v = \infty$ и случайные переменные $T \equiv T_0$ и R полностью независимы. Примем для них то же распределение $P(R > x) = P(T > x) \propto x^{-v}$, $v > 0$, отметив, что в данном случае

$$\alpha = \begin{cases} v, & v \leq 2, \\ 2, & v > 2, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} v, & v \leq 1, \\ 1, & v > 1. \end{cases}$$

Принципиальное различие между пропагаторами исчезает только при $v > 2$. Из рисунка 18, на котором представлены результаты сравнения расчётов одномерных и трёхмерных блужданий в обеих моделях, видно, что при $v \leq 1$ $R-T$ -корреляции радикально изменяют

процесс: пропагаторы различаются формой, законом расширения, поведением вблизи баллистических границ и вблизи источника излучения (мы вернёмся к этим распределениям при изучении одномерных блужданий вдоль силовых линий в разделе 4.5). При $1 < v < 2$ (аномальная диффузия 2-го рода) различия менее существенны, хотя и довольно заметны: в одном случае распределения ограничены, в другом — нет, в модели ОАД появляется фронт вблизи области $|\mathbf{r}| = vt$, плотности различаются количественно вблизи источника.

3.7. Анизотропия

В рамках стандартной диффузионной теории коэффициент анизотропии потока, определяемый отношением плотности тока $J_r = J$ к плотности потока vN частиц,

$$\delta(r, t) = 3 \frac{J(r, t)}{vN(r, t)}, \quad (37)$$

на расстоянии r от точечного мгновенного источника в однородной безграничной среде определяется известной формулой [10]:

$$\delta(r, t) = \frac{3r}{2vt}. \quad (38)$$

Следует отметить: 1) вывод формул (37), (38) *a priori* предполагает слабую анизотропию потока в рассматриваемой точке; 2) само диффузионное приближение применимо для описания процесса блужданий при довольно больших временах, когда частица совершил достаточно большое число перелётов для того, чтобы распределение суммарного смещения вышло на асимптотический режим.

В случае anomальной диффузии основанный на обычном законе Фика вывод, естественно, несправедлив, однако того факта, что уравнения anomальной диффузии сохраняют автомодельность своих решений, оказывается достаточно, чтобы найти общее выражение связи между током и концентрацией, даже не конкретизируя вида автомодельного решения. Согласно физическому смыслу величины J , в условиях сферически-симметричной задачи

$$J(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} \int_r^\infty N(r, t) r^2 dr. \quad (39)$$

Подставляя в (39) $N(r, t) = G(\mathbf{r}, t)$ из (36) и производя под знаком интеграла замену переменной $r(Dt^\beta)^{-1/\alpha} \rightarrow \xi$, находим

$$\begin{aligned} \int_r^\infty N(r, t) r^2 dr &= \int_r^\infty [Dt^\beta]^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha, \beta)}(r [Dt^\beta]^{-1/\alpha}) r^2 dr = \\ &= \int_{r(Dt^\beta)^{-1/\alpha}}^\infty \Psi_3^{(\alpha, \beta)}(\xi) \xi^2 d\xi. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (39) и проводя дифференцирование, получим простую формулу для плотности тока:

$$J(r, t) = N(r, t) \frac{\beta}{\alpha} \frac{r}{t}.$$

Следовательно, отношение плотности тока J к концентрации N выражается простой общей формулой для любой (не обязательно дробно-устойчивой) автомодель-

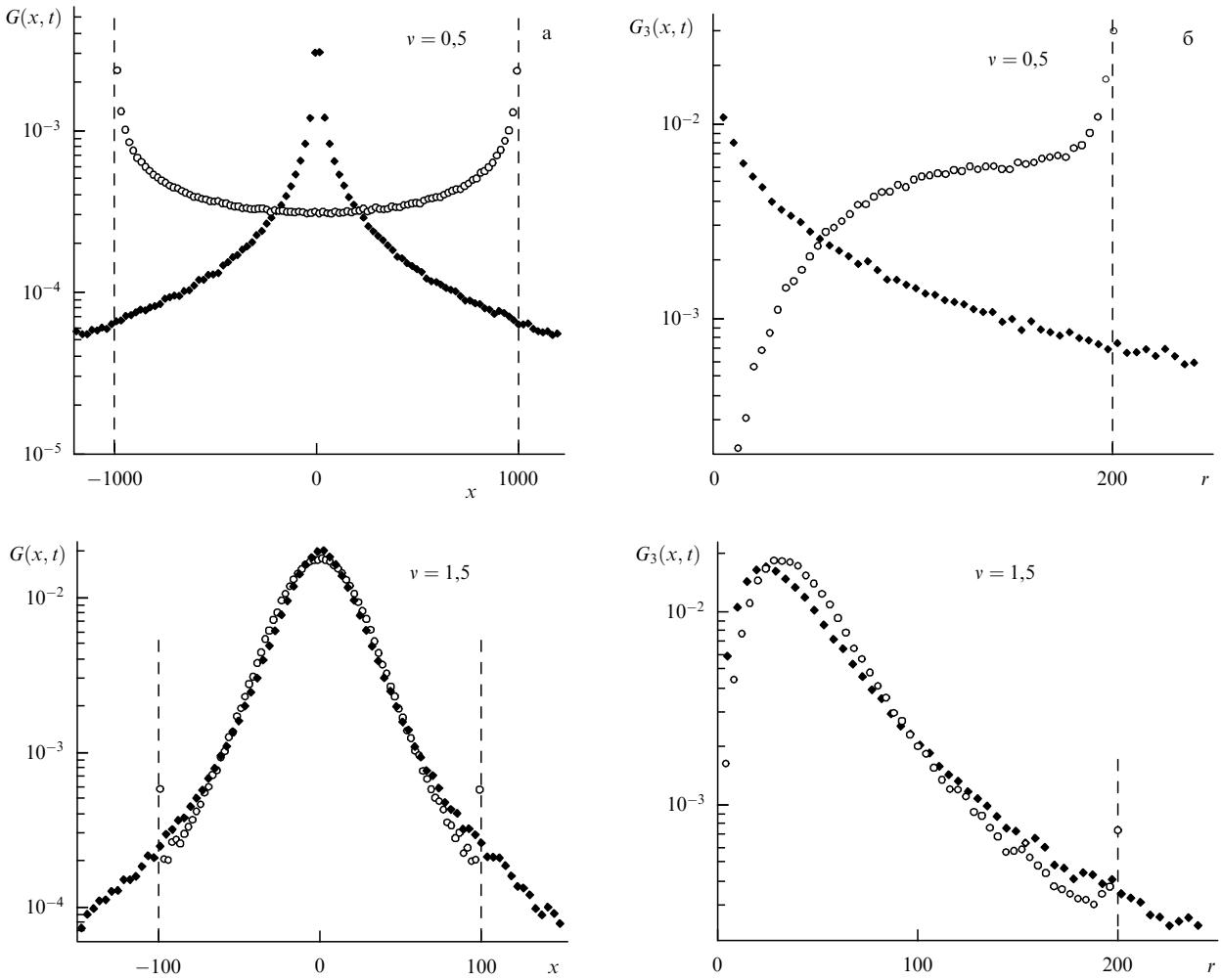


Рис. 18. Влияние корреляций пробег – время на форму одномерных (а) и трёхмерных (б) пропагаторов. Тёмные символы соответствуют процессу с независимыми R и T , светлые — процессу с линейной зависимостью $R = vt$. Вертикальные прямые $x = \pm vt$ указывают границы распределений.

ной концентрации $N(r, t) = t^{-3\beta/\alpha} \Phi(rt^{-\beta/\alpha})$:

$$\frac{J(r, t)}{N(r, t)} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{r}{t}.$$

Если бы все частицы непрерывно двигались с постоянной и одинаковой по величине скоростью v , то коэффициент анизотропии тоже имел бы модельно-независимый вид:

$$\delta(r, t) = 3 \frac{J(r, t)}{vN(r, t)} = 3 \frac{\beta}{\alpha} \frac{r}{vt}. \quad (40)$$

В статье [73], описывающей ЛТ-версию дробно-дифференциальной модели, так и сделано: для анизотропии в этой модели была использована классическая формула (37), в которой концентрация N заменена произведением kN_{near} , где k — число ближайших источников, N_{near} — концентрация, создаваемая одним из них. Однако очевидно, что движение частиц в этом случае никак не удовлетворяет указанному условию непрерывности. Наоборот, в ЛТ-модели концентрация частиц, находящихся в данный момент в движении, равна нулю, а скорость частиц, совершающих мгновенные перелёты, бесконечна. Это порождает неопределенность произведения vN , игнорирование которой может привести к

любому результату. Другое соображение, заставляющее с осторожностью отнестись к общей формуле (40), сводится к тому, что она точна по отношению к дробно-дифференциальному уравнению, но само это уравнение представляет собой лишь асимптотику системы приведённых в разделе 3.4 интегральных уравнений. Интегральные уравнения включают в себя распределения пробегов и временных интервалов между перелётами и поэтому адекватно описывают случайные блуждания с заданными характеристиками, тогда как дробно-дифференциальное уравнение содержит некий экстракт этой информации в коэффициенте диффузии, где уже невозможно отделить характеристики длин перелётов от времён ожидания. Если относиться к данной модели менее формально, то следует признать, что представление о неподвижности частиц в ловушках не может соответствовать действительности. Просто речь идёт об области, которую частица лишь с трудом может покинуть из-за малого значения коэффициента диффузии, чрезвычайно запутывающего её траекторию, вдоль которой она может продолжать движение с той же скоростью v (что для лёгких частиц — электронов, позитронов — даёт завышенное синхротронное излучение). В этом случае мы должны раздельно рассматривать анизотропию в

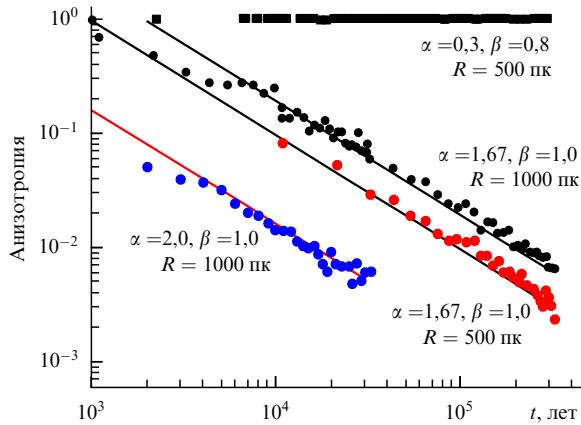


Рис. 19. Коэффициент анизотропии от точечного мгновенного источника в зависимости от времени в трёх моделях: классической ($\alpha = 2, \beta = 1$), супердиффузии 2-го рода ($\alpha = 1,67, \beta = 1$), аномальной диффузии первого рода (ЛТ-версия: $\alpha = 0,3, \beta = 0,8$). Наклонные прямые — результаты расчёта по формуле (40), кружки — результаты, полученные методом Монте-Карло. R — расстояние от источника.

точке, находящейся в ловушке (когда N означает полную концентрацию), и анизотропию в точке, находящейся вне ловушки (когда N представляет собой концентрацию не подверженных влиянию ловушек частиц).

В значительной части эти проблемы снимаются в рамках кинетической модели СБНВ: введение конечной скорости перелётов даёт конечные интервалы времени, в течение которых частицы находятся в состоянии движения. В случае диффузии второго рода ($1 < \alpha < 2$) эта процедура не изменяет формы распределения, а корректирует лишь коэффициент диффузии. Что касается аномальной диффузии первого рода ($\alpha < 1$), то тут ситуация иная. ЛТ-версия неприменима, а вычисление пропагатора с учётом конечной скорости при $\alpha < 1$ представляет собой более сложную задачу. Из качественных соображений можно сделать вывод, что при $\alpha < \beta$ (напомним, что в ЛТ-версии $\alpha = 0,3$ и $\beta = 0,8$) диффузионный пакет представляет собой сферическую оболочку небольшой толщины, прилегающую с внутренней стороны к фронту $r = vt$. Такое поведение близко к баллистическому режиму (и переходит в него при $\alpha \rightarrow 0$). Это объясняется присутствием в траектории лидирующего пробега, многократно отличающегося от остальных по длине и поэтому имеющего наибольшую вероятность пересечь сферу наблюдения. Вследствие совокупной малости остальных пробегов пересечение происходит практически вдоль радиуса и действительный коэффициент анизотропии в версии ЛТ близок к единице (рис. 19, верхняя прямая). Заметим, что если бы даже ЛТ-версия соответствовала действительности, то блуждания с такими длинными пробегами всё равно не имело бы смысла рассматривать без учёта процессов на границах Галактики.

3.8. Достижение границы галактического диска

Ввиду определённых трудностей учёта граничных условий в нелокальных задачах (см. раздел 6.2) мы выполнили предварительные расчёты аномальной диффузии в галактическом диске методом Монте-Карло, который просто воспроизводит движение частиц в ограниченной среде и по этой причине требует лишь задания характеристик самих границ; никаких специальных проблем с их

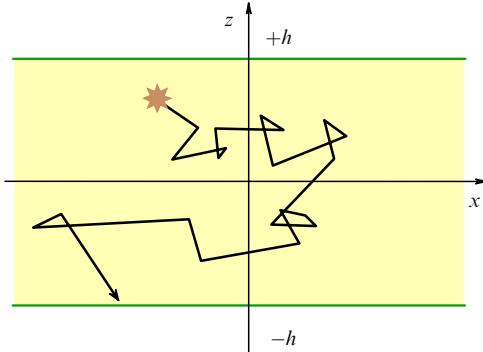


Рис. 20. Галактический диск как плоский бесконечный слой.

учётом не возникает. Ограничившись рассмотрением сугубо модельной задачи — определения пути и времени первого достижения частицей границы диска [91, 92], мы провели сопоставление результатов, получаемых в рамках трёх моделей: стандартной модели Гинзбурга — Сыроватского (ГС), ЛУ-модели ($\alpha = 1,67, \beta = 1,00, v = c, D_{0;1.67} = 2,4 \times 10^{-3}$ пк^{1.67} год⁻¹) и ЛТ-версии ($\alpha = 0,3, \beta = 0,8, v = \infty, D_{0;0.3} = 4 \times 10^{-6}$ пк^{0.3} год^{-0.8}). Известно, что большая доля частиц покидает галактический диск через его основания [6, 93], поэтому мы рассмотрели изотропное блуждание частиц в бесконечно протяжённом слое толщиной $2h = 300$ пк с полуопрозрачными границами (рис. 20).

Вводя обозначения: t_1 — среднее время первого достижения границы, t_2 — средний интервал времени между последовательными выходами на границу (ту же или противоположную), ε — коэффициент прозрачности зеркально отражающей границы (падая на границу, частица отражается от неё с вероятностью $1 - \varepsilon$, при этом угол отражения равен углу падения), получим следующее выражение для среднего времени t_G пребывания частицы в галактическом диске:

$$\begin{aligned} t_G &= \varepsilon t_1 + \varepsilon(1 - \varepsilon)(t_1 + t_2) + \varepsilon(1 - \varepsilon)^2(t_1 + 2t_2) + \dots = \\ &= t_1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)t_2. \end{aligned}$$

На рисунке 21 показаны плотности распределения вероятности для времени $p(t_1)$ и пути $p(s_1)$ до первого достижения границы при равномерном распределении точки рождения частицы в слое для моделей ГС ($\alpha = 2$), ЛУ ($\alpha = 1,7$) и ЛТ ($\alpha = 0,3$), а также для свободного баллистического движения (некоторыми авторами оно рассматривалось как приемлемый вид движения в модели протекающего ящика (см., например, [94])). Видно, что распределение s , даваемое ЛТ-версией, в несколько раз уже диффузионных и оно практически совпадает с баллистическим (это согласуется с близкой к единице анизотропией в ЛТ-версии). В то же время распределение t_1 оказывается на порядок более широким по сравнению с таковым в ГС-модели, что объясняется неоправданно большим временем пребывания частиц в ловушках. Время до полного выхода возрастает ещё на порядок. В результате, как показывают расчёты, распределение частиц от точечного мгновенного источника в ЛТ-версии не становится равномерным (по поперечной координате) распределением в галактическом диске даже

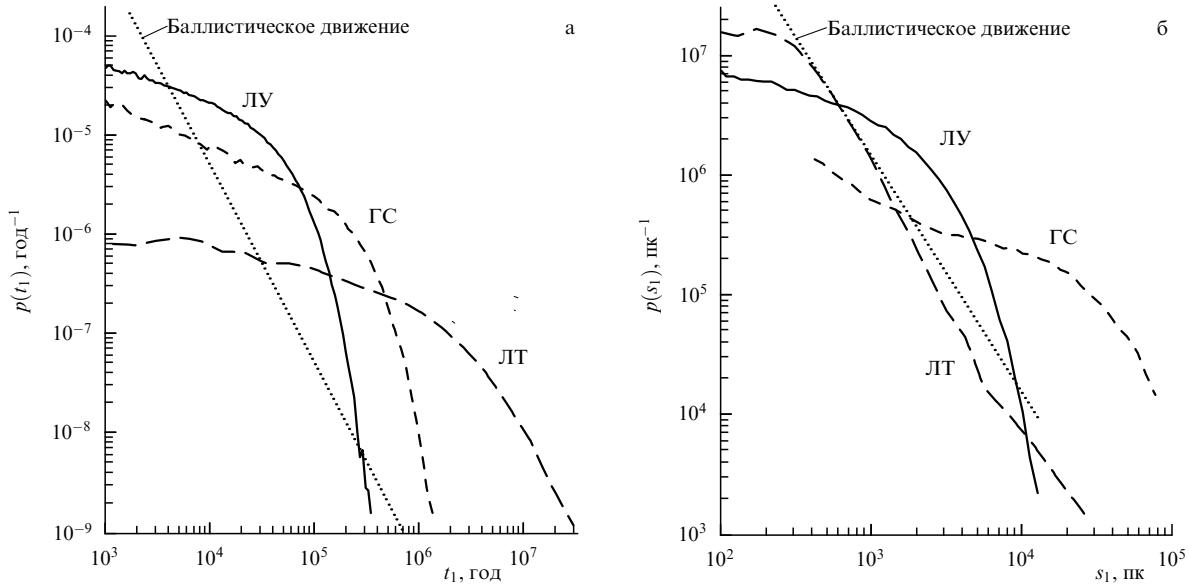


Рис. 21. Распределение времени (а) и пройденного пути (б) до момента первого достижения границы.

за 10^7 лет, тогда как в ЛУ-модели процесс релаксации к равномерному распределению завершается менее чем за 10^5 лет.

4. Анизотропная аномальная диффузия

4.1. Составная модель диффузии

Рассматривая движение частиц космических лучей в областях ограниченных размеров, характеризуемых относительно небольшими флуктуациями направления и величины межзвёздного магнитного поля, мы представляем себе магнитные силовые линии, на которые навиваются траектории заряженных частиц; вдоль них движутся ведущие центры частиц, замедляя своё движение перед "пробками", отражаясь от них и направляясь затем в обратную сторону. Силовые линии при этом не остаются неподвижными, они смещаются, изгибаются, перенося с собой движущиеся около них заряженные частицы; расстояния между сгущениями и переключениями линий изменяются, усложняя движение частицы вдоль блуждающих (в пространстве и времени) силовых линий. Проследив за совокупностью таких линий, проходящих через окрестность точки О (рис. 22), мы увидим, как они начинают расходиться между собой, демонстрируя статистический ансамбль, описание которого посвящено много работ.

