

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Теория возвратов Пуанкаре и её приложение к задачам нелинейной физики

В.С. Анищенко, С.В. Астахов

Приводится обзор теоретических результатов по проблеме возврата Пуанкаре. Рассматривается применение этих результатов к решению задач нелинейной физики. Исследуется влияние шумов на характеристики последовательности времён возвратов, размеров области возврата, а также влияние негиперболичности. Демонстрируется взаимосвязь размерности последовательности времён возврата с показателями Ляпунова и энтропией Колмогорова. Излагаются методы расчёта локальной и глобальной размерностей аттрактора, размерности Афраймовича–Песина. Описываются методы диагностики эффектов стохастического резонанса и синхронизации хаоса на основе времён возврата Пуанкаре.

PACS number: 05.45. – a

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201310a.1009

Содержание

1. Введение (1009).
 2. Основные теоретические результаты по возвратам Пуанкаре (1010).
 3. Локальный подход. Теорема Каца при наличии внешнего шума (1011).
 4. Плотность распределения времён возврата. Влияние шумов (1013).
 5. Диагностика эффекта стохастического резонанса с помощью распределения времён возврата Пуанкаре (1015).
 6. Характеристики времён возврата и размерность аттрактора при локальном подходе (1018).
 7. Размерность последовательности времён возврата Афраймовича – Песина. Глобальный анализ (1020).
 8. Взаимосвязь размерности Афраймовича–Песина с показателями Ляпунова и энтропией системы (1021).
 9. Диагностика эффекта синхронизации хаотических автоколебаний с помощью размерности Афраймовича – Песина (1024).
 10. Заключение (1026).
- Список литературы (1027).

1. Введение

Одной из фундаментальных особенностей временной эволюции динамических систем является так называемый возврат Пуанкаре. Возвращаемость по Пуанкаре означает, что практически любая фазовая траектория, исходящая из некоторой точки x_0 фазового простран-

ства, со временем бесконечное число раз пройдёт сколь угодно близко от начального состояния. Такой тип движения в динамических системах Пуанкаре назвал устойчивыми по Пуассону [1, 2].

Со времени появления пионерских работ А. Пуанкаре проблема анализа статистических характеристик времён возврата остаётся в центре внимания современной науки. О фундаментальной важности этой проблемы свидетельствует также то, что на самом деле использование идеи возврата системы с течением времени в окрестность начального состояния выходит за строгие рамки теории — эта идея становится в некотором смысле одной из философских концепций современного естествознания.

К настоящему времени разработана фундаментальная математическая теория возвратов Пуанкаре, описывающая статистику времён возвратов как в окрестность заданного начального состояния [3] (так называемый локальный подход), так и в рассматриваемое множество фазового пространства системы [4] (глобальный подход). В работах [5–7] приводятся доказательства ряда теорем, обобщающих и усиливающих классические результаты Пуанкаре [1, 2]. В работах [8–10] теоретически доказано, что плотность распределения случайной последовательности времён возврата в окрестность начального состояния подчиняется экспоненциальному закону. В работах [11, 12] доказан важный результат о взаимосвязи среднего времени возвращения с вероятностью пребывания фазовой траектории в ε -окрестности заданного начального состояния (теорема Каца, локальный подход). Ряд важных результатов исследований статистики времён возвратов в стохастическом слое вблизи нелинейного резонанса в гамильтоновых системах представлен в известной работе [13]. Н.Г. Четаевым [14, 15] результат Пуанкаре [1, 2] обобщён для случая, в котором правые части обыкновенных дифференциальных уравнений динамической системы "суть периодические относительно времени t с одним общим им всем периодом" [15].

В.С. Анищенко, С.В. Астахов. Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, физический факультет, ул. Астраханская 83, 410012 Саратов, Российская Федерация
Тел. (845-2) 210-720. Факс (845-2) 210-721
E-mail: wadim@info.sgu.ru, astakhovsv@info.sgu.ru

Статья поступила 30 октября 2012 г.,
после доработки 15 марта 2013 г.

Относительно недавно появились работы, в которых рассматривается принципиально новый, так называемый глобальный, подход к проблеме возвратов Пуанкаре [4, 16–18]. В глобальном подходе анализируется среднее время возвратов Пуанкаре по всем элементам покрытия множества в целом. Среднее время возврата в этом случае зависит от совокупности начальных точек, задаваемых в каждом из элементов покрытия множества, и является функцией всего рассматриваемого множества. Одну из основных характеристик возвратов Пуанкаре при глобальном подходе представляет собой фрактальная размерность множества времён возврата, названная в работах [19, 20] размерностью Афраймовича – Песина (АП).

Отметим, что в последние годы успешно развивается направление исследований, связанное с методом рекуррентных диаграмм (recurrence plot), который, по сути, основывается на концепции возвратов Пуанкаре [21, 22].

Указанные выше работы в основном представляют собой строгие математические результаты, которые полагаются в основу многих экспериментальных исследований по численному моделированию статистики возвратов Пуанкаре для конкретных систем. Нас будут интересовать работы по анализу статистики возвратов Пуанкаре в малоразмерных дискретных диссипативных системах с хаотическим аттрактором (см., например, [23–26]). Хаотические системы характеризуются устойчивостью по Пуассону и вследствие наличия перемешивания являются эргодическими. Это даёт основание использовать математические результаты для анализа результатов вычислительного эксперимента. Однако изучаемые системы, как правило, не полностью удовлетворяют свойствам гиперболичности, могут быть необратимыми и характеризоваться сложностями, связанными с существованием вероятностной меры, поэтому экспериментальные исследования таких систем позволяют оценить степень применимости к ним строгих результатов.

В настоящем обзоре представлены результаты численного моделирования статистических характеристик возвратов Пуанкаре в дискретных отображениях на основе как локального, так и глобального подходов. Проведён анализ влияния источника внешнего шума на характеристики времён возврата, включая АП-размерность. Подтверждено соответствие АП-размерности положительным показателям Ляпунова (в отсутствие шума) и относительной энтропии Колмогорова (для зашумлённых систем). Обсуждаются прикладные аспекты теории возвратов Пуанкаре для решения задач диагностики стохастического резонанса, синхронизации и вычисления размерности хаотических аттракторов.

2. Основные теоретические результаты по возвратам Пуанкаре

Проблема возвратов Пуанкаре для эргодических систем с заданной вероятностной мерой, как обсуждалось во введении, полностью решена и описана в математической литературе. Фундаментальным математическим результатом является теорема Каца [11, 12], которая утверждает, что среднее время возврата $\langle \tau_r(\Delta) \rangle$ в некоторую область Δ , принадлежащую рассматриваемому множеству фазового пространства, обратно пропорционально вероятности посещения фазовой траекторией

этой области $P(\Delta)$:

$$\langle \tau_r(\Delta) \rangle = \frac{1}{P(\Delta)}. \quad (1)$$

Доказательство (1) было дано при условиях, что система характеризуется эргодической вероятностной мерой и является обратимой. При этом никаких условий на область возвратов Δ не накладывалось. Исследования показали, что требование обратимости системы не является обязательным. В работе [4] представлено доказательство теоремы Каца (1), которое не требует обратимости и использует лишь условие эргодичности.

В настоящем обзоре анализируется возвращаемость в область Δ , заданную в виде N -мерного куба (N — размерность фазового пространства системы) с ребром ε , в центре которого находится начальное состояние $\mathbf{x}_0$. Как будет обсуждаться далее, вероятность посещения траекторией ε -окрестности начального состояния для малых $\varepsilon \ll 1$ можно представить в виде

$$P(\varepsilon) \simeq p(\mathbf{x}_0) \varepsilon^{d_f}, \quad (2)$$

где $p(\mathbf{x}_0)$ — плотность распределения вероятностей, d_f — фрактальная размерность множества возможных состояний. Тогда, определяя область Δ в (1) как куб с ребром ε и $P(\varepsilon)$ в виде (2), мы получим иную форму записи теоремы Каца:

$$\langle \tau_r(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \rangle \simeq \frac{1}{p(\mathbf{x}_0)} \varepsilon^{-d_f}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3)$$

Выражение (3) в двойном логарифмическом масштабе является уравнением прямой с наклоном $k = -d_f$, что используется при проведении численных экспериментов и анализе результатов. Усреднение в (1) для эргодических систем осуществляется по ансамблю или по времени. Для динамических систем последовательность первых времён возврата имеет вид $\tau_{rk} = t_{k+1} - t_k$ ($k = 1, 2, \dots, k_{\max}$) и среднее время

$$\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{k_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} (t_{k+1} - t_k), \quad k_{\max} \gg 1, \quad (4)$$

где индекс k отвечает дискретному времени попадания траектории в ε -окрестность.

Важным математическим результатом является доказательство того, что плотность распределения случайного процесса возвратов для эргодических систем, обладающих свойством перемешивания, подчиняется экспоненциальному закону [8–10]:

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp \left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle} \right), \quad \tau_r \geq \tau_r^*, \quad (5)$$

где τ_r^* — некоторое значение τ_r . Закон (5), описывающий распределение случайной последовательности возвратов в ε -окрестность некоторой точки, справедлив в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех $\tau_r \geq \tau_r^*$.

Отметим, что если для доказательства теоремы Каца (1) достаточно существования эргодической меры, то при доказательстве (5) вводится более "сильное" требование — наличие перемешивания. Из перемешивания следует эргодичность, но обратное не верно. Например, движе-

ние на двумерном торе при иррациональном числе вращения эргодично, но перемешивание отсутствует. В настоящем обзоре анализируются хаотические системы, которые по определению являются перемешивающими и, следовательно, эргодическими.

Изложенное выше относится к проблеме возвратов в заданную окрестность ε некоторой точки исследуемого множества и, следовательно, к описанию локальных свойств возвратов Пуанкаре. Известен иной подход к проблеме возвратов Пуанкаре, основанный на разбиении всего множества на ε -элементы с последующим усреднением минимальных возвратов по разбиениям. Ввиду того что усреднение осуществляется по всему множеству, такой подход можно называть глобальным. Математическая теория глобального подхода представлена в работах [4, 16–18].

Суть глобального подхода состоит в следующем. Рассматриваемое множество фазовых траекторий динамической системы (например, аттрактор системы) покрывается кубами (или шарами) размером $\varepsilon \ll 1$. Покрытие должно целиком охватывать рассматриваемое множество. Для каждого элемента покрытия ε_i ($i = 1, 2, \dots, m$) определяется минимальное время первого возврата фазовой траектории в ε_i -окрестность $\tau_{\inf}(\varepsilon_i)$. Затем находится среднее минимальное время первого возврата по всему множеству элементов покрытия ε_i

$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{\inf}(\varepsilon_i). \quad (6)$$

Установлено [16], что

$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle \sim \phi^{-1}(\varepsilon^{d/\alpha_c}), \quad (7)$$

где α_c — размерность времён возврата, введённая Афраймовичем и Песиним [16–18], d — размерность рассматриваемого множества. Функция ϕ в (7) может быть задана в одном из следующих видов:

$$\phi(t) \sim \frac{1}{t}, \quad \phi(t) \sim \exp(-t), \quad \phi(t) \sim \exp(-t^2), \quad \dots, \quad (8)$$

что зависит от топологической энтропии системы h_t [27], а также от мультифрактальности исследуемого множества, если она имеет место. Если топологическая энтропия $h_t = 0$, то $\phi(t) \sim 1/t$ и из (7) следует

$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{-d/\alpha_c}. \quad (9)$$

Если $h_t > 0$, то $\phi(t)$ обычно задаётся в виде экспоненты, $\phi(t) \sim \exp(-t)$. Тогда (7) можно представить в виде [28]

$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_c} \ln \varepsilon. \quad (10)$$

Как известно [29], топологическая энтропия h_t является оценкой сверху энтропии Колмогорова–Синяя (КС), которая в свою очередь определяется положительными показателями Ляпунова λ^+ . Отсюда, в частности, следует, что для хаотических динамических систем с экспоненциальным разбеганием траекторий топологическая энтропия положительна ($h_t > 0$) и справедливо соотношение (10). Выражение (9) для хаотических систем справедливо только для критических значений параметра, при которых КС-энтропия (и соответственно h_t) обращается в нуль.

Таковы в кратком изложении математические результаты по проблеме возвратов Пуанкаре, используемые в настоящем обзоре. В литературе по нелинейной динамике рассматриваются, помимо теоретических результатов, многочисленные проблемы, важные с прикладной точки зрения. Среди них отметим использование времён возврата для решения задачи управления хаосом (так называемая задача нацеливания [26]), использование АП-размерности для диагностики синхронизации взаимодействующих хаотических осцилляторов [28, 30], а также для диагностики эффекта стохастического резонанса при индуцированных шумом переходах в бистабильных системах [31]. Поскольку строгие результаты получены только для гиперболических систем с заданной вероятностной мерой, важной задачей является анализ возвратов Пуанкаре в квазигиперболических системах.

Отметим важную деталь. При численном моделировании возвратов Пуанкаре применяются алгоритмы и программы, которые не требуют непосредственного знания вероятностной меры. В связи с этим при численном решении задач, как правило, не проводится сопоставления результатов анализа с видом и эволюцией вероятностной меры при изменении параметров системы и добавлении внешнего шума. Однако такое сопоставление совершенно необходимо, поскольку, как следует из математической теории, именно изменения плотности распределения $p(x)$ должны определять экспериментальные результаты.

3. Локальный подход.

Теорема Каца при наличии внешнего шума

В качестве исследуемой системы рассмотрим кубическое отображение с хаотическим квазиаттрактором [32]

$$x_{n+1} = (\alpha x_n - x_n^3) \exp\left(-\frac{x_n^2}{B}\right) + \sqrt{2D} \xi_n, \quad (11)$$

где α — управляющий параметр, $B = 10$ — коэффициент в экспоненциальном сомножителе, введённом для ограничения степени роста переменной x_n , D — интенсивность шума, ξ_n — источник ограниченного белого шума.

Отображение (11), которое является одной из основных моделей бистабильной системы, демонстрирующей эффект стохастического резонанса [33], позволяет численно построить плотность распределения $p(x)$ и провести детальное сравнение характеристик возвратов Пуанкаре с данными теории. Важно подчеркнуть, что отображение (11), являясь системой с квазиаттрактором [32], не относится к классу гиперболических систем [34]. Поэтому анализ возвратов Пуанкаре в системе (11) позволит ответить на вопрос о возможности применения результатов теории, построенной для гиперболических систем, к негиперболическим системам.

Бистабильность в системе (11) даёт возможность реализации кризиса двух симметричных аттракторов, который имеет место при прохождении параметром α некоторого критического значения α^* [32, 35]. Кризис может быть индуцирован шумом с некоторой интенсивностью D при $\alpha < \alpha^*$. Учитывая важность этого эффекта при исследованиях стохастического резонанса, проанализируем характеристики возвратов Пуанкаре в режиме индуцированного шумом кризиса аттракторов [35].

