

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Топологические эффекты в акустике и оптике поглощающих кристаллов в универсальном описании

В.И. Альшиц, В.Н. Любимов

*Получена универсальная форма уравнений, определяющих волновые поля в акустике и оптике поглощающих кристаллов. На этой основе в рамках единого формализма описано влияние поглощения на топологические особенности поляризационных полей и волновых поверхностей упругих и электромагнитных волн вблизи акустических и оптических осей. Поглощение расщепляет те и другие оси, когда это не запрещено симметрией. В результате на волновых поверхностях возникают линии самопересечения, соединяющие пары расщеплённых осей, а в поляризационных полях — новые сингулярные точки, характеризующиеся индексами Пуанкаре  $n = \pm 1/4$ . В окрестности расщепления резко возрастает эллиптичность волн вырожденных ветвей, что превращает внутреннюю коническую рефракцию из локального свойства вдоль направления вырождения в континуальное явление, существующее во всей этой области. Любому направлению волновой нормали здесь отвечает универсальный конус рефракции — тот же, что и для нулевого поглощения. Концы векторов лучевых скоростей движутся по универсальному сечению конуса — эллиптическому в акустике и круговому в оптике. Кинематика такой прецессии существенно зависит от направления волновой нормали.*

PACS numbers: 42.25.Bs, 62.20. –x, 78.20.Fm

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201310j.1123

## Содержание

1. Введение (1123).
2. Волновые уравнения для окрестностей направлений вырождения (1124).
  - 2.1. Уравнения акустики поглощающих кристаллов.
  - 2.2. Уравнения оптики поглощающих кристаллов.
  - 2.3. Универсальное волновое уравнение и его решение в окрестности направлений вырождения.
3. Топологические особенности волновых поверхностей (1126).
  - 3.1. Расщепление акустических и оптических осей.
  - 3.2. Линии самопересечения поверхности фазовых скоростей.
  - 3.3. Линии самопересечения поверхности поглощения.
4. Топологические особенности в поляризационных полях (1128).
  - 4.1. Распределение эллипсов поляризации в окрестности расщеплённых осей.
  - 4.2. Поляризационные сингулярности вокруг направлений вырождения.
  - 4.3. Вращение вещественных векторов поляризации по эллиптическим траекториям.
5. Коническая рефракция в поглощающих кристаллах (1134).
  - 5.1. Лучевые скорости в акустике и оптике поглощающих кристаллов.
  - 5.2. Универсальные конусы рефракции в акустике и оптике.
  - 5.3. Кинематика прецессии лучевых скоростей.

6. Возможности наблюдения топологических эффектов поглощения (1138).

7. Заключение (1139).

Список литературы (1140).

## 1. Введение

Уравнения, определяющие структуру волн в оптике и акустике кристаллов, существенно различаются. Электромагнитные волны описываются уравнениями Максвелла [1–4], а упругие волны — уравнениями Кристоффеля [5–7]. С другой стороны, поляризационные поля и волновые поверхности в оптике и акустике кристаллов вблизи направлений вырождения фазовых скоростей дают очень похожий топологический отклик на включение поглощения, который, как мы покажем, допускает единообразное описание.

Влияние поглощения на оптические и акустические свойства кристаллов далеко не сводится к тривиальному ослаблению волнового поля при его распространении. Возникают направления принципиально новых вырождений — так называемые сингулярные оси. Это происходит в результате расщепления оптических и акустических осей конического типа, не совпадающих с осями симметрии. По мере приближения волновой нормали  $\mathbf{m}$  к таким сингулярным осям эллиптичность волн резко увеличивается и становится циркулярной в точках вырождения. На поверхностях рефракции и поглощения возникают линии самопересечения, соединяющие расщеплённые точки вырождения.

**В.И. Альшиц, В.Н. Любимов.** Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН,  
Ленинский просп. 59, 119333 Москва, Российская Федерация  
Тел. (495) 330-82-74. Факс (499) 135-10-11  
E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru, lyubvn36@mail.ru

Статья поступила 11 февраля 2013 г., после доработки 28 мая 2013 г.

Основы оптики поглощающих кристаллов связаны с именами Фойгта, Друде, Фёдорова (см. обзор [8]). Компактное изложение специфики оптических свойств поглощающих кристаллов дано в [2–4]. В последние десятилетия также стали активно изучаться топологические аспекты проблемы. В частности, было показано [9–11], что расщеплённые оси задают сингулярные точки в комплексном поле поляризаций, отвечающие топологическому заряду (индексу Пуанкаре)  $n = 1/4$ . Кроме того, согласно [11], на концах клина самопересечения поверхности скоростей, отвечающих точкам вырождения, возникают геометрические сингулярности в виде острых "носиков", характеризующихся плоским веером нормалей и бесконечной кривизной. Замена конической точки контакта клином самопересечения радикально влияет и на внутреннюю коническую рефракцию [11].

Аналогичные эффекты в акустике кристаллов исследовались в работах [12–16]. Опять включение поглощения приводит к расщеплению конических вырождений на пары сингулярных точек. При этом окрестность расщеплённых осей характеризуется сходными геометрическими и поляризационными особенностями [12, 16], а также нетривиальной трансформацией свойств внутренней конической рефракции [16].

В данной статье мы покажем, что, несмотря на все различия основных уравнений акустики и оптики, они могут быть представлены в единообразном виде благодаря общности волновых явлений в окрестности вырождений. Это открывает возможность универсального описания топологических характеристик электромагнитных и упругих волн. Будут описаны не только известные акустические и оптические свойства поглощающих кристаллов, но и ряд качественно новых черт их акустики и оптики, которые ранее не обсуждались.

## 2. Волновые уравнения для окрестностей направлений вырождения

В этом разделе будут получены уравнения, описывающие упругие и электромагнитные волны в поглощающем кристалле в окрестности направлений акустических и оптических осей. Как мы увидим, несмотря на несхожесть исходных уравнений оптики и акустики, описание плоских электромагнитных и упругих волн фактически может быть проведено на основе единого математического формализма.

### 2.1. Уравнения акустики поглощающих кристаллов

Рассмотрим вязкоупругую среду с произвольной анизотропией, характеризуемую тензором упругих модулей  $\hat{c} = \{c_{ijkl}\}$ , тензором вязкости  $\hat{\eta} = \{\eta_{ijkl}\}$  и плотностью  $\rho$ . Поле упругих смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в такой среде описывается известным уравнением движения [5]:

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} u_{l,kj} + \eta_{ijkl} \dot{u}_{l,kj}, \quad (1)$$

где точки над функцией означают производные по времени, а для производных по пространственным координатам принято обозначение  $\partial/\partial x_k \dots \equiv \dots_{,k}$ . Для упругой волны

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = C\mathbf{U} \exp [ik(\mathbf{m}\mathbf{r} - vt)] \quad (2)$$

с амплитудой  $C$ , поляризацией  $\mathbf{U}$ , волновым числом  $k = k' + ik''$ , фазовой скоростью  $v$  и частотой  $\omega = kv$

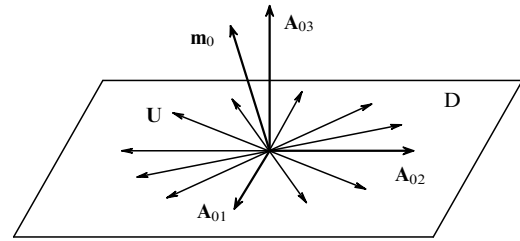


Рис. 1. Выбор базисных векторов ( $\mathbf{A}_{01}$ ,  $\mathbf{A}_{02}$ ,  $\mathbf{A}_{03}$ ) в акустике;  $\mathbf{m}_0$  — направление исходной акустической оси,  $D$  — плоскость разрешённых поляризаций в отсутствие поглощения.

уравнение (1) сводится к обобщённому уравнению Кристоффеля [12, 16]:

$$[\mathbf{m}(\hat{c} - i\omega\hat{\eta})\mathbf{m}]\mathbf{U} = \rho v^2 \mathbf{U}. \quad (3)$$

Уравнение (3) определяет комплексные векторы поляризации  $\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{U}'_\alpha + i\mathbf{U}''_\alpha$  и фазовые скорости  $v = v'_\alpha - iv''_\alpha$  трёх собственных волн ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

При "выключенном" поглощении упругие волны вырожденных ветвей, распространяющиеся вдоль акустической оси  $\mathbf{m}_0$ , имеют вещественные векторы поляризации  $\mathbf{U}$ , которые могут быть произвольно ориентированы в плоскости вырождения  $D$ , ортогональной вектору поляризации невырожденной волны  $\mathbf{A}_{03}$ .

Выберем в этой плоскости два произвольных единичных, взаимно перпендикулярных вектора  $\mathbf{A}_{01}$  и  $\mathbf{A}_{02}$ , образующих с вектором  $\mathbf{A}_{03}$  ортогональный базис (рис. 1). Векторы  $\mathbf{A}_{01}$  и  $\mathbf{A}_{02}$  входят в ключевые соотношения акустики поглощающих кристаллов, причём произвольность выбора этих векторов в плоскости  $D$  не влияет на инвариантность конечных результатов.

### 2.2. Уравнения оптики поглощающих кристаллов

Рассмотрим немагнитный кристалл с произвольной диэлектрической анизотропией и малым поглощением. Электромагнитную волну, распространяющуюся в таком кристалле, зададим её магнитной компонентой:

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = C\mathbf{H} \exp [ik(\mathbf{m}\mathbf{r} - vt)], \quad (4)$$

где поляризация  $\mathbf{H}$  и фазовая скорость  $v$  определяются уравнениями Максвелла [2]:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{v\mu_0} \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{v\epsilon_0} (\hat{\epsilon}^{-1} - i\hat{\delta})\mathbf{m} \times \mathbf{H}. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — поляризация электрической компоненты волны  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ ;  $\hat{\epsilon}^{-1}$  — тензор обратной диэлектрической проницаемости, описывающий оптические свойства среды в отсутствие поглощения;  $\hat{\delta} = \{\delta_{ij}\}$  — тензор, учитывающий влияние поглощения;  $\mu_0$  и  $\epsilon_0$  — соответственно магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума. Компоненты тензоров  $\hat{\epsilon}^{-1}$  и  $\hat{\delta}$  безразмерны: все физические величины записаны в системе SI, в которой диэлектрическая проницаемость кристалла определяется как  $\hat{\epsilon}\epsilon_0$ , а скорость света в вакууме  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ .

Исключая в (5) электрическое поле  $\mathbf{E}$ , получаем уравнение для  $\mathbf{H}$ :

$$-\mathbf{m} \times [(\hat{\epsilon}^{-1} - i\hat{\delta})\mathbf{m} \times \mathbf{H}] = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \mathbf{H}, \quad (6)$$

которое в терминах антисимметричного единичного тензора Леви–Чивита  $\hat{e} \equiv \{e_{ijk}\}$  имеет вид

$$-\{\mathbf{m}[\hat{e}(\hat{e}^{-1} - i\hat{\delta})\hat{e}]\mathbf{m}\}\mathbf{H} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \mathbf{H}. \quad (7)$$

Уравнение (7) задаёт скорости  $v_\alpha$  и векторы поляризации  $\mathbf{H}_\alpha$  как собственные значения и собственные векторы соответствующего тензора в его левой части. Среди трёх собственных векторов присутствует и чисто продольный вектор поляризации  $\mathbf{H}_3 \parallel \mathbf{m}$ . Однако, как видно из (6), ему отвечает собственное значение  $v_3 = 0$ . Таким образом, продольное решение является статическим и не может описывать волну. Именно поэтому электромагнитные волны всегда чисто поперечны ( $\mathbf{H}_\alpha \perp \mathbf{m}$ ), причём в невырожденных направлениях  $\mathbf{m}$  возможно распространение только двух независимых изонормальных волн,  $\alpha = 1, 2$ .

Вещественный тензор  $\hat{e}^{-1}$ , следуя [2–4], можно представить в инвариантном виде:

$$\hat{e}^{-1} = a\hat{I} - b(\mathbf{c}_I \otimes \mathbf{c}_{II} + \mathbf{c}_{II} \otimes \mathbf{c}_I), \quad \mathbf{c}_I^2 = \mathbf{c}_{II}^2 = 1, \quad (8)$$

где  $\hat{I}$  — единичная матрица,  $\mathbf{c}_I$  и  $\mathbf{c}_{II}$  — направления двух оптических осей кристалла в отсутствие поглощения, а скаляры  $a$  и  $b$ , так же как и векторы  $\mathbf{c}_I$  и  $\mathbf{c}_{II}$ , выражаются через инвариантные параметры  $1/\varepsilon_i$  — собственные значения тензора  $\hat{e}^{-1}$ :

$$a = \frac{1}{\varepsilon_2}, \quad b = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1\varepsilon_3}, \quad \mathbf{c}_{I,II} = (\mp c_1, 0, c_3), \quad (9)$$

$$c_1 = \sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_3}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\varepsilon_2}}, \quad c_3 = \cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\varepsilon_1}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\varepsilon_2}}. \quad (10)$$

Здесь индексы  $i = 1, 2, 3$  у компонент  $\varepsilon_i$  соответствуют таковым в неравенстве  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ . При этом оптические оси прозрачного кристалла лежат в плоскости  $XZ$  координатной системы  $\{X, Y, Z\}$ , построенной на собственных векторах тензора  $\hat{e}^{-1}$  (рис. 2а).

В направлениях  $\mathbf{c}_I$  и  $\mathbf{c}_{II}$  вещественные фазовые скорости изонормальных волн совпадают и возникают вырождения конического типа. Для дальнейшего анализа в качестве невозмущённого направления вырождения выберем вектор  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{c}_I$ . Тогда плоскость вырождения  $D$  будет ортогональна оптической оси  $\mathbf{c}_I$ . По аналогии с введением базиса в случае акустики (см. рис. 1), удобно ввести новый ортонормированный базис (рис. 2б):

$$\mathbf{A}_{01} = \frac{(\mathbf{c}_I \times \mathbf{c}_{II}) \times \mathbf{c}_I}{|\mathbf{c}_I \times \mathbf{c}_{II}|}, \quad \mathbf{A}_{02} = \frac{\mathbf{c}_I \times \mathbf{c}_{II}}{|\mathbf{c}_I \times \mathbf{c}_{II}|}, \quad \mathbf{A}_{03} = \mathbf{c}_I = \mathbf{m}_0, \quad (11)$$

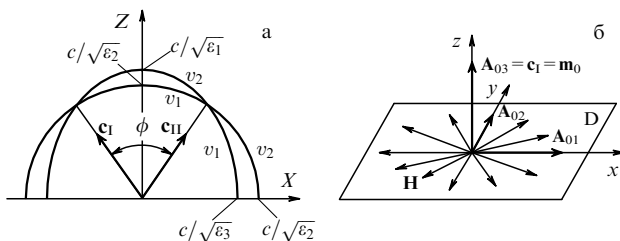


Рис. 2. (а) Сечение поверхности фазовых скоростей  $v_{1,2}(\mathbf{m})$  оптически прозрачного двусосного кристалла. (б) Выбор базиса  $(\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{02}, \mathbf{A}_{03})$ .

отвечающий системе  $\{x, y, z\}$ , повернутой относительно  $\{X, Y, Z\}$  вокруг оси  $Y = y$  до совмещения оси  $z$  с осью  $\mathbf{c}_I$ .