Гетманцев [7] предложил чисто феноменологическую модель, представив ансамбль магнитных силовых линий как семейство независимых трёхмерных траекторий, состоящих из последовательных независимых отрезков случайной длины и случайных направлений, вдоль которых частицы совершают одномерное блуждание диффузионного типа. Результатом такой составной диффузии (compound diffusion) оказалось замедление диффузии в поперечных направлениях:

$$\langle R_\perp^2(t) \rangle \propto t^{1/2}.$$

Впрочем, это замедление обусловлено предположением о диффузионном характере движения частиц вдоль

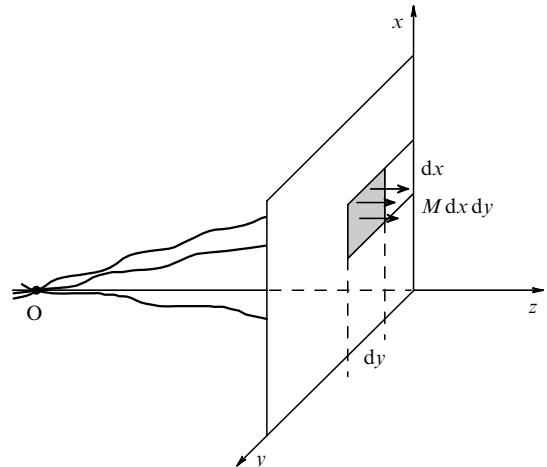


Рис. 22. Ансамбль магнитных силовых линий.

силовых линий: если допустить свободное движение вдоль них, то мы вернёмся к асимптотически нормальной диффузии (при условии, что средний квадрат длины отрезков конечен).

Позднее к составной модели обращались при решении задачи о движении частиц в слабонеоднородном магнитном поле (см., например, [4, 10, 13, 95–97]). В простейшей постановке рассматривалась область в однородном стационарном поле со средним значением

$$\langle \mathbf{H} \rangle \equiv \mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z$$

и автокорреляционной функцией

$$\langle H_i(z_2) H_j(z_1) \rangle = \langle \delta H_i(z_2) \delta H_j(z_1) \rangle = H_0^2 C_{ij}(\zeta), \quad (41)$$

$$\zeta = |z_2 - z_1|.$$

Единственный случайный процесс, полностью определяемый этими двумя характеристиками (средним значением и корреляционной функцией), — это гауссов процесс, частным случаем которого является броуновское

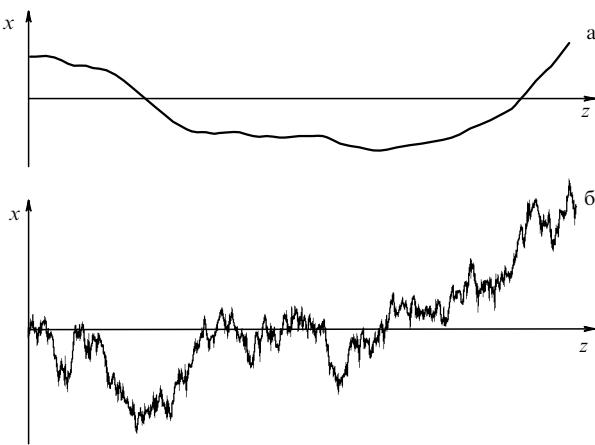


Рис. 23. Броуновская силовая линия по представлению авторов [13] (а) и её действительная реализация (б).

движение, характеризующееся независимыми приращениями и плотностью распределения, удовлетворяющей стандартному диффузионному уравнению

$$\frac{\partial M}{\partial z} = D_L \Delta_{\perp} M(x, y, z)$$

с коэффициентом диффузии $D_L > 0$. Вдоль одной из реализаций этого ансамбля, продолженной в область $z < 0$ симметричным (в статистическом смысле) образом, и диффундирует (в модифицированной компаунд-модели [10, 13]) частица с продольным коэффициентом диффузии D_{\parallel} , при этом опять

$$\langle R_{\perp}^2(t) \rangle \simeq D_L (D_{\parallel} t)^{1/2}.$$

Следует отметить, однако, что ансамбль броуновских траекторий — нигде не дифференцируемых кривых фрактального типа [98] с независимыми приращениями (рис. 23) — трудно совмещается с представлением о магнитных силовых линиях. Если вернуться к кусочно-гладким линиям Гетманцева, но движение частиц принять односторонним с постоянной скоростью вдоль этих линий, то мы получим нормальный диффузионный режим поперечных смещений частиц в асимптотике больших времён. К этому же приводят и анализ, выполненный Зыбиним и Истоминым на основе кинетического уравнения [18].

Чтобы приблизиться к реальным свойствам магнитного поля межзвёздной среды, Шалчи и соавторы [99–101] представили автокорреляционную функцию (41) через фурье-компоненты флуктуаций магнитного поля:

$$C_{xx}(z) = \frac{1}{(2\pi)^6} \times \\ \times \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \left\langle \delta \widetilde{H}_x(\mathbf{k}) \delta \widetilde{H}_x^*(\mathbf{k}') \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{R}(z) - \mathbf{k}'\mathbf{R}(0))] \right\rangle.$$

Используя затем гипотезу независимости Коррсина [102] и пренебрегая корреляцией компонент поля с различными волновыми векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' , авторы получили

$$C_{xx}(z) = \int \langle \exp(-i\mathbf{k}\Delta\mathbf{R}(z)) \rangle P_{xx}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \\ P_{xx}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-6} \left\langle |\delta \widetilde{H}_x(\mathbf{k})|^2 \right\rangle,$$
(42)

где $\Delta\mathbf{R}(z) = \mathbf{R}(z) - \mathbf{R}(0)$ — случайный вектор поперечного смещения, по которому и производится усреднение экспоненты. В результате они пришли к формуле

$$\langle (\Delta X(z))^2 \rangle \equiv \frac{2}{H_0^2} \int_0^z (z - \zeta) C_{xx}(\zeta) d\zeta = \frac{2}{H_0^2} \int d\mathbf{k} P_{xx}(\mathbf{k}) \times \\ \times \int_0^z (z - \zeta) \cos(k_{\parallel}\zeta) \exp\left[-\frac{1}{2} \langle (\Delta X(\zeta))^2 \rangle k_{\perp}^2\right] d\zeta,$$

дающей основу для более естественной модели блуждающих силовых линий. Эти вычисления были продолжены ими в рамках гибридного подхода, когда турбулентное осесимметричное поле описывается комбинацией одномерной плоской ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$) и двумерной перпендикулярной ($\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$) компонентами,

$$P_{xx}(\mathbf{k}) = g'(k_{\parallel}) \frac{\delta(k_{\perp})}{k_{\perp}} + g''(k_{\perp}) \frac{\delta(k_{\parallel})}{k_{\perp}} \left(1 - \frac{k_x^2}{k^2}\right),$$

где

$$g'(k_{\parallel}) = \frac{c(v)}{2\pi} \frac{l' \delta H_{1D}^2}{(1 + k_{\parallel}^2 l_{\parallel}^2)^v}, \quad g''(k_{\perp}) = \frac{2c(v)}{\pi} \frac{l'' \delta H_{2D}^2}{(1 + k_{\perp}^2 l_{\perp}^2)^{2v}}, \\ c(v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(1 - v/2)},$$

$2v$ — спектральный индекс в инерционном интервале. Соединение этих компонент и пренебрежение асимптотически малым (при $z \rightarrow \infty$) слагаемым привели к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} \langle (\Delta X(z))^2 \rangle = \frac{2\pi g''(0)}{H_0^2} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \langle (\Delta X(z))^2 \rangle k_{\perp}^2\right] dk_{\perp} = \\ = \frac{2\pi}{H_0^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{g''(0)}{\sqrt{\langle (\Delta X(z))^2 \rangle}},$$

решение которого

$$\langle (\Delta X(z))^2 \rangle \sim \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{9\pi g''(0)}{2H_0^2} \right)^{2/3} z^{4/3}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (43)$$

показывает, что учёт автокорреляций магнитных силовых линий в рамках гипотезы Коррсина приводит к *супердиффузионному* поведению поперечных смещений. Заметим, что здесь переменная z представляет собой не время, а продольную координату, так что возникающая "супердиффузионность" характеризует не развитие диффузионного процесса во времени, а быстрое расходжение пучка магнитных силовых линий в пространстве. В результате разложение смещения частицы на *независимые* продольную и поперечную компоненты становится несовместимым с асимптотическим режимом искомого решения. В этом случае удобно перейти от прямолинейной координаты z к криволинейной координате s , отсчитываемой вдоль силовой линии, и в конце концов — к модели изотропно блуждающих линий. Использование для их моделирования непрерывных ломаных с прямолинейными отрезками случайной длины ("пробегами") позволяет отразить крупномасштабные корреляции магнитных полей, используя нежэкспоненциальные распределения для пробегов. Подходящими для этой цели являются асимптотически степенные распределения,

представляющиеся вполне естественным продолжением закономерностей крупномасштабной турбулентности.

Ещё одна причина, по которой не следует ожидать надёжных результатов от компаунд-модели на больших масштабах, — это ограниченные возможности аналитического аппарата. Основным средством анализа движения частиц в случайных неоднородных полях является теория возмущений, точнее теория малых возмущений. Мой собственный опыт работы с этим аппаратом привёл к убеждению, что на него можно положиться только тогда, когда обусловленная возмущением вычисляемая поправка не превышает 10–15 % от исходного (невозмущённого, т.е. уже известного) решения. Всё, что превышает эту величину, — уже "от лукавого". В задачах атомной и ядерной физики этот метод очень эффективен: оптические измерения проводятся с чрезвычайно высокой точностью и поправки теории возмущений "ложатся в строку". Но в физике космических лучей мы оперируем обычно с порядками величин и методы, обладающие столь узким диапазоном применимости, как теория малых возмущений, в глобальных задачах, в которых возмущения становятся соизмеримыми с характеристиками невозмущённой среды, существенной пользы не приносят.

4.2. Дробно-брюновская модель силовых линий

Принимая модель, в которой средний квадрат смещения конечен, но возрастает быстрее, чем в модели нормальной диффузии, мы возвращаемся к ричардсоновой идеи описания турбулентной супердиффузии (теперь, правда, не самих частиц, а блюжающих силовых линий) в рамках традиционного математического аппарата (без дробных производных), но с переменным коэффициентом диффузии. Удивительным образом, однако, оказывается, что при степенном возрастании коэффициента диффузии мы вновь попадаем в сферу действия дробно-дифференциальных операторов. Дело в том, что существуют два дополняющих друг друга способа описания случайного движения частиц. Один из них, являющийся главным инструментом в настоящем обзоре, основан на *методе плотности распределения*⁸ и связан с именами Максвелла, Больцмана, Эйнштейна, Фоккера, Планка, Боголюбова и др.

Пусть $X(t)$ — случайная координата движущейся частицы в момент t , $1_{\Delta x}(x')$ — индикаторная функция элемента Δx , равная 1, когда $x' \in \Delta x$, и нулю в противном случае. Простейшая (одновременная) плотность $f(x, t)$ определяется усреднением индикаторной функции по ансамблю траекторий частиц:

$$f(x, t)\Delta x \approx P(X(t) \in \Delta x) = \langle 1_{\Delta x}(X(t)) \rangle,$$

и затем для неё выводится и решается *кинетическое уравнение* (Больцмана, Эйнштейна, Фоккера–Планка, Боголюбова и др.).

В альтернативном подходе (Ланжевен, Стратонович, Ито и др.) сначала рассматривается уравнение для случайной координаты (*стохастическое уравнение*) типа уравнения Ньютона

$$m \frac{dX(t)}{dt} = F(t)$$

⁸ В физике плотности распределения часто называют функциями распределения.

со *случайной силой* в правой части. Задав подходящие свойства случайного процесса $F(t)$ и решив это уравнение, можно исследовать свойства решения как ансамбля случайных функций (изучать корреляции и моментные функции высших порядков, вероятности различных событий, например времени первого достижения границы и др.). Именно в этом, *стохастическом*, подходе появятся теперь дробные операторы, изгнанные из *кинетического*. Рассмотрим стохастический подход подробнее.

Несколько обобщив формулу (43) заменой показателя $4/3$ произвольным значением $2H$, координаты z — криволинейной координатой s , отсчитываемой вдоль магнитной силовой линии,

$$\langle (\Delta X(s))^2 \rangle = K s^{2H},$$

запишем распределение x -координаты точки s плоской силовой линии в виде обычного распределения гауссовой плотности:

$$f^H(x, s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K s^{2H}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4K s^{2H}}\right). \quad (44)$$

Это распределение удовлетворяет нормальному диффузионному уравнению с переменным коэффициентом диффузии

$$\frac{\partial f^H(x, s)}{\partial s} = 2HKs^{2H-1} \frac{\partial^2 f^H(x, s)}{\partial x^2}$$

и начальному условию

$$f^H(x, 0) = \delta(x).$$

Распределение $f^H(x, s)$, не являясь само решением уравнения в дробных производных, характеризует ансамбль траекторий *дробного броуновского движения* $B^H(s)$ — немарковского гауссова процесса с нулевым средним и корреляционной функцией, которая, в отличие от корреляционной функции обычного броуновского движения

$$\langle B(s_1)B(s_2) \rangle = \frac{1}{2}(|s_1| + |s_2| - |s_1 - s_2|),$$

имеет вид⁹

$$\langle B^H(s_1)B^H(s_2) \rangle = \frac{1}{2}(|s_1|^{2H} + |s_2|^{2H} - |s_1 - s_2|^{2H})$$

(см. [103–105]). Как и обычное броуновское движение, его дробный аналог является самоподобным процессом, а значение параметра Хёрста определяет порядок самоподобия процесса, $B^H(as) \stackrel{d}{=} a^H B^H(s)$ ($\stackrel{d}{=}$ означает равенство распределений случайных величин, а не их значений). Параметр H характеризует также тип памяти процесса: долговременная память (персистентное движение или супердиффузия) при $H > 1/2$ и кратковременная

⁹ Подчеркнём, во избежание недоразумений, что $B(s)$ здесь обозначает броуновский процесс, а не магнитную индукцию, H — показатель Хёрста, а не напряжённость поля, нижний индекс + у скобок (см. ниже) означает, что отрицательные значения содержимого скобок заменяются нулем. Показатель Хёрста, определяющий закон возрастания размеров диффузионного пакета $\propto s^H$, одновременно является и фрактальной размерностью траектории аномального процесса.

память (антиперсистентное движение, субдиффузия) при $H < 1/2$. При $H = 1/2$ процесс является обычным броуновским движением (память отсутствует: приращения не зависят от предыстории).

Чтобы прояснить специфику этого случайного процесса, заметим, что классическое броуновское движение при $t \geq 0$ можно представить в виде интеграла от белого шума $\xi(s)$,

$$B_+(s) = \int_0^s \xi(s') ds' \equiv {}_0I_s \xi(s), \quad s > 0,$$

свойства и способы моделирования которого хорошо известны. Дробное броуновское движение было введено в работе [104] путём замены обычного интегрального оператора его дробным аналогом,

$$\begin{aligned} B_+^H(s) &= {}_0I_s^{H+1/2} \xi(s) \equiv \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_0^s (s-s')^{H-1/2} \xi(s') ds' = \\ &= \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_0^s (s-s')^{H-1/2} dB_+(s'), \end{aligned} \quad (45)$$

распространённым на всю вещественную ось. Процесс (45) можно назвать условным дробным броуновским движением, заданным при $B_+(s) = 0$, $s \leq 0$. Продолжить этот процесс на всю временну́ю ось никакой проблемы не составляет: достаточно присоединить к нему отражённый во времени *независимый* процесс $B_+(-s)$:

$$B(s) \stackrel{d}{=} \begin{cases} B_+(s), & s > 0, \\ B_+(-s), & s < 0. \end{cases}$$

Проблемы не возникло потому, что броуновское движение на соседних интервалах независимо, надо было только обеспечить его непрерывность, но это произошло автоматически, поскольку броуновское движение удовлетворяет нулевому начальному условию в один момент времени: $t = 0$. Однако дробное броуновское движение характеризуется корреляциями приращений, и его поведение на положительной временну́й полусоси будет зависеть от его предыстории на отрицательной, $t < 0$, а не только от значения в момент $t = 0$. Аккуратное "пришивание" этой прошлой части процесса [104, 105] даёт

$$B^H(s) = \frac{1}{C(H)} \int_{-\infty}^{\infty} [(s-s')_+^{H-1/2} - (-s')_+^{H-1/2}] dB(s'),$$

где

$$C(H) = \frac{\Gamma(H+1/2)}{\sqrt{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}}.$$

Данный процесс также выражается через дробный интеграл от белого шума $\xi(s) = \dot{B}(s)$ формулой

$$B^H(s) = \frac{\Gamma(H+1/2)}{C(H)} \int_0^s {}_{-\infty}I_s^{H-1/2} \dot{B}(s') ds',$$

вытекающей из лагранжевой сопряжённости дробных операторов

$$(\varphi, {}_{-\infty}I_s^\alpha \psi) = ({}_sI_\infty^\alpha \varphi, \psi)$$

и легко проверяемого равенства

$$\Gamma(\alpha+1) {}_sI_\infty^\alpha 1_{[a,b]}(s) = (b-s)_+^\alpha - (a-s)_+^\alpha,$$

где $(c-s)_+^\alpha = (c-s)^\alpha 1_{+}(c-s)$. Поскольку переход к дробному типу процесса связан с интегрированием траектории по её предыстории (включение памяти), броуновские линии, изломанные во всех своих точках и не содержащие ни единого сколь угодно малого гладкого участка, локально сглаживаются и становятся приемлемыми для имитации реальных силовых линий, а переменная s обретает смысл действительной длины. Заметим, что этот переход содержит параметр Хёрста, манипулируя которым, можно в значительной степени регулировать свойства всего ансамбля.

В рассмотренной выше модели турбулентного расхождения магнитных силовых линий (43) роль времени играет длина s отрезка линии, при малых значениях близкая к длине отрезка, соответствующего оси z , а показатель Хёрста $H = 2/3$. Это соответствует распределению

$$f(x, s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Ks^{4/3}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Ks^{4/3}}\right), \quad s > 0,$$

удовлетворяющему уравнению

$$\frac{\partial f(x, s)}{\partial s} = \frac{4}{3} Ks^{1/3} \frac{\partial^2 f(x, s)}{\partial x^2}$$

с начальным условием

$$f(x, 0) = \delta(x).$$

4.3. Поперечная диффузия в дробных операторах

Вернёмся теперь к расчётам, выполненным в приближении малых возмущений, не столько для того, чтобы реабилитировать их в отношении описания процесса галактической диффузии космических лучей (применимость этого приближения в локальных задачах со слабо неоднородным магнитным полем не подвергается сомнению), сколько потому, что именно в таких расчётах впервые появились уравнения переноса космических лучей с дробными производными.