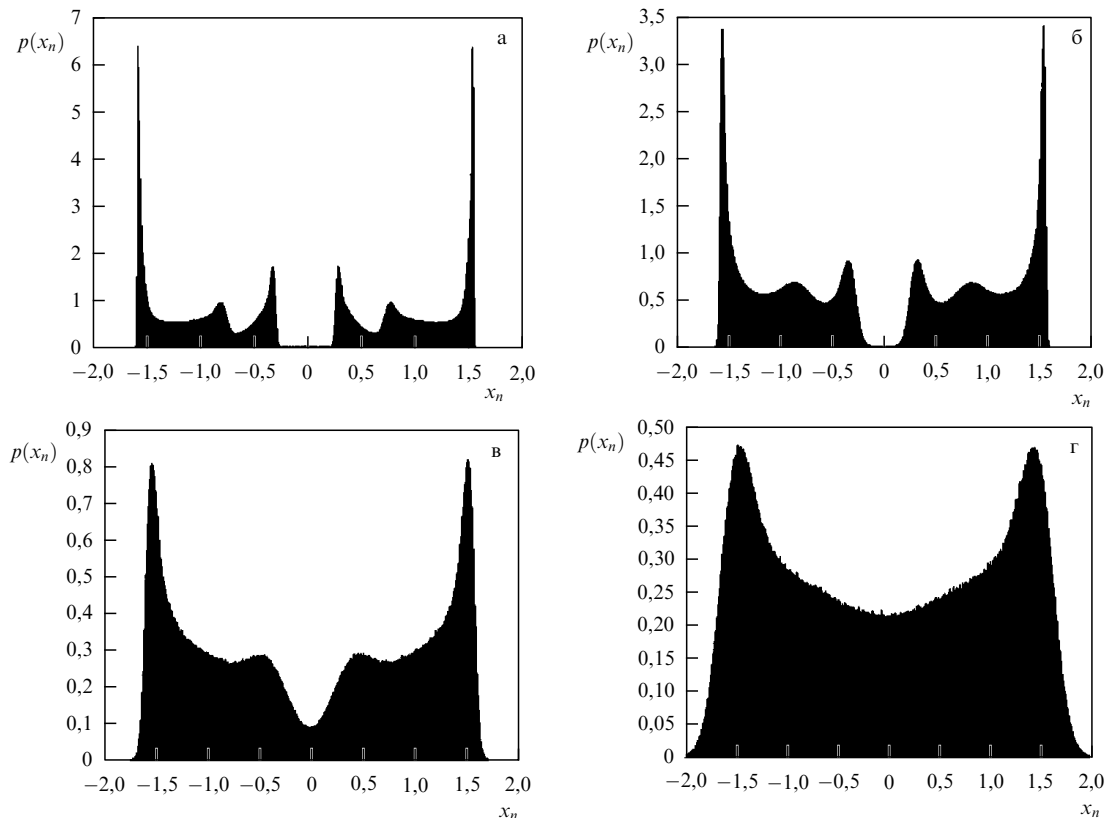


Рис. 1. Плотность распределения $p(x_n)$ аттракторов системы (11) для значений интенсивности шума (а) $D = 10^{-5}$, (б) $D = 10^{-4}$, (в) $D = 10^{-3}$, (г) $D = 10^{-2}$. На рисунках а, б — два симметричных аттрактора, на рис. в, г — объединённый аттрактор.

Как видно из рис. 1, на котором иллюстрируется эволюция плотности распределения $p(x, D)$ в системе (11) при $\alpha = 2,7$, в этой системе при $D < 10^{-4}$ реализуются два симметричных ($x_n \rightarrow -x_n$) аттрактора. При $D = 1,1 \times 10^{-4}$ аттракторы объединяются в один. Из рисунка видно, что с возрастанием интенсивности D функция $p(x_n)$ заметно изменяется. Это должно приводить к соответствующим изменениям количественных характеристик времени возврата. Отметим, что в численных экспериментах плотность $p(x_n)$ определялась приближённо:

$$p(x_n) \approx \frac{\Delta P(x_n \pm \Delta x_n/2)}{\Delta x_n}, \quad (12)$$

где ΔP — вероятность попадания траектории в окрестность точки x_n , $\Delta x_n \leq 10^{-3}$ — величина окрестности. Данные расчёта $p(x_n)$ для всей области определения x нормировались, чтобы сумма всех вероятностей равнялась единице.

Выберем пять точек ($i = 1, \dots, 5$) аттрактора системы (11), которым отвечают разные плотности вероятностей $p(x_0^i)$: $x_0^1 = 0,37$, $x_0^2 = 0,65$, $x_0^3 = 0,95$, $x_0^4 = 1,25$ и $x_0^5 = 1,46$. Рассчитаем средние времена возврата $\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle$ в ε -окрестности этих точек при $\varepsilon = 0,1$ в зависимости от интенсивности шума D . Из результатов расчётов, приведённых на рис. 2, следует: 1) прохождение кризисного значения с увеличением $D > 10^{-4}$ приводит к резкому возрастанию среднего времени возврата для всех пяти точек; 2) с возрастанием интенсивности шума среднее время возврата ведёт себя принципиально нелинейным образом — наблюдается как уменьшение, так и увеличение времени возврата в зависимости от интенсивности

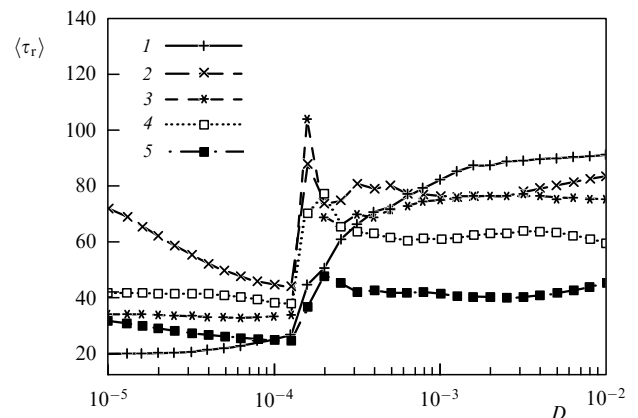


Рис. 2. Сравнение зависимостей средних времён возврата $\langle \tau_r \rangle$ от интенсивности шума для пяти выбранных точек аттрактора.

шума. Из сравнения рис. 1 и 2 ясно видно, что возрастание $\langle \tau_r(D) \rangle$ обусловлено уменьшением $P(x_n)$, а убывание $\langle \tau_r(D) \rangle$ — увеличением $P(x_n)$, в полном соответствии с (1).

Теперь выясним характер зависимости $\tau_r(\varepsilon)$ и сопоставим результаты расчёта с теоретическими. С этой целью рассмотрим фиксированную точку $x_0^3 = 0,65$. Будем рассчитывать средние времена возврата в ε -окрестность x_0 для ε от 10^{-2} до 10^{-1} . Результаты численного эксперимента представлены на рис. 3.

Посредством аппроксимации методом наименьших квадратов установлено, что зависимости, приведённые на рис. 3 в двойном логарифмическом масштабе, соот-

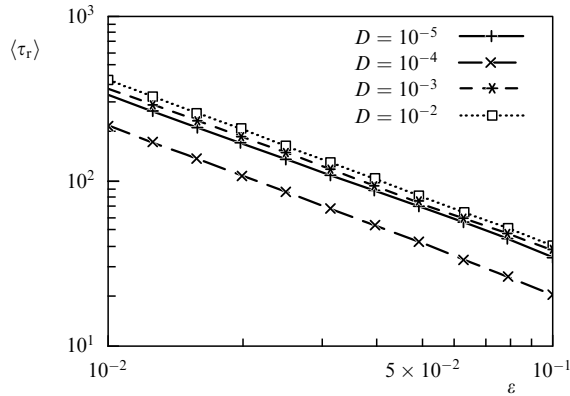


Рис. 3. Зависимость среднего времени возврата $\langle \tau_r \rangle$ от ε для пяти выбранных точек на аттракторе (по осям логарифмический масштаб).

ветствуют прямым

$$\lg \langle \tau_r(\varepsilon) \rangle = \lg C(D) - k \lg \varepsilon, \quad (13)$$

причём для всех прямых на рис. 3 $k = 1,00 \pm 0,02$, а от интенсивности шума зависят только коэффициенты C :

$$C_1 = 3,756 \ (D = 10^{-5}), \quad C_2 = 1,958 \ (D = 10^{-4}), \quad (14)$$

$$C_3 = 3,900 \ (D = 10^{-3}), \quad C_4 = 4,012 \ (D = 10^{-2}).$$

Коэффициенты $C(D)$ (14) и коэффициент $k = 1,00 \pm 0,02$ получены непосредственно из аппроксимации данных рис. 3. Если теорема Каца (1) верна и в случае, когда в системе (11) есть источник шума, то коэффициенты $C(D)$ (14) должны соответствовать величинам $p^{-1}(x_0)$, которые задаются представленными на рис. 1 распределениями, рассчитанными для значений D в интервале $10^{-5} - 10^{-2}$. Расчёты показали, что значения коэффициентов, полученные с использованием плотностей вероятности $p(x_0, D)$, с точностью $\pm 5\%$ согласуются с данными аппроксимации (14).

Выражение (1) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle = C\varepsilon^{-1}, \quad C = \frac{1}{p(x_0, D)}. \quad (15)$$

Таким образом, приведённые на рис. 3 экспериментальные результаты, которые аппроксимируются выражениями (13) и (14), полностью соответствуют (1) как при отсутствии, так и при наличии аддитивного шума в негиперболической системе (11).

Особенностью локального подхода является то, что времена возврата зависят от окрестности конкретной точки на аттракторе $\langle \tau_r(x_0) \rangle$. Этот факт очень важен в ряде прикладных задач, таких как управление хаосом (см., например, [26]). Для иллюстрации на рис. 4 приведены результаты расчётов $\langle \tau_r \rangle$ в зависимости от точки x на аттракторе системы (11). Выберем режим объединённого аттрактора ($\alpha = 2,84$) в отсутствие шума. Времена возврата $\langle \tau_r \rangle$ для $0 \leq x_n \leq 1,7$ (рис. 4б) полностью соответствуют изменениям $p(x_n)$ (рис. 4а), и они могут быть рассчитаны с использованием теоремы Каца. При добавлении шума соответствие теореме Каца сохраняется.

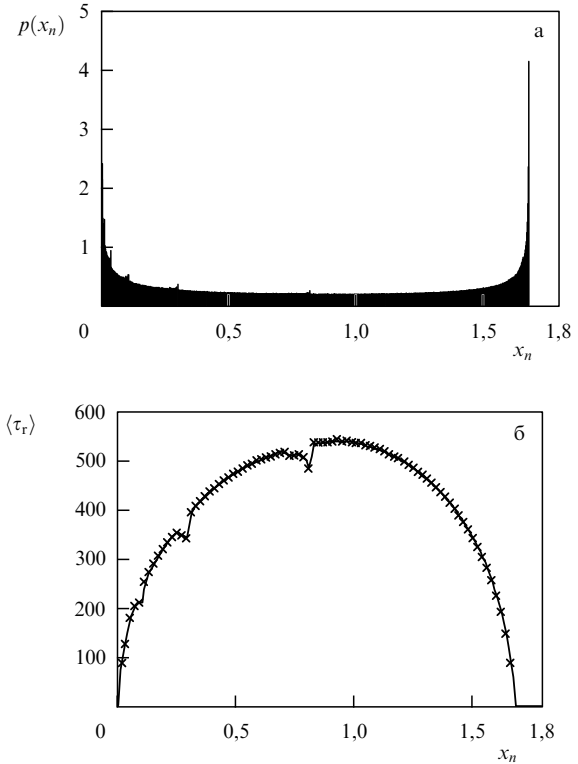


Рис. 4. (а) Плотность распределения $p(x_n)$ на аттракторе системы (11) для $\alpha = 2,84$ и $D = 0$. (б) Среднее время возврата в ε -окрестности точки x_n для $\varepsilon = 0,01$.

Этого результата, вообще говоря, можно было ожидать. Если полагать, что зашумлённой системе (11) отвечает стационарный случайный процесс, то мы имеем дело с эквивалентом эргодической системы, а в этом случае теорема Каца справедлива. Таким образом, описанные выше результаты являются экспериментальным подтверждением справедливости для зашумлённых систем фундаментальной теоремы Каца.

4. Плотность распределения времён возврата. Влияние шумов

Как обсуждалось в разделе 2, времена первого возврата Пуанкаре τ_r в заданную область хаотического аттрактора $\Delta = x_0 \pm \varepsilon/2$ в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ удовлетворяют экспоненциальному закону (5) для $\tau_r \geq \tau_r^*$, где τ_r^* — некоторое значение времени возврата [8–10, 25, 36]. Представим (5) в виде

$$p(\tau_r) = C \exp(-\gamma \tau_r). \quad (16)$$

Постараемся в численном эксперименте проверить соответствие (16) закону (5) с точки зрения значений коэффициентов C и γ в случаях как отсутствия, так и наличия внешнего шума [37]. В отсутствие шума коэффициенты C и γ зависят от выбора x_0 и ε . В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $P(\varepsilon)$ также стремится к нулю и справедливо равенство $\gamma = P(\varepsilon) = 1/\langle \tau_r \rangle$, где $\langle \tau_r \rangle$ — среднее значение времён возврата [25, 36]. В численных экспериментах при малых, но конечных $\varepsilon \ll 1$ это равенство может нарушаться, что зависит от конкретных значений ε и исследуемой системы. Экспериментально коэффициент γ можно определить, рассмотрев (16) в логарифмическом

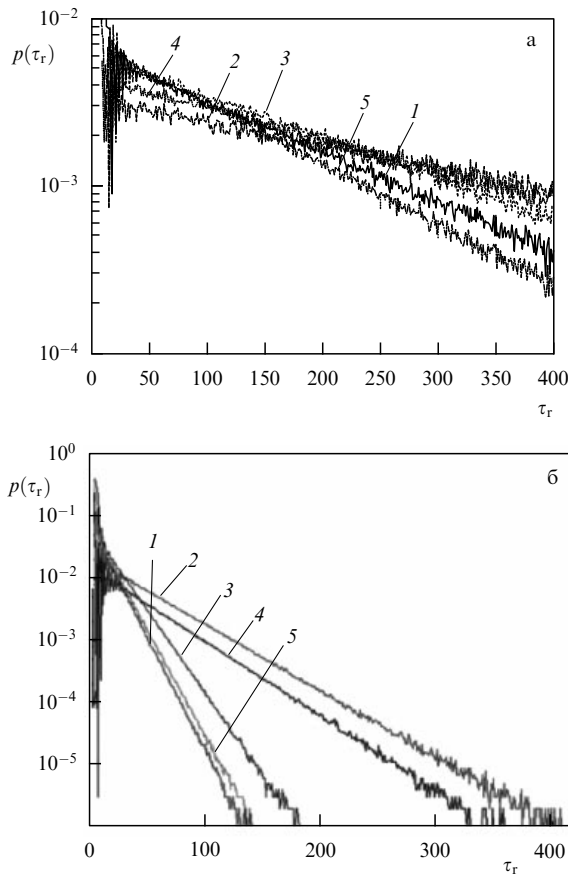


Рис. 5. Плотность распределения времён возврата Пуанкаре для пяти точек аттрактора, рассчитанная для $\alpha = 2,7$, $D = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$ в системе (11), в отсутствие шума ($D = 0$) (а) и под действием шума интенсивностью $D = 10^{-5}$ (б).

масштабе. Наклон линейной зависимости

$$\ln p(\tau_r) = \ln C - \gamma \tau_r \quad (17)$$

даёт нам значения γ , а её смещение относительно нуля координат — значение коэффициента C в (16).

Рассмотрим результаты расчётов $p(\tau_r)$ для отображения (11). Выберем те же, что и в разделе 3, пять точек аттрактора системы (11) x_0^i и рассчитаем соответствующие плотности распределения $p_i(\tau_r)$ для окрестностей $\Delta_i = x_0^i \pm \varepsilon/2$ этих точек, положив $\varepsilon = 10^{-2}$. Вначале проведём расчёты в отсутствие шума ($D = 0$), задав значение параметра $\alpha = 2,7$ (до кризиса аттракторов). Результаты представлены на рис. 5а. При $\tau > 25$ все зависимости можно аппроксимировать прямыми и рассчитать их наклоны γ_i и коэффициенты C_i . Расчёты показали, что коэффициенты γ_i достаточно хорошо соответствуют вероятностям $P(\Delta_i)$ для $\varepsilon = 10^{-2}$. Сравнение результатов представлено в таблице, в двух последних столбцах которой приведены значения отношений $|P(\Delta_i) - \gamma_i|/P(\Delta_i)$ и $|\gamma_i - C_i|/\gamma_i$, характеризующих ошибку.