### 2.3. Универсальное волновое уравнение и его решение в окрестности направлений вырождения

Введём универсальную волну,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = CA \exp [ik(\mathbf{m}\mathbf{r} - vt)], \quad (12)$$

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{u} & (\text{ac}), \\ \mathbf{h} & (\text{op}), \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{U} & (\text{ac}), \\ \mathbf{H} & (\text{op}), \end{cases}$$

и обобщённые материальные тензоры

$$\hat{\Lambda}' = \begin{cases} \frac{\hat{c}}{\rho} & (\text{ac}), \\ -c^2 \hat{e} \hat{e}^{-1} \hat{e} & (\text{op}), \end{cases} \quad \hat{\Lambda}'' = \begin{cases} \frac{\omega \hat{\eta}}{\rho} & (\text{ac}), \\ -c^2 \hat{e} \hat{\delta} \hat{e} & (\text{op}), \end{cases} \quad (13)$$

одновременно относящиеся к оптике (op) и акустике (ac). В этих терминах получаем вместо (3) и (7) обобщённое уравнение Кристоффеля, описывающее упругие и электромагнитные волны в поглощающем кристалле:

$$(\hat{Q}' - i\hat{Q}'')\mathbf{A} = v^2 \mathbf{A}, \quad (14)$$

$$\hat{Q}' = \mathbf{m} \hat{\Lambda}' \mathbf{m}, \quad \hat{Q}'' = \mathbf{m} \hat{\Lambda}'' \mathbf{m}.$$

Как отмечалось в разделе 2.2, далее мы будем иметь дело с комплексными фазовыми скоростями  $v_\alpha$  и эллиптическими поляризациями  $\mathbf{A}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$  — для акустики и  $\alpha = 1, 2$  — для оптики):

$$v_\alpha = v'_\alpha - i v''_\alpha, \quad \mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}'_\alpha + i \mathbf{A}''_\alpha. \quad (15)$$

Векторы  $\mathbf{A}_\alpha$  предполагаются нормированными в соответствии с правилом

$$|\mathbf{A}_\alpha| = 1, \quad \mathbf{A}'_\alpha \mathbf{A}''_\alpha = 0. \quad (16)$$

В невырожденных направлениях эти векторы взаимно ортогональны:  $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{A}_\beta = 0$  ( $\alpha \neq \beta$ ).

Ниже нас будут интересовать решения универсального волнового уравнения (14) для направлений распространения  $\mathbf{m}$ , лежащих в малой окрестности направления конического вырождения  $\mathbf{m}_0$ :

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta \mathbf{m}, \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{m}_0| = 1, \quad |\Delta \mathbf{m}| \ll 1. \quad (17)$$

В кристалле без поглощения вдоль вырожденного направления  $\mathbf{m}_0$  фазовые скорости двух изонормальных волн совпадают,  $v_1 = v_2 = v_0$ , а их поляризация произвольна в плоскости  $D$ , называемой плоскостью вырождения. При "включённом" поглощении изменения скоростей  $\Delta v_{1,2}$  и векторы поляризации  $\mathbf{A}_{1,2}$  изонормальных волн вблизи направления  $\mathbf{m}_0$  описываются выражениями

$$\Delta v_{1,2} = \mathbf{s}^0 \Delta \mathbf{m} - i s'' \mp R, \quad \mathbf{A}_{1,2} \parallel -(\mathbf{q} \Delta \mathbf{m} - i q'') \mathbf{A}_{01} + (\mathbf{p} \Delta \mathbf{m} - i p'' \pm R) \mathbf{A}_{02}, \quad (18)$$

$$R = \sqrt{(\mathbf{p} \Delta \mathbf{m} - i p'')^2 + (\mathbf{q} \Delta \mathbf{m} - i q'')^2}.$$

Введённые в (18) векторы  $\mathbf{s}^0$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  и скалярные параметры поглощения  $p''$ ,  $q''$ ,  $s''$  определяются свёртками векторов

$\mathbf{A}_{01}$ ,  $\mathbf{A}_{02}$  и  $\mathbf{m}_0$  с тензорами  $\hat{\Lambda}'$  и  $\hat{\Lambda}''$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}^0 \\ \mathbf{p} \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2v_0} (\mathbf{A}_{01} \hat{\Lambda}' \mathbf{A}_{01} \pm \mathbf{A}_{02} \hat{\Lambda}' \mathbf{A}_{02}) \mathbf{m}_0, \\ \mathbf{q} &= \frac{1}{2v_0} (\mathbf{A}_{01} \hat{\Lambda}' \mathbf{A}_{02} + \mathbf{A}_{02} \hat{\Lambda}' \mathbf{A}_{01}) \mathbf{m}_0, \\ \left. \begin{aligned} s'' \\ p'' \end{aligned} \right\} &= \frac{Q''_{11} \pm Q''_{22}}{4v_0}, \quad q'' = \frac{Q''_{12}}{2v_0}, \\ Q''_{ij} &= \mathbf{A}_{0i} \hat{Q}''_0 \mathbf{A}_{0j}, \quad \hat{Q}''_0 = \hat{Q}''(\mathbf{m}_0). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь векторы  $\mathbf{s}^0$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{s}^0 \mathbf{m}_0 = v_0, \quad \mathbf{p} \mathbf{m}_0 = \mathbf{q} \mathbf{m}_0 = 0. \quad (21)$$

В уравнениях (18) малость отклонения  $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$  единичной волновой нормали  $\mathbf{m}$  от направления  $\mathbf{m}_0$  исходного вырождения определяется возможностью пренебречь в (18) компонентами векторов  $\mathbf{A}_{1,2}$  вдоль  $\mathbf{A}_{03}$ , имеющими порядок  $(\Delta \mathbf{m})^2$ .

При слабом поглощении связь между компонентами комплексных скоростей и волновых чисел выражается в виде

$$k'_x = \frac{\omega}{v_0} \left( 1 - \frac{\Delta v'_x}{v_0} \right), \quad k''_x = v''_x \left( \frac{\omega}{v_0} \right). \quad (22)$$

Из (18) и (22) видно, что требование затухания изонормальных волн при распространении  $k''_x > 0$  определяет критерий устойчивости  $s''_{ac} > |\text{Im } R|$ .

В изотропных средах материальные тензоры  $\hat{\Lambda}'$  и  $\hat{\Lambda}''$  (13) таковы, что их свёртки с базисными векторами  $\mathbf{A}_{01}$  и  $\mathbf{A}_{02}$  — величины  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $p''$  и  $q''$  (19), (20) — оказываются равными нулю (однако при этом  $\mathbf{s}^0$  и  $s''$  не равняются нулю). Таким образом, обсуждаемые нами эффекты всецело обусловлены анизотропией и специфичны исключительно для кристаллов.

Оптические тензоры второго ранга  $\hat{\varepsilon}^{-1}$  и  $\hat{\delta}$  проще акустических тензоров четвёртого ранга  $\hat{c}$  и  $\hat{\eta}$ . Благодаря этому векторы  $\mathbf{s}^0_{\text{оп}}$ ,  $\mathbf{p}_{\text{оп}}$ ,  $\mathbf{q}_{\text{оп}}$  и скаляры  $s''_{\text{оп}}$ ,  $p''_{\text{оп}}$ ,  $q''_{\text{оп}}$  легко вычисляются в явном виде как компактные функции собственных значений тензора  $\hat{\varepsilon}^{-1}$  и компонент тензора  $\hat{\delta}$  в базисе (11):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}^0_{\text{оп}} &= (-\lambda \mathbf{A}_{01} + \mathbf{A}_{03}) v_0, \quad \mathbf{s}^0_{\text{оп}} \mathbf{m}_0 = v_0, \\ \mathbf{p}_{\text{оп}} &= \lambda v_0 \mathbf{A}_{01}, \quad \mathbf{q}_{\text{оп}} = \lambda v_0 \mathbf{A}_{02}, \quad \mathbf{p}_{\text{оп}} \mathbf{q}_{\text{оп}} = 0, \\ \lambda &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_3}}, \quad v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \\ \left. \begin{aligned} s''_{\text{оп}} \\ p''_{\text{оп}} \end{aligned} \right\} &= \frac{v_0 \varepsilon_2}{4} (\delta_{22} \pm \delta_{11}), \quad q''_{\text{оп}} = -\frac{v_0 \varepsilon_2}{2} \delta_{12}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь следует сделать важное замечание. Прозрачный двусный кристалл по оптическим свойствам имеет ромбическую симметрию, даже являясь триклинным по другим свойствам, например акустическим. Это связано с тем, что диэлектрический тензор  $\hat{\varepsilon}$ , как и любой тензор второго ранга, имеет симметрию своего характеристического эллипсоида — у него есть три взаимно ортогональные плоскости симметрии, совпадающие с координатными

плоскостями системы  $\{X, Y, Z\}$  (рис. 2а). Включение поглощения добавляет ещё один тензор второго ранга  $\hat{\delta}$ , который, естественно, обладает теми же элементами симметрии. Однако в триклинном кристалле эти тензоры диагонализуются в разных системах координат, т.е. их плоскости симметрии, вообще говоря, не совпадают. В частном случае моноклинных кристаллов оба тензора,  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\delta}$ , имеют одну общую плоскость симметрии.

Итак, мы пришли к единому математическому формализму, пригодному для описания как упругих, так и электромагнитных полей в триклинных кристаллах. Полученные общие решения (18)–(20), определяющие ключевые характеристики волн, при учёте соотношений соответствия (12), (13) одновременно описывают и акустику, и оптику поглощающих кристаллов. Естественно, что при этом основные топологические особенности волновых полей рассматриваемых двух типов вблизи вырождений оказываются аналогичными.

Впрочем, по упомянутым выше причинам геометрические и топологические особенности в оптике часто оказываются более симметричными, чем в акустике. Например, векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  (19) в акустике, вообще говоря, не ортогональны и различны по длине, в то время как в оптике соответствующие векторы (23) и ортогональны, и одинаковы по длине. Из рисунка 1 видно, что в акустике вектор  $\mathbf{A}_{03}$  в общем случае отклонён от направления  $\mathbf{m}_0$ , а в оптике эти векторы совпадают (рис. 2б),  $\mathbf{A}_{03} = \mathbf{m}_0$ . Более того, в акустике могут возникать поляризационные топологические сингулярности, которые в оптике невозможны.

### 3. Топологические особенности волновых поверхностей

#### 3.1. Расщепление акустических и оптических осей

Учёт поглощения приводит к расщеплению исходного конического вырождения вдоль  $\mathbf{m}_0$  на два новых вырождения:  $\mathbf{m}_0^{\pm} \equiv \mathbf{m}_0 \pm \Delta \mathbf{m}_0$ . Возникают сингулярные оптические и акустические оси, при распространении вдоль которых комплексные скорости изонормальных волн совпадают:  $v_1 = v_2$ . Направления сингулярных осей определяются из общего условия  $R(\Delta \mathbf{m}) = 0$ , где радикал  $R$  определён в (18). Отсюда для вектора расщепления  $\Delta \mathbf{m}_0$  получается результат, одинаковый для акустики и оптики:

$$\Delta \mathbf{m}_0 = \frac{r}{g} \mathbf{m}_0 \times \mathbf{M}. \quad (25)$$

Здесь введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{p} \sin \alpha + \mathbf{q} \cos \alpha, \\ \sin \alpha &= \frac{p''}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{q''}{r}, \\ r &= \sqrt{p''^2 + q''^2}, \quad g = \mathbf{m}_0 (\mathbf{p} \times \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25), (26) следует, что

$$\Delta \mathbf{m}_0 \mathbf{p} = -q'', \quad \Delta \mathbf{m}_0 \mathbf{q} = p''. \quad (27)$$

Угол расщепления осей  $\Delta \Psi \approx 2|\Delta \mathbf{m}_0|$  пропорционален поглощению — фактору  $r$  (26).

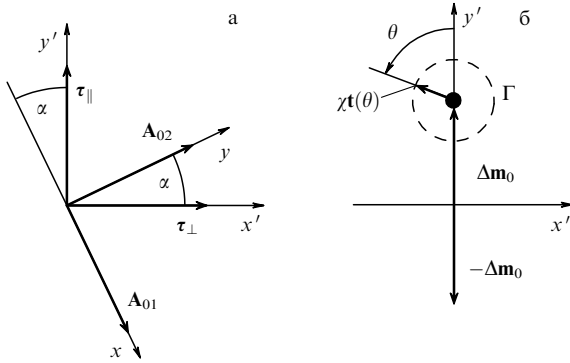


Рис. 3. (а) Взаимная ориентация двух пар ортов,  $\{A_{01}, A_{02}\}$  и  $\{\tau_{\perp}, \tau_{\parallel}\}$ , на которых построены системы координат  $\{x, y\}$  и  $\{x', y'\}$ . (б) Векторы  $\Delta \mathbf{m}_0$  и  $\chi \mathbf{t}$  в системе  $\{x', y'\}$  на контуре  $\Gamma$ .

Общие формулы (25), (26) нетрудно далее конкретизировать для оптики:

$$\mathbf{M} = \lambda v_0 \boldsymbol{\tau}_{\perp}, \quad \mathbf{m}_0 \times \mathbf{M} = \lambda v_0 \boldsymbol{\tau}_{\parallel}, \quad (28)$$

$$r = \frac{v_0 \epsilon_2}{4} \sqrt{(\delta_{11} - \delta_{22})^2 + 4\delta_{12}^2}, \quad g = \lambda^2 v_0^2.$$

Здесь введены единичные взаимно ортогональные векторы  $\boldsymbol{\tau}_{\perp}$  и  $\boldsymbol{\tau}_{\parallel}$  (рис. 3а):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{\perp} &= \mathbf{A}_{01} \sin \alpha + \mathbf{A}_{02} \cos \alpha, \\ \boldsymbol{\tau}_{\parallel} &= -\mathbf{A}_{01} \cos \alpha + \mathbf{A}_{02} \sin \alpha, \\ \boldsymbol{\tau}_{\perp} \times \boldsymbol{\tau}_{\parallel} &= \mathbf{m}_0. \end{aligned} \quad (29)$$

Связь между ортами  $\{A_{01}, A_{02}\}$  и  $\{\tau_{\perp}, \tau_{\parallel}\}$ , на которых построены две системы координат — соответственно  $\{x, y\}$  и  $\{x', y'\}$ , показана на рис. 3а.

Теперь выражение для  $\Delta \mathbf{m}_0$  (25) принимает вид (рис. 3б)

$$\Delta \mathbf{m}_0 = \boldsymbol{\tau}_{\parallel} \frac{\epsilon_2}{4\lambda} \sqrt{(\delta_{11} - \delta_{22})^2 + 4\delta_{12}^2}. \quad (30)$$

Как видно из рис. 3 и формул (25), (30), и в акустике, и в оптике вектор расщепления  $\Delta \mathbf{m}_0$  занимает общее положение в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{m}_0$ , что естественно для триклинных кристаллов. Конкретная ориентация (угол  $\alpha$ ) вектора  $\Delta \mathbf{m}_0$  в этой плоскости определяется соотношением между параметрами поглощения  $p''$  и  $q''$ , как видно из (26).

Из формулы (30) следует, что расщепление оптических осей определяется отношением параметров анизотропии тензора поглощения  $\hat{\delta}$  (5) к параметру диэлектрической анизотропии  $\lambda$  (23). Таким образом, в оптике величину расщепления можно увеличивать не только повышая поглощение, но и выбирая такие кристаллы, для которых  $\lambda \ll 1$  (см. раздел 6).

Приведённое рассмотрение относится к кристаллам с произвольной анизотропией. Учёт элементов симметрии может оказаться существенным. Так, можно показать [12], что вдоль осей симметрии 6 и 4 акустические оси, принадлежащие касательному типу [17], не расщепляются, поскольку вдоль них  $\mathbf{p}_{ac} = \mathbf{q}_{ac} = p''_{ac} = q''_{ac} = 0$  и в соответствии с (25)  $\Delta \mathbf{m}_0 = 0$ . Вдоль оси симметрии 3 реализуется вырождение конического типа [17], однако поглощение не расщепляет и его [12], поскольку в этом

случае  $p''_{ac} = q''_{ac} = r = 0$  и, следовательно,  $\Delta \mathbf{m}_0 = 0$ . В оптике одноосных кристаллов все указанные оси симметрии отвечают вырождениям касательного типа и не расщепляются при наличии поглощения по тем же причинам. С другой стороны, если поглощающий кристалл имеет плоскость симметрии  $S$ , а исходное направление вырождения  $\mathbf{m}_0$  принадлежит этой плоскости, то расщепление имеет место и в акустике, и в оптике, причём его описание упрощается. В данном случае оказывается, что  $q'' = 0$ ,  $\alpha = \pi/2$ , вектор  $\mathbf{q}$  ортогонален плоскости  $S$ , вектор  $\mathbf{p}$  принадлежит  $S$ , а  $\Delta \mathbf{m}_0 \parallel \mathbf{q}$ . В оптике при этом  $\delta_{12} = 0$  и формулы (28), (30) упрощаются.