Начиная с бесстолкновительного уравнения Власова для заряженных частиц в электромагнитном поле

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}],$$

отделяя флуктуации от средних,

$$\mathbf{H} = \langle \mathbf{H} \rangle + \mathbf{H}_1, \quad \langle \mathbf{H}_1 \rangle = 0,$$

и действуя далее в рамках квазилинейного приближения для слаботурбулентной плазмы с мелкомасштабными флуктуациями [106–109],

$$f_1 \ll \langle f \rangle,$$

Птускин и Чувильгин [14, 15] рассматривают уравнение

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \langle f \rangle + \langle \mathbf{F} \rangle \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \mathbf{p}} = R,$$

правая часть которого — обычный столкновительный член, описывающий рассеяние частиц на мелкомасштабных и малых по амплитуде флуктуациях, — выра-

жается через свёртку скалярной функции $\mathbf{F}_1 \partial \langle f \rangle / \partial \mathbf{p}$ с функцией Грина линейного уравнения (см. [110, 111]). Аппроксимация этого члена релаксационным выражением $-(f - \bar{f})/\tau$, где

$$\bar{f} = \bar{f}(\mathbf{r}, p, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} f(\mathbf{r}, p\Omega, t) d\Omega,$$

приводит уравнение к виду

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \langle f \rangle + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \langle \mathbf{H} \rangle] \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\langle f \rangle - \bar{f}}{\tau}.$$

Здесь τ — характеристическое время рассеяния на мелкомасштабной неоднородности, угловые скобки означают усреднение по мелкомасштабным флуктуациям, черта над символом означает усреднение по направлениям. Обозначим $\langle \bar{f} \rangle$ через N , а анизотропную составляющую — через N_1 :

$$\langle f \rangle = N + N_1, \quad \bar{N}_1 = 0.$$

В пределе больших расстояний ($R \gg v\tau$) и времён ($t \gg R/v$) угловое распределение почти изотропно и усреднение по направлениям приводит к уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} N_1) = 0,$$

которое в свою очередь сводится к обычному диффузионному уравнению:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \nabla_i \kappa_{ij} \nabla_j N = 0,$$

с локальным тензорным коэффициентом диффузии κ_{ij} ; продольная, поперечная и асимметричная компоненты этого уравнения выражаются через скорость v и гирочастоту $\omega_H = q(H)/(pc)$ приближёнными формулами

$$\kappa_{\parallel} = \frac{v^2 \tau}{3},$$

$$\kappa_{\perp} = \frac{\kappa_{\parallel}}{1 + (\omega_H \tau)^2},$$

$$\kappa_A = -\frac{\kappa_{\parallel} \omega_H \tau}{1 + (\omega_H \tau)^2}$$

соответственно (см. книгу Топтыгина [108]). Эти формулы отражают влияние слабых длинноволновых возмущений магнитного поля на диффузию заряженных частиц¹⁰. Из них видно, в частности, что при $\omega_H \tau \gg 1$ (сильно замагниченная плазма) отношения $\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel} \simeq \simeq (\omega_H \tau)^{-2} \ll 1$, $\kappa_A/\kappa_{\parallel} \simeq (\omega_H \tau)^{-1} \ll 1$ и, следовательно, поперечные смещения частицы малы.

Флуктуации магнитного поля $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ порождают флуктуации κ_{ij} и N . Обозначая усреднение по этим крупномасштабным флуктуациям двойными угловыми

¹⁰ Заметим, что здесь не постулированная изначально большевская концепция столкновений, согласно которой траектория разбивается на пробеги, перемежающиеся мгновенными изменениями направления движения, всё-таки проникла в результат при преобразовании бесстолкновительного уравнения Власова в диффузионный вид: приведённый выше коэффициент диффузии κ_{\parallel} вполне может быть интерпретирован как $v\langle R \rangle/3$, а $\langle R \rangle$ — это уже пробег между столкновениями.

скобками, а отклонения от усреднённых таким способом величин — как $\Delta \kappa$ и ΔN , получим

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \nabla_i \langle \langle \kappa_{ij} \rangle \rangle \nabla_j N - \nabla_i \langle \langle \Delta \kappa_{ij} \nabla_j \Delta N \rangle \rangle = 0.$$

Флуктуации ΔN , характеризующие быстрые случайные пространственные изменения, в свою очередь испытывают медленные изменения как в продольном, так и в поперечном направлениях.

Птускин и Чувильгин получили для перпендикулярной диффузии заряженных частиц в магнитном поле с относительно малыми флуктуациями ($\Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) H_0$, $A \ll H_0$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_{\perp}, z)$) уравнение (обозначенное (B11) в [14])

$$\frac{\partial N_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, t)}{\partial t} - D_{\perp} \Delta_{\perp} \left[N(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} N\left(\mathbf{r}, t - \frac{y L^2}{\kappa_{\parallel}}\right) y^{-3/2} dy \right] = 0, \quad (46)$$

где $D_{\perp} = \langle \langle A \rangle \rangle \kappa_{\parallel} / 2$, L — корреляционная длина флуктуаций поля. Здесь ещё нет дробных производных, но если представить содержимое квадратных скобок в виде:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} N\left(\mathbf{r}, t - \frac{y L^2}{\kappa_{\parallel}}\right) y^{-3/2} dy &= \\ = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left[N(\mathbf{r}, t) - N\left(\mathbf{r}, t - \frac{y L^2}{\kappa_{\parallel}}\right) \right] y^{-3/2} dy &= \\ = L \sqrt{\frac{\pi}{\kappa_{\parallel}}} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-1/2)} \int_{L^2/\kappa_{\parallel}}^{\infty} (N(\mathbf{r}, t - \tau) - N(\mathbf{r}, t)) \tau^{-3/2} d\tau \right\} \end{aligned}$$

и, учитывая условие $t \gg t_d = L^2 / \kappa_{\parallel}$, заменить нижний предел интеграла нулём, то выражение в фигурных скобках действительно превращается в дробную полу-производную (в форме Маршо, но тождественно равную дробной производной в форме Римана — Лиувилля, используемой нами (см. [33])). Это и было сделано Веббом и др. [97], представившими уравнение для поперечной диффузии в дробно-дифференциальном виде:

$$\frac{\partial N_{\perp}}{\partial t} = D_{\perp} \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \Delta_{\perp} N_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, t) + N_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, 0) \delta(t),$$

которое после применения оператора $(\partial/\partial t)^{-1/2}$ сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^{1/2} N_{\perp}}{\partial t^{1/2}} = D_{\perp} \Delta_{\perp} N_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, t) + N_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, 0) \delta_{1/2}(t). \quad (47)$$

Птускин и Чувильгин отмечают важную особенность их уравнения для распределения поперечных смещений, сохраняющуюся в его дробно-дифференциальной версии: «Наличие интегралов в уравнении означает, что при компаунд-диффузии частицы обладают хорошей "памятью" — значение функции N в момент t зависит от значений N в предшествующие моменты. В отличие от обычной диффузии, компаунд-диффузия не является марковским процессом» [14].

Необходимо, однако, заметить, что, хотя математически эти уравнения получены для асимптотического поведения распределения (формально для $t \rightarrow \infty$), фактически их применимость ограничена и со стороны больших времён, поскольку, как отмечалось выше, ряд физических предположений уже перестаёт быть адекватным процессу. Приступая к выводу обсуждаемых урав-

нений, Чувильгин и Птускин отмечают [14]: "Предполагаем, что случайное магнитное поле мало по сравнению со средним однородным магнитным полем, т.е. $A \ll 1$. Это означает, что силовые линии слабо отклоняются от направления среднего поля $\mathbf{H}_0 = \text{const}$. Компаунд-диффузия идет в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H}_0 , а вместо параметра длины вдоль силовой линии S приближенно можно использовать величину смещения вдоль направления \mathbf{H}_0 ". Понятно, что возрастание эффекта сильных крупномасштабных неоднородностей в процессе развития диффузии приводит к изотропизации этого процесса и адекватность положенных в основу его описания предположений и, следовательно, выводимых уравнений быстро утрачивается. По этой причине долговременные корреляции, представляемые в интегральном члене уравнения (46) функцией $y^{-3/2}$, теперь укорачиваются, интеграл перестает уравновешивать предыдущий член, его роль со временем уменьшается и в пределе больших времён уравнение поперечной диффузии принимает нормальный вид¹¹:

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}_\perp, t)}{\partial t} - D_\perp \Delta_\perp N(\mathbf{r}_\perp, t) = 0.$$

Это подтверждает вывод Зыбина и Истомина [18] о том, что в итоге движение заряженных частиц в случайному магнитному поле становится нормальной диффузией (вывод получен в предположении, что флуктуации поля изотропны и мелкомасштабны, кинетический оператор эрмитов и первое приближение теории возмущений по отношению длины свободного пробега частиц к корреляционной длине применимо).

В заключении статьи [18] авторы обращаются к простой задаче — броуновскому движению частицы в поле случайных скоростей — и снова демонстрируют диффузионный характер асимптотики. Это вполне согласуется с результатом давней работы Робертса [112], посвящённой этой же проблеме, но в ней, кроме того, показано, что на меньших временах этот процесс описывается интегро-дифференциальным уравнением типа уравнения, выведенного Птускиным и Чувильгиным. То, что речь идёт просто о разных временных областях, подтверждается, в частности, второй частью статьи Вебба с соавторами [113], анализирующей уравнение Паркера [114] движения космических лучей в плазме с учётом конвекции, диффузии и переноса. Ими также показано, что уравнение поперечных смещений, имеющее при малых временах дробно-дифференциальный вид, в асимптотике больших времён становится нормальным диффузионным уравнением. Другими словами, решение дробно-дифференциального уравнения субдиффузии описывает пред-асимптотическое поведение процесса, часто называемое *промежуточной асимптотикой* [115].

Используя правила обращения с дробными производными [33], дробно-дифференциальное уравнение субдиффузии можно представить в трёх эквивалентных формах¹²:

$$\frac{\partial^\beta G_\perp}{\partial t^\beta} = D_\perp \Delta_\perp G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t) + \delta(\mathbf{r}_\perp) \delta_\beta(t), \quad (48)$$

¹¹ При условии, что первый момент (среднее время) корреляционной функции конечен [22].

¹² Мы оставляем в них пока параметр $\beta \in (0, 1)$, хотя для описания поперечной диффузии требуется лишь $\beta = 1/2$.

$$\frac{\partial G_\perp}{\partial t} = D_\perp \Delta_\perp \frac{\partial^{1-\beta} G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t)}{\partial t^{1-\beta}} + \delta(\mathbf{r}_\perp) \delta(t), \quad (49)$$

$$G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t) = D_\perp \Delta_\perp \frac{\partial^{-\beta} G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t)}{\partial t^{-\beta}} + \delta(\mathbf{r}_\perp) 1_+(t). \quad (50)$$

Интегральное уравнение субдиффузии (50) в многомерном пространстве решалось в работе [116]; решение было представлено через функции Фокса. В интересующем нас двумерном случае поперечных блужданий это решение имеет вид

$$G_\perp(r, t) = \frac{1}{\beta \pi r^2} H_{12}^{20} \left(\left(\frac{r}{2\sqrt{D_\perp}} \right)^{2/\beta} t^{-1} \Big|_{(1, 1/\beta), (1, 1/\beta)}^{(1, 1)} \right), \\ r \equiv |\mathbf{r}_\perp|.$$

Трансформанта Меллина данного распределения выражается в виде

$$\bar{G}_\perp(s, t) \equiv \int_0^\infty r^{s-1} G(r, t) dr = \\ = \frac{\Gamma(s/2) \Gamma(s/2 - 1)}{2^{3-s} \pi \beta \Gamma(\beta(s/2 - 1))} (D_\perp t^\beta)^{s/2-1}.$$

В работе [22], где рассматривалось уравнение (48), найдена другая форма решения, связывающая его с дробно-устойчивыми распределениями:

$$G_\perp(r, t) = (D_\perp t^\beta)^{-1} \Psi_2^{(2, \beta)} \left(\frac{r}{\sqrt{D_\perp t^\beta}} \right), \quad (51)$$

где

$$\Psi_2^{(2, \beta)}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\tau \exp \left(-\frac{r^2 \tau^\beta}{4} \right) \tau^\beta g_+(\tau; \beta), \quad 0 < \beta < 1. \quad (52)$$

В [22], в частности, показано, что необходимым и достаточным условием возникновения субдиффузационного режима дробно-дифференциального типа является степенная асимптотика времени ожидания в ловушке с бесконечной дисперсией:

$$Q(t) = \int_t^\infty q(\tau) d\tau \sim B_0 t^{-\beta}, \quad t \rightarrow \infty,$$

и дан вывод уравнений (48), (49) на основе простых вероятностных соображений. Согласно обобщённой предельной теореме, если независимые положительные случайные величины T_i распределены с плотностью $q(t)$, удовлетворяющей этому условию, то нормированная сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{T_i}{(nB)^{1/\beta}}, \quad B = B_0 \Gamma(1 - \beta),$$

при больших n распределена с устойчивой односторонней плотностью $g_+(t; \beta)$, а плотность распределения обычной суммы $\sum_{i=1}^n T_i$, характеризующаяся многократной свёрткой $q^{(n)}(t)$ ($q^{(1)}(t) = q(t)$), в асимптотике больших n имеет вид

$$q^{(n)}(t) \sim (nB)^{-1/\beta} g_+((nB)^{-1/\beta} t; \beta).$$

Чтобы яснее увидеть, как эти утверждения относятся к поперечной диффузии, уточним понятие ловушки в данной задаче в свете стохастической интерпретации,

обоснованной в разделе 2.5. Характеристикой положения частицы в плоскости, перпендикулярной оси z , вдоль которой направлено основное магнитное поле и началось движение частицы, является двумерный вектор \mathbf{r}_\perp . Утверждение "частица находится в ловушке в точке \mathbf{r}_\perp " в этом случае означает, что частица движется вдоль прямой, параллельной оси z , а переход частицы из одной ловушки в другую означает её переход с одной силовой линии на другую, тоже параллельную оси z . Пренебрегая временами, затрачиваемыми на переходы, ввиду их малости по сравнению с временем продольного движения, распределение числа попаданий v в ловушку за время $t \rightarrow \infty$ запишем в виде

$$P(v = n) \approx Q^{(n)}(t) - Q^{(n+1)}(t) = \int_0^{t/(nB)^{1/\beta}} g_+(\tau; \beta) d\tau - \int_0^{t/[(n+1)B]^{1/\beta}} g_+(\tau; \beta) d\tau.$$

Представляя верхний предел второго интеграла в виде

$$[(n+1)B]^{-1/\beta} t = (nB)^{-1/\beta} t - \varepsilon_n(t), \\ \varepsilon_n(t) \equiv (nB)^{-1/\beta} t(n\beta)^{-1}$$

и разлагая этот интеграл в ряд по малой (при $n \rightarrow \infty$) величине $\varepsilon_n(t)$, находим

$$P(v = n) \sim (nB)^{-1/\beta} t(n\beta)^{-1} g_+((nB)^{-1/\beta} t; \beta), \quad t \rightarrow \infty. \quad (53)$$

Искомый пропагатор выражается через условный $G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t|n)$ формулой полной вероятности

$$G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t) = \sum_n G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t|n) P(v = n), \quad (54)$$

в которой условное распределение

$$G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t|n) \approx \frac{1}{4\pi\sigma^2 n} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma^2 n}\right) \equiv (\sigma^2 n)^{-1} g_2\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{n}}; 2\right) \quad (55)$$

является следствием центральной предельной теоремы. Подставляя (53) и (55) в (54) и заменяя суммирование по n интегрированием по переменной

$$\tau = (nB)^{-1/\beta} t,$$

приходим к поперечному пропагатору (51).

При $\beta = 1/2$ односторонняя устойчивая плотность выражается в элементарных функциях,

$$g_+\left(t; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right),$$

и мы получаем поперечный пропагатор

$$G_\perp(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{D_\perp \sqrt{t}} \Psi_2^{(2,1/2)}\left(\frac{r_\perp}{\sqrt{D_\perp \sqrt{t}}}\right), \quad r_\perp = |\mathbf{r}_\perp|,$$

все моменты которого являются конечными и выражаются формулой

$$(r_\perp^{2n}) = \frac{(n!)^2}{\Gamma(n/2 + 1)} (4D_\perp \sqrt{t})^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

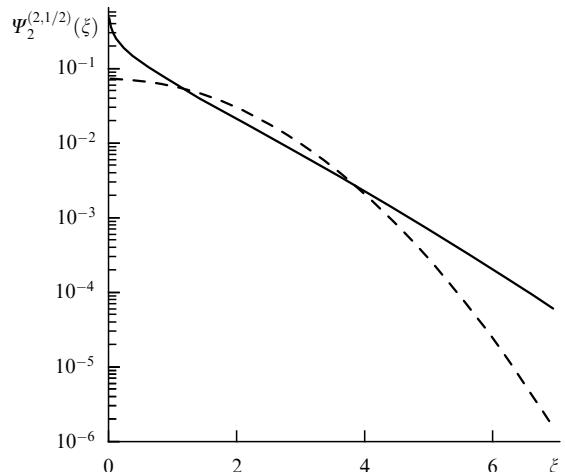


Рис. 24. Дробно-дифференциальная плотность (56), характеризующая распределение вектора поперечного смещения блуждающей частицы (сплошная кривая) и нормальная плотность с такой же дисперсией (штриховая кривая).

Дробно-устойчивая плотность

$$\Psi_2^{(2,1/2)}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2 \sqrt{\tau}}{4}\right) \sqrt{\tau} g_+\left(\tau; \frac{1}{2}\right) d\tau = \\ = \frac{1}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2 \sqrt{\tau}}{4} - \frac{1}{4\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}, \quad \xi > 0, \quad (56)$$

представлена на рис. 24 вместе с нормальной плотностью с такой же дисперсией. Видно, что на малых и больших расстояниях от оси субдиффузия плотность поперечных смещений превышает нормальную, тогда как в средней области расстояний ситуация обратная. В начале координат плотность $\Psi_2^{(2,1/2)}(\xi)$, в отличие от нормальной, имеет интегрируемую особенность логарифмического типа. В этом нетрудно убедиться, разбив интеграл в (52) на две части и заменив в последней плотность $g_+(\tau; 1/2)$ её асимптотическим выражением:

$$\Psi_2^{(2,1/2)}(\xi) \approx \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^\theta \exp\left(-\frac{\xi^2 \sqrt{\tau}}{4}\right) \sqrt{\tau} g_+\left(\tau; \frac{1}{2}\right) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_\theta^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2 \sqrt{\tau}}{4}\right) \tau^{-1} d\tau \right].$$

При малых ξ в этой сумме доминирует второе слагаемое, которое и приводит к логарифмической особенности:

$$\Psi_2^{(2,1/2)}(\xi) \sim \frac{1}{4\pi^{3/2}} E_1(\xi^2 \theta^{1/8}) \sim \frac{1}{2\pi^{3/2}} |\ln \xi|, \quad \xi \rightarrow 0.$$

Ещё одно свойство отличает рассматриваемый процесс от нормальной диффузии: поперечные координаты X, Y частицы не являются более независимыми, поскольку их совместное распределение

$$P(X(t) \in dx, Y(t) \in dy) = \frac{1}{D_\perp \sqrt{t}} \Psi_2^{(2,1/2)}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{D_\perp \sqrt{t}}}\right)$$

не сводится к произведению $P(X(t) \in dx) P(Y(t) \in dy)$, хотя и остаются вследствие аксиальной симметрии распределения некоррелированными.