Как видно из таблицы, вычисленные вероятности $P(\Delta_i)$ и значения коэффициентов γ_i и C_i , полученные аппроксимацией (16) результатов, представленных на рис. 5а, приблизительно равняются друг другу (с ошибкой менее 15%). Специальные расчёты показали, что с уменьшением интервала ε эта ошибка уменьшается. Можно полагать, что в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ будет выполняться равенство $\gamma = C = P(\Delta)$. Тогда выражение (16) можно

Таблица. Сравнение результатов расчёта $P(\Delta_i)$ с данными аппроксимации (17) для выбранных точек аттрактора x_0^i ($\delta_{P,\gamma} = |P(\Delta_i) - \gamma_i|/P(\Delta_i)$, $\delta_{\gamma,C} = |\gamma_i - C_i|/\gamma_i$)

i	x_0^i	$P(\Delta_i)$	γ_i	C_i	$\delta_{P,\gamma}, \%$	$\delta_{\gamma,C}, \%$
1	0,37	$7,468 \times 10^{-3}$	$6,872 \times 10^{-3}$	$6,26 \times 10^{-3}$	7,9	8,9
2	0,65	$3,071 \times 10^{-3}$	$3,174 \times 10^{-3}$	$3,24 \times 10^{-3}$	3,3	2,0
3	0,95	$5,224 \times 10^{-3}$	$5,532 \times 10^{-3}$	$5,87 \times 10^{-3}$	5,8	6,1
4	1,25	$4,091 \times 10^{-3}$	$4,241 \times 10^{-3}$	$4,40 \times 10^{-3}$	3,6	3,7
5	1,46	$9,714 \times 10^{-3}$	$8,361 \times 10^{-3}$	$7,13 \times 10^{-3}$	13,9	14,7

представить в виде

$$p(\tau_r) = \gamma \exp(-\gamma \tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp\left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}\right), \quad (18)$$

что полностью совпадает с законом (5).

Рассмотрим влияние шума на распределение времён возврата $p(\tau_r)$. Как видно из рис. 5б, плотность $p(\tau_r)$ для $\tau_r \geq 20$ качественно повторяет зависимости в отсутствие шума, приведённые на рис. 5а. Различие результатов состоит в том, что при действии шума изменился наклон прямых (коэффициенты γ_i). Это позволяет сделать вывод: при наличии шума экспоненциальный закон (5), (16)–(18) остаётся верным. Необходимо лишь учитывать тот факт, что коэффициент γ будет зависеть от интенсивности шума D и выбора окрестности ε заданной точки x_0^i ($\gamma = \gamma(D, x_0^i, \varepsilon)$).

Детальные расчёты, проведённые для системы (11) при $\alpha = 2,7$ и уровне шума $D = 10^{-5} - 10^{-4}$ (до кризиса аттракторов), показали, что $p(\tau_r)$ подчиняется закону (5). Коэффициенты γ и C (16) при наличии шума близки к значениям вероятности $P(\varepsilon)$. Так, например, для $\varepsilon = 10^{-5}$ ошибка составила менее 5%. Воздействие шума вызывает изменение вероятностной меры, и, как следствие, величина $P(\varepsilon)$ изменяется, в отличие от $P(\varepsilon)$ в невозмущённой системе.

С возрастанием интенсивности шума вплоть до величин $D = 1,1 \times 10^{-4}$, при которой происходит кризис аттракторов, результаты качественно меняются. Кризис аттракторов переводит динамику отображения (11) в режим перемежаемости хаос–хаос. Траектория системы $\{x_n\}$ определённое время проводит в области одного из двух симметричных аттракторов и совершает под действием шума случайные переключения с одного аттрактора на другой [32]. В системе появляется два характерных времени: локальное и глобальное. Наличие двух характерных времён объясняет характер зависимостей $P(\tau_r)$ (рис. 6), на которых чётко видны области как локальной ($\tau_r < 100$), так и глобальной ($\tau_r > 100$) динамики¹. Каждую из этих зависимостей можно аппроксимировать двумя прямыми и определить соответствующие коэффициенты $\gamma_i^{1,2}(x_0^i)$. Результаты расчётов показали, что для $\varepsilon = 0,1$ в окрестности всех пяти точек x_0^i выполняется неравенство

$$\gamma^1 > P(\varepsilon) > \gamma^2. \quad (19)$$

Например, для $x_0^4 = 1,25$ и $\varepsilon = 0,1$ имеем $\gamma^1 = 0,457$, $\gamma^2 = 0,004$ и $P(\varepsilon) = 0,035$. Несовпадение вида зависи-

¹ Отметим результаты работы [13], в которой был обнаружен качественно похожий эффект при анализе возвратов в стохастическом слое вблизи нелинейного резонанса.

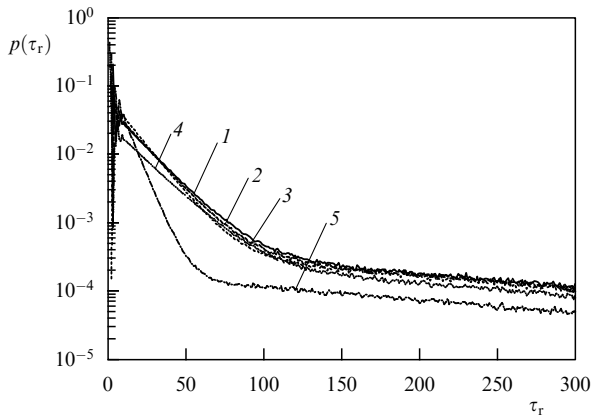


Рис. 6. Распределения $p(\tau_r)$ для $D = 10^{-3}$ (после кризиса аттракторов), рассчитанные при значениях $\alpha = 2,7$ и $\varepsilon = 0,1$ для указанных пяти точек аттрактора.

мостей $p(\tau_r)$ на рис. 6 закономерности (18) обусловлено конечностью величины $\varepsilon = 10^{-1}$ [37].

Обратимся теперь к рис. 7, на котором представлены результаты расчётов $p(\tau_r)$ для точки $x_0^4 = 1,25$ ($i = 4$) и различных значений ε . Как видно из рисунка, с уменьшением ε влияние перемежаемости заметно уменьшается и при $\varepsilon = 10^{-3}$ практически исчезает. При этом γ^1 и γ^2 также уменьшаются, стремясь по величине к $P(\varepsilon)$. Например, для $\varepsilon = 10^{-3}$ получим $\gamma^1 = 0,0043$, $\gamma^2 = 0,00033$ и $P(\varepsilon) = 0,00035$. Таким образом, мы полагаем, что в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ практически будет выполняться равенство $\gamma^1 = \gamma^2 = P(\varepsilon)$. Однако отметим, что при этом $P(\varepsilon) \rightarrow 0$ и времена возврата резко возрастают, стремясь к бесконечности. Можно полагать, что экспоненциальный закон (5) при условии $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется как для зашумлённых, так и для чисто динамических систем.

Представленные выше результаты позволяют сделать важный вывод. При малых, но конечных значениях ε могут иметь место отклонения от закона распределения $p(\tau_r)$ (5), которые связаны с определёнными физическими свойствами системы, что может быть использовано при решении прикладных задач.

5. Диагностика эффекта стохастического резонанса с помощью распределения времён возврата Пуанкаре

Как показано в разделе 4, плотность распределения времён возврата подчиняется экспоненциальному

закону (5) при бесконечно малых $\varepsilon \rightarrow 0$. При малых, но конечных ε этот закон может нарушаться, о чём свидетельствуют результаты, представленные на рис. 7, а также данные работ [24, 35, 37]. Плотность распределения $p(\tau_r)$, рассчитанная для конечных ε , может отражать некоторые важные особенности динамики системы. Например, зависимость $p(\tau_r)$ при $\varepsilon = 10^{-1}$ (рис. 7а) чётко отражает перемежающийся характер динамики системы (11), реализующийся после кризиса объединения аттракторов. Покажем, что именно эти свойства $p(\tau_r)$ при $0 < \varepsilon < 1$ можно использовать для диагностики режима стохастического резонанса (СР).

Классическое явление СР описано в работах [33, 38] на примере передемпфированного бистабильного осциллятора Крамерса:

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos(\Omega t) + \sqrt{2D} \xi(t), \quad (20)$$

где A , Ω — амплитуда и частота слабого внешнего воздействия, D — интенсивность δ -коррелированного шума $\xi(t)$.

Было установлено и впоследствии многократно подтверждено экспериментально (см. [39] и приведённые там ссылки), что в режиме индуцированных шумом переключений интенсивность периодической компоненты спектра выходного сигнала $x(t)$ достигает максимума при оптимальном уровне шума $D = D^*$. Показано, что оптимальному уровню шума D^* в режиме СР отвечает частота переключений Крамерса [40], близкая к частоте внешнего сигнала Ω в (20). Зависимость отношения сигнал/шум (Signal to Noise Ratio — SNR) от интенсивности шума D по виду напоминает резонансную кривую с максимумом при $D = D^*$, что и послужило основанием назвать эффект стохастическим резонансом.

Рассматриваемая в настоящем обзоре дискретная система (11) является одной из простейших систем, в которой эффект СР реализуется как за счёт индуцированных шумом переключений в классическом случае, так и за счёт вариации управляющего параметра при отсутствии шума (в условиях кризиса аттракторов) [32, 39, 41]. Для реализации эффекта СР введём в систему (11) аддитивное периодическое воздействие:

$$x_{n+1} = (ax_n - x_n^3) \exp\left(-\frac{x_n^2}{b}\right) + A \sin(\Omega n) + \sqrt{2D} \xi_n. \quad (21)$$

Система (21) представляет собой одномерное кубическое отображение, возбуждаемое малым ($A \ll 1$) периодическим сигналом и δ -коррелированным источником шума

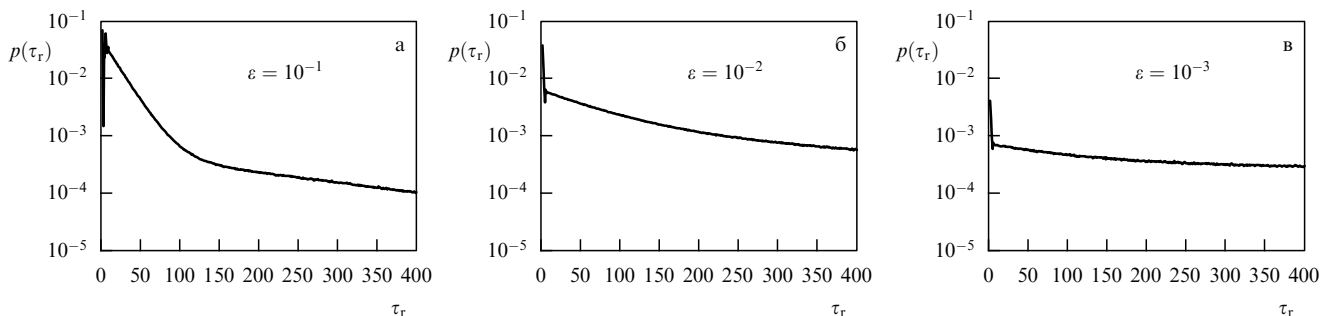


Рис. 7. Эволюция плотности распределения $p(\tau_r)$ с уменьшением размера окрестности ε для точки аттрактора $x_0^4 = 1,25$ при $\alpha = 2,7$ и $D = 10^{-3}$.

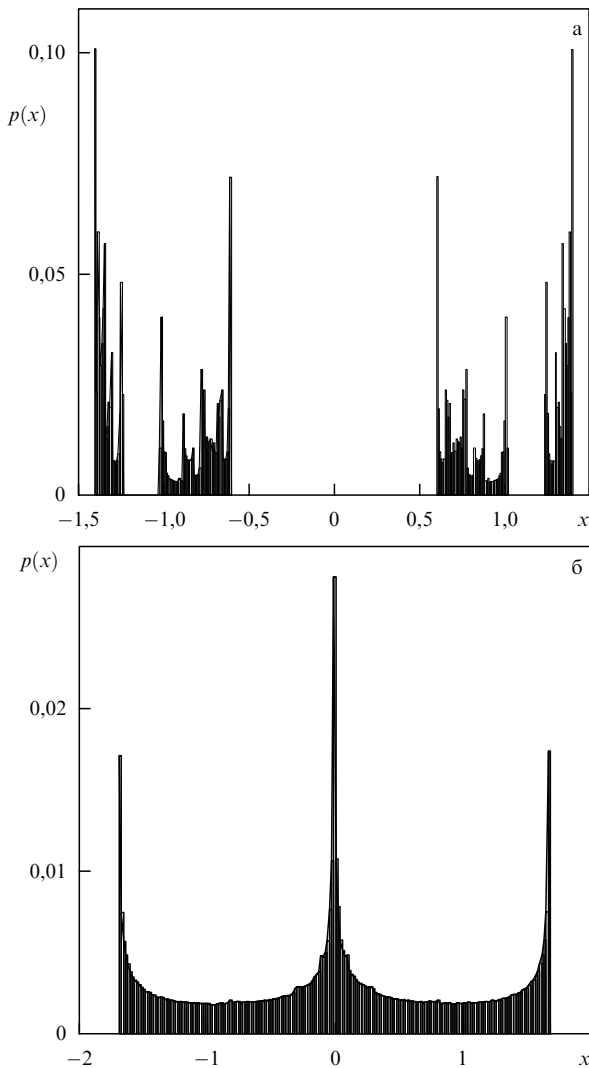


Рис. 8. Плотность распределения вероятности $p(x)$ траекторий на аттракторах отображения (21) с $A = D = 0$, $b = 10$ для значений параметра $a = 2,5$ (а) и $a = 2,84$ (б).

ξ_n интенсивностью D . Экспоненциальный множитель в (21) вводится, как и ранее в (11), с целью избежать ухода траекторий в область больших значений x_n .

Рассмотрим динамику системы (21) в отсутствие возмущений ($A = D = 0$). При значениях параметра $a < a^* = 2,839$ в системе сосуществуют два симметричных относительно седлового состояния равновесия $x_n^0 = 0$ хаотических аттрактора. При $a = a^*$ происходит кризис объединения аттракторов и возникает эффект перемежаемости типа хаос–хаос. Стационарные плотности распределения вероятностей $p(x)$ до кризиса представлены на рис. 8а, после кризиса — на рис. 8б.

Эффект стохастического резонанса в системе (21) детально описан и исследован в работах [38, 39, 41]. Отметим, что диагностика эффекта осуществлялась классическим методом фильтрации (методом двух состояний) с использованием модели телеграфного сигнала. Как видно из рис. 9а, эффект СР, индуцированный шумом (кривая 1), возникает при оптимальной интенсивности шума $D^* \approx 0,01$. В отсутствие шума ($D = 0$) эффект СР наблюдается (рис. 9б) при значении управляющего параметра $a \approx 2,84$ (кривая 1) [41].