### 3.2. Линии самопересечения поверхности фазовых скоростей

Рассмотрим волновую нормаль  $\mathbf{m}_\gamma$ , заданную соотношением

$$\mathbf{m}_\gamma = \mathbf{m}_0 + \gamma \Delta \mathbf{m}_0. \quad (31)$$

При изменении величины  $\gamma$  в интервале  $-1 \leq \gamma \leq 1$  конец вектора  $\mathbf{m}_\gamma$  на единичной сфере направлений задаёт линию, соединяющую направления сингулярных осей  $\mathbf{m}_0^-$  (при  $\gamma = -1$ ) и  $\mathbf{m}_0^+$  (при  $\gamma = 1$ ). Легко проверить, что на этой линии радикал  $R$  (18) оказывается чисто мнимым, следовательно, рассматриваемые линии и в акустике, и в оптике являются линиями равных скоростей:  $v'_1(\mathbf{m}_\gamma) = v'_2(\mathbf{m}_\gamma)$ . Сохраняется лишь различие в степени поглощения изонормальных волн. Благодаря поглощению, между полостями поверхности скоростей возникают вместо точечных контактов конического типа линии пересечения, а это означает изменение топологии данной поверхности (рис. 4).

Проанализируем особенности локальной геометрии такой поверхности вблизи вырождений, рассматривая более простой оптический случай. Пусть волновая нормаль  $\mathbf{m}$  обходит сингулярную ось  $\mathbf{m}_0^+ = \mathbf{c}_1 + \Delta \mathbf{m}_0$  по малому круговому контуру  $\Gamma$  с радиусом  $\chi$  (рис. 3б):

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0^+ + \chi \mathbf{t}(\theta), \quad \mathbf{t}(\theta) = \boldsymbol{\tau}_{\parallel} \cos \theta - \boldsymbol{\tau}_{\perp} \sin \theta, \quad (32)$$

$$0 < \chi \leq |\Delta \mathbf{m}_0|, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

На этом контуре зависимость комплексных скоростей  $v_{1,2}$  (18) от параметров  $\chi$  и  $\theta$  имеет вид

$$v_{1,2} = v_0^{\pm} \mp R(\chi, \theta), \quad (33)$$

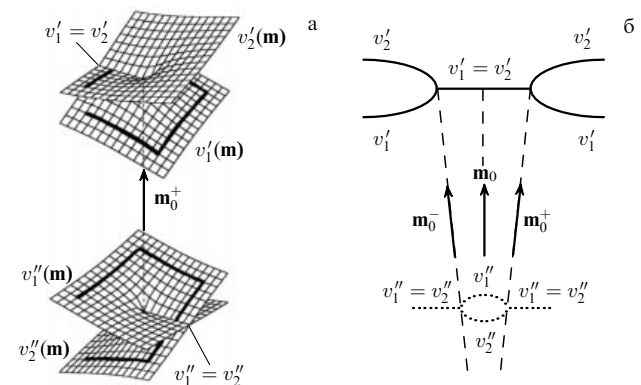
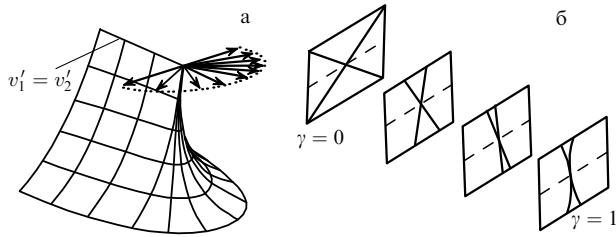


Рис. 4. Геометрия полостей поверхности скоростей  $v'_{1,2}(\mathbf{m})$  и поверхности поглощения  $v''_{1,2}(\mathbf{m})$ : (а) в трёхмерной схеме вблизи сингулярной оси  $\mathbf{m}_0^+$ , (б) сечение поверхностей плоскостью расщеплённых осей  $\mathbf{m}_0^+$  и  $\mathbf{m}_0^-$ .



**Рис. 5.** (а) Конфигурация "носика" на поверхности рефракции у одного из концов ребра клина. (б) Изменение геометрии контакта полостей на линии  $\gamma$  в серии сечений той же поверхности плоскостями, перпендикулярными ребру.

где  $v_0^+$  — фазовая скорость вдоль сингулярной оси  $\mathbf{m}_0^+$ :

$$v_0^+ = v_0 + \mathbf{s}_{\text{оп}}^0 \Delta \mathbf{m}_0 - i s_{\text{оп}}'', \quad (34)$$

$R$  — радикал (18), который с точностью до членов  $\sim \chi^{3/2}$  выражается как

$$R(\chi, \theta) \approx \sqrt{2\chi\lambda r v_0} \exp \frac{i\theta}{2}. \quad (35)$$

Таким образом, поверхность скоростей  $v'_{1,2}(\chi, \theta)$  в рассматриваемой области параметров  $\chi$  и  $\theta$  (32) описывается формулой

$$v'_{1,2}(\chi, \theta) \approx v_0 + \mathbf{s}_{\text{оп}}^0 \Delta \mathbf{m}_0 \mp \sqrt{2\chi\lambda r v_0} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (36)$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi.$$

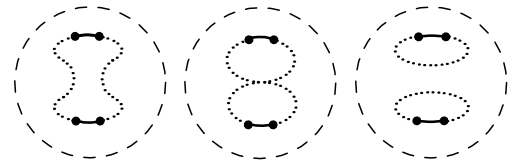
При  $\theta = \pm\pi$  в этом приближении имеем  $v'_1 = v'_2 = v_0^+$  — волновая нормаль попадает на линию равных скоростей, которую можно рассматривать как ребро клина (рис. 4а). В каждом сечении  $\theta = \text{const} \neq \pm\pi$  производная функции  $v'_{1,2}(\chi, \theta)$  по  $\chi$ ,

$$\frac{\partial v'_{1,2}}{\partial \chi} = \mp \sqrt{\frac{\lambda r v_0}{\chi}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (37)$$

стремится к бесконечности при  $\chi \rightarrow 0$ . Такая сингулярная зависимость данной функции на краю ребра клина соответствует заострённому носику поверхности скоростей и плоскому вееру нормалей  $\mathbf{n}(\theta)$  к этой поверхности на рассматриваемом контуре при  $\chi \rightarrow 0$ . Локальную геометрию, описываемую формулами (36), (37), иллюстрируют рис. 4 и 5а. Из рисунка 5б видна ещё одна особенность рассматриваемой геометрии контакта: на очень коротком расстоянии от середины клина ( $\gamma = 0$ ) до сингулярной оси ( $\gamma = 1$ ) сечение поверхности, перпендикулярное ребру клина, превращается из тупого угла в бесконечно острый стык двух касающихся парабол.

### 3.3. Линии самопересечения поверхности поглощения

При включении диссипации как в акустике, так и в оптике возникают изначально не существовавшие поверхности поглощения. Они характеризуют затухание волн в зависимости от направления распространения  $\mathbf{m}$ . Такая поверхность представляет собой геометрическое место концов радиусов-векторов  $v''_{\alpha} \mathbf{m}$ , когда вектор  $\mathbf{m}$  пробегает по единичной сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$ . В оптике кристаллов это двуполостные поверхности,  $\alpha = 1, 2$ , а в акустике — трёхполостные,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Впрочем, и в акустике нас



**Рис. 6.** Схема топологической перестройки линий равных скоростей (сплошные линии) и линий равных поглощений (пунктирные линии) при варьировании параметров диэлектрической анизотропии. Представлены стереографические проекции.

интересуют лишь две полости ( $\alpha = 1, 2$ ), между которыми возникают линии пересечения.

Согласно (33)–(35), в оптике зависимость степени поглощения  $v''_{\alpha}(\chi, \theta)$  от положения точки наблюдения на контуре  $\Gamma$  (рис. 3б), окружающем ось  $\mathbf{m}_0^+$ , аналогична зависимости (36):

$$v''_{1,2}(\chi, \theta) \approx s_{\text{оп}}'' \pm \sqrt{2\chi\lambda r v_0} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (38)$$

$$0 \leq \theta < 2\pi.$$

Отсюда видно, что при  $\theta = 0$  волновая нормаль попадает на линию равных поглощений,  $v''_1(\chi, 0) = v''_2(\chi, 0) \approx s_{\text{оп}}''$ . Здесь радикал  $R$  веществам и различия скоростей  $v'_{1,2}$  изонормальных волн сохраняется. Как видно из рис. 4, такие линии на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$  возникают как продолжения ребра клина поверхности скоростей с двух его концов. Являясь продолжением друг друга на сфере направлений, линии равных скоростей и равных поглощений имеют общие точки, отвечающие сингулярным осям. Конечно, ввиду малости поглощения первые имеют гораздо меньшую угловую протяжённость, чем вторые.

Конфигурации линий этих двух типов в оптике поглощающих кристаллов рассмотрены в работе [18]. Анализ был проведён для слабой диэлектрической анизотропии, при которой полости и поверхности скоростей, а также поверхности поглощения близки между собой. Рассматриваемые кривые являются замкнутыми и состоят из чередующихся фрагментов, отвечающих равным скоростям и равным поглощениям. При варьировании тензоров  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\delta}$  могут возникнуть резкие изменения и в топологии [19]: например, замкнутая кривая может распаться на две замкнутые кривые, как показано на рис. 6.

Отметим попутно, что в настоящее время нетривиальные аспекты влияния поглощения на свойства оптических и акустических волн в кристаллических материалах, включая и топологические эффекты, привлекают всё большее внимание (см., например, [20, 21]), в том числе в связи с их широким применением в акустоэлектронике и акустооптике.

## 4. Топологические особенности в поляриционных полях

### 4.1. Распределение эллипсов поляризации в окрестности расщеплённых осей

В этом разделе мы рассмотрим особенности распределения комплексных векторных полей поляризации в окрестности пары расщеплённых осей.

Векторы  $\mathbf{A}_{1,2}(\mathbf{m})$  (18) после нормировки по правилу (16) приобретают вид

$$\mathbf{A}_{1,2} = \frac{\mathbf{A}_{01} + (f \pm Q)\mathbf{A}_{02}}{\sqrt{1 + |f \pm Q|^2}} \exp(-i\theta_{\pm}), \quad (39)$$

где

$$f = -\frac{\mathbf{p}\Delta\mathbf{m} - i\mathbf{p}''}{\mathbf{q}\Delta\mathbf{m} - i\mathbf{q}''}, \quad Q = \sqrt{1 + f^2}, \quad (40)$$

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \arg [Q(Q \pm f)].$$

Комплексные векторы  $\mathbf{A}_x \equiv \mathbf{A}'_x + i\mathbf{A}''_x$  ( $x = 1, 2$ ) описывают два канонических эллипса поляризации с полуосями, длина и ориентация которых задаётся взаимно ортогональными радиусами-векторами  $\mathbf{A}'_x$  и  $\mathbf{A}''_x$ . Эллиптичность  $\epsilon$  изонормальных волн определяется как отношение длин малой ( $A''_x$ ) и большой ( $A'_x$ ) полуосей. Согласно [6],

$$\epsilon = \frac{A''_{1,2}}{A'_{1,2}} = \sqrt{\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}}, \quad (41)$$

где в соответствии с (39) следует положить

$$\kappa = |\mathbf{A}_{1,2}^2| = \frac{2|Q|F_{1,2}}{1 + F_{1,2}^2}, \quad (42)$$

$$F_{1,2} = |Q \pm f|. \quad (43)$$

Эллиптичности двух изонормальных волн тождественно равны друг другу,

$$\frac{A''_1}{A'_1} = \frac{A''_2}{A'_2} \equiv \epsilon, \quad (44)$$

что вытекает из ортогональности векторов  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$ , но видно и из формулы (42). С учётом (40), (43) параметры  $F_1$  и  $F_2$  взаимно обратны:

$$F_1 F_2 = |Q^2 - f^2| = 1. \quad (45)$$

Это позволяет привести выражение (42) к виду

$$|\mathbf{A}_1^2| = \frac{2|Q|F_1}{1 + F_1/F_2} = \frac{2|Q|}{F_1 + F_2} = |\mathbf{A}_2^2| \equiv \kappa. \quad (46)$$

Соответственно, и соотношение (41) не зависит от номера ветви.

Начнём изучение распределения векторных полей  $\mathbf{A}_{1,2}(\mathbf{m})$  на единичной сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$  с линии  $\gamma$  (31) ребра самопересечения волновых поверхностей, проходящей через точки вырождения  $\mathbf{m}_0^{\pm} = \mathbf{m}_0 \pm \Delta\mathbf{m}_0$ . Напомним, что ось  $\gamma$  имеет начало отсчёта в центре ребра, отвечающем вектору  $\mathbf{m}_0$ , и масштаб, измеряемый длиной вектора  $\Delta\mathbf{m}_0$  (25),

$$\Delta\mathbf{m} = \gamma\Delta\mathbf{m}_0. \quad (47)$$

Положения сингулярных осей  $\mathbf{m}_0^{\pm}$  отвечают значениям  $\gamma = \pm 1$ . Между осями, в области  $|\gamma| < 1$ , мы находимся на ребре самопересечения поверхности медленности, а при  $|\gamma| > 1$  переходим на линии самопересечения поверхности поглощения. С учётом исходного предположения

$|\Delta\mathbf{m}| \ll 1$  нашего формализма очевидно, что область допустимых значений величины  $|\gamma| = |\Delta\mathbf{m}|/|\Delta\mathbf{m}_0|$  ограничена сверху, но она может быть достаточно широкой при малых расщеплениях  $|\Delta\mathbf{m}_0|$ , что почти всегда обеспечено ввиду слабости поглощения.

Подставляя соотношение (47) в формулы (40) и учитывая выражения (25)–(27), получаем

$$f = \frac{\gamma \cos \alpha + i \sin \alpha}{\gamma \sin \alpha - i \cos \alpha}, \quad Q = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma \sin \alpha - i \cos \alpha}. \quad (48)$$

Из формул (48), (40) следует, что в точках  $\gamma = \pm 1$ , соответствующих сингулярным осям, параметры  $f$ ,  $Q$  и  $\theta_{\pm}$  имеют следующие значения:

$$f = \pm i, \quad Q = 0, \quad \theta_{\pm} = 0. \quad (49)$$

При этом формула (39) даёт

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{m}_0^{\pm}) = \mathbf{A}_2(\mathbf{m}_0^{\pm}) = \frac{\mathbf{A}_{01} \pm i\mathbf{A}_{02}}{\sqrt{2}}, \quad (50)$$

отсюда следует, что вырожденные волны вдоль сингулярных осей  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0^{\pm}$  поляризованы циркулярно. Тот же вывод следует из формул (41), (42): при  $Q = 0$  получаем  $\kappa = 0$  и  $\epsilon = 1$ .

В точке  $\gamma = 0$ , отвечающей направлению  $\mathbf{m}_0$ , вместо (49) имеем

$$f = -\tan \alpha, \quad Q = -\sec \alpha, \quad \theta_{\pm} = 0. \quad (51)$$

В этом случае параметры  $f$  и  $Q$  вещественны, поэтому поляризация оказывается линейной:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{01} \sin \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right) - \mathbf{A}_{02} \cos \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right), \quad (52)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_{01} \cos \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right) + \mathbf{A}_{02} \sin \left( \frac{\pi - \alpha}{4} \right).$$

Существенно, что обнаруженная линейная поляризация сохраняется на целой линии, пересекающей ребро клина в его центре  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$ . Ориентация этой линии, очевидно, отвечает такому направлению  $\Delta\mathbf{m}$ , вдоль которого сохраняется вещественность параметра  $f$  (40). Действительно, тогда параметр  $Q$  тоже будет вещественным, величина  $\kappa$  (46) окажется тождественно равной единице, а эллиптичность (41) обратится в нуль. Требование  $\text{Im} f = 0$  применительно к выражению (40) эквивалентно уравнению

$$\Delta\mathbf{m} \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{N} = -\mathbf{p} \cos \alpha + \mathbf{q} \sin \alpha. \quad (53)$$

Иными словами, линия нулевой эллиптичности на сфере  $\mathbf{m}^2 = 1$  должна быть направлена вдоль вектора  $\mathbf{m}_0 \times \mathbf{N}$ . В соответствии с (25), (26) ребро клина параллельно вектору  $\mathbf{m}_0 \times \mathbf{M}$ . Таким образом, линии ребра клина и нулевой эллиптичности принадлежат плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{m}_0$ , и составляют между собой угол, равный углу между векторами  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{M}$ , которые в общем случае не ортогональны друг другу (рис. 7).