4.4. Продольные блуждания с конечной скоростью

Теперь рассмотрим продольные блуждания частиц вдоль магнитных силовых линий. Поскольку мы пренебрегаем временами перемещения частицы с одной линии на другую, продольное движение частиц выглядит непрерывным, изменяющим в случайные моменты времени направление своего движения на противоположное. Одномерное симметричное блуждание частицы с постоянной скоростью v вдоль оси z в отсутствие ловушек полностью характеризуется плотностью распределения её свободного пробега. В случае среды, состоящей из независимых атомов, пробеги распределены по экспоненциальному закону и процесс описывается дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка (*телеографическое уравнение*) [117]. Решение этого уравнения выражается через модифицированные функции Бесселя и в асимптотике больших времён переходит в нормальное (гауссово) распределение. В случае произвольной плотности $p(z)$ с конечным вторым моментом телеографическому уравнению удовлетворяет асимптотическая часть решения. В работах [85–87, 118–120] рассматривались одномерные блуждания с асимптотически-степенным распределением пробегов $p(\xi) \propto \xi^{-\alpha-1}$, $0 < \alpha < 2$, называемые иногда *фрактальными блужданиями*.

Обратимся к уравнению (28), в случае одномерных блужданий принимающему вид

$$\tilde{G}_{\parallel}(k, \lambda) = \frac{\tilde{P}(k, \lambda)}{v[1 - \tilde{p}(k, \lambda)]}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k, \lambda) &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda}{v}z\right) \cos(kz) p(z) dz = \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{p}\left(\frac{\lambda}{v} - ik\right) + \tilde{p}\left(\frac{\lambda}{v} + ik\right) \right], \\ \tilde{P}(k, \lambda) &= \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{\lambda}{v}z\right) \cos(kz) \int_z^\infty p(z') dz' \right] dz = \\ &= \frac{2\lambda/v - (\lambda/v - ik)\tilde{p}(\lambda/v + ik) - (\lambda/v + ik)\tilde{p}(\lambda/v - ik)}{2[(\lambda/v)^2 + k^2]}, \end{aligned}$$

где \tilde{p} — трансформанта Лапласа плотности распределения пробегов,

$$\tilde{p}(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\xi) p(\xi) d\xi.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\parallel}(k, \lambda) &= \\ &= \frac{2(\lambda/v) - (\lambda/v + ik)\tilde{p}(\lambda/v - ik) - (\lambda/v - ik)\tilde{p}(\lambda/v + ik)}{v[k^2 + (\lambda/v)^2][2 - \tilde{p}(\lambda/v - ik) - \tilde{p}(\lambda/v + ik)]}. \end{aligned} \quad (57)$$

Рассмотрим три следующих случая:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\lambda) &= 1 - c\lambda^\alpha, \quad c = \frac{A}{\alpha} \Gamma(1 - \alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \\ \tilde{p}(\lambda) &= 1 - m_1\lambda + c_1\lambda^\alpha, \quad c_1 = \frac{(A/\alpha)\Gamma(2 - \alpha)}{\alpha - 1}, \quad 1 < \alpha < 2, \\ \tilde{p}(\lambda) &= 1 - m_1\lambda + \frac{m_2}{2}\lambda^2 - c_2\lambda^\alpha, \quad c_2 = \frac{(A/\alpha)\Gamma(3 - \alpha)}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2, \end{aligned}$$

где $m_1 = \langle R \rangle$ и $m_2 = \langle R^2 \rangle$ — моменты распределения пробегов.

В первом случае (процесс 1-го рода, $0 < \alpha < 1$) выражение (57) принимает вид

$$\tilde{G}_{\parallel}(k, \lambda) = \frac{(\lambda/v - ik)^{\alpha-1} + (\lambda/v + ik)^{\alpha-1}}{v[(\lambda/v - ik)^\alpha + (\lambda/v + ik)^\alpha]}. \quad (58)$$

При $\alpha = 1/2$ трансформанта

$$\tilde{G}_{\parallel}(k, \lambda) = \frac{1}{v\sqrt{(\lambda/v)^2 + k^2}}$$

легко обращается, приводя к симметризованной *арксинус-плотности* [42]:

$$G_{\parallel}(z, t; \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi\sqrt{(vt)^2 - z^2}}, \quad -vt < z < vt. \quad (59)$$

В работе [120] мы представили явное выражение продольного пропагатора через элементарные функции при всех α из указанного диапазона:

$$\begin{aligned} G_{\parallel}(z, t) &= \frac{2 \sin \pi \alpha}{\pi v t} \times \\ &\times \frac{(1 - z^2/v^2 t^2)^{\alpha-1}}{(1 - z/vt)^{2\alpha} + (1 + z/vt)^{2\alpha} + 2(1 - z^2/v^2 t^2)^\alpha \cos \pi \alpha}, \\ \alpha &\in (0, 1). \end{aligned} \quad (60)$$

Распределения этого типа для нескольких значений α приведены на рис. 25.

При $1 < \alpha < 2$ (процесс 2-го рода) в асимптотике $\lambda \rightarrow 0, k \rightarrow 0, |\lambda/vk| \rightarrow 0$ трансформанта

$$\tilde{G}_{\parallel}(k, \lambda) = \frac{2m_1 - c_1(\lambda/v - ik)^{\alpha-1} - c_1(\lambda/v + ik)^{\alpha-1}}{v[2m_1(\lambda/v) - c_1(\lambda/v - ik)^\alpha - c_1(\lambda/v + ik)^\alpha]}$$

принимает вид

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1}{\lambda + D_{\parallel}|k|^\alpha},$$

где

$$D_{\parallel} = \frac{c_1}{m_1} v \left| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right| = v \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\varepsilon^{1-\alpha}} \left| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right|.$$

Обратное преобразование Лапласа приводит к характеристической функции случайной координаты блуждающей частицы

$$\tilde{G}_{\parallel}(k, t) = \exp(-D_{\parallel}t|k|^\alpha),$$

а возвращение к пространственной переменной даёт пропагатор

$$G_{\parallel}(z, t) = (D_{\parallel}t)^{-1/\alpha} \Psi_1^{(\alpha)}(z(D_{\parallel}t)^{-1/\alpha}).$$

Наконец, при $\alpha > 2$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\parallel}(k, \lambda) &= \left[2m_1 - m_2 \left(\frac{\lambda}{v} \right) + c_2 \left(\frac{\lambda}{v} - ik \right)^{\alpha-1} + c_2 \left(\frac{\lambda}{v} + ik \right)^{\alpha-1} \right] \times \\ &\times \frac{1}{v} \left\{ 2m_1 \left(\frac{\lambda}{v} \right) - m_2 \left[\left(\frac{\lambda}{v} \right)^2 - k^2 \right] + c_2 \left(\frac{\lambda}{v} - ik \right)^\alpha + \right. \\ &\left. + c_2 \left(\frac{\lambda}{v} + ik \right)^\alpha \right\}^{-1} \sim \frac{1}{\lambda + Dk^2}, \end{aligned}$$

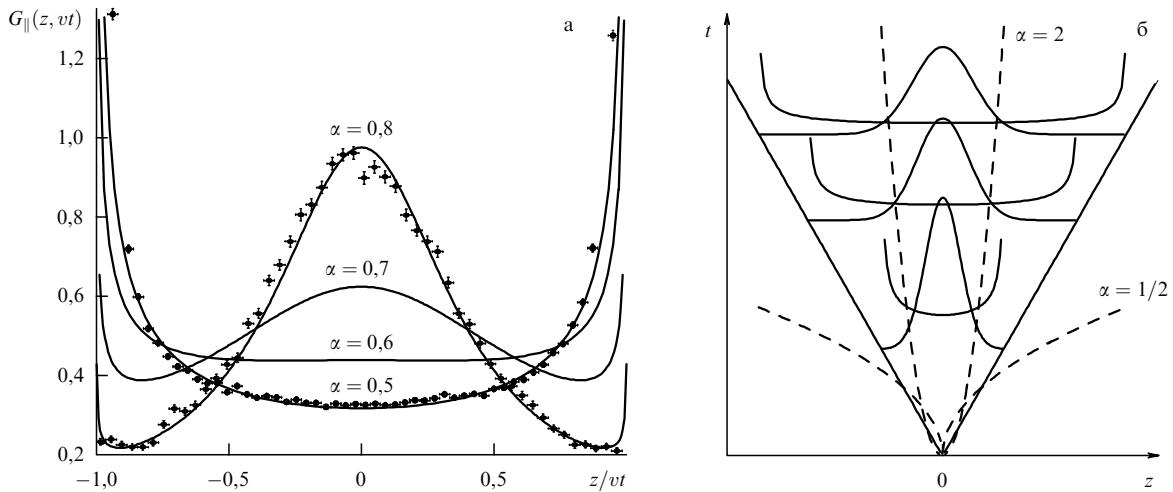


Рис. 25. Продольные пропагаторы ОАД 1-го рода. (а) Расчёты по формуле (60) (кривые) и результаты метода Монте-Карло (символы). (б) Эволюция ОАД-пропагатора с $\alpha = 1/2$ в сравнении с эволюцией нормального пропагатора ($\alpha = 2$). Штриховыми кривыми показана зависимость ширины диффузионных пакетов от времени, сплошными — баллистические ограничения.

где $D = m_2 v / 2m_1$. Отсюда

$$G_{\parallel}(z, t) = (D_{\parallel} t)^{-1/2} \Psi_1^{(2)}\left(\frac{z}{\sqrt{D_{\parallel} t}}\right),$$

где $\Psi_1^{(2)}(\xi)$ — стандартная плотность нормального распределения с дисперсией 2.

Прямое моделирование методом Монте-Карло подтверждает результаты аналитических расчётов (см. рис. 25). Качественное различие распределений при $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$ объясняется конкуренцией двух процессов: диффузионного, расширяющегося в отсутствие ограничений $\propto t^{1/\alpha}$, и баллистического, ограничивающего положение частицы отрезком $[-vt, vt]$. При $\alpha > 1$ на больших временах доминирует первый из них (быстро расширяющийся интервал $[-vt, vt]$ перестаёт влиять на диффузию), при $\alpha < 1$ роль кинематического ограничения возрастает. Длинные (с бесконечно большим средним значением) пробеги прижимают распределение к баллистическим границам, создавая характерные пики на его концах, при $\alpha < 1/2$ формирующие специфические U-образные распределения.

Может показаться, что мы обошлись здесь без дробных производных, однако содержащийся в приведённых выше формулах множитель $(\lambda \pm ivk)^{\alpha}$ представляет собой фурье-лапласовский образ оператора материальной производной в дробной степени:

$$(\lambda \mp ivk)^{\alpha} \tilde{f}(k, \lambda) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-\lambda t + ikz) \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm v \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha} f(z, t),$$

в чём можно убедиться прямым вычислением. Для этого достаточно, представив данный оператор в форме Римана–Лиувилля

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm v \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha} f(z, t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm v \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \\ &\times \int_0^t f(z - v(t - \tau), \tau) (t - \tau)^{-\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1, \end{aligned}$$

применить к нему указанное преобразование. Следовательно, уравнение, например, (58) эквивалентно уравнению

5*

нию с дробно-дифференциальными операторами вида

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha} \right] G_{\parallel}(z, t) = \\ &= v^{\alpha-1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha-1} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\alpha-1} \right] \delta(z) \delta(t). \end{aligned}$$

Аналогичным образом представляются и другие уравнения, имеющие интегральные образы $(\lambda \pm ivk)^{\alpha}$.

5. Диффузионные модели ускорения

5.1. Классическая модель Ферми

В этом разделе мы рассмотрим проблему ускорения (точнее, доускорения, или распределённого ускорения) космических лучей, так что речь пойдёт о поведении частиц в импульсном пространстве. Последовательные взаимодействия (столкновения) заряженной частицы с более или менее локализованными неоднородностями магнитного поля — от движущихся с относительно небольшой скоростью магнитных облаков, которые имел в виду Ферми (см. введение), до сильных ударных волн в остатках сверхновых, о которых идёт речь в обзоре Бережко и Крымского [121], — можно рассматривать как *мгновенные перелёты из одной точки импульсного пространства в другую*. Приобретаемые частицей в результате таких столкновений приращения импульсов Δp_i являются случайными, и даже при их изотропном распределении представляющая частицу в импульсном пространстве точка

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 + \Delta \mathbf{p}_3 + \dots,$$

подобно броуновской частице, всё дальше уходит от точки (импульса) \mathbf{p}_0 инъекции ускорения, что и означает дальнейшее ускорение (доускорение) частицы. Ускоряется, правда, лишь некоторая доля частиц, перемещающаяся в направлениях от центра. Именно эта *флуктуационная* составляющая механизма ускорения космических лучей является предметом внимания в настоящем обзоре.

Со статистической точки зрения главный итог вывода Ферми состоит в том, что для формирования степенного энергетического спектра $N(E)$ достаточно экспоненциального возрастания энергии ускоряемой частицы $E = E_0 \exp(at)$ со временем и экспоненциального распределения возраста $dP = \exp(-t/\tau) dt/\tau$ регистрируемых частиц:

$$\begin{aligned} N(E) dE &= \tau^{-1} \left[\int_0^\infty \delta(E - E_0 \exp(at)) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt \right] dE = \\ &= \frac{1}{a\tau} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-1-1/a\tau} \frac{dE}{E_0}, \quad E > E_0. \end{aligned} \quad (61)$$

И всё. Никаких флуктуаций (кроме указанных флуктуаций возраста, определяемых параметром τ — средним значением этого возраста). И вообще, о каких флуктуациях может идти речь, если приращение энергии в ϵ раз, по оценкам Ферми, может быть получено только в результате 100 млн столкновений?

Чтобы исследовать влияние на энергетический спектр ускоренных частиц других источников флуктуаций, необходимо рассмотреть процессы с большими возможностями ускорения в каждом из столкновений и меньшей их частотой. К таким процессам относятся упоминавшиеся выше взаимодействия с сильными ударными волнами, в которых даже при однократном взаимодействии с фронтом возможно увеличение энергии частицы в 7–13 раз [6, с. 449]. С этой целью мы перейдём от вырожденной спектральной функции $\delta(E - E_0 \exp(at))$, характеризующей детерминированный процесс ускорения Ферми, к непрерывной $N(E, t)$, связанной с импульсным распределением $f(\mathbf{p}, t)$ соотношением

$$N(E, t) = \int \delta(E - E(\mathbf{p})) f(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}.$$

Полагая, как и Ферми, параметр τ не зависящим от энергии, представим искомый спектр как усреднённый по экспоненциально распределённому возрасту спектр $N(E, t)$ наблюдаемых частиц:

$$\begin{aligned} N(E) &\equiv \bar{N}(E; \tau) \equiv \tau^{-1} \left[\int_0^\infty N(E, t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt \right] = \\ &= \tau^{-1} \hat{N}(E, \tau^{-1}), \end{aligned} \quad (62)$$

где $\hat{N}(E, \lambda)$ — трансформанта Лапласа спектральной функции по временной переменной,

$$\hat{N}(E, \lambda) \equiv \int_0^\infty \exp(-\lambda t) N(E, t) dt.$$

Эти формулы учитывают влияние на энергетический спектр только флуктуаций возраста. Влияние флуктуаций, обусловленных редкими взаимодействиями с большими изменениями импульса (энергии) частиц, учитывается на этапе составления уравнений для распределений $f(\mathbf{p}, t)$ или $N(E, t)$ включением дополнительных слагаемых, содержащих дифференциальные и интегральные операторы.

5.2. Дробно-дифференциальное кинетическое уравнение
В импульсном пространстве неподвижное положение точки, не совпадающее с началом координат, означает движение частицы с постоянным импульсом (скоростью, энергией). Показатель β характеризует теперь хвостовую

часть распределения случайной длительности интервала T между последовательными столкновениями движущейся частицы $Q(t) = P(T > t)$, $t \rightarrow \infty$. Для ультрапаралитивистской частицы ($v \approx c$) этот интервал пропорционален её пробегу между последовательными столкновениями, так что наряду с заменой координат \mathbf{r} импульсами \mathbf{p} в сохраняющейся модели СБНВ показатель β заменяется показателем α . Частица предполагается инжектированной источником в момент $t = 0$ с распределением $f_0(\mathbf{p})$. При этих условиях процесс описывается интегральным уравнением типа (13):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}, t) &= \int d\mathbf{p}' \int_0^t dt' w(\mathbf{p} - \mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}) q(t') \times \\ &\quad \times f(\mathbf{p} - \mathbf{p}', t - t') + Q(t) f_0(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (63)$$

Дальнейшее преобразование уравнения связано с конкретизацией распределений q и w . Начнем с временного распределения. Обычно (можно сказать, всегда) в качестве такового выбирается экспоненциальное распределение $Q(t) = \exp(-\mu t)$, $q(t) \equiv -dQ/dt = \mu \exp(-\mu t)$, и, как правило, это делается неявно: уравнение переноса начинают писать с производной по времени $\partial f(\mathbf{p}, t)/\partial t = \dots$, подразумевая марковость процесса, автоматически приводящую к экспоненциальному распределению. Выше мы уже говорили о причинах, позволяющих предполагать, что это распределение скорее степенное, чем экспоненциальное (напомним, что распределение $q(t)$ здесь с точностью до масштабного множителя есть распределение длины пробега, которое во фрактальной среде имеет ярко выраженный степенной вид, что вполне согласуется также с самоподобной картиной турбулентных движений, с её степенными закономерностями). Привлекательность этой идеи несколько омрачается необходимостью отказа от классической экспоненты — отказа, который создаёт непреодолимую, на первый взгляд, пропасть между этими двумя распределениями. Лучшим компромиссом явилось бы семейство распределений, включающее в себя как экспоненциальное, так и степенные распределения. К счастью, такое семейство существует: это множество функций

$$Q_\alpha(t) = E_\alpha(-\mu t^\alpha), \quad \alpha \in (0, 1], \quad \mu > 0,$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n / \Gamma(\alpha n + 1)$ — функции Миттага-Леффлера. При $\alpha = 1$ функция $Q_\alpha(t)$ становится обычной экспонентой, а при $\alpha < 1$ эта "дробная экспонента" характеризуется степенной асимптотикой порядка $t^{-\alpha}$, $t \rightarrow \infty$. Соответствующая плотность (рис. 26)

$$\psi_\alpha(t) = \mu^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\mu t^\alpha), \quad E_{\alpha, \alpha} = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha)},$$

сама удовлетворяет дробно-дифференциальному уравнению [33], что и приводит интегральное уравнение (63) к дробно-дифференциальному виду:

$$\frac{\partial^\alpha f(\mathbf{p}, t)}{\partial t^\alpha} = \mu A f(\mathbf{p}, t) + f_0(\mathbf{p}) \delta_\alpha(t). \quad (64)$$

Здесь A — интегральный оператор ускорения с плотностью переходов $w(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p})$,

$$Af(\mathbf{p}, t) = \int w(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}) f(\mathbf{p}', t) d\mathbf{p}' - f(\mathbf{p}, t). \quad (65)$$

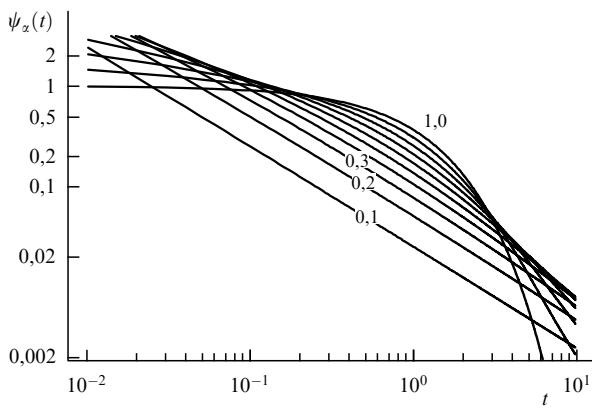


Рис. 26. "Дробная экспоненциальная плотность" $\psi_\alpha(t)$. Десяти кривым (снизу вверх) соответствуют значения α от 0,1 до 1,0 с шагом 0,1.