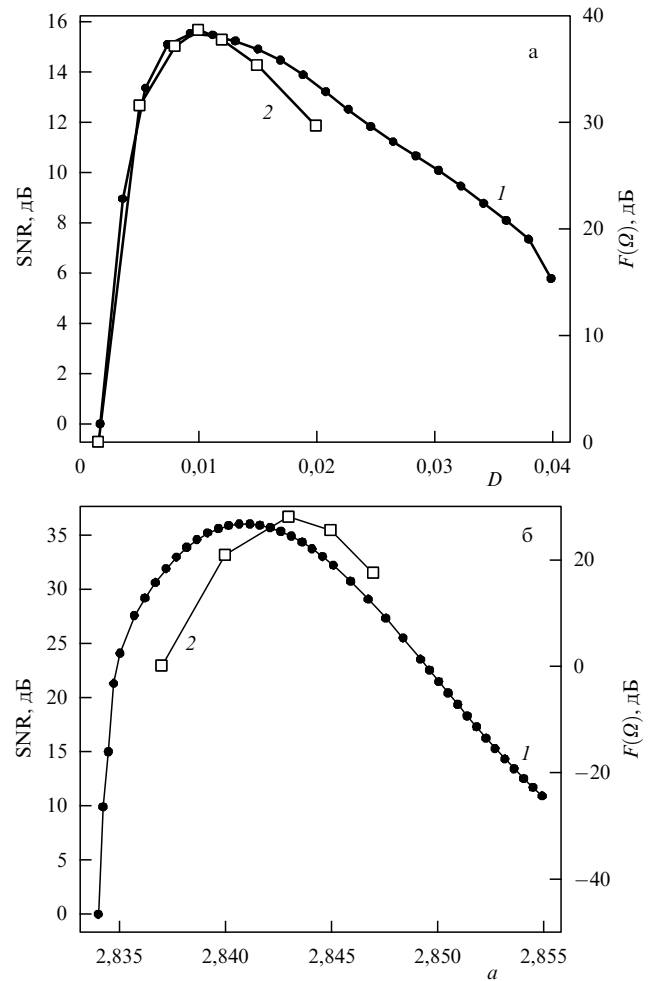


Рис. 9. SNR (кривые 1) и поведение максимума $F_m(\omega) = F(\Omega)$ спектральной функции $F(\omega)$ (кривые 2) в зависимости от (а) интенсивности шума D при $a = 2,5$, $A = 0,05$, $\Omega = 0,1$ и (б) от управляющего параметра a при $D = 0$, $A = 0,005$, $\Omega = 0,1$ [41].

Рассмотрим иной способ диагностики эффекта СР, используя данные расчёта плотности распределения времён возврата Пуанкаре [31]. Проведём расчёты $p(\tau_r)$ для некоторой области $x_0 \pm \varepsilon/2$, взяв $x_0 = -1,1$ и изменяя ε .

На рисунке 10а представлены результаты вычислений плотности $p(\tau_r)$ для размеров окрестности $\varepsilon = 10^{-1}$ (кривая 1) и $\varepsilon = 10^{-4}$ (кривая 2). Влияние конечности величины ε приводит к отличию закона распределения $p(\tau_r)$ от экспоненциального закона (5), что особенно наглядно иллюстрирует кривая 1 на рис. 10а. Одно из отличий заключается в том, что на графике $p(\tau_r)$ чётко выделяются два интервала времени ($\tau_r \leq 160$ и $\tau_r > 160$), в которых скорости убывания функции $p(\tau_r)$ (как обсуждалось выше) принципиально различны. Другим отличием является наличие периодической модуляции функции $p(\tau_r)$ в области $\tau_r > 160$ с периодом $T \approx 2\pi/\Omega = 62,8$. Как отмечалось ранее, закон распределения $p(\tau_r)$ при конечных значениях ε несёт информацию о свойствах динамики исследуемой системы. В нашем случае появление двух интервалов времени с различным наклоном зависимости $p(\tau_r)$ есть отражение перемежаемости в системе [35, 37]. Наличие периодической модуляции обусловлено неавтономностью системы (21). Можно предполагать, что в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ закон распределения

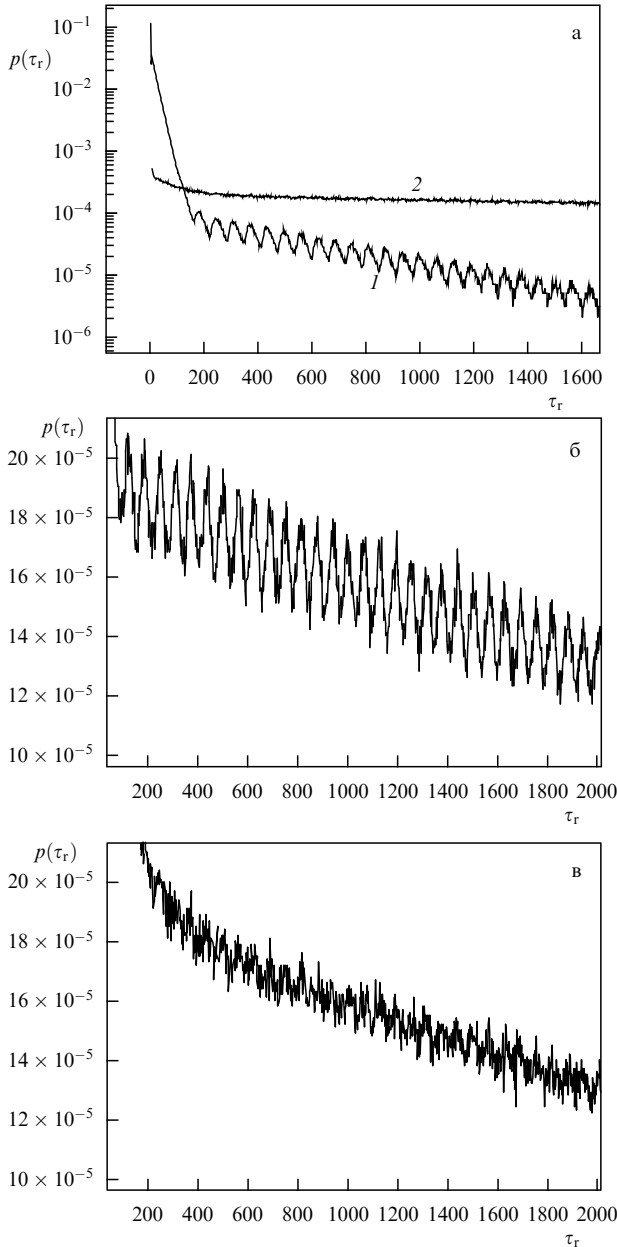


Рис. 10. Плотности распределения вероятностей возвратов Пуанкаре $p(\tau_r)$: (а) для $\varepsilon = 10^{-1}$ (кривая 1) и $\varepsilon = 10^{-4}$ (кривая 2) при $a = 2,837$; (б) для резонансного случая $a = 2,843$ и (в) нерезонансного случая $a = 2,837$. На рисунках а и б $\Omega = 0,1$, $b = 10$, $A = 0,005$, $D = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

$p(\tau_r)$ в среднем будет экспоненциальным. В определённой степени об этом свидетельствует кривая 2 на рис. 10а, полученная при $\varepsilon = 10^{-4}$. Отметим, что периодическая модуляция функции $p(\tau_r)$ остаётся и в этом случае, хотя амплитуда модуляции существенно уменьшается.

Воспользуемся тем обстоятельством, что функция $p(\tau_r)$ оказывается модулированной с частотой, близкой к частоте внешнего сигнала Ω в (21). Следовательно, в спектре Фурье функции $p(\tau_r)$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty p(\tau_r) \exp(-i\omega\tau_r) d\tau_r \quad (22)$$

должен иметься пик на частоте $\omega = \Omega$. Расчёты подтвердили этот факт. Естественнo предположить, что в

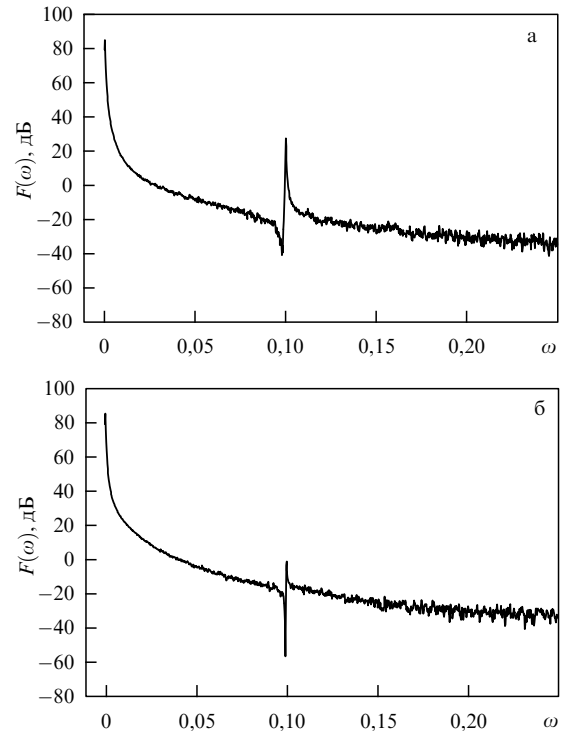


Рис. 11. Спектры амплитуд функции $p(\tau_r)$ для плотностей распределения $p(\tau_r)$, соответствующих представленным на рис. 10б, при (а) $a = 2,843$, (б) $a = 2,837$. Параметры $b = 10$, $A = 0,005$, $\Omega = 0,1$, $D = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

режиме СР величина пика будет максимальной, что также было подтверждено вычислениями [31].

Для расчётов спектра $F(\omega)$ функции $p(\tau_r)$ мы выбрали значения $10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-3}$. В этом случае распределение $p(\tau_r)$ оказывается определённым на достаточно большом интервале времени, $0 < \tau_r \leq 80000$, что позволяет более надёжно вычислить $F(\omega)$. Для иллюстрации приведём данные, которые отвечают режиму СР в системе (21) в отсутствие шума ($a = 2,843$, $D = 0$). На рисунке 10б приведён увеличенный фрагмент рис. 10а. Результаты расчёта спектра $F(\omega)$ для этого случая представлены на рис. 11а. Действительно, практически периодической модуляции $p(\tau_r)$ отвечает ярко выраженный пик на частоте Ω в спектре $F(\omega)$. Если сместиться по параметру a от оптимального режима, выбрав $a = 2,837$, то наблюдается следующее: плотность распределения $p(\tau_r)$ оказывается модулированной более сложным образом (рис. 10в) и, как следствие, в спектре $F(\omega)$ пик на частоте Ω заметно уменьшается (рис. 11б). Таким образом, если провести описанные расчёты для системы (21), то можно диагностировать эффект СР и сравнить результаты с полученными ранее.

Результаты расчёта спектральной амплитуды $F(\Omega)$ в случае индуцированного шумом СР (кривая 2 на рис. 9а) и при вариации параметра a в отсутствие шума (кривая 2 на рис. 9б) качественно соответствуют результатам расчётов [32, 39, 41].

Полученный результат как с экспериментальной точки зрения, так и с точки зрения теории эффекта СР вполне понятен и, возможно, предсказуем. Можно надеяться, что эффект СР удастся обосновать, используя, например, результаты работы [42]. Однако описанные результаты получены не с помощью глобального

анализа эффекта переключений в режиме СР, лежащего в основе теории, а на основе локального подхода, и в этом смысле они интересны с точки зрения выявленных особенностей возвратов Пуанкаре в конечную область.

Таким образом, эффект СР можно диагностировать в численном эксперименте посредством расчёта спектральной функции $F(\omega)$ плотности распределения времён возврата Пуанкаре в конечную ε -окрестность произвольной точки хаотического аттрактора и определения условий, при которых $F(\omega)$ достигает максимума. Как показали детальные расчёты [31], эффект увеличения амплитуды спектрального пика $F(\Omega)$ в режиме СР уверенно регистрируется как в отсутствие, так и при наличии шума, и данный эффект качественно не зависит от выбора величины окрестности ε в интервале $10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-1}$ и выбора начальной области $x \pm \varepsilon/2$ на аттракторе.

Необходимо отметить, что описанный метод анализа спектра $F(\omega)$ плотности распределения времён возврата $p(\tau_r)$ даёт возможность на качественном уровне диагностировать эффект СР, но не позволяет найти значения количественных характеристик СР (отношение сигнал/шум и коэффициент усиления), которые необходимо вычислять, используя соответствующие реализации x_n в системе (21).

6. Характеристики времён возврата и размерность аттрактора при локальном подходе

Взаимосвязь размерности хаотических множеств в фазовом пространстве динамической системы с вероятностью попадания траектории в ε -окрестность заданной точки множества $x_0 \pm \varepsilon/2$ определяется соотношениями (2) и (3). В силу теоремы Каца в форме (3) размерность d_f оказывается взаимосвязанной со средним временем возврата Пуанкаре. Обсудим это более подробно.

Для однородных хаотических множеств, которые характеризуются непрерывной и плавно изменяющейся вероятностной мерой, найти зависимость средних времён возврата от величины ε в соответствии с (1) и (2) не представляет сложностей. Доказательством может служить приведённый на рис. 3 результат для одномерного отображения (11), из которого следует, что $d_f = N = 1$, где N — размерность фазового пространства одномерной системы (11). Этот результат — следствие того, что распределение $p(x)$ на аттракторе системы (11) является достаточно гладкой функцией (см. рис. 1).

В общем случае аттракторы хаотических систем имеют сложную фрактальную структуру и равенство $d_f = N$ не выполняется. Попробуем дать этому объяснение и подтвердить соответствующими расчётами.

Запишем выражение для вероятности, входящей в (2), в следующем виде:

$$P(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \int_{x_0^1 - \varepsilon/2}^{x_0^1 + \varepsilon/2} \dots \int_{x_0^N - \varepsilon/2}^{x_0^N + \varepsilon/2} p(x^1, \dots, x^N) dx^1 \dots dx^N, \quad (23)$$

где $p(x^1, \dots, x^N)$ — N -мерная плотность распределения на аттракторе, N — размерность фазового пространства системы. Не ограничивая общности, рассмотрим системы размерностью $N = 2$, которые будут исследоваться нами далее. В случае $N = 2$ положим $x^1 \equiv x$,

$x^2 \equiv y$ и представим (23) в виде

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) = \int_{x_0 - \varepsilon/2}^{x_0 + \varepsilon/2} \int_{y_0 - \varepsilon/2}^{y_0 + \varepsilon/2} p(x, y) dx dy. \quad (24)$$

Здесь x_0, y_0 — выбранная точка аттрактора, которая находится в центре квадрата со стороной $\varepsilon \ll 1$.

Если плотность $p(x, y)$ — достаточно гладкая функция координат, заданная во всей ε -окрестности выбранной точки (x_0, y_0) , то в силу теоремы о среднем (учитывая малость ε) имеем

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) \simeq p(x_0, y_0) \int_{x_0 - \varepsilon/2}^{x_0 + \varepsilon/2} \int_{y_0 - \varepsilon/2}^{y_0 + \varepsilon/2} dx dy = p(x_0, y_0) \varepsilon^2. \quad (25)$$

Тогда из (1) и (25) следует

$$\langle \tau(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{p_0(x_0, y_0)} \varepsilon^{-2} = K \varepsilon^{-2}, \quad (26)$$

или

$$\ln \langle \tau(\varepsilon) \rangle = C - 2 \ln \varepsilon, \quad (27)$$

где $C = \ln K = -\ln p(x_0, y_0)$, после логарифмирования (26). Зависимость (27) — это прямая с наклоном $k = 2$, сдвинутая относительно нуля координат на величину C .