В оптике направление линии  $\eta$  решений для волн нулевой эллиптичности ортогонально ребру клина, поскольку в этом случае  $\mathbf{m}_0 \times \mathbf{N} \parallel \boldsymbol{\tau}_{\perp}$ ,  $\mathbf{m}_0 \times \mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\tau}_{\parallel}$  и  $\boldsymbol{\tau}_{\perp} \perp \boldsymbol{\tau}_{\parallel}$

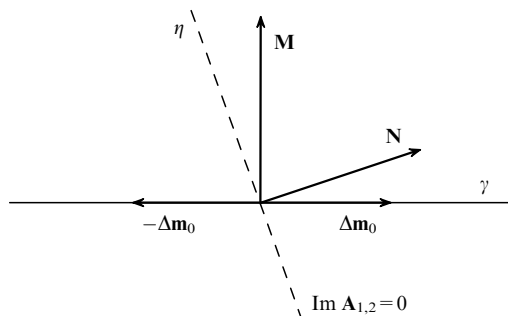


Рис. 7. Линия нулевой эллиптичности — штриховая прямая ( $\eta \perp \mathbf{N}$ ) и линия самопересечения — сплошная прямая ( $\gamma \perp \mathbf{M}$ ) на плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{m}_0$ .

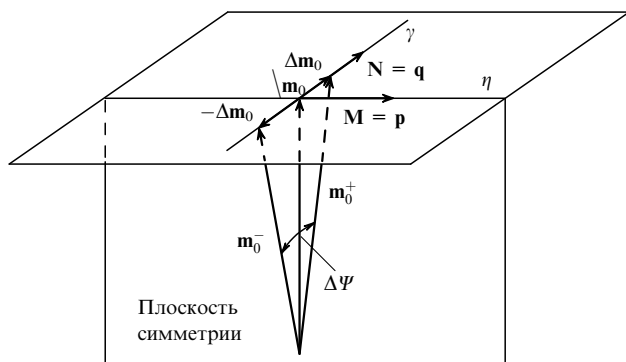


Рис. 8. Геометрия расщепления акустической/оптической оси  $\mathbf{m}_0 \rightarrow \mathbf{m}_0^\pm$  из плоскости симметрии кристалла при включении поглощения.

(рис. 3а). В акустике такая ортогональность возникает, когда исходное направление вырождения  $\mathbf{m}_0$  принадлежит плоскости симметрии  $m$  кристалла, поскольку в этом случае  $q'' = 0$ ,  $\alpha = \pi/2$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{p} \subset m$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{q} \perp m$  (рис. 8). Впрочем, как мы увидим, при  $q'' = 0$  параметр  $f$  остаётся комплексным, а линейность поляризации вдоль направления  $\Delta\mathbf{m} \parallel \mathbf{M}$  обеспечивается симметрией.

Дальнейшее рассмотрение распределения поляризаций мы проведём именно для такого, удобного для анализа, случая в геометрии, показанной на рис. 8. Как уже отмечалось, при этом вектор  $\mathbf{q} \parallel \mathbf{A}_{02}$ , который ортогонален плоскости  $m$ , задаёт направление  $\Delta\mathbf{m}_0$  расщепления осей, а векторы  $\mathbf{A}_{01}$  и  $\mathbf{A}_{03}$  параллельны плоскости  $m$ , причём вектор  $\mathbf{A}_{01}$  обязательно коллинеарен вектору  $\mathbf{p} \subset m$  только в оптике (23), в акустике это, вообще говоря, не так.

Принимая во внимание ортогональность линий  $\gamma \parallel \Delta\mathbf{m}_0 \parallel \mathbf{q} = \mathbf{N}$  и  $\eta \parallel \mathbf{p} = \mathbf{M}$  (см. рис. 8), удобно использовать их как вспомогательную систему координат, разлагая вектор  $\Delta\mathbf{m}$  на её оси:

$$\Delta\mathbf{m} = \gamma\Delta\mathbf{m}_0 + \eta \frac{p''}{p} \mathbf{p}. \tag{54}$$

Масштаб по оси  $\gamma$  выбран прежним ( $|\Delta\mathbf{m}_0|$ ), а масштаб по оси  $\eta$  — другим ( $p''/p$ ). Второй масштаб отличается от первого множителем порядка единицы:

$$\frac{p''}{p} = |\Delta\mathbf{m}_0| \frac{q}{p}. \tag{55}$$

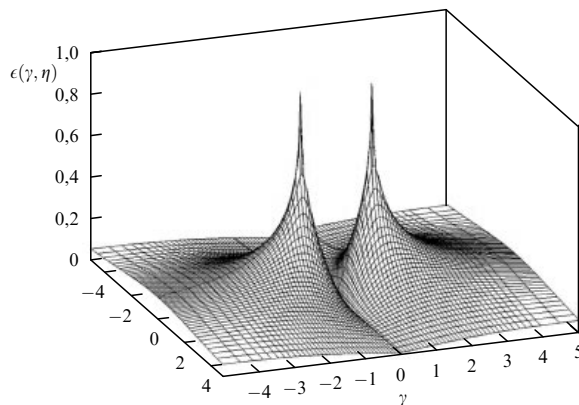


Рис. 9. Два пика поверхности эллиптичности  $\epsilon(\gamma, \eta)$  в окрестности расщеплённых осей.

Такое различие сделает последующие выражения более компактными. Впрочем, в оптике различия в масштабах нет, поскольку, согласно (23),  $p_{\text{оп}} = q_{\text{оп}}$ .

Подставляя (54) в (40), имеем

$$f = \frac{1}{\gamma}(i - \eta), \quad Q = \frac{1}{\gamma} \sqrt{w - 2i\eta}, \quad w = \gamma^2 + \eta^2 - 1. \tag{56}$$

Учитывая эти выражения, после ряда преобразований формулы (42) находим

$$\kappa = \sqrt{\frac{2}{1 + G(\gamma, \eta)}}, \tag{57}$$

где

$$G = \frac{w + 2}{\sqrt{w^2 + 4\eta^2}}. \tag{58}$$

Комбинируя выражения (57), (58) с формулой (41), нетрудно найти полное распределение эллиптичности  $\epsilon$  в рассматриваемой окрестности расщеплённых вырождений. Результат представлен в виде трёхмерного графика на рис. 9.

Рассмотрим сечения этой поверхности. Начнём с распределения эллиптичности поляризации на оси  $\gamma$ . Полагая в формулах (57), (58)  $\eta = 0$ , из (41) получим

$$\epsilon = \begin{cases} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 + \sqrt{1 - \gamma^2}} \right)^{1/2}, & |\gamma| \leq 1, \\ \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 1/\gamma^2}}{1 + \sqrt{1 - 1/\gamma^2}} \right)^{1/2}, & |\gamma| \geq 1, \end{cases} \approx \begin{cases} \frac{|\gamma|}{2}, & |\gamma| \ll 1, \\ \frac{1}{2|\gamma|}, & |\gamma| \gg 1. \end{cases} \tag{59}$$

Как видно из рис. 10а, на котором показан этот профиль распределения эллиптичности, в реперных точках  $\gamma = \pm 1$ , отвечающих сингулярным осям ( $\Delta\mathbf{m} = \pm\Delta\mathbf{m}_0$ ), поляризация циркулярная, как и ранее, а в точке  $\gamma = 0$  по-прежнему линейная.

Заметим, что после замены

$$\gamma = \begin{cases} \sin \xi, & |\gamma| \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \text{cosec } \zeta, & |\gamma| \geq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \zeta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{60}$$



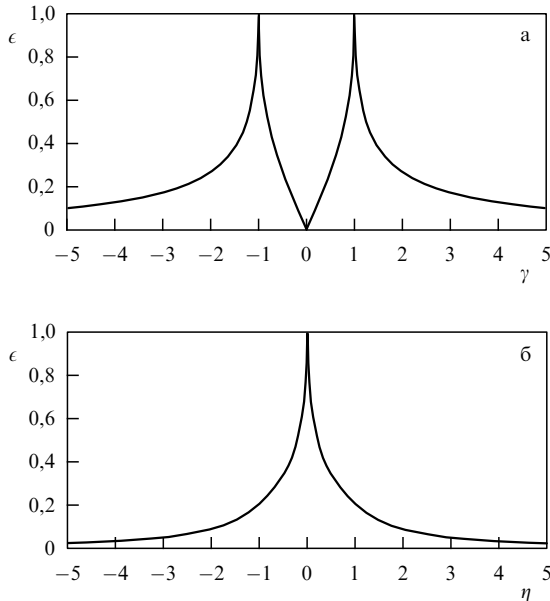


Рис. 10. Сечения поверхности  $\epsilon(\gamma, \eta)$ , приведённой на рис. 9, вертикальными плоскостями: (а)  $\eta = 0$ , (б)  $\gamma = \pm 1$ .

формулы (59) приобретают замечательную компактность:

$$\epsilon = \begin{cases} \left| \tan \frac{\zeta}{2} \right|, & |\gamma| \leq 1, \\ \left| \tan \frac{\zeta}{2} \right|, & |\gamma| \geq 1. \end{cases} \quad (61)$$

В тех же терминах векторы поляризации (39) в рассматриваемом сечении  $\eta = 0$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_{02} \cos \frac{\zeta}{2} - i \mathbf{A}_{01} \sin \frac{\zeta}{2}, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_{01} \cos \frac{\zeta}{2} + i \mathbf{A}_{02} \sin \frac{\zeta}{2}, \end{aligned} \right\} |\gamma| < 1, \quad (62)$$

$$\mathbf{A}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\mathbf{A}_{01} \pm \mathbf{A}_{02}) \cos \frac{\zeta}{2} + i (\mathbf{A}_{02} \mp \mathbf{A}_{01}) \sin \frac{\zeta}{2} \right], \quad |\gamma| > 1. \quad (63)$$

Вторым сечением, которое нас интересует, является вертикальная плоскость  $\gamma = 0$ , проходящая через ось  $\eta$ . Как отмечалось при обсуждении рис. 7 и 8, на оси  $\eta$  должна иметь место линейная поляризация, что частично видно из рис. 9 и 10а (на последнем линия нулевой эллиптичности проектируется в точку  $\gamma = 0$ ). Продемонстрируем это аналитически. Подставляя в (59)  $w = \eta^2 - 1$ , имеем  $G = 1$ . Тогда из (58) следует, что  $\kappa = 1$ , поэтому в соответствии с (41) эллиптичность равна нулю,  $\epsilon = 0$ , т.е. поляризация является линейной.

Представляют интерес и два других, тоже ортогональных оси  $\gamma$ , вертикальных сечения, проходящих через точки вырождения  $\gamma = \pm 1$ . Эти сечения симметрично эквивалентны и, конечно, идентичны. Их аналитическая форма даётся тем же выражением (41) после подстановки в него соотношений (57) и (58), в которых положено  $w = \eta^2$ . Мы приведём лишь приближённую зависимость для предельных случаев  $|\eta| \ll 1$  и  $|\eta| \gg 1$ :

$$\epsilon \approx \begin{cases} 1 - \sqrt{2|\eta|}, & |\eta| \ll 1, \\ \frac{1}{2\eta^2}, & |\eta| \gg 1. \end{cases} \quad (64)$$

Форма сечений при  $\gamma = \pm 1$  показана на рис. 10б. Из формул (59), (64) и рис. 9, 10 видно, что заострённые носики рельефа эллиптичности в точках ( $\gamma = \pm 1, \eta = 0$ ) имеют вертикальные касательные в рассмотренных (и любых других) вертикальных сечениях, проходящих через эти точки.

#### 4.2. Поляризационные сингулярности вокруг направлений вырождения

Как показано в разделе 4.1, при небольшом отклонении волновой нормали  $\mathbf{m}$  от направления вырождения круговая поляризация становится эллиптической. Изучим вращения эллипсов поляризации при обходе волновой нормали вокруг такого вырождения на примере кристалла с плоскостью симметрии, изучавшегося в разделе 4.1 (см. рис. 8). Наличие симметрии сделает анализ менее громоздким и более наглядным при сохранении общности конечных выводов. Рассмотрение по-прежнему будет относиться одновременно к акустике и оптике.

Пусть волновая нормаль  $\mathbf{m}$  обходит сингулярную ось  $\mathbf{m}_0^+$  по контуру  $\Gamma$  малого размера (рис. 11). Как и в случае (32), при этом

$$\Delta \mathbf{m} = \Delta \mathbf{m}_0 + \chi \mathbf{t}(\theta). \quad (65)$$

Здесь  $\chi$  — безразмерный малый параметр, а вектор  $\mathbf{t}(\theta)$  при изменении угла  $\theta$  от 0 до  $2\pi$  очерчивает замкнутый контур конечного размера. В соответствии с законами топологии величина вращения эллипсов поляризации при полном обходе контура не зависит от его формы. Это позволяет оптимизировать анализ, выбирая форму контура. В данном случае удобно выбрать контур  $\Gamma$  в виде эллипса с полуосями, равными  $\chi$  вдоль  $\mathbf{q}$  и  $\chi q/p$  вдоль  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{q}}{q} \cos \theta - \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{m}_0}{p} \sin \theta \quad (66)$$

(см. рис. 11). В случае оптики, когда  $q/p = 1$ , контур  $\Gamma$  превращается в окружность (рис. 3б).

Как и ранее, величина  $\chi$  должна выбираться малой по сравнению с длиной вектора  $|\Delta \mathbf{m}_0| = p''/q$ . Это позволяет ввести новый параметр малости

$$\epsilon = \frac{\chi}{|\Delta \mathbf{m}_0|} = \frac{\chi q}{p''} \ll 1. \quad (67)$$

Подставляя в выражения (40) формулы (27) и (65), (66) и учитывая, что в рассматриваемом случае  $\mathbf{p}\mathbf{q} = 0$ ,

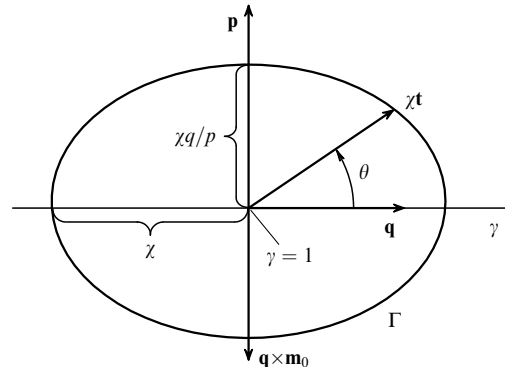


Рис. 11. Контур  $\Gamma$  вокруг оси  $\mathbf{m}_0^+$  на единичной сфере направлений  $\mathbf{m}^2 = 1$  в плоскости  $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  (вектор  $\mathbf{p}$  показан для случая  $g < 0$ ).