Временная последовательность моментов столкновений образует *дробный пуассоновский процесс порядка α* [122], при $\alpha = 1$ превращающийся в обычный пуассоновский процесс, лежащий в основе классического кинетического уравнения (см. уравнение (21.1) [123]). Качественно новое свойство этого процесса заключается в том, что среднее число столкновений возрастает с увеличением интервала наблюдения пропорционально t^α , т.е. медленнее, чем в случае обычного пуассоновского процесса ($\sim t$), а относительные флуктуации числа столкновений при $t \rightarrow \infty$ не исчезают, а стремятся к зависящему от α предельному распределению. Потоки событий, полученные моделированием методом Монте-Карло, показаны на рис. 27. Видно, что изменение масштаба превращает

пуассоновский поток в однородный, тогда как дробно-пуассоновский поток остаётся неоднородным во всех масштабах, что и является признаком фрактальности точечного распределения.

Выразив, как и ранее, решение $f_\alpha(\mathbf{p}, t)$ дробно-дифференциального уравнения (64) через решение $f_1(\mathbf{p}, t)$ уравнения с производной первого порядка,

$$f_\alpha(\mathbf{p}, t) = \frac{t}{\alpha} \int_0^\infty f_1(\mathbf{p}, \tau) g_+(\tau^{-1/\alpha}; \alpha) \tau^{-1/\alpha-1} d\tau, \quad (66)$$

проводя преобразование Лапласа соотношения (66) по времени и воспользовавшись приведёнными выше формулами для спектров, можно прийти к формуле

$$\bar{N}_\alpha(E; \tau) = \bar{N}_1(E; \tau^\alpha). \quad (67)$$

Формула (67) отражает влияние *фрактальной размерности дробно-пуассоновского процесса столкновений* $\alpha \in (0, 1]$ на энергетический спектр космических лучей: спектр $\bar{N}_\alpha(E; \tau)$, образуемый ансамблем частиц со средним временем жизни τ , ускоряющихся по дробно-пуассоновскому закону порядка $\alpha < 1$, совпадает со спектром частиц, ускоренных обычным пуассоновским процессом ($\alpha = 1$), но имеющих средний возраст τ^α (напомним, время здесь приведено к безразмерному виду, а спектры инжекции $f_0(E)$ в обеих задачах совпадают). На примере спектра Ферми легко убедиться в том, что с понижением порядка процесса эффективность ускорения уменьшается (спектр укрупняется): фрактальный характер распределения ускоряющих областей в пространстве, естественно, снижает эффективность ускорения (при неизменном законе элементарных ускорений, разумеется).

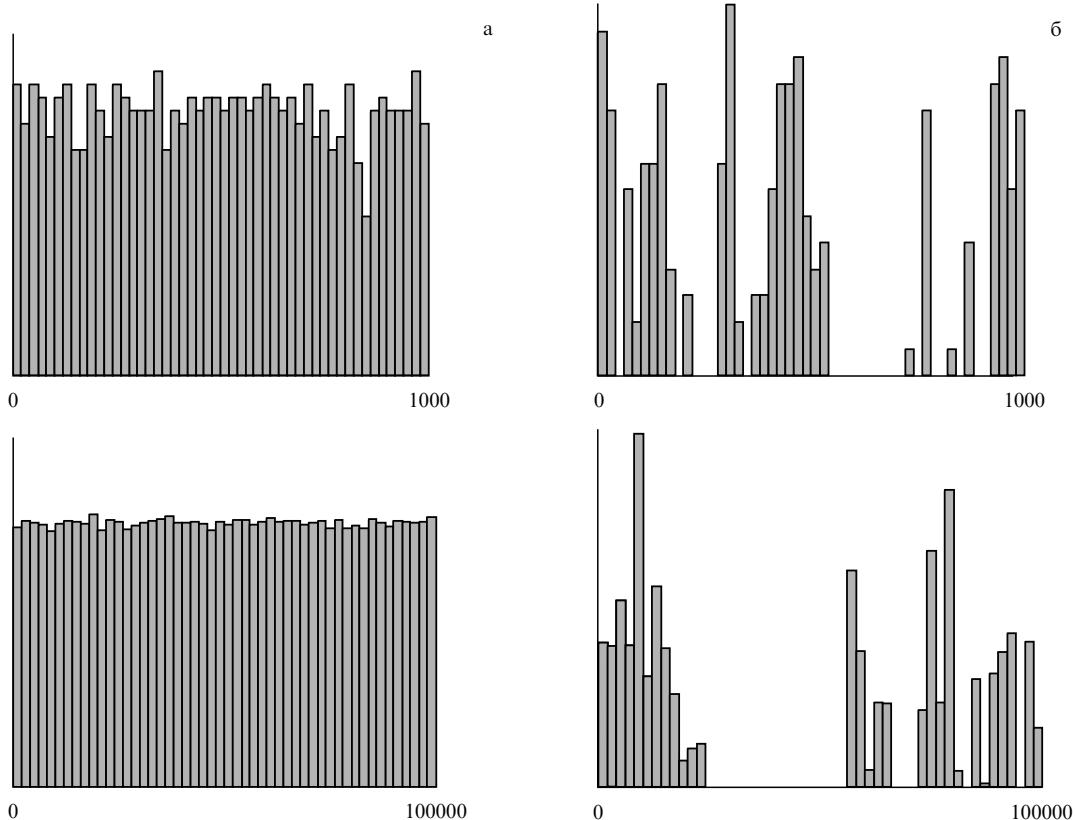


Рис. 27. Потоки событий (актов ускорения) в пуассоновском (а) и дробно-пуассоновском (б) процессах.

5.3. Дробно-дифференциальные уравнения

Фоккера–Планка

Как и в классическом случае, переход от кинетического уравнения к уравнению Фоккера–Планка связан с преобразованием интеграла столкновений в дифференциальную форму посредством разложения подынтегральной функции в ряд по приращению импульса до членов второго порядка включительно. При этом существуют две версии такого разложения, приводящие к несколько различающимся между собой уравнениям (см., например, [123]). В первой предполагается малой *абсолютной величина изменения импульса* $|\Delta\mathbf{p}| = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$, так что импульс налетающей частицы очень мало изменяется по величине и направлению в одном акте столкновения (так же как, например, при столкновении тяжёлой частицы с лёгкой). Во второй версии предполагается малым *изменение абсолютной величины импульса* $\Delta p = |\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|$, но изменение его направления может иметь сколь угодно широкое распределение вплоть до изотропного (столкновение лёгкой частицы с тяжёлой). При предположении изотропного рассеяния получим дробно-дифференциальное обобщение уравнения Фоккера–Планка в виде

$$\frac{\partial^\alpha f(\mathbf{p}, t)}{\partial t^\alpha} = \Delta_{\mathbf{p}}(K(p)f(\mathbf{p}, t)) + f_0(\mathbf{p})\delta_x(t), \quad (68)$$

где $K(p)$ — коэффициент диффузии в импульсном пространстве,

$$K(p) = \frac{\mu}{2} \int (\Delta\mathbf{p})^2 w(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) d\Delta\mathbf{p}.$$

физике космических лучей хорошо известен энергетический аналог уравнения (68) (при $\alpha = 1$, конечно):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha N(E, t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial [a_1(E)N(E, t)]}{\partial E} + \\ &+ \frac{\partial^2 [a_2(E)N(E, t)]}{\partial E^2} + N_0(E)\delta_x(t). \end{aligned} \quad (69)$$

(см. уравнение (14.2) в [4]).

В то же время уравнение (68) с диффузионным членом

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{p}}(K(p)f(\mathbf{p}, t)) &= (\Delta_{\mathbf{p}}K(p))f(\mathbf{p}, t) + 2(\nabla_{\mathbf{p}}K(p))\nabla_{\mathbf{p}}f(\mathbf{p}, t) + \\ &+ K(p)\Delta_{\mathbf{p}}f(\mathbf{p}, t) \end{aligned}$$

существенно отличается от другого уравнения диффузионного типа (см. уравнение (9.57) в [44])

$$\frac{\partial^\alpha f(\mathbf{p}, t)}{\partial t^\alpha} = \nabla_{\mathbf{p}}(K(p)\nabla_{\mathbf{p}}f(\mathbf{p}, t)) + f_0(\mathbf{p})\delta_x(t). \quad (70)$$

Причина различия заключается в том, что уравнение (68) выведено в модели столкновений, в которой представляющая частицу точка мгновенно перемещается в другую, возможно далёкую, геометрическую точку, нарушая непрерывность траектории в импульсном пространстве, тогда как при динамическом выводе уравнения (70) траектория в импульсном пространстве предполагалась непрерывной и даже дифференцируемой.

Классические версии ($\alpha = 1$) уравнений (68)–(70) лежат в основе стандартного набора математических средств, описывающих флюктуационные механизмы ускорения космических лучей, и решения их хорошо известны [4, 6, 44]. Тверской [124, 125] использовал диффузионную (в пространстве скоростей) модель для описа-

ния взаимодействия частиц с волнами турбулентных пульсаций в коротковолновой части спектра, ускоряющими частицы. Он показал, что такое ускорение является универсальным свойством турбулентности в плазме и оно обусловлено наиболее фундаментальными особенностями соответствующих процессов, а именно:

- а) резонансным характером рассеяния частиц на волнах;
- б) непрерывностью потока турбулентной энергии в пространстве волновых чисел;
- в) возрастанием $K(v)$ пропорционально v^{v-1} , где v — показатель спектра турбулентных пульсаций.

Ссылаясь на теорию Паркера [126], Тверской записал решение уравнения изотропной диффузии в пространстве скоростей

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{K_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^{v+1} \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial v} \right) \quad (71)$$

с начальным условием $f(\mathbf{v}, 0) \propto \delta(v)$ в виде

$$f(\mathbf{v}, t) = \text{const } t^{-3/(3-v)} \exp \left[-\frac{v^{3-v}}{(3-v)^2 K_1 t} \right], \quad (72)$$

заметив, что при $v = 1$ оно воспроизводит максвелловский спектр, при $v = 2$ — спектр протонов солнечных вспышек вида $\exp(-v/v_0)$, а значения $v > 2$ не представляют интереса, поскольку в этом случае ускорение определяется не циклотронным резонансом, а механизмом Ферми.

Дробно-дифференциальная версия этой задачи вида

$$\frac{\partial^\gamma \psi}{\partial t^\gamma} = \frac{K_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^\gamma \frac{\partial \psi(\mathbf{v}, t)}{\partial v} \right) \quad (73)$$

с $\gamma \in [0, 2]$ была рассмотрена Миловановым и Зелёным [127], которые мотивировали постановку задачи ссылкой, в частности, на негауссов термодинамический формализм, развиваемый в работе Треймана [128] для описания сильнотурбулентных сред, проявляющих ярко выраженное немарковское поведение. Идеи и выводы этой работы, безусловно, интересны, но напрашиваются два замечания.

Трёхмерная изотропная плотность распределения по скоростям $\psi(\mathbf{v}, t)$ нормирована на концентрацию $n = n(t)$,

$$\int \psi(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = n. \quad (74)$$

Умножая обе части уравнения (73) на $v^{4-\gamma}$ и интегрируя по трёхмерному пространству скоростей, авторы [127] получают

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \int v^{4-\gamma} \psi d\mathbf{v} = 3(4-\gamma)nK \quad (75)$$

и интерпретируют интеграл как среднее по ансамблю величины $v^{4-\gamma}$. Но это не совсем так: среднее по ансамблю определяется соотношением

$$\langle v^{4-\gamma} \rangle = \frac{1}{n} \int v^{4-\gamma} \psi d\mathbf{v}$$

и уравнение (75) сводится к виду

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \langle v^{4-\gamma} \rangle = 3(4-\gamma)K$$

только при условии, что интеграл (74) остаётся постоянным. Для однородного уравнения это условие выполняется лишь при $\gamma = 1$. Чтобы оно выполнялось и при $\gamma < 1$, необходимо ввести в правую часть уравнения (73) член с "дробной дельта-функцией" по времени:

$$\frac{\partial^\gamma \psi}{\partial t^\gamma} = \frac{K_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^\gamma \frac{\partial \psi(\mathbf{v}, t)}{\partial v} \right) + \psi(\mathbf{v}, 0) \delta_\gamma(t), \quad 0 < \gamma < 1.$$

Заметим, что при переходе к классическому уравнению ($\beta \rightarrow 1$) дробная дельта-функция превращается в обычную, равную нулю везде, кроме единственной точки $t = 0$, которую легко устраниТЬ, ограничившись рассмотрением полуоси $t > 0$ и задав начальное условие пределом $\lim_{t \rightarrow 0+} \psi(v, t)$. В этом случае и получается уравнение (71). Напротив, дробная дельта-функция

$$\delta_\gamma(t) = \frac{t_+^{-\gamma}}{\Gamma(1 - \gamma)},$$

определенная как дробная производная от единичной ступеньки, отлична от нуля при всех $t > 0$; она описывает частицы, задержавшиеся с вылетом из "пункта отправления", и избавиться от неё таким же образом нельзя. Это первое замечание. Второе замечание связано с применимостью (точнее, неприменимостью) вероятностной интерпретации к уравнению с $\gamma > 1$ при отсутствии первой производной по времени¹³ (см. обсуждение этого случая в разделе 3.2).

Вернувшись к задаче Тверского, сформулируем её дробно-дифференциальное обобщение в виде

$$\frac{\partial^\alpha f_\alpha(\mathbf{v}, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{K_1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^{v+1} \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{v}, t)}{\partial v} \right) + \delta(\mathbf{v}) \delta_\alpha(t).$$

Решение этого уравнения выражается через решение уравнения (71) соотношением

$$f_\alpha(\mathbf{v}, t) = \int_0^\infty f \left(\mathbf{v}, \left(\frac{t}{\tau} \right)^\alpha \right) g_+(\tau; \alpha) d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Подставляя в последнее уравнение $f(\mathbf{v}, t)$ из (72) при $v = 2$ и $\alpha = 1/2$, получаем решение задачи в виде интеграла:

$$\begin{aligned} f_{1/2}(\mathbf{v}, t) &= \int_0^\infty f \left(\mathbf{v}, \sqrt{\frac{t}{\tau}} \right) g_+ \left(\tau; \frac{1}{2} \right) d\tau = \\ &= \text{const} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{v}{K_1} \sqrt{\frac{\tau}{t}} - \frac{1}{4\tau} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Чечкин с соавторами [129] использовали дробную версию уравнения Фоккера–Планка другого типа (с первой производной по времени и дробным лапласианом) для описания движения в магнитном поле $\mathbf{H} = \text{const}$ заряда e массой m , на который действует сила трения $-\eta \mathbf{v} \mathbf{n}$ и случайное электрическое поле \mathbf{E} . Последнее было представлено однородным изотропным стационарным белым леви-шумом с интенсивностью μ и показателем α . Леви-шум — это последовательность независимых стационарных приращений движения Леви, подобно тому как белый гауссов шум есть последовательность приращений броуновского движения. Характеристическая

¹³ По этой причине здесь сохранено принятное в [127] обозначение решения как ψ : в настоящем обзоре плотность распределения обозначается через f .

функция приращения

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \Delta t) = \exp(-\mu|\mathbf{k}|^\alpha \Delta t), \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

При $\alpha \rightarrow 2$ леви-шум переходит в гауссов. Соответствующее данной модели уравнение для плотности распределения скорости $f(\mathbf{v}, t)$ заряженной частицы в магнитном поле $\mathbf{H} = H \mathbf{e}_z$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_H [\mathbf{v} \mathbf{e}_z] \nabla_{\mathbf{v}} f = \eta \nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} f) - \mu(-\Delta_{\mathbf{v}})^{\alpha/2} f, \quad \omega_H = \frac{eH}{mc}.$$

Преобразованием Фурье

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{v} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t)$$

оно приводится к виду

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + (\omega_H [\mathbf{k} \mathbf{e}_z] + \eta \mathbf{k}) \nabla_{\mathbf{k}} \tilde{f} = -\mu |\mathbf{k}|^\alpha \tilde{f}.$$

Найденное авторами [129] решение этого уравнения при нулевом начальном условии $\mathbf{v}(0) = 0$ имеет вид

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \exp \left\{ -\frac{\mu}{\alpha \eta} [1 - \exp(-\alpha \eta t)] |\mathbf{k}|^\alpha \right\},$$

так что распределение скорости выражается через изотропную устойчивую плотность:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}, t) &= \left\{ \frac{\mu}{\alpha \eta} [1 - \exp(-\alpha \eta t)] \right\}^{-3/\alpha} \times \\ &\times \Psi_3^{(\alpha)} \left(\left\{ \frac{\mu}{\alpha \eta} [1 - \exp(-\alpha \eta t)] \right\}^{-1/\alpha} \mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

При малых временах

$$f(\mathbf{v}, t) \sim (\mu t)^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha)}((\mu t)^{-1/\alpha} \mathbf{v})$$

и мы имеем дело с движением Леви (масштабный множитель линеен по времени), в пределе больших времён зависимость от времени исчезает и мы приходим к стационарному распределению по скоростям:

$$f(\mathbf{v}, \infty) = \left(\frac{\mu}{\alpha \eta} \right)^{-3/\alpha} \Psi_3^{(\alpha)} \left(\left(\frac{\mu}{\alpha \eta} \right)^{-1/\alpha} \mathbf{v} \right).$$

Это решение совпадает с равновесным максвелловским распределением только при $\alpha = 2$, когда $\Psi_3^{(\alpha)}$ является трёхмерным гауссианом (с удвоенной дисперсией), при других значениях α оно существенно отличается от равновесного перераспределением вероятности из промежуточной области скоростей в области их малых и больших значений, образуя асимптотические степенные хвосты:

$$f(\mathbf{v}, \infty) \propto |\mathbf{v}|^{-\alpha-3}.$$

В задаче о потерях энергии быстрой частицей в отсутствие ускорения её энергетическое распределение ограничено начальной энергией и все моменты этого распределения конечны. При наличии ускорения столь определённого верхнего предела энергетического спектра не существует, что даёт дополнительные основания заглянуть в область с бесконечной дисперсией, приобретающую всё большую популярность среди исследователей аномальных диффузионных процессов. Содержательные (в асимптотическом смысле) результаты при этом получаются лишь тогда, когда бесконечность дис-

персии обусловлена степенным характером распределений:

$$\int_{|\Delta\mathbf{p}|>p} w(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}' + \Delta\mathbf{p}) d\Delta\mathbf{p} \propto p^{-\gamma}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Если показатель $\gamma > 2$, то второй момент конечен и мы находимся в "классической" диффузионной области. Если $\gamma < 2$, то второй момент приращения бесконечен и мы приходим к уравнениям для распределений по импульсам $f(\mathbf{p}, t)$,

$$\frac{\partial^\alpha f(\mathbf{p}, t)}{\partial t^\alpha} = -K(-\Delta\mathbf{p})^{v/2} f(\mathbf{p}, t) + f_0(\mathbf{p}) \delta_\alpha(t), \quad (76)$$

и по энергиям $N(E, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha N(E, t)}{\partial t^\alpha} &= \\ &= \begin{cases} \frac{\partial^v [a_v N(E, t)]}{\partial E^v} + N_0(E) \delta_\alpha(t), & 0 < v < 1, \\ \frac{\partial [a_1 N(E, t)]}{\partial E} + \frac{\partial^v [a_v N(E, t)]}{\partial E^v} + N_0(E) \delta_\alpha(t), & 1 < v < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $v = \gamma$ при $\gamma \leq 2$ и $v = 2$ при $\gamma > 2$ и весьма существенно для самого вывода уравнений, что коэффициенты K , a_1 и a_v постоянны. Как правило, при выводе дробно-дифференциальных уравнений используются интегральные преобразования, непременным условием эффективности которых как раз и является постоянство коэффициентов. Поэтому вывести, например, уравнение (76) с постоянными указанными коэффициентами, а затем поставить перед дробным лапласианом переменный коэффициент диффузии $K(p)$, было бы неправильным (в чём можно убедиться даже на примере уравнений (68)–(70) с целым лапласианом).