Когда $p(x, y)$ является фрактальной функцией, соотношение (25) несправедливо и выражение (27) следует представить в более общем виде (2):

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) = p(x_0, y_0) \varepsilon^{-d_f}, \quad d_f \leq 2, \quad (28)$$

где d_f — фрактальная размерность множества. Отметим, что выражение (28) будет тем более точным, чем меньше ε . Учитывая (28), получим

$$\ln \langle \tau(\varepsilon) \rangle = C - d_f \ln \varepsilon, \quad d_f \leq 2. \quad (29)$$

Рассчитывая $\ln \langle \tau(\varepsilon) \rangle$ для различных значений ε и аппроксимируя результаты прямой (29), можно найти значения коэффициентов d_f и C .

Приведём результаты численных расчётов с использованием соотношения (29) на примере модифицированного отображения Арнольда [43]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \pmod{1}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\pmod{1}$ означает, что от результата берётся дробная часть. Отображение (30), которое взаимно однозначно переводит единичный квадрат на плоскости (x, y) в самого себя, относится к классу гиперболических. При $\delta < 1/(2\pi)$ отображение (30) является диссипативным и характеризуется хаотическим аттрактором с положительным старшим показателем Ляпунова $\lambda_1 > 0$. Особенность отображения (30) состоит в том, что, несмотря на сжатие фазового объёма, фазовая траектория при $n \rightarrow \infty$ посещает любой элемент единичного квадрата и всюду плотно его покрывает. В результате метрическая размерность аттрактора системы (30) (ёмкость по Колмогорову) равняется целому числу ($D_C = 2$), отсюда возникло название "хаотический ($\lambda_1 > 0$) нестранный ($D_C = 2$) аттрактор". Всюду плотное покрытие траекто-

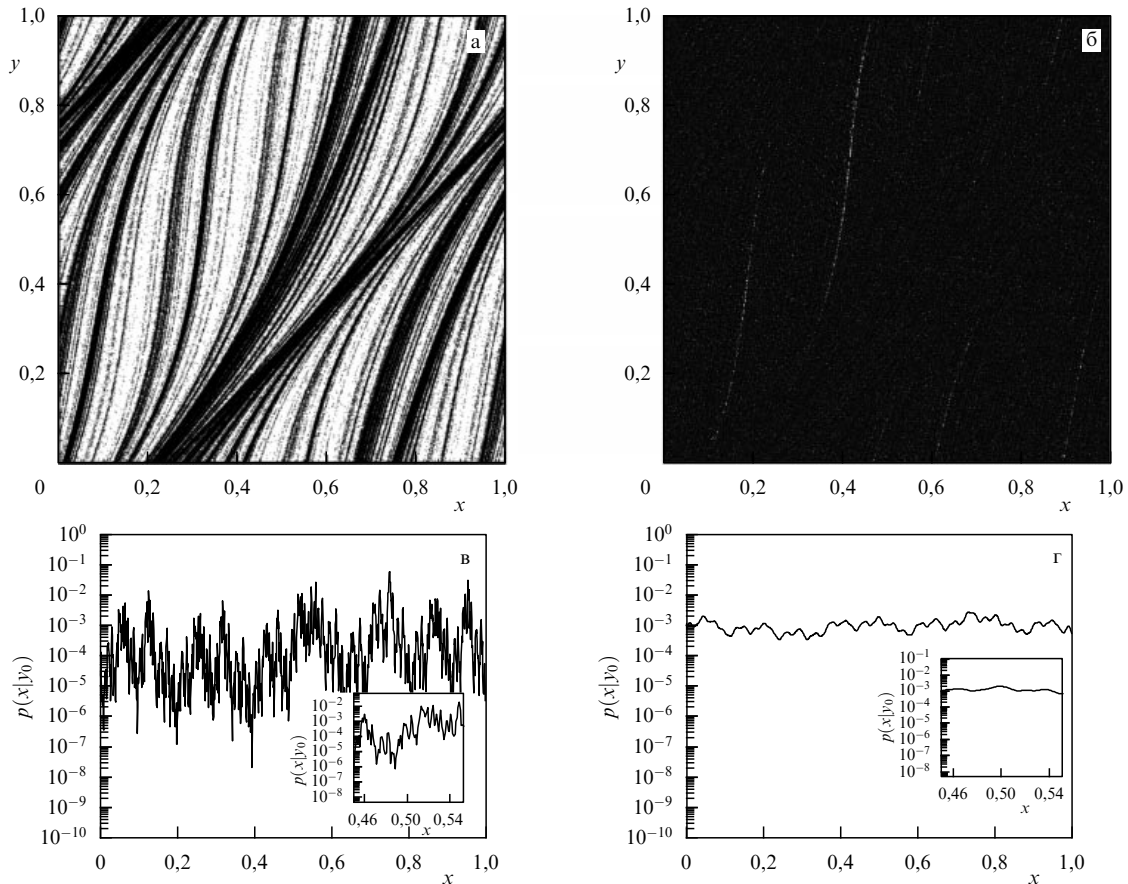


Рис. 12. Аттрактор системы (30), полученный при числе итераций (а) 10^6 и (б) 10^8 , и одномерная плотность распределения $p(x)$ для $y = 0,5$ (в) в отсутствие шума и (г) при наличии аддитивного шума интенсивностью $D = 10^{-5}$. Результаты получены при $\delta = 0,15$. Вставки на рис. 12в, г характеризуют распределение $p(x|y_0)$ в ε -интервале $0,45 \leq x \leq 0,55$, $y_0 = 0,5$.

рий единичного квадрата при $t \rightarrow \infty$ обуславливает то, что вероятностная мера $\mu(x, y)$ на аттракторе определена для любой точки единичного квадрата.

Рассмотрим результаты численного эксперимента [44]. На рисунке 12 представлена картина формирования аттрактора в системе (30). При малом числе итераций (рис. 12а) формируется, вообще говоря, неоднородный аттрактор. С увеличением числа итераций точки аттрактора всюду плотно покрывают единичный квадрат (рис. 12б). Плотность распределения вероятности (рис. 12в) определена на всём множестве значений (x, y) , принадлежащих единичному квадрату, но она имеет достаточно сложную структуру, отражая неоднородность плотности распределения точек на аттракторе. Эта структура, скорее всего, фрактальная, о чём свидетельствует вставка на рис. 12в, на которой представлено условное распределение $p(x|y_0)$ для x в ε -окрестности $0,45 \leq x \leq 0,55$. Распределение $p(x)$ в ε -интервале демонстрирует высокую степень неоднородности, как и распределение $p(x)$ в единичном интервале. Именно сложный характер распределения $p(x, y)$ на аттракторе системы (30) приводит к тому, что, хотя ёмкость по Колмогорову этого аттрактора $D_C = 2$, его информационная размерность D_I всегда остаётся меньшей D_C , $D_I < D_C = 2$, и зависит от величины параметра δ .

Так как плотность $p(x, y)$ представляет собой фрактальную функцию, можно ожидать, что зависимость $\ln \langle \tau_r(\varepsilon) \rangle$ для системы (30) будет соответствовать выражению (29) с наклоном $d_f < 2$. При добавлении аддитив-

ного шума в первое уравнение (30) плотность $p(x, y)$ сглаживается и фрактальность исчезает (см. вставку на рис. 12г). В этом случае справедливо соотношение (27) и коэффициент наклона прямой (27) должен быть близким к 2. Это подтверждено результатами численного эксперимента [44]. Мы использовали следующий алгоритм. Выбиралась начальная точка с координатами $x_n = x_0$, $y_n = y_0$ — центр квадрата с ребром ε . Далее отображение (30) итерировалось и фиксировалась последовательность дискретных времён n_k ($k = 1, 2, \dots, k_{\max}$), которые отвечали возвратам в ε -окрестность. По известным n_k мы определяли последовательность времён возвратов $\tau_k = n_{k+1} - n_k$ и вычисляли среднее значение (3):

$$\langle \tau(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{k_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} (n_{k+1} - n_k). \quad (31)$$

Расчёты производились для $\delta = 0,05, 0,10$, $x_0 = 0,5$, $y_0 = 0,5$ и $k_{\max} = 10^7$. На рисунке 13а квадратами и треугольниками представлены результаты расчётов $\ln \langle \tau(\varepsilon) \rangle$ для $\delta = 0,05$ и $0,10$, а штриховыми прямыми — аппроксимации соответствующих зависимостей. Для коэффициентов d_f получены значения 1,81 (при $\delta = 0,05$) и 1,92 (при $\delta = 0,10$), которые безусловно меньше 2! Для того чтобы убедиться в правильности полученных результатов (рис. 13а), проводились расчёты зависимости коэффициентов наклона d_f от интенсивности внешнего шума, представленные на рис. 13б. Действительно, при интенсивностях шума $D \geq 0,01$ коэффициент d_f достигает

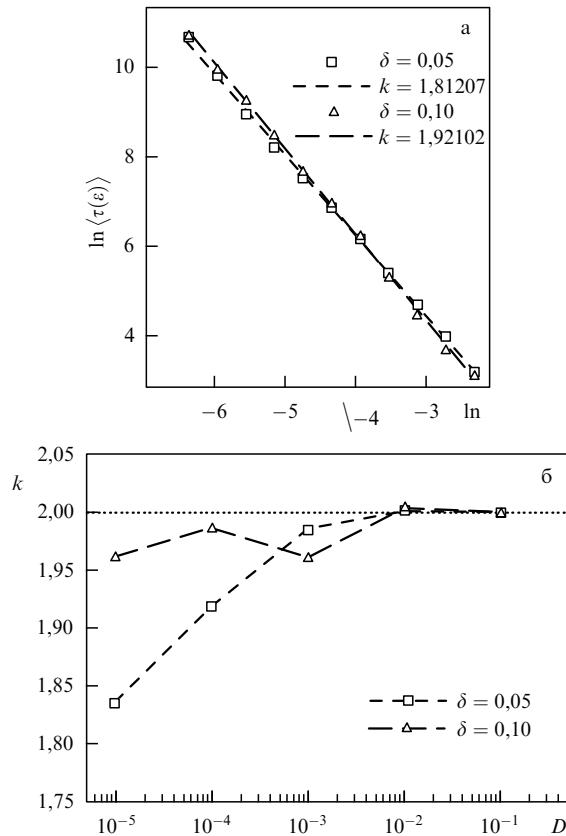


Рис. 13. (а) Зависимость среднего времени возврата Пуанкаре в ϵ -окрестность точки $x_0 = y_0 = 0,5$ от величины ϵ для отображения (30) в отсутствие шума. (б) Зависимость величины коэффициента наклона прямых, приведённых на рис. а, от интенсивности шума при $\delta = 0,05$ и $0,10$.

значения $d_f = 2 = N$ как для $\delta = 0,05$, так и для $\delta = 0,10$. Зашумление системы (30) вызывает сглаживание плотности $p(x, y)$, фрактальность исчезает и становится справедливым описание в виде соотношения (27).

Как следует из результатов, представленных на рис. 13а, величина наклона аппроксимирующих прямых $d_f < 2$. Это означает, что теоретической оценкой коэффициента наклона должна служить фрактальная размерность аттрактора d_f из выражений (28) и (29). Вопрос состоит в том, как оценить эту размерность. Для аттрактора системы (30) ёмкость $D_C = 2$ не может быть использована для оценки d_f . В работе [23] высказано предположение, что оценкой для d_f может служить величина информационной размерности:

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad I(\epsilon) = - \sum_{i=1}^{M(\epsilon)} P_i \ln P_i, \quad (32)$$

где $I(\epsilon)$ — энтропия, $P_i = P(\epsilon_i)$ — вероятность посещения траекторией области ϵ_i , $M(\epsilon)$ — число покрытий аттрактора квадратами со стороной ϵ .

Высказанное в [23] предположение, к сожалению, не подтверждено результатами расчётов, и оно требует проверки. Как следует из данных, приведённых на рис. 13а, $d_f = 1,81$ для $\delta = 0,05$ и $d_f = 1,92$ для $\delta = 0,10$. Информационная размерность (32) аттракторов системы (30) $D_1 = 1,96$ для $\delta = 0,05$ и $D_1 = 1,84$ для $\delta = 0,10$. Результаты расчётов можно трактовать в пользу выбора оцен-

ки для d_f в виде информационной размерности D_1 , однако это утверждение требует детальных численных исследований других систем.

7. Размерность последовательности времён возврата Афраймовича – Песина. Глобальный анализ

Как обсуждалось в разделе 2, минимальное время возврата (6), полученное усреднением по всему множеству, подчиняется теоретическим закономерностям (7), (9), (10). Для множеств, характеризующихся нулевой топологической энтропией, $h_t = 0$, справедливо (9), но если $h_t > 0$, то нужно использовать (10). Установлено, что если динамика системы характеризуется наличием хотя бы одного положительного показателя Ляпунова, то $h_t > 0$. При отсутствии положительных показателей в спектре ляпуновских характеристических экспонент $h_t = 0$.

Для расчёта зависимостей $\langle \tau_{\text{inf}}(\epsilon) \rangle$ мы применяем алгоритмы и соответствующие программы, описанные в работах [4, 28]. Программы тестировались на примере логистического отображения $x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n)$ в критической точке $\alpha_{\text{cr}} \approx 3,57$ и в области хаоса ($\alpha > \alpha_{\text{cr}}$). Расчёты подтвердили соответствие численного эксперимента теории: для $\alpha = \alpha_{\text{cr}}$ выполняется закономерность (9), а для $\alpha > \alpha_{\text{cr}}$ — закономерность (10). Отметим, что практическая реализация алгоритма расчёта $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$ проведена двумя способами [44]. Первый способ заключается в следующем: аттрактор покрывается совокупностью квадратов со стороной ϵ , число которых зависит от величины ϵ . В каждой ϵ -ячейке задаётся m начальных точек. Далее из каждой точки отображение итерируется до достижения времени первого возврата в исходную область. Из полученных данных определяется минимальное время возврата как среднее по ансамблю начальных точек. Второй способ также требует покрытия аттрактора совокупностью ячеек размером ϵ . В каждой из ячеек выбирается одна начальная точка. Далее для выбранных начальных точек отображение многократно итерируется и получается последовательность времён возврата в каждую конкретную ячейку. Из этих последовательностей времён возврата в каждую i -ю ячейку определяется τ_{inf}^i и затем находится среднее минимальное время возврата усреднением по множеству ячеек. Ввиду эргодичности хаотических систем первый и второй способы должны давать одинаковый результат.

В качестве примера численного расчёта АП-размерности рассмотрим результаты, полученные применительно к модифицированному двумерному отображению Арнольда (30), которое относится к классу гиперболических систем. Именно для таких систем были доказаны соотношения (7), (9) и (10).

Расчёты показали, что в области $0 < \delta \leq 0,16$ старший показатель Ляпунова аттрактора системы (30) является положительным и достаточно плавно (без провалов до нуля) зависит от параметра вследствие гиперболичности [44]. Это обстоятельство свидетельствует о положительности топологической энтропии и служит основанием ожидать выполнения закономерности (10).