$g = \mathbf{p}(\mathbf{q} \times \mathbf{m}_0) = pq \operatorname{sgn} g, q'' = 0$ , получим

$$\begin{aligned} f &\approx i[1 - \varepsilon \exp(i\tilde{\theta})], \quad Q \approx \sqrt{2\varepsilon} \exp \frac{i\tilde{\theta}}{2}, \\ f \pm Q &\approx i \pm \sqrt{2\varepsilon} \exp \frac{i\tilde{\theta}}{2}, \\ \theta_{\pm} &\approx \frac{1}{4}(\tilde{\theta} \pm \pi) \mp \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \cos \frac{\tilde{\theta}}{2}. \end{aligned} \quad (68)$$

Здесь

$$\tilde{\theta} \equiv \theta \operatorname{sgn} g. \quad (69)$$

Полученные соотношения вместе с формулой (39) задают следующие векторы поляризации  $\mathbf{A}_{1,2}$  изонормальных волн на контуре  $\Gamma$  в первом порядке по  $\sqrt{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\mathbf{A}_{01} + i\mathbf{A}_{02}) \exp \left( -i \frac{\tilde{\theta} \pm \pi}{4} \right) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} (\mathbf{A}_{02} + i\mathbf{A}_{01}) \exp \left( i \frac{\tilde{\theta} \mp \pi}{4} \right) \right\} \equiv \mathbf{A}'_{1,2} + i\mathbf{A}''_{1,2}. \end{aligned} \quad (70)$$

Мы не будем здесь в явном виде разделять действительные и мнимые части. Легко проверить, что заданные уравнением (70) главные полуоси  $\mathbf{A}'_{1,2}$  и  $\mathbf{A}''_{1,2}$  эллипсов поляризации изонормальных волн взаимно ортогональны, а их длины различаются членами порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ . Также нетрудно убедиться в том, что при полном обходе контура  $\Gamma$  происходит следующая трансформация векторов поляризации:

$$\mathbf{A}_1(\tilde{\theta} + 2\pi) = -\mathbf{A}_2(\tilde{\theta}), \quad \mathbf{A}_2(\tilde{\theta} + 2\pi) = \mathbf{A}_1(\tilde{\theta}). \quad (71)$$

Таким образом, при полном обходе волновой нормалью  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0^+ + \chi \mathbf{t}(\theta)$  вокруг оси  $\mathbf{m}_0^+$  каждый из эллипсов поворачивается на угол  $\pi/2$ , превращаясь в исходный эллипс другой изонормальной волны. Однако для совокупности этих сопряжённых эллипсов при таком обходе происходит тождественное преобразование пары поляризаций двух ветвей в себя. Из формул (69), (70) вытекает, что направления вращения вектора  $\mathbf{t}$  в плоскости  $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$  и векторов  $\mathbf{A}_{1,2}$  в плоскости  $\{\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{02}\}$  одинаковы при  $g > 0$  и противоположны при  $g < 0$ .

Такая ориентационная сингулярность характеризуется индексом Пуанкаре [12, 16]

$$n = \frac{1}{4} \operatorname{sgn} g, \quad (72)$$

который определяется как величина совокупного поворота эллипса поляризации (в единицах  $2\pi$ ) при полном обходе вокруг точки вырождения. Конечно, индекс второй сингулярной оси ( $\mathbf{m}_0^-$ ) равен тому же значению (72). Это следует хотя бы из того, что оси  $\mathbf{m}_0^+$  и  $\mathbf{m}_0^-$  разделены плоскостью симметрии (см. рис. 8). Впрочем, одинаковость индексов расщеплённых осей сохраняется и в триклинном кристалле [16]. Мы не будем здесь это демонстрировать.

Как видно из рис. 12, на котором представлена картина ориентационных сингулярностей у расщеплённых осей, при обходе вокруг каждой из точек  $\mathbf{m}_0^+$  и  $\mathbf{m}_0^-$  пары эллипсов поляризации поворачиваются на четверть оборота, вне зависимости от формы контура. По мере расширения контура может изменяться величина эллип-

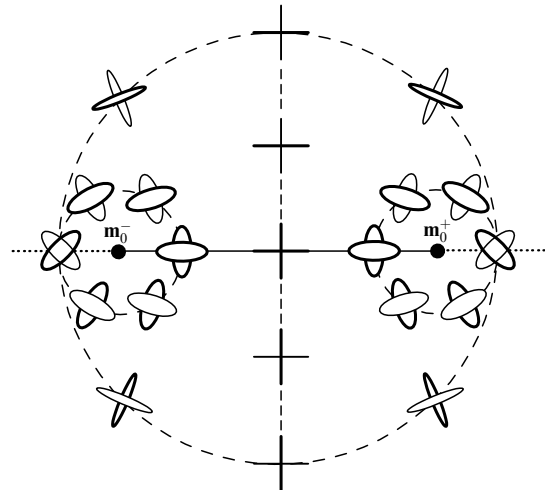


Рис. 12. Поле эллиптических поляризаций в окрестности сингулярных осей  $\mathbf{m}_0^{\pm}$  поглощающего кристалла при  $g > 0$ . На малых контурах вокруг расщеплённых точек вырождения  $n = 1/4$ . На внешнем контуре совокупный индекс  $n = 1/2$  совпадает с индексом невозмущённого линейного поля поляризаций вокруг исходного направления вырождения непоглощающего кристалла. Штриховая вертикальная прямая отвечает линейной поляризации. Скорость больше на эллипсе, контур которого толще, а поглощение больше на эллипсе, изображённом поверх другого.

тичности, но не индекс Пуанкаре, однако лишь до тех пор, пока внутри контура не окажутся сразу две точки вырождения. С этого момента совокупный поворот пары эллипсов скачком увеличивается до полуоборота, что соответствует суммарному индексу Пуанкаре  $n = 1/4 + 1/4 = 1/2$ .

При рассматриваемом вращении эллипсов поляризации переход через линию равных скоростей и линию равных поглощений происходит с обменом ветвями — эллипсы "переходят" с одной полости на другую. Такой непрерывный переход между внешними и внутренними полостями поверхностями медленности и поглощения при полном обходе вокруг сингулярной оси показан на рис. 4а. Физическая тождественность картин поляризации в точках  $\theta$  и  $\theta + 2\pi$  осуществляется при рассмотрении совокупного поля двух ветвей, а не благодаря совпадению волновых характеристик внутри каждой из ветвей, как в непоглощающих кристаллах. Это стало возможным благодаря такой новой топологической черте волновых поверхностей, как их самопересечение по линиям (см. рис. 4–6).

В отсутствие поглощения полости поверхности скоростей обычно имеют лишь точки контакта (применительно к оптике см. рис. 2а). Поляризации изонормальных волн вблизи такой точки могут быть условно представлены крестом, образующие отрезки которого ортогональны, одинаковы по длине, но имеют разную толщину, поскольку на любом контуре вокруг направления вырождения одна из двух изонормальных волн всегда быстрее другой. При выключении поглощения пара сингулярных осей схлопывается в одну, а эллипсы на внешнем контуре на рис. 12 превращаются в такие кресты. Для совмещения данного креста с самим собой требуется его поворот на минимальный угол  $\pm\pi$ , что отвечает индексу  $n = \pm 1/2$ .

В оптике отрицательные индексы Пуанкаре не возникают. Напомним, что, согласно (28), в оптике фактор  $g$

всегда положителен:  $g = (\lambda v_0)^2$ . Поэтому формула (72) даёт для индекса сингулярной оптической оси в поглощающем кристалле только один вариант:  $n = 1/4$ . Впервые этот результат был получен в работе [9] (см. также [10, 11]). В прозрачных двуосных кристаллах сингулярность в поле поляризаций у оптической оси имеет индекс Пуанкаре  $n = 1/2$ . Распад такой сингулярности при включении поглощения на две сингулярности с индексами  $n = 1/4$  удовлетворяет закону сохранения топологического заряда (см. рис. 12).

Картины топологических особенностей в акустике кристаллов более многообразны. В частности, здесь индексы Пуанкаре поляризационных сингулярностей, в отличие от таковых в оптике, могут иметь разные знаки [12, 16, 17]. Например, при распространении вдоль конической акустической оси, параллельной оси симметрии 3, всегда  $n = -1/2$ . При распространении вдоль акустических осей касательного типа, параллельных оси симметрии 6, всегда  $n = 1$  (как и вдоль единственной оптической оси в оптике одноосных кристаллов). Однако вдоль оси симметрии 4, тоже являющейся касательной акустической осью, наряду с индексом Пуанкаре  $n = 1$  возможен индекс  $n = -1$  [17]. Почти все акустические оси в направлениях, не совпадающих с осями симметрии кристалла, принадлежат к коническому типу и имеют индексы Пуанкаре  $n = \pm 1/2$ . Именно эти оси расщепляются при включении поглощения на пары сингулярных осей, характеризующихся индексами  $n = \pm 1/4$  (72).

#### 4.3. Вращение вещественных векторов поляризации по эллиптическим траекториям

Рассмотрим теперь кинематику движения векторов поляризации изонормальных волн по эллиптическим траекториям. Для этого нам понадобится вместо комплексного вектора  $\mathbf{A}_x$  новая вещественная характеристика, зависящая от времени:

$$\mathbf{A}_{1,2} = \text{Re} [\mathbf{A}_{1,2} \exp(i\Phi_{1,2})], \quad \Phi_{1,2} = k'_{1,2} \mathbf{m}\mathbf{r} - \omega t. \quad (73)$$

Здесь следует напомнить, что описываемые нами изонормальные волны независимы и начало отсчёта времени в их фазах  $\Phi_{1,2}$  выбирается произвольно. Применяя, с учётом этого замечания, процедуру (73) к общему выражению (39), нетрудно получить

$$\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A}_{01} \cos \beta_{\pm} \cos (\Phi_{1,2} - \alpha_{\pm}) + \mathbf{A}_{02} \sin \beta_{\pm} \cos (\Phi_{1,2} + \alpha_{\pm}), \quad (74)$$

где углы  $\beta_{\pm}$  и  $\alpha_{\pm}$  определены соотношениями

$$\tan \beta_{\pm} = |f \pm Q|, \quad \alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \arg (f \pm Q). \quad (75)$$

В терминах поляризаций  $\mathbf{A}_x$  (73) вещественная часть обобщённой волны  $\mathbf{a}_x(\mathbf{r}, t)$  (12) (упругой  $\mathbf{u}_x(\mathbf{r}, t)$  (2) или электромагнитной  $\mathbf{h}_x(\mathbf{r}, t)$  (4)) может быть представлена в виде

$$\text{Re } \mathbf{a}_x(\mathbf{r}, t) = C \mathbf{A}_x \exp(-k'' \mathbf{m}\mathbf{r}). \quad (76)$$

Здесь тривиальное влияние поглощения, связанное с ослаблением волны по мере её распространения, отделено от принципиально иных эффектов, обсуждаемых в настоящей статье.

Ниже нас будет особенно интересно изменение кинематики вращения векторов  $\mathbf{A}_{1,2}$  по эллипсам поля-

ризации при сканировании волновой нормалью линии  $\gamma$  самопересечения волновых поверхностей как между сингулярными осями  $|\gamma| < 1$ , так и на участках  $|\gamma| > 1$  равного поглощения. При этом во избежание громоздкости формул мы продолжим рассмотрение кристалла с плоскостью симметрии в геометрии, представленной на рис. 8.

Для начала найдём вещественные поляризации  $\mathbf{A}_{1,2}$ , отвечающие векторам  $\mathbf{A}_{1,2}$  (62), (63):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_{01} \sin \frac{\xi}{2} \sin \Phi_{\xi} + \mathbf{A}_{02} \cos \frac{\xi}{2} \cos \Phi_{\xi}, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_{01} \cos \frac{\xi}{2} \cos \Phi_{\xi} - \mathbf{A}_{02} \sin \frac{\xi}{2} \sin \Phi_{\xi} \end{aligned} \right\} |\gamma| < 1, \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\mathbf{A}_{01} \pm \mathbf{A}_{02}) \cos \frac{\xi}{2} \cos \Phi_{\xi} - \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{A}_{02} \mp \mathbf{A}_{01}) \sin \frac{\xi}{2} \sin \Phi_{\xi} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mathbf{A}_{01} \cos \left( \frac{\xi}{2} \mp \Phi_{\xi} \right) \pm \mathbf{A}_{02} \cos \left( \frac{\xi}{2} \pm \Phi_{\xi} \right) \right], \quad |\gamma| > 1. \end{aligned} \quad (78)$$

Индексы  $\xi$  и  $\zeta$  при фазах  $\Phi$  в (77) и (78) означают, что присутствующие в них волновые нормали сканируют определённые участки линии  $\gamma$  самопересечения:

$$\mathbf{m}_{\xi} = \mathbf{m}_0 + |\Delta \mathbf{m}_0| \sin \xi, \quad \mathbf{m}_{\zeta} = \mathbf{m}_0 + |\Delta \mathbf{m}_0| \text{cosec } \zeta. \quad (79)$$

Заметим, что фазы  $\Phi_{\xi}$  и  $\Phi_{\zeta}$  содержат параметры  $k'_{1,2}$  (73), которые на линии  $\gamma$  одинаковы между осями ( $|\gamma| \leq 1$ ), но различны снаружи от ребра клина ( $|\gamma| > 1$ ). Поэтому при одинаковом выборе начала отсчёта времени фазы  $\Phi_{\xi}$  не зависят от номера волновой ветви, а фазы  $\Phi_{\zeta}$  для двух изонормальных волн различны из-за разных  $k'_{1,2}$ .

Формулы (77) и (78) задают в параметрической форме две пары ортогональных эллипсов поляризации, по которым векторы  $\mathbf{A}_{1,2}$  пробегают за период волны. Первая пара имеет полуоси  $|\sin \xi/2|$  и  $|\cos \xi/2|$ , ориентированные вдоль координатных векторов  $\mathbf{A}_{01}$  и  $\mathbf{A}_{02}$ , а вторая пара с полуосями  $|\sin \zeta/2|$  и  $|\cos \zeta/2|$  повёрнута относительно первой на угол  $\pi/4$ , что соответствует нашему анализу в разделе 4.2. При сканировании волновой нормалью линии  $\gamma$  от центра клина  $\xi = 0$  до сингулярной оси  $\xi = \pm \pi/2$  эллиптичность увеличивается от нуля до единицы (т.е. изменяется от линейной до циркулярной). При переходе через точку  $\xi = \zeta = \pm \pi/2$  ориентация пары эллипсов скачком изменяется на  $\pi/4$  и эллиптичность (61) начинает уменьшаться по мере убывания  $|\zeta|$  (при возрастании  $|\gamma|$ ) как  $|\tan \zeta/2|$  (см. распределение поляризации на рис. 12 вдоль горизонтальной линии, проходящей через точки вырождения  $\mathbf{m}_0^{\pm}$ ).

Движение радиусов-векторов  $\mathbf{A}_x$  ( $\alpha = 1, 2$ ) по эллипсам поляризации удобно описывать в полярных координатах  $(\mathcal{A}_x, \varphi_x)$ :

$$\mathbf{A}_x = \mathcal{A}_x (\mathbf{A}_{01} \cos \varphi_x + \mathbf{A}_{02} \sin \varphi_x). \quad (80)$$

Длины  $\mathcal{A}_x$  радиусов-векторов при движении точки по фиксированной эллиптической траектории согласованно изменяются вместе с азимутами  $\varphi_x$ . Радиальные и азимутальные движения играют, в зависимости от формы эллипса, разную роль. При малой эллиптичности, очевидно, преобладают радиальные (квазиколемба-

тельные) перемещения, а при поляризации, близкой к циркулярной, кинематика в основном определяется азимутальной компонентой.

Общее выражение (74) для вещественной поляризации пары изонормальных волн, распространяющихся в триклинном кристалле в произвольном направлении  $\mathbf{m}$  в окрестности расщеплённых вырождений, в полярных координатах имеет стандартный вид (80), где

$$A_{1,2} = \sqrt{\cos^2 \beta_{\pm} \cos^2 (\Phi_{1,2} - \alpha_{\pm}) + \sin^2 \beta_{\pm} \cos^2 (\Phi_{1,2} + \alpha_{\pm})}, \quad (81)$$

$$\tan \varphi_{1,2} = \tan \beta_{\pm} \frac{\cos (\Phi_{1,2} + \alpha_{\pm})}{\cos (\Phi_{1,2} - \alpha_{\pm})}. \quad (82)$$

Возвращаясь к более простому случаю кристалла с плоскостью симметрии (см. рис. 8), в которой точка наблюдения находится на линии  $\gamma$ , содержащей направления вырождений  $\mathbf{m}_0^{\pm}$ , получаем для полярных координат векторов  $\mathbf{A}_{1,2}$  (77), (78) более компактные выражения:

$$\left. \begin{aligned} A_{1,2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \xi \cos 2\Phi_{\xi})}, \\ \tan \varphi_1 &= \cot \frac{\xi}{2} \cot \Phi_{\xi}, \\ \tan \varphi_2 &= -\tan \frac{\xi}{2} \tan \Phi_{\xi} \end{aligned} \right\} |\gamma| \leq 1, \quad (83)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{1,2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \zeta \cos 2\Phi_{\zeta})}, \\ \tan \varphi_{1,2} &= \pm \frac{\cos (\zeta/2 \pm \Phi_{\zeta})}{\cos (\zeta/2 \mp \Phi_{\zeta})} \end{aligned} \right\} |\gamma| \geq 1. \quad (84)$$

Дифференцируя по времени выражения (83) и (84), нетрудно найти радиальные ( $\dot{A}_{1,2}$ ) и угловые ( $\dot{\varphi}_{1,2}$ ) скорости движения концов радиусов-векторов  $\mathbf{A}_{1,2}$  на линии  $\gamma$ :

$$\dot{A}_{1,2} = \frac{\omega \cos \xi \sin 2\Phi_{\xi}}{\sqrt{2}(1 + \cos \xi \cos 2\Phi_{\xi})}, \quad (85)$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{\omega \sin \xi}{1 + \cos \xi \cos 2\Phi_{\xi}}, \quad |\gamma| \leq 1,$$

$$\dot{A}_{1,2} = \frac{\omega \cos \zeta \sin 2\Phi_{\zeta}}{\sqrt{2}(1 + \cos \zeta \cos 2\Phi_{\zeta})}, \quad (86)$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{\omega \sin \zeta}{1 + \cos \zeta \cos 2\Phi_{\zeta}}, \quad |\gamma| \geq 1.$$

Здесь учтено, что  $\dot{\Phi}_{\alpha} = -\omega$  (73). Заметим, что найденные скорости имеют период, вдвое меньший периода волны. Это отражает тот факт, что уже при совершении половины оборота ненаправленного вектора поляризации исчерпываются все физические различные ситуации.