Описываемый уравнением (76) диффузионный пакет, распространяющийся из начала импульсных координат, имеет вид трёхмерного изотропного дробно-устойчивого распределения $\Psi_3^{(v, \alpha)}(\xi)$, $v \in (0, 2]$, $\alpha \in (0, 1]$, "расплювающегося" по закону $t^{\alpha/v}$:

$$f(\mathbf{p}, t) = (Kt^\alpha)^{-3/v} \Psi_3^{(v, \alpha)}((Kt^\alpha)^{-1/v} p).$$

"Хвосты" этого распределения имеют степенной вид с показателем v . Физически это означает своеобразный эффект лидирования: в сумме $\Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 + \dots + \Delta\mathbf{p}_n$ большого числа независимых слагаемых главную роль всегда играет одно из них; этот эффект исчезает при $v = 2$, когда распределение становится гауссовым (субгауссовым). В результате при $v < 2$ получаем спектр вида

$$N_1(E) dE \propto E^{-v-1} dE,$$

только внешне похожего на формулу Ферми. Главное отличие заключается в том, что показатель v здесь не связан с возрастом регистрируемых частиц — он целиком определяется только механизмом ускорения в отдельном локальном событии (столкновении). По этой причине фрактальность распределения ускоряющих областей в пространстве тоже никак не влияет на наклон получающегося спектра.

5.4. Интегро-дробно-дифференциальная модель

Недостаток представленной в разделе 5.3 модели состоит в том, что приращения импульса в акте ускорения не зависят от величины импульса частицы, вступаю-

щей во взаимодействие, тогда как в модели Ферми, и в более поздних её вариантах приращения энергии (а следовательно, и импульса) в среднем пропорциональны энергии (импульсу) частицы перед взаимодействием. В этом случае энергия ускоренной частицы выражается не суммой, а произведением независимых случайных величин. Назовём такую модель *мультиплективным блужданием*, чтобы отличать её от модели *аддитивного блуждания*, рассмотренной выше.

В мультиплективной модели приращение импульса пропорционально (в статистическом смысле) абсолютной величине самого импульса p' частицы, вступающей во взаимодействие,

$$\Delta\mathbf{p} = p' \mathbf{q}, \quad \int_{|\Delta\mathbf{p}|>p} w(\Delta\mathbf{p}; \mathbf{p}') d\Delta\mathbf{p} \propto \left(\frac{p}{p'}\right)^{-\gamma}, \quad p \rightarrow \infty.$$

Полагая распределение вектора пропорциональности \mathbf{q} не зависящим от \mathbf{p}' и изотропным, $W(\mathbf{q}; \mathbf{p}') d\mathbf{q} = (1/2)V(q) dq d\xi$, $\xi = \cos(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, преобразуем кинетическое уравнение (64) в следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha f(p, t)}{\partial t^\alpha} &= \mu \left\{ \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{2} \int_0^\infty V(q) \frac{f(p/\sqrt{1+2\xi q+q^2}, t)}{(\sqrt{1+2\xi q+q^2})^3} dq - \right. \\ &\quad \left. - f(p, t) \right\} + f_0(p) \delta_\alpha(t). \end{aligned} \quad (77)$$

Это уравнение, выведенное в работе [130], представляет собой модифицированную (путём учёта изменения направления при ускорении) версию модели [131]. Чтобы приблизить её к реальным процессам доускорения, например, при пересечении фронтов ударных волн на остатках сверхновых, примем, как это сделано в [132],

$$V(q) = \gamma q^{-\gamma-1}, \quad \gamma > 1.$$

Полученную в результате модель можно назвать *мультипликативными блужданиями Леви*.

Рассмотрим уравнение для спектральной функции в двух случаях.

Случай 1. $\gamma > 2$, существует второй момент приращения импульса, пропорциональный E^2 , — и мы возвращаемся в область классической диффузии с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^\alpha n(E, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial [a_1 E n(E, t)]}{\partial E} + \frac{\partial^2 [a_2 E^2 n(E, t)]}{\partial E^2} + n_0(E) \delta_\alpha(t).$$

Случай 2. $\gamma \ll 2$, так что в уравнении (77) можно пренебречь всеми членами под знаком квадратного корня, кроме q^2 :

$$\frac{\partial^\alpha n(E, t)}{\partial t^\alpha} = \mu \left\{ \int_1^\infty \gamma q^{-\gamma-1} n\left(\frac{E}{q}, t\right) \frac{dq}{q} - n(E, t) \right\} + n_0(E) \delta_\alpha(t). \quad (78)$$

(Не обсуждая здесь приемлемость такого приближения, укажем, что именно такой оператор ускорения использовался в работе [132] для конкретных расчётов.)

Решив уравнение (78) с применением метода преобразований Меллина — Лапласа и воспользовавшись формулами (62) и (67), для случая моноэнергетического источника, $n(E) = \delta(E - E_0)$, получим

$$N_\alpha(E; \tau) = \frac{\mu \tau^\alpha \gamma}{(1 + \mu \tau^\alpha)^2} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-1-\gamma/(1+\mu\tau^\alpha)} \frac{1}{E_0}. \quad (79)$$

Несмотря на то что формула (79), которая выведена в предположениях, весьма упрощающих реальную ситуацию, носит в значительной степени качественный характер, она в компактном виде отражает влияние на форму энергетического спектра космических лучей *всех трёх источников флюктуационного ускорения*: флюктуаций возраста частицы (параметр τ), флюктуаций числа актов ускорений (параметры α и μ) и флюктуаций энергии, приобретаемой в отдельном акте (параметр γ). Представив масштабный параметр μ в виде $\mu = \tau_A^\alpha$, где τ_A — характерный временной интервал между ускорениями частицы на остатках различных сверхновых (напомним, τ — среднее время жизни относительно ядерных столкновений), можно записать абсолютную величину показателя интегрального спектра в более наглядном виде: $\gamma' = 1 + \gamma/[1 + (\tau/\tau_A)^\alpha]$. При $\alpha = 1$ и $\mu\tau \gg 1$ приходим к формуле Ферми (61) с $a = \mu/\gamma$.

6. Проблемы и перспективы

6.1. О дробной производной по времени

С общефизической точки зрения космические лучи представляют собой высокоэнергетическую часть космической плазмы, и неудивительно, что параллельно с описанным в настоящем обзоре развитием дробно-дифференциальных моделей переноса космических лучей наблюдается проникновение этого аппарата и в физику плазмы. Так, Балеску [16], комбинируя бесстолкновительное уравнение плазмы с уравнением движения заряда в однородном магнитном поле и флюктуирующую электрическую компонентой, случайный потенциал которой представлен однородным гауссовым шумом, вывел уравнение немарковского типа для средней концентрации частиц, названное им *гибридным*:

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int_0^t d\tau \Lambda(\tau) \Delta n(\mathbf{r}, t - \tau),$$

где $\Lambda(\tau)$ — функция памяти, связанная со свойствами поля скоростей. В случае слабой турбулентности запаздыванием можно пренебречь, $n(\mathbf{r}, t - \tau) \approx n(\mathbf{r}, t)$, и распространить интегрирование по τ до бесконечности. В результате приходим к обычному уравнению диффузии. При сильной турбулентности учёт самоподобного (степенного) характера турбулентности привёл Балеску к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \Delta \left[Dn(\mathbf{r}, t) - H_0 \int_0^t n(\mathbf{r}, t - \tau) \tau^{\beta-2} d\tau \right], \quad \beta = 0,58,$$

которое совпадает по виду с уравнением (46) Птускина — Чувильгина и при $\theta \rightarrow 0$ превращается в дифференциальное уравнение.

Как и любой феноменологический вывод, этот вывод оставляет место для сомнений. Наиболее уязвимым здесь представляется не столько факт немарковости, и даже не степенной характер убывания корреляций, сколько предполагаемая неограниченность степенного распределения. Именно вследствие предположения о том, что степенной хвост простирается "до бесконечности", и появляется дробная производная Римана — Лиувилля: если степенной хвост отсечь, то этот оператор в масштабе больших времён превращается в обычный дифференциальный оператор первого порядка. Есть ли какие-

либо физические мотивы для ограничения этого распределения, кроме чисто психологического: нам не нравится, что среднее время пребывания в ловушке с $\beta < 1$ бесконечно? Последнее, кстати, ничему не противоречит: среднее значение (математическое ожидание) определяется через несобственный (с бесконечным верхним пределом) интеграл, и у природы нет резона заботиться о том, чтобы эта искусственная конструкция существовала. С физической точки зрения смысл запаздывающего интеграла и его ядра состоит в задержке движения частицы, происходящей не в результате её остановки, а вследствие её попадания в турбулентную область малых размеров с малым коэффициентом диффузии.

Численное моделирование траекторий движения частиц в турбулентной плазме [133] показало, что заряженные частицы действительно захватываются образующимися в турбулентной плазме вихрями ("ловушками") и удерживаются в них довольно длительное время. Время это случайно, и его распределение вероятности характеризуется довольно длинным степенным участком $t^{-\beta-1}$, $\beta = 0,83 \pm 0,22$, за которым следует быстрый спад (рис. 28а). Аналогичная ситуация обнаруживается и в динамике ярких магнитных элементов в фотосфере Солнца [60], где $\beta = 0,83 \pm 0,05$ в интервале 0,3–22,0 мин, за которым распределение так же быстро спадает (рис. 28б). В нашей работе [134] моделировалось броуновское движение частицы в кубе с гладкой поверхностью, также показавшее степенной (с показателем $\beta = 1/2$) участок распределения времени пребывания, заканчивающийся быстрым спадом. Отличие последнего значения показателя от указанных выше значений легко объяснить влиянием границы области захвата: естественная рыхлость граничной поверхности способствует сокращению времени пребывания в ловушке, т.е. увеличению β . Хотя введённое в работе [20] значение $\beta = 0,8$ согласуется по величине с результатами моделирования плазмы, ограниченность степенных участков заставляет с осторожностью относиться к результатам таких расчётов. Очевидно, что в пределе больших времён такие усечённые распределения приводят к производным первого порядка, но в предасимптотической области могут привести к появлению производных дробного порядка. Соединить обе эти области в одном уравнении в условиях мягкого затухания можно введением экспоненциального сомножителя в ядро дробно-дифференциального оператора [135]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{1-\beta} n(\mathbf{r}, t)}{\partial t^{1-\beta}} &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-(1-\beta)} n(\mathbf{r}, \tau) d\tau \mapsto \\ &\mapsto \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-(1-\beta)} \exp[-\gamma(t-\tau)] n(\mathbf{r}, \tau) d\tau = \\ &= \exp(-\gamma t) \frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}} [\exp(\gamma t) n(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned}$$

Уравнение субдиффузии при этом принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= D\Delta \exp(-\gamma t) \frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}} [\exp(\gamma t) n(\mathbf{r}, t)] + \delta(\mathbf{r}) \delta(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r}) \delta(t), & t \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial^\beta n}{\partial t^\beta} = D\Delta n(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r}) \delta_\beta(t), & t \rightarrow 0, \end{cases} \end{aligned}$$

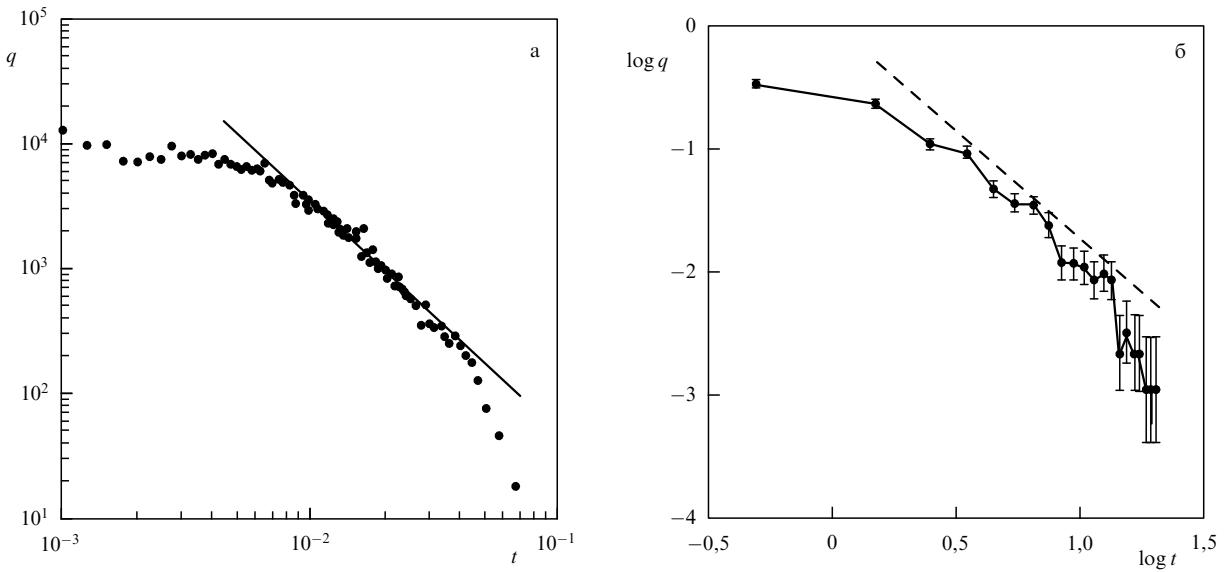


Рис. 28. Распределение времени пребывания в магнитной ловушке. (а) Результаты численного моделирования плазмы [133], отрезок прямой соответствует $\beta = 0,83$. (б) Данные наблюдений за движением магнитных элементов по поверхности Солнца [60], прямая соответствует $\beta = 0,76$.

или, в лапласовских образах,

$$\lambda \hat{n}(\mathbf{r}, \lambda) = (\lambda + \gamma)^{1-\beta} D \Delta \hat{n}(\mathbf{r}, \lambda) + \delta(\mathbf{r}).$$

На малых временах (т.е. при $\lambda \gg \gamma$) мы узнаём в выражении

$$\lambda \hat{n}(\mathbf{r}, \lambda) = \lambda^{1-\beta} D \Delta \hat{n}(\mathbf{r}, \lambda) + \delta(\mathbf{r})$$

преобразованное по Лапласу дробно-дифференциальное уравнение субдиффузии, которое мы записывали ранее в виде

$$\lambda^\beta \hat{n}(\mathbf{r}, \lambda) = D \Delta \hat{n}(\mathbf{r}, \lambda) + \delta(\mathbf{r}) \lambda^{\beta-1},$$

тогда как в пределе больших времён ($\lambda \ll \gamma$) из того же самого уравнения следует образ параболического уравнения нормальной диффузии:

$$\lambda \hat{n}(\mathbf{r}, \lambda) = D' \Delta \hat{n}(\mathbf{r}, \lambda) + \delta(\mathbf{r}), \quad D' = \gamma^{1-\beta} D.$$

Ясно, что этот эффект может быть получен не только при экспоненциальном, но и при других множителях, обеспечивающих быстрое затухание (или вообще обрывание) асимптотической части степенного распределения, так чтобы среднее время стало конечным, — просто экспоненциальный множитель ввиду применения преобразования Лапласа легко встраивается в результат.

6.2. О дробном лапласиане

В свете критики ЛТ-версии может возникнуть вопрос: как же тогда быть с уравнением Монина для турбулентной диффузии, в которой $\alpha = 2/3$ и никакого упоминания о скорости, и это — в нерелятивистской гидродинамике, в лабораторных, можно сказать, условиях, а не в физике космических лучей с её астрономическими масштабами и скоростями, близкими к скорости света? Отвечая на вопрос, прежде всего отметим, что уравнение Монина не нашло практического применения (разделив, между прочим, участь многих уравнений теоретической физики, выведенных, но не использованных). Более того, даже в *Статистической гидромеханике* [32], соавтором которой

является сам Монин, вывод уравнения есть, но о его применении не сказано ни слова. Веская причина такого умолчания заключается в том, что степенной спектр, положенный в основу вывода, справедлив лишь в ограниченном диапазоне волновых чисел k , тогда как дробный лапласиан соответствует неограниченному степенному спектру. Противоречие между формулой (6) из [32], приводящей в конечном итоге к дробному лапласиану, и указанием на то, что используемое при этом автомодельное представление функции

$$a(k, t) = a_0(\varepsilon^{1/3} k^{2/3} t)$$

справедливо лишь в ограниченном интервале аргументов, видно, что называется, невооружённым глазом: "Ограничиваюсь рассмотрением квазисимптомтических времён диффузии $t_3 < t < t_1$, мы должны допустить, что функция $a(k, t)$, кроме k и t , зависит ещё только от одного размерного параметра ε и, следовательно, имеет вид $a(k, t) = a_0(\varepsilon^{1/3} k^{2/3} t)$..." Гипотеза Монина состоит в предположении, что операторы $A(t)$ образуют полугруппу, т.е. обладают свойством $A(t_1)A(t_2) = A(t_1 + t_2)$. Отсюда вытекает, что $a_0(x_1 + x_2) = a_0(x_1)a_0(x_2)\dots$ " [32, с. 510]. Очевидно, что последнее выражение несовместимо с приведённым выше ограничением. Само это ограничение следует из того, что турбулентность обладает степенным спектром лишь в инерционном диапазоне волновых чисел $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$. Как показано в разделе 2.5, дробный лапласиан определяется поведением спектральной функции пробега в области $k \approx 0$, но именно эта область исключается из инерционного интервала. Поэтому показатель α не может быть меньше единицы в непрерывно-турбулентной среде, что имеет место в ЛТ-версии. Если $\alpha > 1$, то средний пробег становится конечным, образуя масштаб, многократное превышение которого позволяет уже рассматривать как допустимую состоящую из таких отрезков аппроксимацию возможной траектории в такой среде. В то же время если распространение частиц происходит в областях с локализованными турбулентными зонами относительно малых размеров, распределённых фрактально, то это

вражжение можно игнорировать. Примером может служить перенос космических лучей в Метагалактике: здесь модель с $\alpha < 1$ и $\beta < 1$, т.е. с длинными прямолинейными перелётами между галактиками и застреваниями в них как ловушках, может оказаться вполне приемлемой.