Результаты расчётов первым и вторым способами представлены на рис. 14. При достаточно большом числе начальных точек в ячейке ($m \approx 10^5$) (рис. 14а) и доста-

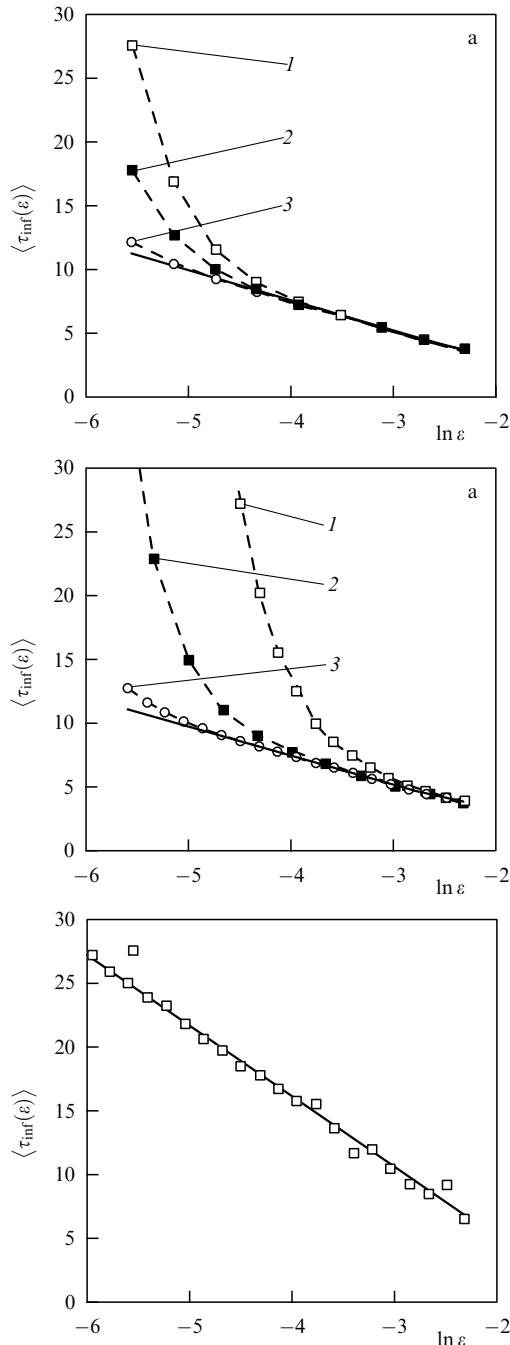


Рис. 14. Зависимости минимального среднего времени возврата от размера ε : (а) для системы (30), полученные для различного числа m начальных точек в ячейке (1 — $m = 10^4$, 2 — $m = 2,25 \times 10^4$, 3 — $m = 9 \times 10^4$, $k = 2,367$, $\alpha_c = 0,845$; (б) для системы (30), полученные для различного числа m возвратов в каждую ε -ячейку (1 — $m = 10^3$, 2 — $m = 10^4$, 3 — $m = 10^5$, $k = 2,283$, $\alpha_c = 0,876$; (в) для системы (33).

точно большим количестве возвратов ($m \approx 10^5$) (рис. 14б) зависимости $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ в интервале $-5 \leq \ln \varepsilon \leq -2$ практически аппроксимируются прямыми, подтверждая соотношение (10). Близкими оказываются наклоны прямых ($k = 2,36$ и $k = 2,28$) и соответствующие значения АП-размерностей: $\alpha_c = 0,84$ и $\alpha_c = 0,87$. Если число начальных точек в ячейке ε недостаточно велико (рис. 14а) или число возвратов в ячейку относительно мало (рис. 14б), то зависимости $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ не ложатся на прямую, а представляют собой экспоненциально спадающие функции.

Интересно отметить, что если использовать эти экспоненциальные зависимости и представить результаты в координатах $(\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle, \ln \varepsilon)$, то получатся прямые, которые соответствуют закономерности (9). Однако это будут ошибочные результаты, обусловленные недостаточно большим числом начальных точек в ячейке или малым числом возвратов в ячейку.

Вследствие фрактальности плотности распределения $p(x, y)$ аттрактора системы (30) проведение численных расчётов характеристик времён возврата Пуанкаре как при локальном, так и при глобальном подходах требует особой тщательности и относительно большого времени счёта. Эти трудности можно значительно уменьшить, если в качестве двумерного отображения выбрать отображение Лози [45]:

$$x_{n+1} = 1 - \alpha |x_n| + y_n, \quad 1,3 \leq \alpha \leq 1,8, \quad (33)$$

$$y_{n+1} = \beta x_n, \quad \beta = 0,3.$$

Известно, что отображение Лози характеризуется квази-гиперболическим хаотическим аттрактором [32] и наилучшим образом подходит для тестовых экспериментов, поскольку обладает эргодическими свойствами, используемыми в теоретических доказательствах соотношений (9), (10). Результаты соответствующих расчётов, проведённых для хаотического аттрактора в системе (33), представлены на рис. 14в. Как видно из рисунка, зависимость $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ от $\ln \varepsilon$ хорошо аппроксимируется прямой с наклоном $k = 5,551$, что полностью соответствует выражению (10). Для АП-размерности получаем $\alpha_c = d/k \approx 0,19$, где $d = 1,05$ (размерность аттрактора Лози).

8. Взаимосвязь размерности Афраймовича – Песина с показателями Ляпунова и энтропией системы

Размерность Афраймовича – Песина характеризует степень сложности последовательности времён возвратов Пуанкаре [37]. Однако связь АП-размерности с динамическими и геометрическими характеристиками аттрактора системы [46] требует более глубокого анализа.

Одним из фундаментальных результатов в этом направлении является доказательство того, что для одномерных отображений с хаотической динамикой АП-размерность совпадает по величине с положительным показателем Ляпунова [47]. Проиллюстрируем этот результат численно на примере логистического отображения

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (34)$$

Здесь x — динамическая переменная, r — управляющий параметр. В логистическом отображении (34) реализуется переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Переход к хаосу иллюстрируется с помощью зависимости характеристического показателя Ляпунова от параметра r (рис. 15а).

Далее мы будем использовать значения управляющего параметра $r \in [3,57, 4,00]$, соответствующие режиму детерминированного хаоса в системе. Как видно из рис. 15б, среднее минимальное время возврата Пуанкаре при глобальном подходе (6) в логистическом отображении (34) в режиме детерминированного хаоса

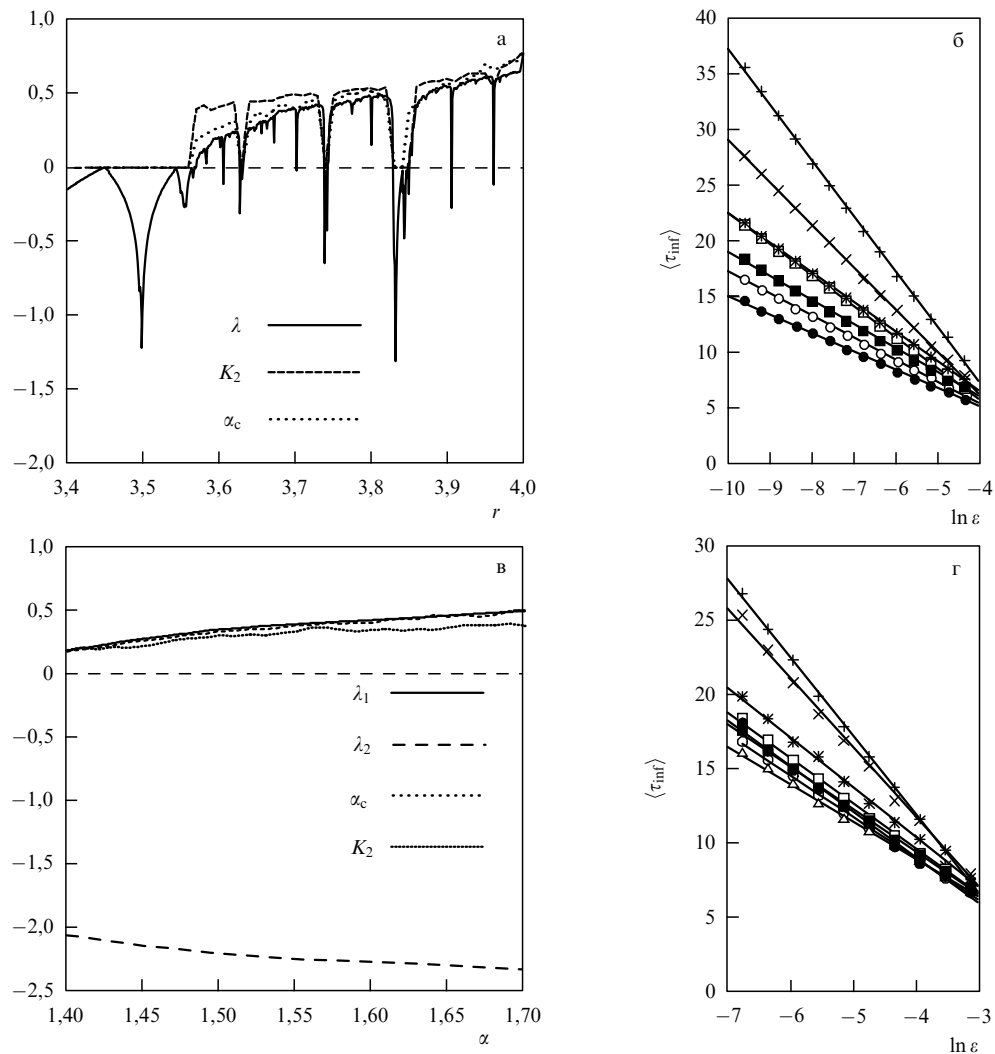


Рис. 15. (а) Характеристический показатель Ляпунова λ , КС-энтропия K_2 и АП-размерность α_c логистического отображения (34) в зависимости от управляющего параметра r . (б) Минимальное среднее время возврата Пуанкаре (6) в зависимости от $\ln \varepsilon$ в системе (34) для различных значений управляющего параметра r . (в) Спектр характеристических показателей Ляпунова $\lambda_{1,2}$, КС-энтропия K_2 и АП-размерность α_c отображения Лозы (33) в зависимости от управляющего параметра α при $\beta = 0,3$. (г) Минимальное среднее время возврата Пуанкаре (6) в зависимости от $\ln \varepsilon$ в системе (33) для различных значений управляющего параметра α при $\beta = 0,3$.

зависит не только от размера ячеек ε , но и от величины управляющего параметра r . Отметим, что графики на рис. 15б представляют собой прямые линии в логарифмическом масштабе. Это соответствует представленным в работе [16] теоретическим результатам, предполагающим, что $\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle$ подчиняется закону (10) в случае, когда динамическая система характеризуется положительным значением топологической энтропии (см. раздел 7 и рис. 14). Величину α_c можно определить по угловому коэффициенту k наклона прямых на рис. 15б, если известна размерность d аттрактора в системе (34):

$$k = -\frac{d}{\alpha_c}. \quad (35)$$

Отображение (34) при $r = 4$ характеризуется гладкой плотностью распределения $p(x)$, которая определяется аналитически [48, 49]. Результаты расчётов свидетельствуют, что в интервале $r \in [3,57, 4,00]$, за исключением окон периодичности, распределение $p(x)$ остаётся кусочно-непрерывным. Как обсуждалось в разделе 6, в этом случае справедливо соотношение (23), в котором

следует положить $N = 1$ (одномерное отображение), и размерность аттрактора $d = 1$, т.е. она совпадает с размерностью системы (34). Таким образом, из (35) следует $\alpha_c = -1/k$.

Для отображения (34) в работах [47, 50] показано, что α_c совпадает со значением характеристического показателя Ляпунова и КС-энтропии, что хорошо видно из рис. 15а.

Результаты работ [47, 50] и результаты наших расчётов (рис. 15б), по сути, подтверждают строгий математический вывод работы [47], полученный применительно к одномерным отображениям. Возникает вопрос: можно ли полагать, что установленное соответствие между показателем Ляпунова и АП-размерностью возвратов Пуанкаре будет справедливым и для двумерных систем [51]? Основанием для такого предположения служит следующее. Хорошо известно, что трёхмерные дифференциальные системы с хаотическим аттрактором характеризуются двумерными отображениями Пуанкаре в секущей плоскости. В случае достаточно большой диссипации двумерное отображение приближённо можно

заменить одномерным [52]. На основании этого можно предположить, что теорема [47] может быть применима и к двумерным отображениям, которые в режиме хаоса характеризуются одним положительным показателем. Проверим это предположение. В качестве одного из наиболее простых примеров двумерных хаотических систем рассмотрим отображение Лози (33). Из рисунка 15в, на котором представлен спектр характеристических показателей Ляпунова при $\beta = 0,3$, видно, что на интервале значений управляющего параметра $\alpha \in [1,32, 1,75]$ система (33) демонстрирует хаотическую динамику на квазигиперболическом аттракторе, характеризующемся размерностью $d \approx 1,1$.

Рассмотрим время возврата Пуанкаре на хаотическом аттракторе отображения Лози с точки зрения глобального подхода. Величина $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$, представленная на рис. 15г в зависимости от размеров ячеек разбиения ε при различных значениях управляющего параметра α , не имеет качественных отличий от полученной для логистического отображения (34). Из рисунка 15в, на котором представлены совместно КС-энтропия, АП-размерность и спектр характеристических показателей Ляпунова в зависимости от управляющего параметра, легко увидеть, что λ_1 , K_2 и α_c практически совпадают [51].

Тот факт, что величина α_c для одномерных и двумерных отображений с хаотическими аттракторами практически совпадает с величиной старшего показателя Ляпунова ($\alpha_c \approx \lambda_1$), можно использовать для оценки фрактальной размерности в (35). Определяя наклон k при расчётах $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ по соотношению (10), можно найти фрактальную размерность $d = \lambda_1 |k|$. При этом мы получим значение фрактальной размерности аттрактора в целом, а не локальную размерность, как в ситуации, описанной в разделе 6.

При теоретическом анализе в рамках глобального подхода (см., например, [4]) в выражении (10) подразумевается размерность множества по Хаусдорфу либо её оценка в виде ёмкости по Колмогорову. Таким образом, определяя наклон k по графикам зависимостей $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$, можно оценить хаусдорфову размерность d_f . Известны также другие оценки размерности (ёмкость, информационная размерность, корреляционная и ляпуновская размерности [43]). На основе нашего опыта расчётов d_f и сравнения их с данными расчётов ёмкости и информационной размерности с использованием классических определений и алгоритмов можно говорить о близости всех величин размерностей к d_f , определяемой соотношением (10). Однако пока нет оснований утверждать, что ясен ответ на вопрос о том, какая из размерностей наиболее близка к хаусдорфовой d_f . Например, для логистического отображения (34) d_f практически совпадает с ёмкостной размерностью, но для модифицированного отображения Арнольда (39) оценкой d_f является информационная размерность. Исследования в этом направлении целесообразно продолжить.

С физической точки зрения представляется интересным исследовать влияние белого гауссова шума на установленную взаимосвязь между АП-размерностью, характеристическими показателями Ляпунова и КС-энтропией. Заметим, что для зашумлённой системы вместо КС-энтропии мы будем использовать *относительную метрическую энтропию* [53, 54].

Начнём рассмотрение со случая одномерного отображения. Перепишем отображение Фейгенбаума (34),

добавив в него источник белого гауссова шума ξ интенсивностью D :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) + \sqrt{2D} \xi_n. \quad (36)$$

Под действием шума взаимосвязь между относительной метрической энтропией и характеристическими показателями Ляпунова нарушается [53]. Зафиксируем управляющий параметр $r = 3,7$ и, увеличивая D , проследим за изменением характеристического показателя Ляпунова и относительной метрической энтропии системы.

Как видно из рис. 16а, с увеличением интенсивности шума D АП-размерность возрастает и наблюдается её хорошее соответствие относительной метрической энтропии $\hat{K}_2$. Это соответствие сохраняется и при вариации управляющего параметра. В то же время из рис. 16а видно, что показатель Ляпунова практически не зависит от интенсивности шума.