Ещё проще выглядят секториальные скорости движения, которые, по определению, равны площади, обметаемой радиусами-векторами  $\mathbf{A}_{1,2}$  в единицу времени:

$$v_{1,2}^{\text{sec}} = \frac{1}{2} A_{1,2}^2 \dot{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{4} \begin{cases} \omega \gamma, & |\gamma| \leq 1, \\ \frac{\omega}{\gamma}, & |\gamma| \geq 1. \end{cases} \quad (87)$$

Эти скорости одинаковы для обеих изонормальных волн и независимы от времени — они зависят лишь от координаты  $\gamma$  на линии самопересечения. Постоянство во времени секториальной скорости векторов поляриза-

ции эллиптически поляризованных волн было отмечено ещё в [6]. Это общее свойство возникает только благодаря эллиптичности, и оно необязательно связано с поглощением.

Секториальная скорость  $v_{\alpha}^{\text{sec}}$  (87) равна нулю в центре клина при  $\gamma = 0$  ( $\xi = 0$ ), где поляризация становится линейной (см. рис. 12). С удалением от центра величина  $v_{\alpha}^{\text{sec}}$  возрастает  $\propto \gamma$  и достигает максимума ( $v_{\alpha}^{\text{sec}} = \omega/4$ ) при  $\gamma = \pm 1$ , а затем монотонно убывает  $\propto 1/\gamma$ . Из формулы (87) следует, что векторы  $\mathbf{A}_{1,2}$  проходят с большой угловой скоростью  $\dot{\varphi}_{1,2}$  ту часть траектории, на которой их длины  $A_{1,2}$  малы, и с малой угловой скоростью ту часть траектории, на которой они велики (т.е. окрестности малых и больших полуосей эллипсов поляризации соответственно). Поскольку для изонормальных волн эти эллипсы взаимно ортогональны, точки экстремальной угловой скорости  $\dot{\varphi}_{1,2}$  занимают на эллипсах поляризации фиксированные позиции, которым отвечают ортогональные радиусы-векторы  $\mathbf{A}_{1,2}$ . И этому никак не мешают независимость фаз  $\Phi_{1,2}$  и произвольность выбора в них начала отсчёта времени.

Как видно из выражений (85), (86), при распространении волн вдоль сингулярных осей при  $\gamma = \pm 1$  ( $\xi = \pm\pi/2$ ), когда изонормальные эллипсы поляризации сливаются в один круг  $\mathbf{A}_0$ , циркулярное движение имеет постоянную угловую скорость  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \pm\omega$ . Здесь верхний и нижний знаки отвечают направлениям вращения в точках  $\xi = \pm\pi/2$ . С удалением точки наблюдения от сингулярных осей в обе стороны эллипсы поляризации постепенно вытягиваются (см. рис. 12). Соответственно, обращение векторов  $\mathbf{A}_{1,2}$  по этим эллипсам становится всё менее равномерным. При  $|\gamma| \ll 1$  азимутальные углы  $\varphi_{1,2}$  (83) остаются почти фиксированными (вблизи больших полуосей) в течение половины периода, а затем очень резко изменяются на  $180^\circ$ :

$$\tan \varphi_1 \approx \frac{2 \cot \Phi_{\xi}}{\xi}, \quad \tan \varphi_2 \approx -\frac{1}{2} \xi \tan \Phi_{\xi}.$$

При этом момент перескока, конечно, зависит от фазы  $\Phi_{\xi}$ . Впрочем, никакой сингулярности движения при  $\xi \rightarrow 0$ , разумеется, не возникает: просто вся кинематика всё более определяется радиальной компонентой перемещений:  $A_{1,2} \approx |\cos \Phi_{\xi}|$ . Как видно из формул (83), (85), при  $\xi = 0$  движение становится чисто колебательным.

## 5. Коническая рефракция в поглощающих кристаллах

Если на прозрачный двуосный кристалл, граница которого перпендикулярна оптической оси, направить вдоль нормали к границе циркулярно поляризованную электромагнитную волну, то в кристалле возникнет конус лучей. В этом состоит явление внутренней конической рефракции в оптике кристаллов [1, 7, 22, 23], известное с XIX в. Происхождение этого конуса связано с конической точкой контакта между полостями поверхности рефракции в прозрачном кристалле в направлении оптической оси (рис. 2а). Нормали к поверхности в точке контакта между полостями образуют конус лучей рефракции. Очевидно, что в оптически одноосных кристаллах, где контакт между полостями является касательным, рассматриваемая рефракция существовать не может.

Аналогичные соображения справедливы и в отношении конической рефракции в акустике [24–28], которая

была теоретически предсказана и экспериментально обнаружена в работе [24] на кубических кристаллах Ni. Наиболее полная теория этого эффекта для случая произвольной упругой анизотропии дана в [26] (см. также монографию [6]). Поглощение приводит к новым особенностям конической рефракции — анализ этого явления применительно к акустике кристаллов проведён в [16].

В непоглощающих кристаллах рассматриваемое явление и в оптике, и в акустике кристаллов обусловлено прежде всего конической формой поверхности рефракции и ортогональностью лучевой скорости к этой поверхности. Поглощение, как мы видели, значительно усложняет геометрию контакта полостей рефракции, устраняя коническую точку. Кроме того, как будет показано в разделе 5.3, ортогональность лучевой скорости к этой поверхности, строго говоря, исчезает. Поэтому представляется важным обобщить теорию конической рефракции с учётом поглощения сразу для акустики и оптики, используя развитый универсальный формализм.

### 5.1. Лучевые скорости в акустике и оптике поглощающих кристаллов

В этом разделе нам понадобятся такие понятия, как вектор Умова–Пойнтинга и лучевая скорость волны, введение которых для поглощающих кристаллов требует определённой аккуратности. Сделаем это на примере акустики. Умножим уравнение движения (1) на  $\dot{u}_i$ . В результате в левой и правой частях получатся соответственно два точных соотношения:

$$\rho \dot{u}_i \ddot{u}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^2 \right), \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_i (c_{ijkl} u_{l,kj} + \eta_{ijkl} \dot{u}_{l,kj}) &= \frac{d}{dx_j} \{ \dot{u}_i (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}) \} - \\ &- \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} u_{i,j} c_{ijkl} u_{l,k} \right] - \dot{u}_{i,j} \eta_{ijkl} \dot{u}_{l,k}. \end{aligned} \quad (89)$$

Комбинируя эти уравнения, приходим к уравнению непрерывности (балансу энергии):

$$-\frac{d}{dt} W = \text{div } \mathbf{P} + D. \quad (90)$$

Здесь  $W$  — суммарная плотность кинетической и упругой энергий в волне,

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2} u_{i,j} c_{ijkl} u_{l,k}, \quad (91)$$

$D$  — диссипация энергии в единицу времени,

$$D = \dot{u}_{i,j} \eta_{ijkl} \dot{u}_{l,k}, \quad (92)$$

$\mathbf{P}$  — поток энергии в волне (вектор Умова–Пойнтинга),

$$P_j = -\dot{u}_i (\sigma_{ij} + \sigma'_{ij}), \quad (93)$$

тензоры  $\sigma_{ij}$  и  $\sigma'_{ij}$  определяются свёртками:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{l,k}, \quad \sigma'_{ij} = \eta_{ijkl} \dot{u}_{l,k}. \quad (94)$$

По определению, лучевая скорость волны  $\mathbf{s} = \mathbf{P}/W$ . С учётом найденных общих формул для потока (93) и плотности (91) энергии точное выражение для лучевой

скорости в поглощающем кристалле выражается в виде

$$s_j = - \frac{\dot{u}_i (c_{ijkl} u_{l,k} + \eta_{ijkl} \dot{u}_{l,k})}{(1/2) \rho \dot{u}_i^2 + (1/2) u_{i,j} c_{ijkl} u_{l,k}}. \quad (95)$$

Сравнивая (95) с обычной формулой для кристалла без поглощения, мы видим, что в числителе (95) присутствует добавка, пропорциональная вязкости. Знаменатель имеет более привычный вид, однако и здесь подобные поправки присутствуют в самом поле смещений. Это выражается, в частности, в том, что теперь упругая энергия несколько отличается от кинетической, в меру величины поглощения.

Необходимо, однако, иметь в виду следующее. Как мы видели в разделе 4.1, поляризация волн в окрестности вырождений радикально трансформируется под влиянием поглощения. Поляризация вместо линейной становится эллиптической, причём эта эллиптичность отнюдь не является малой, несмотря на слабость поглощения, и может быть даже циркулярной. Таким образом, основное влияние поглощения на лучевые скорости  $\mathbf{s}$  проявляется уже в главном порядке через векторы поляризации. Ниже всюду, описывая лучевые скорости, мы будем учитывать именно этот эффект основного порядка, пренебрегая малыми добавками, пропорциональными поглощению.

Конечно, в квадратичные формы по полю смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в формуле (95) надо подставлять не комплексное выражение (2), а его вещественную часть  $\text{Re } \mathbf{u}$ , как в (73) и (76):

$$\text{Re } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = C \mathbf{U} \exp(-k'' \mathbf{m} \mathbf{r}), \quad \mathbf{U} = \text{Re} \{ U \exp [i \Phi(\mathbf{r}, t)] \}, \quad (96)$$

где вещественная поляризация  $\mathbf{U}$  находится заменой  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{U}$  в универсальной формуле (74):

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_{01} \cos \beta_{\pm} \cos (\Phi_{1,2} - \alpha_{\pm}) + \mathbf{A}_{02} \sin \beta_{\pm} \cos (\Phi_{1,2} + \alpha_{\pm}). \quad (97)$$

В этом разделе для компактности формул мы будем опускать при векторах  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{u}$  индексы, отмечающие изонормальные волны. Поле смещений (96), (97) удовлетворяет уравнению движения (1) в кристалле с произвольной анизотропией для направлений распространения в окрестности расщеплённых осей. Заметим, что при вычислении пространственных производных функции  $\text{Re } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (96) дифференцирование экспоненты  $\exp(-k'' \mathbf{m} \mathbf{r})$  даёт малые, пропорциональные  $k''$ , члены, которыми можно пренебречь. В этом приближении в формулу (95) можно подставлять вместо полного поля  $\text{Re } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  вещественную поляризацию  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  (97), полагая

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Phi} \dot{\Phi} = -\omega \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{u}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \Phi} \Phi_{,i} = k' m_i \bar{\mathbf{u}}, \quad (98)$$

где вектор  $\bar{\mathbf{u}}$  даётся формулой (97) со сдвинутой фазой:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{U} \left( \Phi + \frac{\pi}{2} \right). \quad (99)$$

Сдвиг фазы (т.е. сдвиг начала отсчёта времени  $t \rightarrow t - \pi/2\omega$ ) в (99), конечно, ничего принципиально не меняет в нашей стационарной задаче, но указывает на то, что лучевая скорость  $\mathbf{s}_x$  запаздывает по фазе относи-

тельно поляризации  $\mathbf{U}$  на  $\pi/2$ . Итак, с учётом сделанных оговорок, формула (95) даёт

$$\mathbf{s} = \frac{2v' \bar{\mathbf{U}} [(\hat{c} - \omega \hat{\eta}) \mathbf{m}] \bar{\mathbf{U}}}{\rho v'^2 \bar{\mathbf{U}}^2 + \bar{\mathbf{U}} (\mathbf{m} \hat{c} \mathbf{m}) \bar{\mathbf{U}}}. \quad (100)$$

Теперь установим соотношение между двумя слагаемыми в знаменателе (100), которые пропорциональны плотностям кинетической и упругой энергий в волне. Для этого подставим векторную функцию  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{r}, t)$  в уравнение движения (1), которому она должна удовлетворять с точностью до малых поправок, пропорциональных  $k''$ , и полученный результат домножим на  $\bar{\mathbf{U}}$ . Это приводит нас к важному соотношению:

$$\rho v'^2 \bar{\mathbf{U}}^2 = \bar{\mathbf{U}} [\mathbf{m} (\hat{c} - \omega \hat{\eta}) \mathbf{m}] \bar{\mathbf{U}} \approx \bar{\mathbf{U}} (\mathbf{m} \hat{c} \mathbf{m}) \bar{\mathbf{U}}, \quad (101)$$

где в правой части опущен пропорциональный вязкости  $\hat{\eta}$  член, имеющий тот же порядок малости, что и ранее опущенные члены  $\sim k''$ . Таким образом, в интересующем нас главном приближении кинетическая и упругая энергии совпадают даже в области аномальной эллиптичности.

По тем же основаниям можно опустить в числителе (100) второе слагаемое  $\propto \hat{\eta} \sim k''$ , а также положить  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta \mathbf{m} \approx \mathbf{m}_0$  и  $v'_x \approx v_0$ , поскольку размер рассматриваемой нами области и вариации в ней фазовой скорости тоже пропорциональны поглощению. Учитывая сказанное, лучевую скорость упругой волны в главном порядке можно выразить в виде

$$\mathbf{s}_{\text{ac}} = \frac{\bar{\mathbf{U}} (\rho^{-1} \hat{c} \mathbf{m}_0) \bar{\mathbf{U}}}{v_0 \bar{\mathbf{U}}^2}. \quad (102)$$

Совершенно аналогично и с той же точностью в случае оптики получим

$$\mathbf{s}_{\text{op}} = \frac{\mathcal{H} [(-c^2 \hat{\epsilon} \hat{\epsilon}^{-1} \hat{\epsilon}) \mathbf{m}_0] \mathcal{H}}{v_0 \mathcal{H}^2}. \quad (103)$$

Таким образом, лучевые скорости  $\mathbf{s}$  в акустике и оптике, наряду с другими волновыми характеристиками, описываются одинаковыми выражениями, если учесть соотношения соответствия (12), (13), дополненные условием  $\bar{\mathbf{U}} \leftrightarrow \mathcal{H}$ . В разделах 5.2 и 5.3, оставаясь в рамках единого формализма, мы будем исходить из соотношения

$$\mathbf{s}_x = \frac{\mathcal{A}_x (\hat{\Lambda}' \mathbf{m}_0) \mathcal{A}_x}{v_0 \mathcal{A}_x^2}, \quad (104)$$

в котором при переходе к акустике будет подразумеваться дополнительный сдвиг фазы (99).