Если расходимость моментов элементарного смещения начинается со следующего, четвёртого, порядка, то можно ввести дробное обобщение уравнения Барнетта, в трёхмерном случае имеющего вид

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D_2 \Delta f(\mathbf{r}, t) - D_\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{r}, t), \quad 2 < \alpha < 4. \quad (80)$$

Включение в уравнение дополнительного слагаемого лишает его важного свойства автомодельности решения, но в то же время придаёт ему интересную особенность. Преобразование Фурье по x даёт в правой части слагаемые с k^2 и $|k|^\alpha \equiv (k^2)^{\alpha/2}$; при $k \rightarrow 0$ лидирует первое из них, при $k \rightarrow \infty$ — второе (напомню, $\alpha > 2$). Следовательно, описываемый уравнением (80) процесс на больших масштабах выглядит обычной диффузией, а на малых — замедленной. Это же уравнение со значением α из низшего диапазона,

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D_2 \Delta f(\mathbf{r}, t) - D_\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{r}, t), \quad 0 < \alpha < 2,$$

описывает процесс обычной диффузии в меньших масштабах и супердиффузии — в больших. Различие этих процессов объясняется, конечно, свойствами среды, различными на разных масштабах.

Другой проблемный аспект — нелокальность дробного оператора Лапласа, порождаемая его интегральным характером. В отличие от обычного лапласиана, вид которого не зависит от границ и граничных условий,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

дробный лапласиан от них зависит. В случае дробного лапласиана необходимо задать не только свойства искомой функции на границах области, но и её значения за пределами этой области. Популярное фурье-представление $|\mathbf{k}|^{\alpha/2}$ дробного лапласиана в ограниченной среде перестаёт быть применимым. Очень полезной при этом оказывается интерпретация в терминах перелётов, помогающая установить влияние на решение качества границ (отражающие, прозрачные, полупрозрачные, диффузные) и лучше разобраться в таких, не сразу очевидных, характеристиках, как времена первого достижения и первого прохождения границы. Попутно заметим, что разложение лапласиана по декартовым или другим ортогональным координатам, являющееся теоретической основой метода разделения переменных, в дробно-дифференциальном случае неприменимо: нельзя записать дробный трёхмерный лапласиан как сумму одномерных лапласианов вдоль x , y и z . Это очевидно в фурье-представлении:

$$|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

но

$$|\mathbf{k}|^\alpha = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\alpha/2} \neq |k_x|^\alpha + |k_y|^\alpha + |k_z|^\alpha, \quad \alpha \neq 2.$$

Аналогично, нельзя разбить дробный лапласиан на радиальную и угловые составляющие. Использование в каком-либо уравнении лишь радиального дробного

лапласиана может только означать, что рассматривается движение лишь по радиальным траекториям, тогда как в случае обычного лапласиана его радиальная составляющая отражает эволюцию радиальной координаты сложной пространственной траектории.

В [136] введено матричное представление одномерного дробного лапласиана, использованное для численного решения задач с поглощением на границах. Авторы работы [137] показали, что дробный лапласиан для бесконечной среды

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f(x, t) = -\frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)\Gamma(2-\alpha)} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty |x - \xi|^{1-\alpha} f(\xi, t) d\xi, \quad 1 < \alpha < 2,$$

при наличии отражающей стенки превращается в интегро-дифференциальный оператор с модифицированным ядром:

$$-(-\Delta)_{\text{refl}}^{\alpha/2} f(x, t) = -\frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)\Gamma(2-\alpha)} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty [|x - \xi|^{1-\alpha} + (x + \xi)^{1-\alpha}] f(\xi, t) d\xi.$$

Рафейро и Самко [138] ввели дробный лапласиан как обобщение одномерной формулы дробной производной Маршо на ограниченном участке оси для ограниченной области d -мерного пространства:

$$\mathcal{D}_G^\alpha f(\mathbf{x}) = C(\alpha) \left[a_G(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) + \int_G \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}} dy \right], \\ \mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in (0, 1),$$

где

$$C(\alpha) = \frac{\alpha 2^{\alpha-1} \Gamma[(d+\alpha)/2]}{\pi^{d/2} \Gamma(1-\alpha/2)}, \\ a_G(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus G} \frac{dy}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\alpha}}.$$

Гуан и Ма [139], изучавшие отражённые симметричные устойчивые процессы, назвали *региональным дробным лапласианом* предел

$$-(-\Delta)_G^{\alpha/2} f(\mathbf{x}) \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} C(\alpha) \int_{G, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \varepsilon} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{d+\alpha}} dy.$$

Ввиду указанных трудностей учёта граничных условий наиболее прозрачным способом формулировки граничных задач в нелокальной теории остаются интегральные уравнения и опирающийся на них метод Монте-Карло.

6.3. О градiente и материальной производной

Если взглянуть на проблему переноса космических лучей с точки зрения гипотезы о скрытых переменных, то появление дробных производных по времени здесь вполне ожидаемо: движение космических лучей влияет на магнитные поля и связанные с ними структуры, и наоборот. Обычная диффузионная теория игнорирует эту связь, тогда как дробный характер производных может свидетельствовать о частичном учёте такой связи в оставшихся уравнениях. Есть, однако, очень серьёзный вопрос, без решения которого мы вряд ли обретём

полную уверенность, следуя дробно-дифференциальным путём. Именно, как только мы переходим к кинетическому описанию ("включаем скорость"), оператор частного дифференцирования $\partial/\partial t$ преобразуется в оператор материального дифференцирования $d/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$. В дробно-дифференциальном подходе это порождает преобразование $(\partial/\partial t)^\alpha \mapsto (d/dt)^\alpha$. Проблема состоит в том, что дробные операторы нелокальны и потому должны сопровождаться указанием области переменной, в которой значения функции вовлекаются в процедуру вычисления. Строго говоря, использованное нами обозначение дробной производной по времени не вполне удовлетворительно и должно быть заменено, например, таким:

$${}_a D_t^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_a^t \frac{f(t') dt'}{(t-t')^\alpha}, \quad -\infty \leq a < t, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Нижний предел определяется физическими условиями: если объект (частица) родился в какой-то момент, принимаемый нами за начало отсчёта времени, то a следует положить равным нулю, а если объект существовал всегда (скажем, в обозримом прошлом), естественно принять $a = -\infty$. Подставляя в приведённую выше формулу разные a , мы получим разные значения производной одной и той же функции $f(t)$ в один и тот же момент времени t .

В ряде относительно недавних работ (см., например, [140, 141]) понятие дробного оператора распространено на градиент следующим образом:

$$\nabla^\alpha f(x, y) = f_x^{(\alpha)}(x, y)\mathbf{e}_x + f_y^{(\alpha)}(x, y)\mathbf{e}_y.$$

Возможно, читателю это обобщение покажется естественным (в самом деле, мне не известны критические замечания по этому поводу), но это только на первый взгляд и в отсутствие картины конкретного процесса перед глазами. В одной из таких статей [142] рассматривается движение материальной точки в плоскости, где функция $f(x, y)$ играет роль потенциальной энергии, а x и y — проекции скоростей. При $\alpha \in (0, 1)$ система соответствующих уравнений записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = -f_x^{(\alpha)}(x, y) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{f(x', y) dx'}{(x-x')^\alpha},$$

$$\frac{dy}{dt} = -f_y^{(\alpha)}(x, y) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{f(x, y') dy'}{(y-y')^\alpha}.$$

Однако какой физический смысл можно придать этим уравнениям? Казалось бы естественным проводить интегрирование по участку траектории движения частицы, приводящему её в данную точку P , но *разные компоненты градиента в заданной точке вычисляются по разным траекториям*, $O''P$ и $O'P$, пересекающимся лишь в одной этой точке (рис. 29). Данная операция не поддаётся физической интерпретации.

Более естественным представляется интегрирование по траектории движения частицы OP ,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{f(x'(t'), y'(t')) dx'(t')}{(x-x'(t'))^\alpha},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{f(x'(t'), y'(t')) dy'(t')}{(y-y'(t'))^\alpha},$$

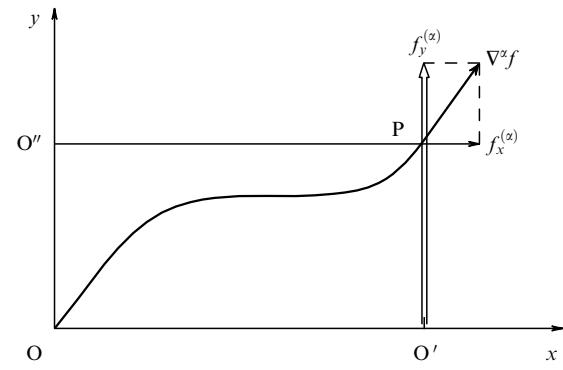


Рис. 29. К проблеме дробного градиента.

где $x'(t')$, $y'(t')$ — координаты в момент $t' < t$ частицы, которая к моменту t пришла в точку с координатами x и y .

Аналогично, определение материальной производной дробного порядка, даваемое формулой

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right)^\alpha f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \times \int_{-\infty}^t \frac{f(\mathbf{r} - (t-\tau)\mathbf{v}, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$$

естественнее заменить определением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right)^\alpha f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \times \int_{-\infty}^t \frac{f(\mathbf{R}(\tau; \mathbf{r}, t), \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$$

где $\mathbf{R}(\tau; \mathbf{r}, t)$ — радиус-вектор частицы в момент времени $\tau < t$, которая в момент измерения t оказывается в точке наблюдения \mathbf{r} , так что

$$\mathbf{R}(t; \mathbf{r}, t) = \mathbf{r}.$$

Для разных траекторий, подводящих частицу к точке наблюдения, градиент в этой точке оказывается разным. Любопытно, однако, отметить, что по мере приближения α к 1 всё более короткий отрезок этой кривой, прилегающий к точке \mathbf{r} , оказывает влияние на градиент, и наконец при $\alpha = 1$ благодаря пределу

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \delta(t-\tau)$$

получаем привычную независимость градиента от предыстории траектории.

7. Заключение

Предлагая читателю УФН этот третий из обзоров, отражающих мой опыт применения дробно-дифференциального аппарата к решению физических задач (два предыдущих — обзоры [25, 143]), я продолжаю преследовать одну и ту же цель: реабилитировать этот подход, снять с него флер некоторой искусственности, вскрыть его прямую связь с физикой естественных процессов. Проблема состоит в том, что дробные операторы нелокальны, поэтому мы не можем вывести основные уравнения привычным для нас способом — рассмотрением связи между бесконечно малыми изменениями

интересующей нас величины и бесконечно малыми приращениями времени и координат. Между тем число публикаций, посвящённых применению этого аппарата к различным физическим задачам, продолжает расти, превышая уже, по моим оценкам, 3–4 тысячи. Многие из этих статей строятся по весьма примитивной схеме: берётся известное дифференциальное уравнение (например, уравнение Ньютона), произносится несколько магических слов (типа *память*, *фрактальность*, *сложность*), после чего производные целого порядка (в данном случае — второго) заменяются производными дробного порядка, обсуждаются некоторые математические следствия — и в печать! Есть авторы, практикующие исключительно такую технологию. Выведены (хотя вряд ли указанную процедуру можно назвать выводом) дробно-дифференциальные аналоги уравнений Лагранжа, Гамильтона, Лиувилля, Больцмана, цепочки уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона, уравнений диффузии, реологии вязкоупругих сред, уравнений Фоккера — Планка, Навье — Стокса, Гинзбурга — Ландау, Шрёдингера, Гейзенберга, Клейна — Гордона, Дирака... Казалось бы, теоретическая физика должна получить мощный импульс: ведь это освоение "новых земель" в какой-то степени аналогично переходу от целых чисел к вещественным!

Однако скромность фактически новых результатов обескураживает. И это естественно: наивно полагать, что просто заменив двойку в символе производной по времени дробным числом α и решив уравнение по известной схеме, мы сразу выйдем к "новой постньютоновской физике". Необходимо провести довольно кропотливую работу, чтобы обеспечить уверенное понимание естественности *возникновения* (не *введения*) дробных производных в данной задаче, специфики отражения ими наблюдаемых взаимосвязей, уверенную интерпретацию получаемых результатов, аккуратное установление пределов применимости получаемых моделей.

Большее доверие вызывают работы, в которых дробные производные появляются в результате математических преобразований стандартных классических уравнений. Блестящим примером такого типа является *сила Бассе* или *наследственная сила*, действующая на произвольно движущийся в вязкой жидкости шар (последний член выражения (4) в книге [144, с. 132]):

$$F_B = 6\pi\rho R^2 \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du}{dt} \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}}.$$

В разделе 4.3 мы видели, как возникает дробная производная при рассмотрении поперечной диффузии космических лучей. Правда, дополнительные предположения, неизбежные для применения теории возмущений, существенно ограничивают справедливость полученных результатов областью слабой турбулентности. Выведенное в работе [145] кинетическое уравнение для частиц в сильно турбулентной плазме содержит интегральный оператор по логарифму импульса (не являющийся, вообще говоря, дробной производной, но отражающий нелокальность процесса в импульсном пространстве). Существенно нелокальной является и развиваемая Алексеевым обобщённая гидродинамика [146, 147]. Обсуждая её применение к турбулентным течениям, автор отмечает, что в рамках корреляционного подхода, использующего усреднённые по времени произведения разностей проекций скоростей в двух близких точках вида

$$B_{ik} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})},$$

неясными остаются вопросы: что означает "блзкие точки" и как реализуется временнёе усреднение? В связи с этим он приводит цитату из *Гидродинамики* Ландау и Лифшица [144, с. 200]: "Можно было бы думать, что существует принципиальная возможность получить универсальную (применимую к любому турбулентному движению) формулу, определяющую B_{rr} , B_{tt} для всех расстояний, малых по сравнению с l_L . В действительности, однако, такой формулы вообще не может существовать, как это яствует из следующих соображений. Мгновенное значение величины $(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})$ можно было бы в принципе выразить через диссипацию энергии ε в тот же момент времени t . Однако при усреднении этих выражений будет существенным закон изменения ε в течение крупномасштабных (масштабы порядка l_L) движений, различный для различных конкретных случаев движения. Поэтому и результат усреднения не может быть универсальным". Другими словами, мы не можем выполнить это усреднение, опираясь только информацией о бесконечно малой окрестности данной точки: надо знать эволюцию поля в большой области, включая возможные граничные условия. Но к такому же типу характеристик относится и коэффициент турбулентной диффузии, так что наблюданое нами появление нелокального оператора (лапласиана дробного порядка) в уравнении турбулентной диффузии как раз и является следствием отмеченного в приведённой цитате факта.

Вероятно, Гинзбург, читавший работу Алексеева в рукописи и дававший ему советы, не связал потенциальные возможности нелокальной модели турбулентной диффузии с проблемой распространения космических лучей в Галактике, в которой турбулентность играет ничуть не меньшую роль, чем в "земной гидродинамике". Скорее всего, дело в том, что он уже не рассматривал эту задачу в числе первоочередных задач физики космических лучей [148].

Можно привести и ёщё примеры продолжающейся "диффузии" нелокальных операторов в гидродинамику и кинетику плазмы. Каждый раз мы встречаемся с некоторым рассуждением, обосновывающим введение или объясняющим появление нелокальных операторов. Есть ли какое-либо общее обоснование появления нелокального, скажем, по времени оператора, не связанное с конкретным процессом и тем более с его приближённым описанием? Да, есть. Обратимся, например, к книге Резибуа и де Ленера [149]. Рассматривается замкнутая система N частиц, её движение в $2N$ -мерном фазовом пространстве управляетя дифференциальным уравнением Лиувилля марковского типа, т.е. уравнением, содержащим только первую производную по времени. Но если нас интересует лишь распределение по импульсам, то, применив технику проекционных операторов Цванцига — Мори, мы без всяких упрощений и приближений получим уравнение для распределения по импульсам, но оно будет содержать уже запаздывающий интеграл, т.е. не будет марковским. То же самое мы получим, если будем интересоваться другими переменными. И то же самое мы увидим, если будем наблюдать за некоторой частью консервативной замкнутой системы, не вида другой её части. Невидимая (скрытая) часть системы влияет на поведение видимой в течение всего периода, предшествующего измерению. Наблюдая только за импульсным распределением частиц, мы игнорируем (переводим в разряд скрытых переменных) координаты. Состояние скрытой части в момент измерения неизвестно, но оно может быть, по крайней мере в принципе,

восстановлено из анализа предыстории наблюдаемой части. Стремясь описать движение космических лучей без столь же подробного описания эволюции межзвездного магнитного поля, мы переводим характеристики последнего в разряд скрытых переменных и вновь приходим к эредитарному (немарковскому, с запаздыванием) уравнению для распределения космических лучей. Физически перенос информации от различных элементов скрытой части системы к наблюдаемой характеристике в точке наблюдения осуществляется с конечной скоростью, что в свою очередь порождает пространственную нелокальность, связанную с соответствующей структурой среды. Дробно-дифференциальные операторы, содержащие сингулярные ядра степенного типа, являются следствием дополнительного предположения об автомодельности процесса. Таковой мне представляется сегодня "философия" дробно-дифференциальной феноменологии.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить организаторов научных семинаров Национального исследовательского института ядерной физики им. Д. В. Скobelцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, предоставивших мне возможность выступить с докладами по теме обзора, и участников этих семинаров за ценные замечания и плодотворные дискуссии. Чрезвычайно тронут высоким профессионализмом и заботливой тщательностью обработки рукописи обзора редакцией УФН. Благодарен моим коллегам: Р. Т. Сибатову за многочисленные обсуждения рассматриваемых в обзоре вопросов и выполнение некоторых вычислений и Е. В. Кожемякиной за помощь в подготовке рукописи к опубликованию.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ 2.1894.2011 (соглашение 14.B37.21.1296) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00585, 11-01-00660).