Результаты, представленные на рис. 16а и 17а,б, позволяют предположить, что в зашумлённых одномерных хаотических отображениях АП-размерность α_c не связана с характеристическим показателем Ляпунова, однако её значение близко к значению энтропии $\hat{K}_2$. Далее мы проверим, справедливо ли данное соответствие в случае двумерного отображения.

Добавим источник белого гауссова шума ξ интенсивностью D в отображение Лози (33):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha|x_n| + y_n + \sqrt{2D} \xi_n, \\ y_{n+1} &= \beta x_n. \end{aligned} \quad (37)$$

Зависимости старшего характеристического показателя Ляпунова, относительной метрической энтропии и АП-размерности от величины управляющего параметра при различных интенсивностях шума представлены на рис. 17в,г. Взаимосвязь между относительной метрической энтропией и старшим характеристическим показателем Ляпунова исчезает при возрастании интенсивности шума. Однако соответствие между АП-размерностью и относительной метрической энтропией сохраняется. Зафиксировав управляющие параметры $\alpha = 1,4$, $\beta = 0,3$, рассчитаем α_c и $\hat{K}_2$ в зависимости от интенсивности шума. Как видно из рис. 16б, на котором представлены результаты этих расчётов, количественное соотношение между α_c и $\hat{K}_2$ сохраняется при вариации интенсивности шума.

Проверим справедливость наших предположений ещё на двух примерах хаотических двумерных отображений, находящихся под действием шума. Первое из них — это отображение Эно, которое относится к классу негиперболических систем [55]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha x_n^2 + y_n + \sqrt{2D} \xi_n, \\ y_{n+1} &= \beta x_n, \end{aligned} \quad (38)$$

где x , y — фазовые переменные, α , β — управляющие параметры, ξ — источник белого гауссова шума интенсивностью D .

Система (38) демонстрирует режим хаотического квазиаттрактора в отсутствие шума при $\alpha = 1,4$, $\beta = 0,3$. При этом квазиаттрактор характеризуется размерностью $b \approx 1,25$. Зафиксируем значения управляющих параметров и вычислим старший характеристический показатель Ляпунова, относительную метрическую энтропию и АП-размерность при вариации интенсивности шума. Из

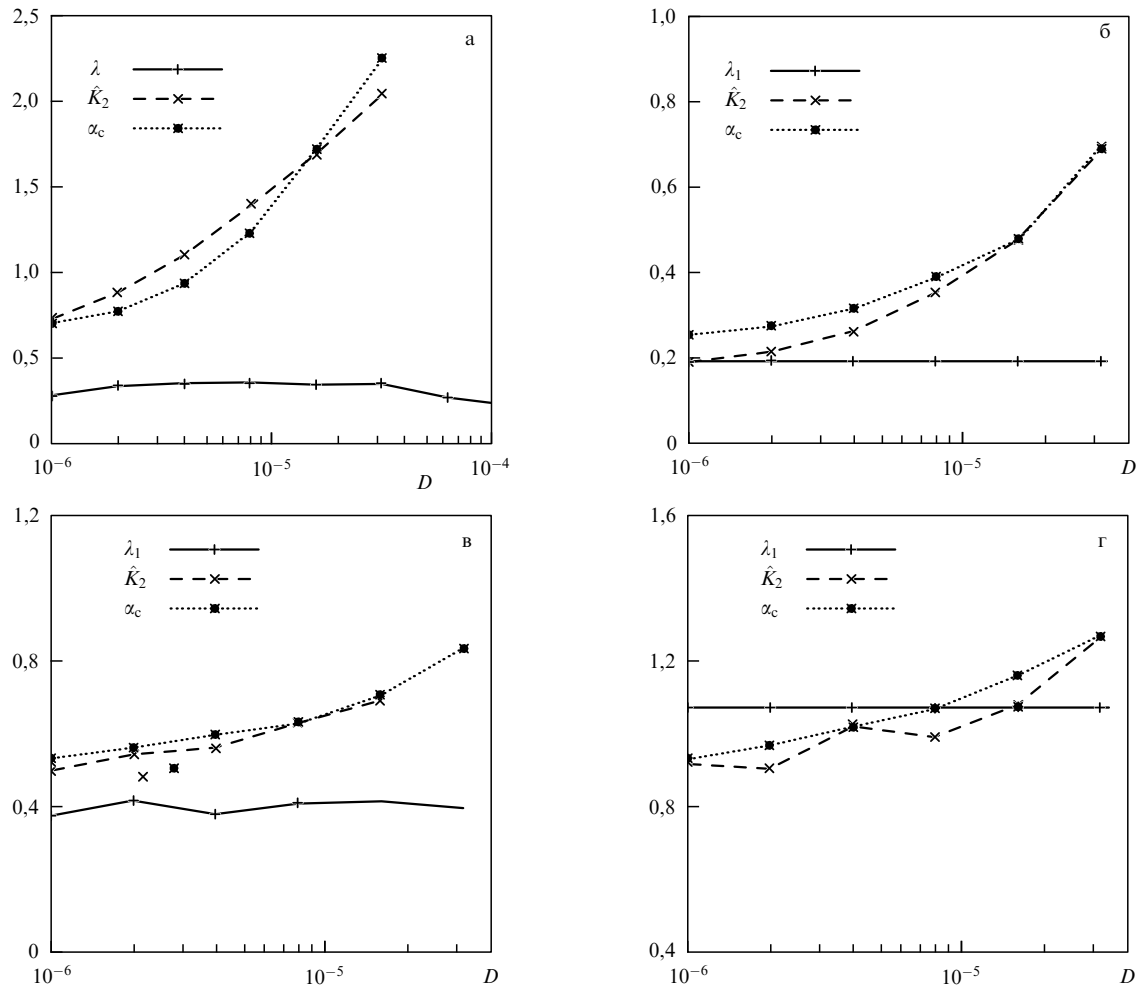


Рис. 16. Старший характеристический показатель Ляпунова λ_1 , относительная метрическая энтропия $\hat{K}_2$ и АП-размерность α_c : (а) зашумлённого логистического отображения (36) при $r = 3,7$; (б) зашумлённого отображения Лози (37) при $\alpha = 1,4$, $\beta = 0,3$; (в) зашумлённого отображения Эно (38) при $\alpha = 1,4$, $\beta = 0,3$; (г) зашумлённого модифицированного отображения Арнольда (30) при $\delta = 0,1$.

рисунка 16в легко увидеть, что соответствие между АП-размерностью и относительной метрической энтропией, обнаруженное в случае отображения Лози (33), также справедливо и в случае отображения Эно. Этот результат интересен, поскольку отображение Лози является примером квазигиперболической системы, а отображение Эно относится к негиперболическим системам.

Наконец, рассмотрим гиперболическое модифицированное отображение Арнольда (30) с аддитивным источником белого гауссова шума ξ интенсивностью D :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \cos(2\pi y_n) + \sqrt{2D} \xi_n \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \pmod{1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Зависимости λ_1 , $\hat{K}_2$ и α_c от интенсивности шума D представлены на рис. 16г. Как и в предыдущих двух случаях, наш вывод о соответствии между относительной метрической энтропией и АП-размерностью остаётся справедливым [51].

Представленные выше результаты о соответствии АП-размерности зашумлённых систем относительной метрической энтропии $\hat{K}_2$ являются пока чисто экспериментальным фактом. Основанием такого соответствия, вполне возможно, служит то, что АП-размерность и энтропия $\hat{K}_2$ вводятся на основе концепции возвратов

Пуанкаре. Можно надеяться, что в будущем эти результаты получат строгое математическое доказательство.

9. Диагностика эффекта синхронизации хаотических автоколебаний с помощью размерности Афраймовича – Песина

Размерность Афраймовича – Песина является глобальной характеристикой последовательностей времён возврата аттрактора системы в целом и может быть использована в качестве одного из критериев синхронизации хаотических автоколебаний. В качестве примера рассмотрим эффект синхронизации хаоса в двух взаимно связанных осцилляторах Лоренца, описанный в работе [28]. Уравнения рассматриваемой системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma_1(x_2 - x_1) + c_1(y_1 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \rho_1 x_1 - x_2 - x_1 x_3 + c_2(y_2 - x_2), \\ \dot{x}_3 &= -\beta_1 x_3 + x_1 x_2 + x_3(y_3 - x_3), \\ \dot{y}_1 &= \sigma_2(y_2 - y_1) + c_1(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= \rho_2 y_1 - y_2 - y_1 y_3 + c_2(x_2 - y_2), \\ \dot{y}_3 &= -\beta_2 y_3 + y_1 y_2 + y_3(x_3 - y_3). \end{aligned} \quad (40)$$

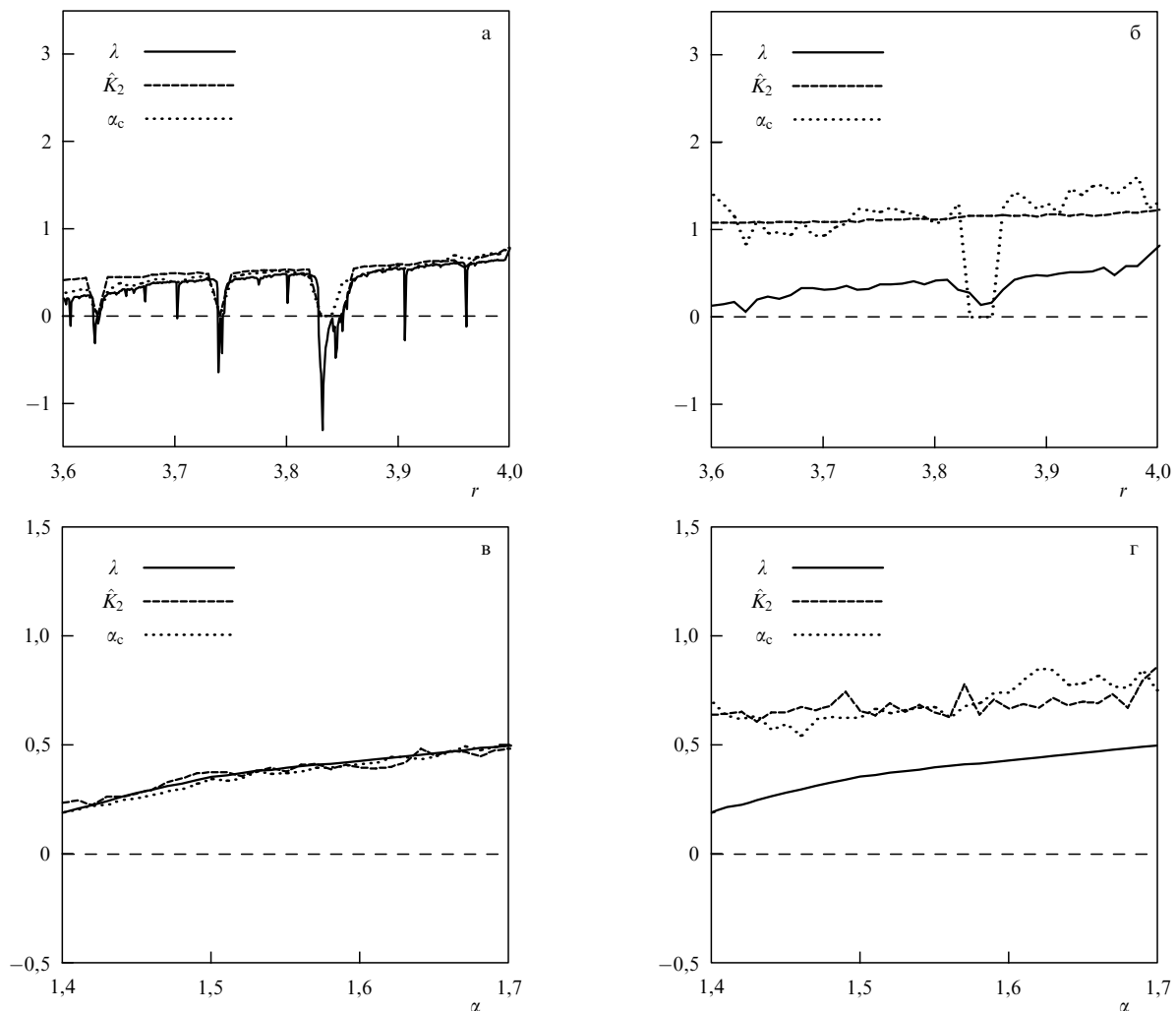


Рис. 17. Характеристический показатель Ляпунова λ , относительная метрическая энтропия $\hat{K}_2$ и АП-размерность α_c : (а) логистического отображения (36) при $D = 0$; (б) зашумлённого логистического отображения (36) при $D = 4 \times 10^{-4}$; (в) зашумлённого отображения Лози (37) при $\beta = 0,3$, $D = 10^{-6}$; (г) зашумлённого отображения Лози (37) при $\beta = 0,3$, $D = 3,2 \times 10^{-5}$.

Фазовые переменные x_i и y_i , $i = 1, 2, 3$, относятся к первой и второй системам Лоренца соответственно. Рассматриваются слегка расстроенные осцилляторы при следующих значениях управляющих параметров:

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_2 = 45,92, \quad \sigma_1 = 16,0, \quad \sigma_2 = 16,02, \\ \beta_1 = 4,0, \quad \beta_2 = 4,01. \end{aligned}$$

Эффект синхронизации может быть достигнут посредством увеличения взаимной связи осцилляторов, которая зависит от коэффициентов c_1 , c_2 , c_3 в (40).

В отсутствие связи ($c_i = 0$) хаотический аттрактор системы (40) ввиду имеющейся расстройки по параметрам σ и β расположен в шестимерном фазовом пространстве. На рисунке 18а представлена проекция хаотического аттрактора на плоскость фазовых переменных (x_1, y_1) . Качественно аналогичные картины получаются в проекциях на плоскости (x_2, y_2) и (x_3, y_3) .

С увеличением связи реализуется эффект топологической синхронизации хаоса [28]. При этом аттрактор системы (40) располагается вблизи инвариантного трёхмерного подпространства: $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$ ($x_1 \approx y_1$, $x_2 \approx y_2$, $x_3 \approx y_3$). Соответственно, проекции фазовой траектории

системы на плоскости (x_i, y_i) должны находиться в малой окрестности диагонали $x_i = y_i$ ($i = 1, 2, 3$). Расчёты подтверждают ожидаемый результат, о чём свидетельствует рис. 18б. Вследствие малой расстройки осцилляторов Лоренца по параметрам в системе (40) с введением связи экспериментально реализуется режим практически полной синхронизации, который возможен только в случае идентичности взаимосвязанных систем [56]. Строго говоря, в рассмотренном примере мы имеем дело с топологической синхронизацией, при которой между переменными x_i и y_i ($i = 1, 2, 3$) существуют различия. Расчёты показали, что величина $|x_i(t) - y_i(t)|$ в среднем по времени хотя и мала, но конечна, порядка 10^{-4} . Естественно, это невозможно увидеть на рис. 18б.

Проведём расчёты АП-размерности для аттракторов подсистем (40) в отсутствие связи и в режиме синхронизации.