## 5.2. Универсальные конусы рефракции в акустике и оптике

В соответствии с исходной постановкой задачи, при отсутствии поглощения вдоль направления  $\mathbf{m}_0$  имеет место коническое вырождение и могут распространяться волны с любыми поляризациями в плоскости вырождения  $\mathbf{D}$  (см. рис. 1), в том числе с циркулярной поляризацией  $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{01} \pm i \mathbf{A}_{02}) / \sqrt{2}$ . В этом случае формула (73) даёт

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{A}_{01} \cos \Phi_0 \mp \mathbf{A}_{02} \sin \Phi_0), \\ \Phi_0 &= k \mathbf{m}_0 \mathbf{r} - \omega t. \end{aligned} \quad (105)$$

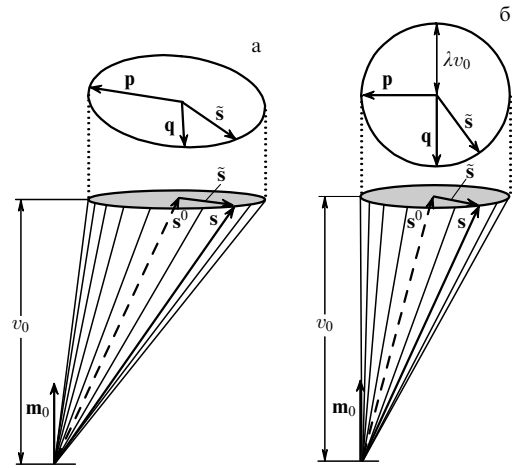


Рис. 13. Универсальные конусы рефракции в акустике (а) и оптике (б) поглощающих кристаллов. Показаны универсальные траектории движения концов векторов  $\tilde{\mathbf{s}}$ .

Подставляя выражение для  $\mathcal{A}_0$  в (104) с учётом (19), получаем для лучевой скорости

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}^0 + \tilde{\mathbf{s}}(t), \quad \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{p} \cos 2\Phi_0 \mp \mathbf{q} \sin 2\Phi_0. \quad (106)$$

Это и есть классическая картина конической рефракции вдоль акустической/оптической оси  $\mathbf{m}_0$  в кристалле без поглощения. В соответствии с формулой (106), за период волны вектор лучевой скорости  $\mathbf{s}(t)$  дважды пробегает по конусу рефракции (рис. 13), а вектор  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  — по эллиптическому/круговому сечению этого конуса в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{m}_0$ .

Напомним, что включение поглощения приводит к расщеплению направления вырождения  $\mathbf{m}_0$  на два сингулярных направления,  $\mathbf{m}_0^+$  и  $\mathbf{m}_0^-$  (рис. 4б). В окрестности этих осей поляризация изонормальных волн характеризуется эллиптичностью, которая может быть весьма значительной и сильно зависит от направления волновой нормали  $\mathbf{m}$ . Наиболее общие выражения для случая произвольной анизотропии даются формулами (80)–(82). Исходя из этих выражений и формулы (104) нетрудно найти искомые лучевые скорости. По аналогии с (106), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{1,2}(\mathbf{m}, t) &= \mathbf{s}^0 + \tilde{\mathbf{s}}_{1,2}(\mathbf{m}, t), \\ \tilde{\mathbf{s}}_{1,2}(\mathbf{m}, t) &= \mathbf{p} \cos 2\varphi_{1,2} + \mathbf{q} \sin 2\varphi_{1,2}, \end{aligned} \quad (107)$$

где полярные углы  $\varphi_x(\mathbf{m}, t)$  определяются уравнением (82). Нетрудно убедиться, что формулы (106) и (107) описывают прецессию лучевых скоростей по одному и тому же конусу.

Таким образом, включение поглощения расширяет область существования конической рефракции с локального направления  $\mathbf{m}_0$  на целую континуальную область в окрестности расщеплённых осей. Здесь нас не должно обманывать то обстоятельство, что в формулу (104) для лучевой скорости  $\mathbf{s}$ , относящейся к целой области вокруг сингулярных осей, в явном виде входит волновая нормаль  $\mathbf{m}_0$  вместо  $\mathbf{m}$ . Это всего лишь отражает тот факт, что оператор  $\hat{\Lambda}' \mathbf{m}$  слабо зависит от малых изменений  $\mathbf{m}$  и в главном приближении может быть заменён оператором  $\hat{\Lambda}' \mathbf{m}_0$ . Высокая чувствительность лучевой скорости к

малым изменениям направления  $\mathbf{m}$  в рассматриваемой области связана с поляризацией  $\mathbf{A}(\mathbf{m}, t)$ , которая здесь, как мы видели, при малых шевелениях  $\mathbf{m}$  может изменяться от круговой до линейной.

Разница между формулами (106) и (107) заключается в фазах  $\Phi_0(\mathbf{m}_0, t)$  и  $\varphi_{1,2}(\mathbf{m}, t)$ . Первая, привязанная к фиксированному направлению  $\mathbf{m}_0$ , имеет простую временную зависимость (105). Вторая, являясь полярным азимутом вектора поляризации  $\mathbf{A}(\mathbf{m}, t)$ , имеет гораздо более сложную зависимость от времени (82), которая весьма чувствительна к направлению волновой нормали  $\mathbf{m}$ . Всё это может повлиять, причём весьма значительно, только на кинематику прецессии векторов  $\mathbf{s}_{1,2}$ . Между тем траектории их движений, описываемые функциями (106) и (107) в параметрической форме, оказываются идентичными. Векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  в этих формулах — сопряжённые полу диаметры эллипса, описываемого концом вектора  $\tilde{\mathbf{s}}(t)$  при изменении времени  $t$ . Эллиптическое сечение конуса плоскостью  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  является универсальным — его главные полуоси  $\mathbf{s}_\pm$  не зависят от фаз и определяются инвариантными комбинациями векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  [6]:

$$s_\pm^2 = \frac{1}{2} \left( \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 \pm \sqrt{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2)^2 - 4(\mathbf{p} \times \mathbf{q})^2} \right), \quad (108)$$

$$\mathbf{s}_+ \parallel \mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - s_+ \mathbf{q}, \quad \mathbf{s}_- \parallel \mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - s_- \mathbf{q}.$$

Применительно к акустике, как уже говорилось в разделе 5.1, полярные углы  $\varphi_{1,2}$  (82) должны быть заменены углами  $\bar{\varphi}_{1,2}$ , сдвинутыми по фазе:

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \varphi_{1,2} \left( \Phi + \frac{\pi}{2} \right). \quad (109)$$

В оптике сдвига (109) нет, а общая картина проще и симметричнее. В соответствии с (23), в этом случае векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  ортогональны и равны по длине. Поэтому универсальный эллипс превращается в окружность, лежащую в плоскости  $(\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{02})$ , ортогональной вектору  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{c}_1 = \mathbf{A}_{03}$ . Центр круга радиусом  $\lambda v_0$  находится в точке, заданной концом вектора  $\mathbf{s}^0 = (-\lambda \mathbf{A}_{01} + \mathbf{A}_{03}) v_0$  (23). Перпендикуляр к этой плоскости, проведённый из вершины конуса, имеет длину  $v_0$  и попадает на окружность в точке, отвечающей концу вектора  $\mathbf{p} = \lambda v_0 \mathbf{A}_{01}$  (см. рис. 136). Соответственно, угол  $\psi_c$  раствора конуса в плоскости  $\{\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{03}\}$  определяется уравнением

$$\tan \psi_c = 2\lambda. \quad (110)$$

Оси  $\mathbf{s}^0$  как акустического, так и оптического конусов наклонены по отношению к направлению  $\mathbf{m}_0$ , причём в обоих случаях этот наклон не зависит от параметров поглощения. Но, как мы видели в разделе 2.3, в оптике при выключенном поглощении оптическая ось  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{c}_1$  принадлежит плоскости симметрии (рис. 2а) тензора  $\hat{\epsilon}$ . Поэтому и ось конуса  $\mathbf{s}^0$ , наклоняясь к  $\mathbf{m}_0$ , остаётся в той же плоскости. Включение поглощения восстанавливает оптическую триклинность кристалла, но это не затрагивает конуса рефракции в используемом нами главном приближении. Между тем в акустике триклинный кристалл и без поглощения остаётся триклинным, поэтому наклон конуса в этом случае не привязан ни к каким выделенным плоскостям. Конечно, включение симметрии и в акустике меняет ситуацию. Например, в частном случае, когда направление вырождения  $\mathbf{m}_0$  совпадает с

осью симметрии 3, через которую всегда проходят три плоскости симметрии, конус рефракции не только становится круговым, но и утрачивает свой наклон, поскольку в этом случае  $\mathbf{s}^0 \parallel \mathbf{m}_0$ . Правда, именно в этом случае как раз из-за симметрии такую акустическую ось  $\mathbf{m}_0$  поглощение не расщепляет [12, 16].

### 5.3. Кинематика прецессии лучевых скоростей

Как уже говорилось в разделе 5.2, величина поглощения влияет не на траекторию движения лучевых скоростей, а на кинематику их прецессии по универсальному конусу. Последняя в свою очередь сильно зависит от направления распространения  $\mathbf{m}$  в рассматриваемой окрестности. Удобной характеристикой такой прецессии может быть угловая скорость вращения вектора  $\tilde{\mathbf{s}}_x(t)$  ( $x = 1, 2$ ) по окружности в оптике или по эллипсу в акустике.

В первом случае, подставляя в (107) выражения  $\mathbf{p}_{\text{оп}} = \lambda v_0 \mathbf{A}_{01}$ ,  $\mathbf{q}_{\text{оп}} = \lambda v_0 \mathbf{A}_{02}$  из (23), мы сразу получаем готовую формулу в полярных координатах:

$$\dot{\tilde{\mathbf{s}}}_x^{\text{оп}}(t) = \lambda v_0 (\mathbf{A}_{01} \cos 2\varphi_x + \mathbf{A}_{02} \sin 2\varphi_x), \quad (111)$$

где полярный угол  $\phi_x^{\text{оп}} = 2\varphi_x$ .

В акустическом варианте с учётом того, что векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  не ортогональны и не равны по длине, связь между полярным углом  $\phi_x^{\text{ак}}$  и углом  $2\bar{\varphi}_x$  (109) оказывается сложнее; она может быть найдена из условия

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{s}}}_x^{\text{ак}}(t) &= \mathbf{p} \cos 2\bar{\varphi}_x + \mathbf{q} \sin 2\bar{\varphi}_x = \\ &= S_x \left( \frac{\mathbf{p}}{p} \cos \phi_x^{\text{ак}} + \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{p}}{p} \sin \phi_x^{\text{ак}} \right), \end{aligned} \quad (112)$$

где  $S_x$  — длина радиуса-вектора  $\tilde{\mathbf{s}}_x^{\text{ак}}$ . Отсюда имеем

$$\cot \phi_x^{\text{ак}} = \frac{1}{g} (\mathbf{p}\mathbf{q} + p^2 \cot 2\bar{\varphi}_x), \quad \sin \phi_x^{\text{ак}} = \frac{g}{p S_x} \sin 2\bar{\varphi}_x, \quad (113)$$

$$S_x^2 = p^2 \cos^2 2\bar{\varphi}_x + q^2 \sin^2 2\bar{\varphi}_x + \mathbf{p}\mathbf{q} \sin 4\bar{\varphi}_x. \quad (114)$$

С учётом найденных соотношений угловые скорости прецессии в оптике и акустике определяются выражениями

$$\dot{\phi}_x^{\text{оп}} = 2\dot{\varphi}_x, \quad \dot{\phi}_x^{\text{ак}} = \frac{2g}{S_x^2} \dot{\varphi}_x. \quad (115)$$

Таким образом, угловая скорость  $\dot{\phi}_x$  прецессии вектора  $\tilde{\mathbf{s}}_x(t)$  как в оптике, так и в акустике полностью определяется кинематикой движения вектора  $\mathbf{A}_x$  по эллипсу поляризации, причём в случае акустики с запаздыванием по фазе:  $\Phi_x \rightarrow \Phi_x + \pi/2$ . То же относится и к секториальной скорости вектора  $\tilde{\mathbf{s}}_x(t)$ :

$$\bar{v}_x^{\text{сек}} = \frac{1}{2} S_x^2 \dot{\phi}_x = \begin{cases} g \dot{\varphi}_x & (\text{оп}), \\ g \dot{\varphi}_x & (\text{ак}). \end{cases} \quad (116)$$

В отличие от секториальной скорости поляризации (87), скорость (116) не является постоянной и в акустике запаздывает по фазе. В случае оптики в (116) можно положить  $g = (\lambda v_0)^2$ . Отсюда следует, что в оптике знаки вращения вектора  $\tilde{\mathbf{s}}_x(t)$  и соответствующего ему вектора  $\mathbf{H}_x(t)$  всегда совпадают между собой. В акустике совпадение имеет место, только если  $g > 0$ . При  $g < 0$  возникает вариант, невозможный в оптике, — знаки вращений лучевой скорости и поляризации оказываются противоположными.

Как видно из выражений (115), все обсуждавшиеся в разделе 4.3 кинематические особенности вращения поляризации по эллипсам должны воспроизводиться и в прецессии лучевых скоростей. Вдоль сингулярных осей два сопряжённых эллипса поляризации вырождаются в окружность: возникает циркулярная поляризация (50), формулы (77), (85) при  $\xi = \pm\pi/2$  дают постоянную угловую скорость  $\dot{\varphi}_0 = \omega \operatorname{sgn} \xi$ . Это точно соответствует кинематике обычной конической рефракции в кристалле без поглощения (106). Влияние поглощения в данном случае сказывается не на кинематике, а на геометрии поверхности рефракции. В отсутствие поглощения конус рефракции полностью повторяет ориентацию конуса нормалей к поверхности медленности в конической точке контакта её полостей. При учёте диссипации вдоль сингулярной оси, как видно из рис. 5а, конус нормалей заменяется их плоским веером, а конус рефракции остаётся неизменным. Это иллюстрирует тот факт, что в рассматриваемых условиях удобное соответствие между направлениями лучевой скорости и нормали к поверхности рефракции, к сожалению, утрачивается. Однако на линии нулевой эллиптичности коллинеарность указанных направлений полностью восстанавливается.

В соответствии с (115), (116), вдоль сингулярных осей, где  $\dot{\varphi}_x = -\dot{\Phi}_x \operatorname{sgn} \xi = \omega \operatorname{sgn} \xi$ , в оптике постоянными остаются и угловые, и секториальные скорости лучевых векторов:

$$\dot{\varphi}_0^{\text{op}} = 2\omega \operatorname{sgn} \xi, \quad \bar{v}_0^{\text{sec}} = g\omega \operatorname{sgn} \xi, \quad (117)$$

а в акустике остаётся постоянной только секториальная скорость, определяемая той же формулой (117). Угловая скорость (115) прецессии векторов  $\mathbf{s}_{1,2}(t)$  при распространении вдоль сингулярной акустической оси сохраняет вариации во времени до тех пор, пока векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  остаются не ортогональными и не равными по длине.

Впрочем, по мере перемещения точки наблюдения по ребру клина от концов к центру ( $\xi = 0$ ) неравномерность движения векторов  $\mathbf{s}_{1,2}(t)$  в терминах как угловой, так и секториальной скоростей быстро нарастает. То же самое должно иметь место на любой траектории точки наблюдения, пересекающей линию нулевой эллиптичности. В соответствии с этим характер засветки экрана должен существенно зависеть от того, какова эллиптичность волны для данного направления волновой нормали. Так, в оптике при распространении волны вдоль сингулярной оси её поляризация является циркулярной, а прецессия луча  $\mathbf{s}_x(t)$  происходит с постоянной угловой скоростью  $\pm 2\omega$  (117). На картине засветки экрана это проявит себя как полностью прорисованная окружность (рис. 14).

С удалением "точки наблюдения" от сингулярных осей картина засветки перестаёт быть равномерной. Участки эллипса рефракции, которые векторы  $\mathbf{s}_{1,2}(t)$  проходят быстро, оказываются менее засвеченными, чем участки, проходимые ими медленно. Фазовая скорость этого движения ровно вдвое превышает скорость вектора поляризации  $\mathbf{A}_x$ ,  $\dot{\varphi}_x^{\text{op}} = 2\dot{\varphi}_x$  (115), а последняя, как мы видели в разделе 4.3, имеет экстремумы вдоль полуосей эллипса поляризации при  $\varphi_x = \varphi_x^m$ . Интересующие нас области засветки соответствуют окрестностям больших полуосей этих эллипсов и однозначно связаны с их ориентациями. На одном эллипсе перемещение вектора  $\mathbf{A}_x(t)$  из одного крайнего положения,  $\mathbf{A}_x(\varphi_x^m) = \mathbf{A}_x$ , в другое,  $\mathbf{A}_x(\varphi_x^m + \pi) = -\mathbf{A}_x$ , не сказывается на ориента-

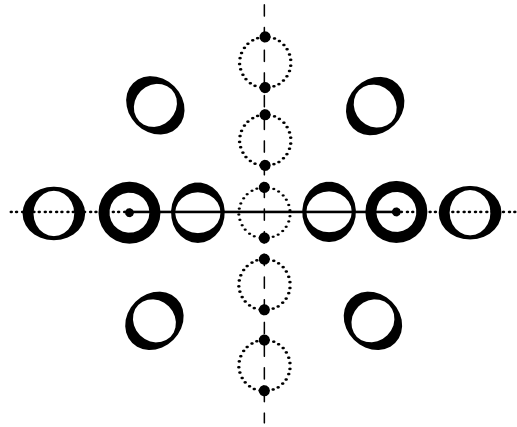


Рис. 14. Схематическое распределение колец засветки экрана в окрестности расщеплённых сингулярных осей в оптике. Полная равномерная кольцевая засветка экрана отвечает обычной конической рефракции циркулярно поляризованных волн. Две точки на окружности соответствуют обычному двулучепреломлению линейно поляризованных волн. Ребро клина равных скоростей показано отрезком горизонтальной прямой. Вертикальная штриховая линия отвечает нулевой эллиптичности.