Список литературы

1. Fermi E *Phys. Rev.* **75** 1169 (1949) [Ферми Э *Научные труды* Т. 2 (М.: Наука, 1972) с. 439]
2. Strömgren B *Astrophys. J.* **108** 242 (1948)
3. Гинзбург В Л УФН **51** 343 (1953)
4. Гинзбург В Л, Сыроватский С И *Происхождение космических лучей* (М.: Изд. АН СССР, 1963) с. 173 [Ginzburg V L, Syrovatskii S I *The Origin of Cosmic Rays* (Oxford: Pergamon Press, 1964)]
5. Heisenberg W, in *Preludes in Theoretical Physics, in Honor of V.F. Weisskopf* (Eds A de-Shalit, H Feshbach, L van Hove) (Amsterdam: North-Holland, 1966) p. 166 [Гейзенберг В УФН **91** 731 (1967)]
6. Березинский В С и др. *Астрофизика космических лучей* (Под ред. В Л Гинзбурга) (М.: Наука, 1990) [Berezinskii V S et al. *Astrophysics of Cosmic Rays* (Ed. V L Ginzburg) (Amsterdam: North-Holland, 1990)]
7. Гетманцев Г Г *Астрон. журн.* **39** 607 (1962) [Getmantsev G G Sov. *Astron.* **6** 477 (1963)]
8. Jokipii J R, Parker E N *Astrophys. J.* **155** 799 (1969)
9. Forman M A, Jokipii J R, Owens A J *Astrophys. J.* **192** 535 (1974)
10. Hayakawa S *Cosmic Ray Physics; Nuclear and Astrophysical Aspects* (New York: Wiley-Interscience, 1969) [Хаякава С *Физика космических лучей* Ч. 2 (М.: Мир, 1974)]
11. Urch I H *Astrophys. Space Sci.* **48** 231 (1977)
12. Urch I H *Astrophys. Space Sci.* **49** 443 (1977)
13. Webb G M et al. *Astrophys. J.* **651** 211 (2006)
14. Птушкин В С, Чувильгин Л Г, Препринт № 49 (Троицк: ИЗМИРАН, 1990)
15. Chuvilgin L G, Ptuskin V S *Astron. Astrophys.* **279** 278 (1993)
16. Balescu R *Plasma Phys. Control. Fusion* **42** B1 (2000)
17. Parker E N *Space Sci. Rev.* **9** 651 (1969)
18. Зыбин К П, Истомин Я Н УФН **89** 836 (1985) [Zybin K P, Istomin Ya N Sov. *Phys. JETP* **62** 479 (1985)]
19. Лагутин А А, Никулин Ю А, Учайкин В В, Препринт № 4 (Барнаул: Алтайский гос. ун-т, 2000)
20. Lagutin A A, Nikulin Yu A, Uchaikin V V *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **97** 267 (2001)
21. Золотарев В М, Учайкин В В, Саенко В В УФН **115** 1411 (1999) [Zolotarev V M, Uchaikin V V, Saenko V V *JETP* **88** 780 (1999)]
22. Учайкин В В УФН **115** 2113 (1999) [Uchaikin V V *JETP* **88** 1155 (1999)]
23. Uchaikin V V, Zolotarev V M *Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications* (Utrecht: VSP, 1999)
24. Einstein A *Ann. Phys.* **17** 549 (1905) [Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. 3 (М.: Наука, 1966) с. 108]
25. Учайкин В В УФН **173** 847 (2003) [Uchaikin V V *Phys. Usp.* **46** 821 (2003)]
26. Burnett D *Proc. London Math. Soc.* **39** 385 (1935)
27. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941) [Kolmogoroff A N C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR **30** 301 (1941)]
28. Kolmogorov A N, in *Mécanique de la turbulence: Colloq. intern. du Centre national de la recherche scientifique, Marseille, 28 Août – 2 Septembre 1961* (Paris: Éditions du Centre national de la recherche scientifique, 1962) p. 447 [*The Mechanics of Turbulence. Intern. Symp. of the National Scientific Research Center, 1961* (New York: Gordon and Breach, 1964)]
29. Обухов А М *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.* **5** 453 (1941)
30. Oboukhov A M *J. Fluid Mech.* **13** 77 (1962)
31. Монин А С *ДАН СССР* **105** 256 (1955)
32. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности* Ч. 2 (М.: Наука, 1967) [Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics. Mechanics of Turbulence* Vol. 2 (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1975)]
33. Учайкин В В *Метод дробных производных* (Ульяновск: Артишок, 2008)
34. Bakunin O G *Turbulence and Diffusion: Scaling Versus Equations* (New York: Springer, 2008)
35. Uchaikin V V *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers* Vols 1, 2 (New York: Springer, 2012)
36. Бакунин О Г УФН **173** 757 (2003) [Bakunin O G *Phys. Usp.* **46** 733 (2003)]
37. Бакунин О Г УФН **183** 257 (2013) [Bakunin O G *Phys. Usp.* **56** 243 (2013)]
38. Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
39. Зеленый Л М, Милованов А В УФН **174** 809 (2004) [Zelenyi L M, Milovanov A V *Phys. Usp.* **47** 749 (2004)]
40. Учайкин В В УФН **124** 903 (2003) [Uchaikin V V *JETP* **97** 810 (2003)]
41. Klafter J, Blumen A, Shlesinger M F *Phys. Rev. A* **35** 3081 (1987)
42. Feller W *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* Vol. 2 (New York: Wiley, 1971) [Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* Т. 2 (М.: Мир, 1984)]
43. Del-Castillo-Negrete D, Carreras B A, Lynch V E *Phys. Rev. Lett.* **94** 065003 (2005)
44. Дорман Л И *Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей* (М.: Наука, 1975)
45. Combes F, in *The Chaotic Universe* (Advanced Series in Astrophysics and Cosmology, Vol. 10, Eds V G Gurzadyan, R Ruffini) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 143
46. Бершадский А Г УФН **160** (12) 189 (1990) [Bershadskii A G Sov. *Phys. Usp.* **33** 1073 (1990)]
47. Учайкин В В, Коробко Д А, Гисматов И Ф *Изв. вузов. Физика* (8) 7 (1997) [Uchaikin V V, Korobko D A, Gismyatov I F Russ. *Phys. J.* **40** 711 (1997)]
48. Ragot B R, Kirk J G *Astron. Astrophys.* **327** 432 (1997)
49. Zweibel E G, Heiles C *Nature* **385** 131 (1997)
50. Dendy R O et al., in *Proc. of the 24th Intern. Cosmic Ray Conf., ICRC, Rome, 1995* Vol. 3 (Eds N Iucci, E Lamanna) (Urbino: Intern. Union of Pure and Applied Physics, 1995) p. 221
51. Duffy P et al. *Astron. Astrophys.* **302** L21 (1995)
52. White R B, Rex J M, Wu Y, in *Statistical Description of Transport in Plasma, Astro- and Nuclear Physics* (Eds J Misguich, G Pelletier, P Schuck) (New York: Nova Science Publ., 1993) p. 75
53. Kadomtsev B B, Pogutse O P, in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1978. Proc. of the 7th Intern. Conf., IAEA, Innsbruck, Austria, August 23–30, 1978* Vol. 1 (Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1978) p. 649
54. Кулаков А В, Румянцев А А *Докл. РАН* **336** 183 (1994) [Kulakov A V, Rumyantsev A A *Phys. Dokl.* **39** 337 (1994)]
55. Elmegreen B G *Publ. Astron. Soc. Australia* **15** 74 (1998)
56. Shibata T *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **75** 22 (1997)
57. Lagutin A A, Uchaikin V V, in *Proc. of the 27th Intern. Cosmic Ray Conf., 7–15 August, 2001, Hamburg, Germany* Vol. 5 (Hamburg: Copernicus Gesellschaft, 2001) p. 1896
58. Lagutin A A, Uchaikin V V *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **201** 212 (2003)
59. Lagutin A A, Strelnikov D V, Tyumentsev A G, in *Proc. of 27th Intern. Cosmic Ray Conf., Hamburg, Germany, 2001* Vol. 5 (Hamburg: Copernicus Gesellschaft, 2001)
60. Cadavid A C, Lawrence J K, Ruzmaikin A A *Astrophys. J.* **521** 844 (1999)
61. Osborne J L, Wdowczyk J, Wolfendale A W *J. Phys. A Math. Gen.* **9** 1399 (1976)
62. Dorman L I, Ghosh A, Ptuskin V S *Astrophys. Space Sci.* **109** 87 (1985)
63. Lagutin A A, Makarov V V, Tyumentsev A G, in *Proc. of 27th Intern. Cosmic Ray Conf., Hamburg, Germany, 2001* Vol. 5 (Hamburg: Copernicus Gesellschaft, 2001)
64. Lagutin A A *Probl. Atom. Sci. Technol.* (6) 214 (2001)
65. Lagutin A A, Osadchiy K I, Strelnikov D V, in *Proc. of 27th Intern. Cosmic Ray Conf., Hamburg, Germany, 2001* Vol. 5 (Hamburg: Copernicus Gesellschaft, 2001) p. 1852

66. Lagutin A A, Osadchiy K I, Gerasimov V V *Probl. Atom. Sci. Technol.* (6) 209 (2001)
67. Lagutin A A et al., in *Proc. of the 28th Intern. Cosmic Ray Conf., July 31 – August 7, 2003, Tsukuba, Japan* Vol. 2 (Eds T. Kajita et al.) (Tsukuba, 2003) p. 675; astro-ph/0306187
68. Лагутин А А, Тюменцев А Г *Изв. РАН. Сер. физ.* **67** 439 (2003)
69. Erlykin A D, Lagutin A A, Wolfendale A W *Astropart. Phys.* **19** 351 (2003)
70. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **8** 1385 (1965)
71. Tchen C M, in *Atmospheric Diffusion and Air Pollution* (Advances in Geophysics, Vol. 6, Eds F N Frenkiel, P A Sheppard) (New York: Academic Press, 1959) p. 165 [Чен К М, в сб. *Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха* (М.: ИЛ, 1962) с. 191]
72. Erlykin A D, Wolfendale A W *Astropart. Phys.* **42** 70 (2013); arXiv: 1212.2760
73. Лагутин А А, Тюменцев А Г *Изв. Алтайского гос. ун-та* (Спец. вып.) 4 (2004)
74. Uchaikin V V *Gravitation Cosmology* **10** 5 (2004)
75. Учайкин В В, Коробко Д А *Ученые записки Ульяновского гос. ун-та. Сер. физ.* (14) 3 (1998)
76. Коробко Д А, Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук (Ульяновск: Ульяновский гос. ун-т, 1999)
77. Лагутин А А, Райкин Р И, Тюменцев А Г *Изв. Алтайского гос. ун-та* (Спец. вып.) 27 (2004)
78. Ketabi N, Fatemi J *Transaction B Mech. Eng.* **16** 269 (2009)
79. Kermani H A, Fatemi J *South African J. Sci.* **107** 2 (2011)
80. Doostmohammadi S, Fatemi S J *ISRN High Energy Phys.* **2012** 673250 (2012)
81. Учайкин В В *Письма в ЖЭТФ* **91** 115 (2010) [Uchaikin V V *JETP Lett.* **91** 105 (2010)]
82. Lagutin A A et al., in *Proc. of the 32nd Intern. Cosmic Ray Conf., ICRC2011, 11–18 August, 2011, Beijing, China*
83. Lagutin A, Tyumentsev A J. *Phys. Conf. Ser.* **409** 012050 (2013)
84. Bugayov V V et al., in *Proc. of the 30th Intern. Cosmic Ray Conf., July 3–11, 2007, Mérida, Yucatán, Mexico* Vol. 2 (Eds R Caballero et al.) (Mexico City, Mexico: Univ. Nacional Autónoma de México, 2008) p. 179
85. Учайкин В В *TMF* **115** 154 (1998) [Uchaikin V V *Theor. Math. Phys.* **115** 496 (1998)]
86. Учайкин В В *ЖТФ* **68** (1) 138 (1998) [Uchaikin V V *Tech. Phys.* **43** 124 (1998)]
87. Uchaikin V V *Physica A* **255** 65 (1998)
88. Учайкин В В, Яровикова И В *Журн. вычисл. матем. матем. физ.* **43** 1536 (2003) [Uchaikin V V, Yarovikova I V *Comput. Math. Math. Phys.* **43** 1478 (2003)]
89. Самко С Г, Килбас А А, Маричев О И *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Минск: Наука и техника, 1987) [Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications* (Philadelphia, Pa.: Gordon and Breach Sci. Publ., 1993)]
90. Uchaikin V V, Sibatov R T *Gravitation Cosmology* **18** 122 (2012)
91. Учайкин В В, Сибатов Р Т, Saenko В В *Изв. РАН. Сер. физ.* **77** 688 (2013) [Uchaikin V V, Sibatov R T, Saenko V V *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* **77** 619 (2013)]
92. Uchaikin V V, Sibatov R T, Saenko V V, in *23rd European Cosmic Ray Symp., Moscow, Russia, July, 3–7, 2012*, PCR1 ID 665
93. Taillet R, Maurin D *Astron. Astrophys.* **402** 971 (2003)
94. Skilling J *Astrophys. J.* **170** 265 (1971)
95. Krommes J A *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **64** 137 (1978)
96. Rochester A B, Rosenbluth M N *Phys. Rev. Lett.* **40** 38 (1978)
97. Ramaty R, Lingefelter R E, in *Isotopic Composition of the Primary Cosmic Radiation. Proc. of a Symp., Lyngby, Denmark, March, 1971* (Ed. P M Dauber) (Lyngby: Danisch Space Res. Inst., 1971) p. 203
98. Зельдович Я Б, Соколов Д Д *УФН* **146** 493 (1985) [Zel'dovich Ya B, Sokolov D D *Sov. Phys. Usp.* **28** 608 (1985)]
99. Shalchi A, Kourakis I *Phys. Plasmas* **14** 092903 (2007)
100. Shalchi A, Kourakis I *Phys. Plasmas* **14** 112901 (2007)
101. Shalchi A et al. *Phys. Rev. E* **80** 066408 (2009)
102. Corrsin S, in *Atmospheric Diffusion and Air Pollution* (Advances in Geophysics, Vol. 6, Eds F N Frenkiel, P A Sheppard) (New York: Academic Press, 1959) p. 161 [Коррсин С, в сб. *Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха* (М.: ИЛ, 1962) с. 187]
103. Uchaikin V V, in *Long-range Interactions, Stochasticity and Fractional Dynamics* (Nonlinear Physical Science, Eds A C J Luo, V Afraimovich) (Beijing: Higher Education Press, Berlin: Springer-Verlag, 2010) p. 27
104. Mandelbrot B B, Van Ness J W *SIAM Rev.* **10** 422 (1968)
105. Wang K G, Lung C W *Phys. Lett. A* **151** 119 (1990)
106. Jokipii J R *Astrophys. J.* **183** 1029 (1973)
107. Schlickeiser R *Cosmic Ray Astrophysics* (Berlin: Springer, 2002)
108. Топтыгин И Н *Космические лучи в межпланетных магнитных полях* (М.: Наука, 1983) [Topptygin I N *Cosmic Rays in Interplanetary Magnetic Fields* (Dordrecht: D. Reidel, 1985)]
109. Цытович В Н *Теория турбулентной плазмы* (М.: Атомиздат, 1971) [Tsytovich V N *Theory of Turbulent Plasma* (New York: Consultants Bureau, 1977)]
110. Дорман Л И, Птушкин В С, Чувильгин Л Г *Геомагнетизм и аэрономия* **29** 529 (1989) [Dorman L I, Ptuskin V S, Chuvilgin L G *Geomagn. Aeron.* **29** 405 (1989)]
111. Дорман Л И, Птушкин В С, Чувильгин Л Г *Изв. вузов. Радиофизика* **5** 172 (1962)
112. Roberts P H, Research Report No. HSN-2 (New York: New York Univ., 1960)
113. Webb G M et al. *J. Phys. A Math. Theor.* **42** 235502 (2009)
114. Parker E N *Planet. Space Sci.* **13** 9 (1965)
115. Баренблatt Г И, Зельдович Я Б *УМН* **26** (2) 115 (1971) [Barenblatt G I, Zel'dovich Ya B *Russ. Math. Surv.* **26** (2) 45 (1971)]
116. Schneider W R, Wyss W J. *Math. Phys.* **30** 134 (1989)
117. Uchaikin V V, Saenko V V *J. Phys. Studies* **4** 371 (2000)
118. Учайкин В В, Сибатов Р Т *Письма в ЖТФ* **30** (8) 27 (2004) [Uchaikin V V, Sibatov R T *Tech. Phys. Lett.* **30** 316 (2004)]
119. Учайкин В В, Сибатов Р Т *ЖЭТФ* **136** 627 (2009) [Uchaikin V V, Sibatov R T *JETP* **109** 537 (2009)]
120. Uchaikin V V, Sibatov R T *J. Phys. A Math. Theor.* **44** 145501 (2011)
121. Бережко Е Г, Крымский Г Ф *УФН* **154** 49 (1988) [Berezko E G, Krymskii G F *Sov. Phys. Usp.* **31** 27 (1988)]
122. Uchaikin V V, Cahoy D O, Sibatov R T *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18** 2717 (2008)
123. Лишин Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979) [Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)]
124. Тверской Б А *ЖЭТФ* **52** 483 (1967) [Tverskoi B A *Sov. Phys. JETP* **25** 317 (1967)]
125. Тверской Б А *ЖЭТФ* **53** 1417 (1967) [Tverskoi B A *Sov. Phys. JETP* **26** 821 (1968)]
126. Parker E N *Interplanetary Dynamical Processes* (New York: Interscience Publ., 1963) [Паркер Е *Динамические процессы в межпланетной среде* (М.: Мир, 1965)]
127. Milovanov A V, Zelenyi L M *Phys. Rev. E* **64** 052101 (2001)
128. Treumann R A *Phys. Scripta* **59** 204 (1999)
129. Chechkin A V, Gonchar V Yu, Szydlowski M *Phys. Plasmas* **9** 78 (2002)
130. Учайкин В В *Письма в ЖЭТФ* **92** 226 (2010) [Uchaikin V V *JETP Lett.* **92** 200 (2010)]
131. Wandell A et al. *Astrophys. J.* **316** 676 (1987)
132. Blandford R D, Ostriker J R *Astrophys. J.* **221** L29 (1978)
133. Carreras B A, Lynch V E, Zaslavsky G M *Phys. Plasmas* **8** 5096 (2001)
134. Учайкин В В, Учайкин Д В *Обозрение приклад. и промышленной матем.* **9** 477 (2002)
135. Sibatov R T, Uchaikin V V *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.* **16** 4564 (2011)
136. Zoia A, Rosso A, Kardar M *Phys. Rev. E* **76** 021116 (2007)
137. Krepysheva N, Di Pietro L, Néel M-C *Phys. Rev. E* **73** 021104 (2006)
138. Rafeiro H, Samko S *Fract. Calc. Appl. Analys.* **8** 393 (2005)
139. Guan Q-Y, Ma Z-M *Stoch. Dyn.* **5** 385 (2005)
140. Tarasov V E *Ann. Physics* **323** 2756 (2008)
141. Baleanu D et al. *Int. J. Theor. Phys.* **48** 3114 (2009)
142. Tarasov V E *J. Phys. A Math. Gen.* **38** 5929 (2005)
143. Сибатов Р Т, Учайкин В В *УФН* **179** 1079 (2009) [Sibatov R T, Uchaikin V V *Phys. Usp.* **52** 1019 (2009)]
144. Ландау Л Д, Либниц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
145. Быков А М, Топтыгин И Н *УФН* **177** 149 (2007) [Bykov A M, Topptygin I N *Phys. Usp.* **50** 141 (2007)]
146. Алексеев Б В *УФН* **170** 649 (2000) [Alekseev B V *Phys. Usp.* **43** 601 (2000)]
147. Алексеев Б В *УФН* **173** 145 (2003) [Alekseev B V *Phys. Usp.* **46** 139 (2003)]
148. Гинзбург В Л *УФН* **169** 419 (1999) [Ginzburg V L *Phys. Usp.* **42** 353 (1999)]
149. Réisbois R, De Leener M *Classical Kinetic Theory of Fluids* (New York: Wiley, 1977) [Резибо Р, Де Ленер М *Классическая кинетическая теория жидкостей и газов* (М.: Мир, 1980)]

Fractional phenomenology of cosmic ray anomalous diffusion

V.V. Uchaikin. Ul'yanovsk State University, ul. L. Tolstogo 42, 432917 Ul'yanovsk, Russian Federation. E-mail: vuchaikin@gmail.com

Evolution of the cosmic ray diffusion concept from the ordinary (Einstein) model of Brownian motion to the fractional models that appeared in the last decade is reviewed. The mathematical and physical foundations of these models are discussed, as are their consequences, associated problems and prospects for further development.

PACS numbers: 02.50.-r, 05.40.-a, 98.70.Sa

Bibliography — 149 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (11) 1175–1223 (2013)

DOI: 10.3367/UFN.0183.201311b.1175

Received 3 December 2012, revised 12 April 2013

Physics – Uspekhi **56** (11) (2013)