Как видно из рис. 18в, г, рассчитанные зависимости $\langle \tau_{\text{inf}}(\epsilon) \rangle$ подчиняются теоретической закономерности (10), так как рассматриваются хаотические режимы с положительной топологической энтропией. Наклоны прямых на рис. 18в $k = d/\alpha_c$ различны вследствие наличия расстройки по параметрам и отсутствия связи. При

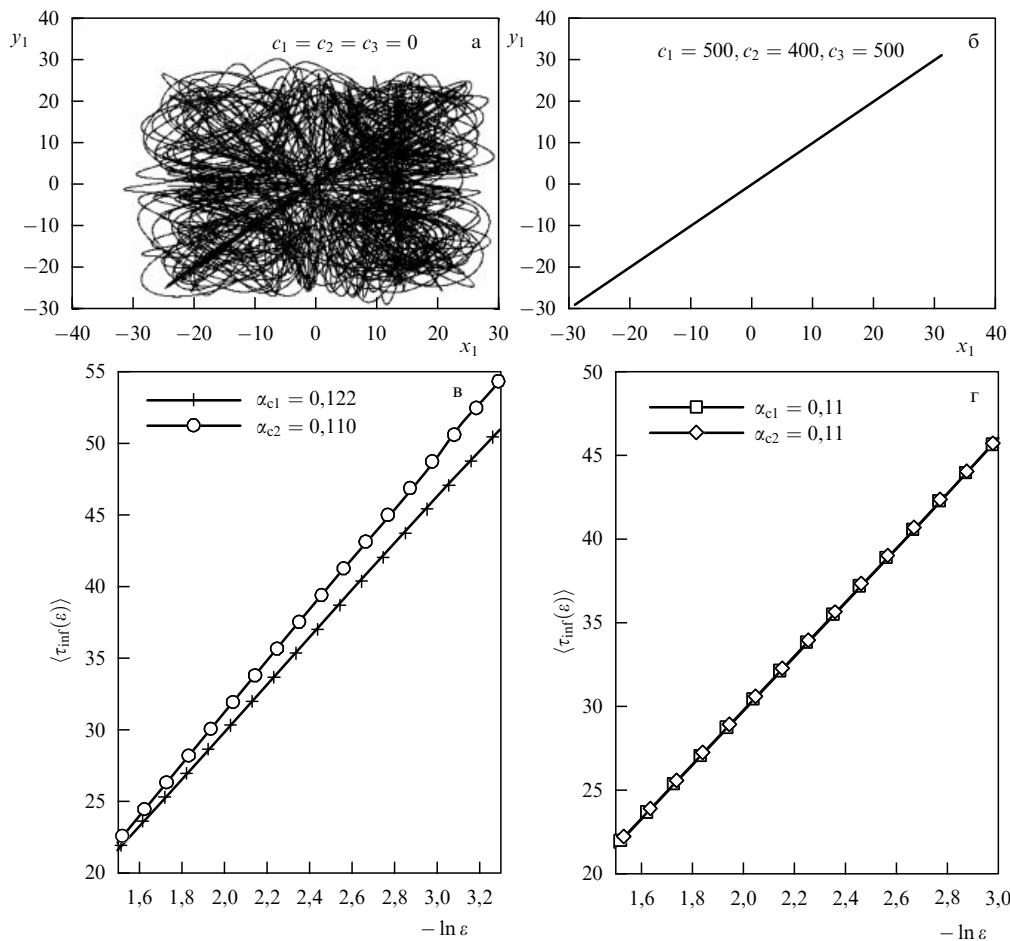


Рис. 18. Проекция шестимерного аттрактора системы (40) на плоскость переменных (x_1, y_1) (а) в отсутствие связи ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$) и (б) при наличии связи ($c_1 = 500, c_2 = c_3 = 400$). Зависимости $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ в отсутствие синхронизации (в) и в условиях синхронизации (г).

этом, естественно, различны значения α_c : для первой системы Лоренца $\alpha_{c1} = d/k_1 = 0,122$, для второй — $\alpha_{c2} = 0,110$. Для расчёта α_{c1}, α_{c2} мы использовали значения наклонов прямых на рис. 18: $k_1 = 16,54$ и $k_2 = 18,43$, положив размерность аттрактора Лоренца $d = 2,03$.

В режиме синхронизации (рис. 18г) зависимости $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ для первой и второй подсистем полностью совпадают. Их наклоны и, соответственно, АП-размерности в режиме синхронизации оказываются равными: $k_1 = k_2 = 18,43$, $\alpha_{c1} = \alpha_{c2} = 0,11$. Таким образом, в режиме полной синхронизации двух связанных хаотических подсистем устанавливается равенство их АП-размерностей.

Представленный результат, с точки зрения теории синхронизации хаотических колебаний, весьма тривиален, и он может быть легко получен классическими методами (см., например, [32]) при существенно меньших затратах времени вычислений. Ценность представленного результата в другом: АП-размерность как статистическая характеристика последовательности возвратов Пуанкаре может служить критерием синхронизации — одного из фундаментальных явлений физики колебаний.

10. Заключение

Изложенный в настоящем обзоре материал может служить введением в современный круг вопросов, касаю-

щихся фундаментальной проблемы возвращаемости Пуанкаре применительно к нелинейным диссипативным системам с хаотическими аттракторами. Обзор включает в себя обсуждение основных теоретических результатов применительно как к локальному, так и глобальному подходам. Эти результаты представлены без анализа сложных математических доказательств. Внимание уделено исключительно самим результатам и условиям, при которых они применимы. Предпринята попытка проанализировать применимость строгих результатов при некоторых отклонениях от условий доказательства соответствующих теорем. Проведены исследования влияния шумов, влияния конечности величины окрестности начального состояния и отсутствия гиперболичности. Установлено, что строгие результаты с достаточной для физических задач точностью могут быть применимыми при малой, но отличной от нуля ε -окрестности ($\varepsilon \simeq 10^{-3} - 10^{-5}$). В то же время конечность ε может приводить к заметному различию между теоретическими и экспериментальными результатами, что можно использовать для диагностики свойств режимов функционирования системы и их характеристик. Показано, что при малых ε можно диагностировать, например, эффект стохастического резонанса.

Важным, на наш взгляд, результатом является экспериментальное обоснование применимости теоремы Каца (локальный подход) к анализу возвратов Пуанкаре в зашумлённых системах. При этом необходимо учи-

тывать изменение вероятностной меры на аттракторе, вызванное шумовым возмущением.

Интересным результатом также явилось обоснование в численных экспериментах соответствия размерности Афраймовича – Песина старшему показателю Ляпунова не только для одномерных (что доказано теоретически), но и для двумерных систем. В результате появляется новый способ численной оценки размерности аттрактора посредством расчёта статистики возвратов Пуанкаре при глобальном рассмотрении. Важным явился и результат соответствия размерности Афраймовича – Песина величине относительной энтропии Колмогорова для зашумлённых систем. При этом соответствие АП-размерности старшему показателю Ляпунова нарушается. С общей физической точки зрения, вся совокупность представленных в настоящем обзоре результатов есть отражение того факта, что сам по себе процесс возвратов Пуанкаре является, по сути, отражением динамики системы во времени. Совершенно естественным является то, что статистические характеристики последовательности времён возврата должны отражать характеристики временной динамики систем и быть связанными с ними.

Результаты решения ряда прикладных задач, представленных в данном обзоре, этот факт подтвердили. Достоверно установлено, что статистические характеристики времён возврата Пуанкаре адекватно реагируют на физические эффекты, такие как стохастический резонанс, синхронизация, и дают возможность численного расчёта фрактальной размерности. Всё это важно с точки зрения понимания физических аспектов статистики возвратов Пуанкаре, следующих из математической теории. Представленные в обзоре результаты не исчерпывают всего богатства информации о динамической системе, которая содержится в закономерностях возвратов Пуанкаре. Нет сомнения в том, что дальнейшие исследования в этом направлении послужат доказательством сказанному.

Мы считаем своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В.С. Афраймовичу за многочисленные плодотворные дискуссии по проблеме возвратов Пуанкаре и проявленный интерес к нашей работе. Мы также благодарим наших коллег и соавторов цитируемых публикаций Я.И. Боева, М.Е. Хайрулина, Н.И. Бирюкову и Ю. Куртса за помощь в получении ряда результатов, представленных в настоящем обзоре.

Работа частично поддержана Федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (государственный контракт 12.470.11.1182) и грантом 13-02-00216 Российского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

1. Poincaré H *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* Vol. 3 (Paris: Gauthier-Villars, 1899) [*New Methods of Celestial Mechanics* Vol. 3 (Woodbury, NY: American Institute of Physics, 1993); Пуанкаре А *Избранные труды* Т. 2 (М.: Наука, 1972)]
2. Poincaré H *Acta Math.* **13** A3 (1890)
3. Немыцкий В В, Степанов В В *Качественная теория дифференциальных уравнений* (М.–Л.: Гостехиздат, 1947) [Nemytskii V V, Stepanov V V *Qualitative Theory of Differential Equations* (New York: Dover Publ., 1989)]
4. Afraimovich V, Ugalde E, Urias J *Fractal Dimensions for Poincaré Recurrences* (Amsterdam: Elsevier, 2006) [Афраймович В,

- Угальде Э, Уриас Х *Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре* (М.–Ижевск: РХД, 2011)]
5. Boshernitzan M D *Inventiones Math.* **113** 617 (1993)
6. Мошевитин Н Г *УМН* **53** (1) 223 (1998) [Moshchevitin N G *Russ. Math. Surv.* **53** 219 (1998)]
7. Шкредов И Д *Матем. заметки* **72** 625 (2002) [Shkredov I D *Math. Notes* **72** 576 (2002)]
8. Hirata M, Saussol B, Vaienti S *Commun. Math. Phys.* **206** 33 (1999)
9. Abadi M, Galves A *Markov Process. Relat. Fields* **7** (1) 97 (2001)
10. Haydn N, Lacroix Y, Vaienti S *Ann. Probab.* **33** 2043 (2005)
11. Кас М *Bull. Am. Math. Soc.* **53** 1002 (1947)
12. Кас М *Proc. of the Summer Seminar, Boulder, Colorado, 1957* Vol. 1 *Probability and Related Topics in Physical Sciences* (Lectures in Applied Mathematics, Vol. 1) (London: Intersci. Publ., 1959) [Кац М *Вероятность и смежные вопросы в физике* (М.: Мир, 1965)]
13. Чириков Б В, Шепелянский Д Л "Статистика возвратов Пуанкаре и структура стохастического слоя нелинейного резонанса", Препринт № 81-69 (Новосибирск: Ин-т ядерной физики СО АН СССР, 1981)
14. Chetaev N C.R. *Acad. Sci. Paris* **187** 637 (1928)
15. Четаев Н Г *Ученые записки Казанского ун-та* (2) 198 (1929)
16. Afraimovich V *Chaos* **7** (1) 12 (1997)
17. Afraimovich V, Zaslavsky G M *Phys. Rev. E* **55** 5418 (1997)
18. Pesin Ya B *Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1997)
19. Penné V, Saussol B, Vaienti S *Discrete Contin. Dyn. Syst. A* **5** 783 (1999)
20. Sirvent V F *Stoch. Dyn.* **2** 599 (2002)
21. Marwan N et al. *Phys. Rep.* **438** 237 (2007)
22. Ngamga E J et al. *Phys. Rev. E* **85** 026217 (2012)
23. Gao J B *Phys. Rev. Lett.* **83** 3178 (1999)
24. Baptista M S, Kraut S, Grebogi C *Phys. Rev. Lett.* **95** 094101 (2005)
25. Altmann E G, Tél T *Phys. Rev. Lett.* **100** 174101 (2008)
26. Болотин Ю Л и др. *Нелинейная динам.* **6** 719 (2010)
27. Adler R L, Konheim A G, McAndrew M H *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** 309 (1965)
28. Afraimovich V S, Lin W-W, Rulkov N F *Int. J. Bifurcat. Chaos* **10** 2323 (2000)
29. Katok A, Hasselblatt B *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в современную теорию динамических систем* (М.: Факториал, 1999)]
30. Afraimovich V *Taiwanese J. Math.* **3** (2) 139 (1999)
31. Anishchenko V S, Boev Y I *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.* **18** 953 (2013)
32. Anishchenko V et al. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development* (Berlin: Springer, 2002)
33. Benzi R, Sutera A, Vulpiani A *J. Phys. A Math. Gen.* **14** L453 (1981)
34. Кузнецов С П *УФН* **181** 121 (2011) [Kuznetsov S P *Phys. Usp.* **54** 119 (2011)]
35. Анищенко В С, Хайрулин М Е *Письма в ЖТФ* **37** (12) 35 (2011) [Anishchenko V S, Khairulin M E *Tech. Phys. Lett.* **37** 561 (2011)]
36. Altmann E G, da Silva E C, Caldas I L *Chaos* **14** 975 (2004)
37. Anishchenko V S et al. *Eur. Phys. J. B* **82** 219 (2011)
38. Gammaitoni L et al. *Rev. Mod. Phys.* **70** 223 (1998)
39. Анищенко В С и др. *УФН* **169** 7 (1999) [Anishchenko V S et al. *Phys. Usp.* **42** 7 (1999)]
40. Kramers H A *Physica* **7** 284 (1940)
41. Anishchenko V S, Neiman A B, Safanova M A *J. Stat. Phys.* **70** 183 (1993)
42. Freidlin M *Physica B* **306** 10 (2001)
43. Farmer J D, Ott E, Yorke J A *Physica D* **7** (1–3) 153 (1983)
44. Анищенко В С и др. *Нелинейная динам.* **8** (1) 29 (2012)
45. Lozi R J. *Phys. Colloques* **39** C5-9 (1978)
46. Лоскутов А Ю *УФН* **180** 1305 (2010) [Loskutov A *Phys. Usp.* **53** 1257 (2010)]
47. Saussol B, Troubetzkoy S, Vaienti S *J. Stat. Phys.* **106** 623 (2002)

48. Schuster H G *Deterministic Chaos. An Introduction* (Weinheim: Physik-Verlag, 1984) [Шустер Г *Детерминированный хаос. Введение* (М.: Мир, 1988)]
49. Анищенко В С и др. *Нелинейная динамика* **8** 449 (2012)
50. Baptista M S, Maranhão D M, Sartorelli J C *Chaos* **19** 043115 (2009)
51. Astakhov S V, Anishchenko V S *Phys. Lett. A* **376** 3620 (2012)
52. Анищенко В С *Сложные колебания в простых системах* (М.: Наука, 1990)
53. Anishchenko V S, Astakhov S *Int. J. Bifurcation Chaos* **18** 2851 (2008)
54. Anishchenko V S, Astakhov S V, Vadivasova T E *Regul. Chaot. Dyn.* **15** 261 (2010)
55. Hénon M *Commun. Math. Phys.* **50** 69 (1976)
56. Pecora L M, Carroll T L *Phys. Rev. Lett.* **64** 821 (1990)

Poincaré recurrence theory and its applications to nonlinear physics

V.S. Anishchenko, S.V. Astakhov

Physics Faculty, N.G. Chernyshevsky Saratov State University,
ul. Astrakhanskaya 83, 410012 Saratov, Russian Federation
Tel. + 7 (845-2) 210 720. Fax + 7 (845-2) 210 721
E-mail: wadim@info.sgu.ru, astakhovsv@info.sgu.ru

Theoretical results on the Poincaré recurrence problem and their application to problems in nonlinear physics are reviewed. The effects of noise, nonhyperbolicity and the size of the recurrence region on the characteristics of the recurrence time sequence are examined. The relationships of the recurrence time sequence dimension with the Lyapunov exponents and the Kolmogorov entropy are demonstrated. Methods for calculating the local and global attractor dimensions and the Afraimovich – Pesin dimension are presented. Methods using the Poincaré recurrence times to diagnose the stochastic resonance and the synchronization of chaos are described.

PACS number: **05.45. – a**

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201310a.1009

Bibliography — 56 references

Received 30 October 2012, revised 15 March 2013

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (10) 1009 – 1028 (2013)

Physics – Uspekhi **56** (10) (2013)