ции лучевой скорости, поскольку при этом, согласно (111), оба положения отвечают одному и тому же направлению  $\mathbf{s}_x[2(\varphi_x^m + \pi)] = \mathbf{s}_x(2\varphi_x^m)$ , а значит, дополнительная засветка попадёт в то же место на эллипсе рефракции, усилив первую. Очевидно, что для второй изонормальной волны экстремальные позиции  $\varphi_2^m$  вектора  $\mathbf{A}_2$  на своём эллипсе поляризации, ортогональном  $\mathbf{A}_1$ , отличаются от первых на  $\pi/2$ ,  $\varphi_2^m = \varphi_1^m \pm \pi/2$ . Поэтому им должна соответствовать экстремальная лучевая скорость  $\mathbf{s}_2(2\varphi_2^m) = \mathbf{s}_1(2\varphi_1^m \pm \pi)$ , направленная вдоль противоположной образующей конуса рефракции, что добавляет новую область засветки на противоположной стороне того же эллипса рефракции. На линии нулевой эллиптичности прецессия полностью прекращается в случаях как оптики, так и акустики, а на контуре засветки экрана будут только две точки, отвечающие обычному двулучепреломлению.

Именно такие круги рефракции с двойной засветкой от пар изонормальных волн показаны для случая оптики на рис. 14. Положения областей засветки на круговых контурах соответствуют ориентациям эллипсов поляризации на рис. 12. В акустике поглощающих кристаллов картина засветки аналогична, однако окружность теперь заменяется эллипсом, описываемым формулой (107).

## 6. Возможности наблюдения топологических эффектов поглощения

Обсудим теперь перспективы экспериментального наблюдения предсказываемых тонких эффектов в оптике и акустике, обусловленных расщеплением оптических и акустических осей под влиянием поглощения. Для наблюдаемости этих явлений угол дифракционной расходимости  $\Delta\psi_d$  зондирующего волнового луча должен быть меньше угла расщепления  $\Delta\psi$  оптических или акустических осей. Первый из углов оценивается величиной

$$\Delta\psi_d \sim \frac{\lambda_0}{d_0}, \quad (118)$$



где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме,  $d_0$  — диаметр луча в кристалле. Что касается угла расщепления  $\Delta\Psi$ , то он регулируется выбором уровня поглощения, которое, однако, должно обеспечивать достаточную длину пробега волны.

Начнём с оптики. Угол расщепления  $\Delta\Psi$  (см. рис. 8) в соответствии с формулами (32), (23) оценивается как

$$\Delta\Psi \approx 2|\Delta\mathbf{m}_0| \sim \frac{\varepsilon\delta}{2\lambda}. \quad (119)$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $\delta$  — характерные значения компонент тензора поглощения  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\delta}$ , а параметр  $\lambda$  (23) определяется величиной оптической анизотропии, которая в большинстве кристаллов достаточно мала. Например, в кристаллах топаза и сегнетовой соли  $\lambda$  имеет почти одинаковые весьма малые значения:  $\lambda \approx 1,6 \times 10^{-3}$  [7].

В справочниках поглощение в кристаллах обычно задают не компонентами тензора  $\hat{\delta}$ , а коэффициентами линейного поглощения  $k''$  вдоль главных осей тензора  $\hat{\varepsilon}$ . В типичном случае малой анизотропии соотношение между  $\delta$  и  $k''$  легко находится:

$$k' + ik'' \approx \frac{2\pi}{\lambda_0 \sqrt{\varepsilon^{-1} - i\delta}} \approx \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \left(1 + i \frac{\varepsilon\delta}{2}\right). \quad (120)$$

Отсюда

$$\delta \approx \frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon^{3/2}} k''. \quad (121)$$

Подставляя эту оценку в (119) и сравнивая результат с (118), получим искомый критерий наблюдаемости расщепления оптических осей и сопутствующих эффектов:

$$k''d_0 > 2\pi\lambda\sqrt{\varepsilon}. \quad (122)$$

Отсюда видно, что в кристаллах с малой анизотропией  $\lambda \sim 10^{-3}$  требования, налагаемые на уровень поглощения, оказываются весьма слабыми:  $k''d_0 > 10^{-2}$ . Например, при  $k'' \sim 1 \text{ см}^{-1}$ , когда длина пробега волны в кристалле  $\sim 1 \text{ см}$ , при разумных значениях  $d_0 \sim 3-5 \text{ мм}$  выполнение этого условия обеспечено. Однако не следует забывать, что при малых  $\lambda$  угол раствора конуса рефракции (110) тоже уменьшается:  $\psi_c \approx 2\lambda$  (например, при  $\lambda \approx 1,6 \times 10^{-3}$  угол  $\psi_c \approx 0,2^\circ$ ), что может усложнить эксперимент. Отметим, что в акустике типичные значения угла  $\psi_c$  конуса рефракции составляют несколько десятков градусов.

Выбирая, например,  $k'' \approx 1 \text{ см}^{-1}$  и  $\lambda_0 \approx 5 \times 10^{-5} \text{ см}$ , из (121) получим оценку  $\delta \sim 10^{-5}$ . При этом значении  $\delta$  и  $\lambda \sim 10^{-3}$  формула (119) даёт для угла расщепления следующую оценку:  $\Delta\Psi \sim \delta/\lambda \sim 10^{-2} \sim 0,5^\circ$ . При таком расщеплении оптических осей условие  $\Delta\psi_d \ll \Delta\Psi$  на расходимость лазерного пучка может быть легко реализовано. Таким образом, не вызывает сомнений, что при надлежащем выборе кристалла предсказываемые эффекты в оптике могут реально наблюдаться.

Проводя аналогичные оценки применительно к акустике, примем во внимание, что с возрастанием частоты волны  $v = \omega/2\pi$  поглощение усиливается, так что угол  $\Delta\Psi$  увеличивается, а угол расходимости пучка  $\Delta\psi_d \sim c_s/vd_0$ , наоборот, уменьшается (здесь  $c_s$  — скорость звука в кристалле). Таким образом, в данном случае должен существовать нижний порог эффекта по частоте.

С учётом формул (13), (19), (20), (25) и (26) теперь имеем вместо (119) оценку  $\Delta\Psi \sim 2\pi v\eta/\mu$ , где  $\eta$  — пара-

метр вязкости,  $\mu$  — модуль сдвига. В результате из условия  $\Delta\psi_d \ll \Delta\Psi$  следует критерий

$$v \gg v_{\text{th}} \sim \sqrt{\frac{c_s \mu}{2\pi\eta d_0}}. \quad (123)$$

Поскольку речь идёт о достаточно высоких частотах и комнатных температурах  $T \sim 300 \text{ К}$ , то здесь для оценки затухания волны  $\eta$  естественно использовать фоновую вязкость:

$$\eta \sim \eta_{\text{ph}} \sim \tau_{\text{ph}} \frac{3k_B T}{a^3}, \quad (124)$$

где  $\tau_{\text{ph}}$  — время релаксации фононов,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $a$  — параметр решётки. Подставляя (124) в (123), при значениях  $c_s \approx 3 \times 10^5 \text{ см с}^{-1}$ ,  $\mu \approx 10^{11} \text{ дн см}^{-2}$ ,  $d_0 \approx 0,5 \text{ см}$ ,  $\tau_{\text{ph}} \approx 10^{-10} \text{ с}$ ,  $a \approx 3 \times 10^{-8} \text{ см}$  получим оценку для пороговой частоты

$$v_{\text{th}} \sim 100 \text{ МГц}. \quad (125)$$

Пороговая частота оказывается весьма высокой, тем не менее акустический эксперимент представляется осуществимым.

## 7. Заключение

Таким образом, в настоящей статье показано, что даже очень малое поглощение приводит к радикальным топологическим изменениям волновых свойств в окрестности вырожденных направлений. Следует подчеркнуть, что рассмотренные эффекты существуют благодаря сочетанию поглощения с анизотропией кристаллов, в то время как в изотропных средах поглощение приводит лишь к тривиальному ослаблению интенсивности волновых полей.

В статье получены уравнения (14), которые при учёте соотношений соответствия (12), (13) являются универсальным инструментом для описания особенностей волновых параметров как в акустике, так и в оптике поглощающих кристаллов, в частности в окрестности конического вырождения. Унифицированный анализ, проведённый на этой основе, позволил по-новому взглянуть на изучаемые волновые явления в оптике и акустике и увидеть не только их сходство, но и различие. При этом некоторые из обсуждавшихся выше тонких топологических эффектов теоретически описаны впервые.

Здесь прежде всего имеются в виду результаты, представленные в разделах 4 и 5. Большая часть результатов по распределениям эллиптических поляризационных полей, приведённых в разделе 4, является новой. В разделе 5 также достигнуто определённое продвижение в теории конической рефракции поглощающих кристаллов. Мы показали, что это явление существует не только на ребре клина, как было установлено ранее [11, 12, 16], но и в целой области направлений распространения волн в окрестности расщеплённых осей, где эллиптичность поляризации не мала. Кроме того, нами впервые описаны кинематические особенности движения лучевых скоростей  $\mathbf{s}_z$  по универсальному конусу рефракции и установлена точная связь между азимутальными углами прецессии векторов поляризации и отвечающих им скоростей  $\mathbf{s}_z$ . В оптике впервые рассмотрен общий случай произвольной анизотропии кристалла, причём теория

рефракции построена в терминах лучевых скоростей (в [11] анализ проводился в терминах векторов Умова – Пойнтинга и относился только к ромбическим кристаллам).

Наконец, подчеркнём, что речь идёт не только о математических красотах описания топологического поведения электромагнитных и упругих волн в поглощающих кристаллах. Проведённые в разделе 6 численные оценки показывают, что описываемые эффекты могут наблюдаться экспериментально как в оптике, так и в акустике.

Авторы благодарны Т.Р. Волк и А.Ф. Константиновой за полезные консультации, а также Д.А. Бессонову за помощь при построении рисунков.

## Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
2. Федоров Ф И *Оптика анизотропных сред* (Минск: Изд-во АН БССР, 1958; *Оптика анизотропных сред* (М.: УРСС, 2004)
3. Федоров Ф И *Теория гиротропии* (Минск: Наука и техника, 1976)
4. Chen H C *Theory of Electromagnetic Waves: a Coordinate-Free Approach* (New York: McGraw-Hill, 1983)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: Наука, 1987) [Landau L D, Lifshitz E M *Theory of Elasticity* (Oxford: Pergamon Press, 1986)]
6. Федоров Ф И *Теория упругих волн в кристаллах* (М.: Наука, 1965) [Fedorov F I *Theory of Elastic Waves in Crystals* (New York: Plenum Press, 1968)]
7. Сиротин Ю И, Шаскольская М П *Основы кристаллофизики* (М.: Наука, 1975) [Sirotnin Yu I, Shaskolskaya M P *Fundamentals of Crystal Physics* (Moscow: Mir Publ., 1982)]
8. Гончаренко А М, Грум-Гржимайло С В, Федоров Ф И *Кристаллография* **9** 589 (1964)
9. Lyubimov V N, in *Proc. Intern. Workshop on Dissipation in Physical Systems, Borkow, Poland, 1995; Zeszyty Naukowe Politech. Swietokrzyskiej Kielce Poland Mech.* **59** 77 (1995)
10. Berry M V, Dennis M R *Proc. R. Soc. Lond. A* **459** 1261 (2003)
11. Альшиц В И, Любимов В Н *ЖЭТФ* **125** 999 (2004) [Alshits V I, Lyubimov V N *JETP* **98** 870 (2004)]
12. Alshits V I, Lyubimov V N, in *Proc. Second Workshop on Dissipation in Physical Systems, Borkow, Poland, 1997; Zeszyty Naukowe Politech. Swietokrzyskiej Kielce Poland Mech.* **66** 15 (1998)
13. Shuvalov A L, Chadwick P *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **355** 155 (1997)
14. Shuvalov A L, Scott N H *Q. J. Mech. Appl. Math.* **52** 405 (1999)
15. Shuvalov A L, Scott N H *Acta Mech.* **140** 1 (2000)
16. Альшиц В И, Любимов В Н *ЖЭТФ* **140** 755 (2011) [Alshits V I, Lyubimov V N *JETP* **113** 659 (2011)]
17. Альшиц В И, Сарычев А В, Шувалов А Л *ЖЭТФ* **89** 922 (1985) [Al'shits V I, Sarychev A V, Shuvalov A L *Sov. Phys. JETP* **62** 531 (1985)]
18. Альшиц В И, Любимов В Н, Шувалов Л А *Кристаллография* **46** 742 (2001) [Alshits V I, Lyubimov V N, Shuvalov L A *Crystallogr. Rep.* **46** 673 (2001)]
19. Гончаренко А М *Кристаллография* **4** 727 (1959)
20. Joly S et al. *Opt. Express* **17** 19868 (2009)
21. Gupta N et al. *J. Opt.* **13** 055702 (2011)
22. Михайличенко Ю П *Вестник ТГПУ* (6(69)) 130 (2007)
23. Величина Т С и др. *УФН* **130** 357 (1980) [Velichkina T S et al. *Sov. Phys. Usp.* **23** 176 (1980)]
24. de Klerk J, Musgrave M J P *Proc. Phys. Soc. B* **68** 81 (1955)
25. Musgrave M J P *Acta Crystallogr.* **10** 316 (1957)
26. Хаткевич А Г *Кристаллография* **7** 916 (1962)
27. Barry P A, Musgrave M J P *Q. J. Mech. Appl. Math.* **32** 205 (1979)
28. Александров К С, Рыжова Т В *Кристаллография* **9** 373 (1964)

## Acoustics and optics of absorptive crystals: a universal formalism for topological effects

V.I. Alshits, V.N. Lyubimov

Shubnikov Institute of Crystallography, Russian Academy of Sciences,  
Leninskii prosp. 59, 119333 Moscow, Russian Federation  
Tel. +7 (495) 330 82 74. Fax +7 (499) 135 10 11  
E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru, lyubvn36@mail.ru

A universal form for equations determining the acoustical and optical wave fields in absorptive crystals is obtained. On this basis, a unified formalism is constructed and used to describe the effect of absorption on the topology of the polarization fields and wave surfaces of elastic and electromagnetic waves close to the conical acoustic and optical axes. Unless forbidden by symmetry, both types of axes are split by absorption with the consequences that the wave surfaces acquire self-intersection lines that connect pairs of split axes; and that in the polarization fields new singular points with the Poincaré indices  $n = \pm 1/4$  arise. Near the split points, the waves of degenerate branches show an abrupt increase in ellipticity, which transforms the internal conical refraction from a local property along the degeneracy direction into a continual phenomenon occurring throughout this entire region. For each wave normal direction here there is a universal refraction cone, the same as for zero damping. The ray velocity vectors have their ends moving along the universal section of this cone. This section is elliptic in acoustics and circular in optics. Kinematics of this precession depends in an essential way on the direction of the wave normal.

PACS numbers: 42.25.Bs, **62.20.**–x, 78.20.Fm

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201310j.1123

Bibliography — 28 references

Received 11 February 2013, revised 28 May 2013

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **183** (10) 1123–1140 (2013)

*Physics–Uspekhi* **56** (10) (2013)