

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Критические явления вдали от равновесия

Э.Н. Руманов

Рассмотрены стационарные режимы активной системы (системы, у которой диссипация компенсируется накачкой). Приближение к точке бифуркации такого режима вызывает рост восприимчивости, причём основной вклад дают мягкие моды. Слабый шум, присущий всякой реальной системе, усиливается. Достаточно близко от бифуркации размах беспорядочных пульсаций сопоставим со средним значением флуктуирующей величины — как при развитой турбулентности. Спектр критических пульсаций от исходного шума не зависит. Численное моделирование окрестности бифуркаций считается ненадёжным: нет приемлемой воспроизводимости результатов. Из-за высокой восприимчивости округления при счёте ведут к "хаотическим" скачкам решения в ответ на плавное изменение параметров. Поэтому при моделировании нужно к постоянной накачке добавлять малую случайную функцию времени — белый шум. Решения полученных таким образом уравнений Ланжевена подлежат статистической обработке. Их свойства (за исключением интенсивности пульсаций) от вводимого шума не зависят. Представлены примеры статистического описания бифуркаций.

PACS numbers: 02.70. – c, 05.45. – a, 64.60. – i

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201301f.0103

Содержание

1. Введение (103).
 2. Критическая восприимчивость (104).
 3. Уравнения Ланжевена (105).
 4. Критический аттрактор (106).
 5. Ван-дер-ваальсова и флуктуационная области (107).
 6. Переходы Крамерса (108).
 7. Рождение предельного цикла из критического хаоса (109).
 8. Бегущие фронты и импульсы у порога распространения (109).
 9. Заключение (111).
- Список литературы (111).

1. Введение

Активной будем называть систему, которая погружена в термостат, но удерживается вдали от равновесия внешним воздействием. Например, приложенное напряжение вызывает ток в проводнике. Если воздействия нет, то система за время релаксации приходит в равновесие с термостатом. От начального состояния это равновесие не зависит. Когда воздействие включено, зависимость от начальных условий тоже пропадает за времена порядка времени релаксации. Формируется установившийся режим, один и тот же для целого набора начальных состояний. Этот набор образует в пространстве состояний бассейн притяжения. Внутри бассейна расположен аттрактор, куда приходят все траектории из бассейна.

Э.Н. Руманов. Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения РАН,
ул. Акад. Осипяна 8, 142432 Черноголовка, Московская обл.,
Российская Федерация. E-mail: ed@ism.ac.ru

Статья поступила 24 июня 2011 г., после доработки 22 декабря 2011 г.

Если воздействие не зависит от времени, то среди установившихся режимов могут быть стационарные. Равновесие можно рассматривать как предельный случай стационарного режима, когда интенсивность воздействия стремится к нулю. Одной из характеристик равновесия является восприимчивость, которую можно определить следующим образом [1]. Пусть система подвергается малому синусоидальному воздействию, тогда её состояние будет меняться с той же частотой. Восприимчивость есть отношение амплитуд этого изменения и воздействия. Аналогичным образом определяется восприимчивость стационарного режима, далёкого от равновесия. В этом случае должна рассматриваться малая синусоидальная добавка к постоянному воздействию.

По мере изменения параметров системы и/или воздействия установившийся режим может потерять устойчивость. Происходит его превращение в какой-либо другой режим. Для точечных систем пространство состояний конечномерно, стационарному режиму отвечает предельная точка в этом пространстве. Близость бифуркации во многих случаях означает сокращение расстояния между этой точкой и границей её бассейна притяжения — хотя бы по одному направлению. Если состояние отклоняется от предельной точки по этому направлению, то "сила", возвращающая систему к стационарному режиму, мала. Для равновесий эту малость можно наглядно пояснить. Устойчивой точке отвечает минимум (термодинамического) потенциала, а неустойчивой — максимум (по данному направлению). При сближении обеих точек градиент потенциала (сила) уменьшается. Ситуация близка к почти безразличному равновесию, что справедливо не только для точечных, но и для распределённых систем. Даже слабые изменения воздействия вызывают значительные отклонения от стационарного режима в критических условиях (усло-

виях близости параметров к точке бифуркации). Растёт время релаксации отклонений. Другими словами, растёт восприимчивость, преимущественно её низкочастотная часть. Действительно, при низкой частоте система успевает отклониться сильнее, прежде чем направление воздействия изменится.

Критические явления обусловлены высокой восприимчивостью. Для равновесий они изучались впервые применительно к переходу жидкость–пар. Был обнаружен рост восприимчивости (в данном случае сжимаемости) и флуктуаций плотности с преобладанием мягких мод [2]. Имелись в виду тепловые флуктуации, дисперсию которых можно найти с помощью термодинамических формул. Вдали от равновесия часто имеется не-тепловой шум (например, случайные колебания питающего напряжения). Слабый шум не оказывает заметного влияния на поведение системы, пока параметры далеки от точки бифуркации. Но подход к этой точке вызывает усиление шума из-за высокой восприимчивости. Достаточно глубоко в критической области размах беспорядочных пульсаций сопоставим со средним значением флуктуирующей величины — как при развитой турбулентности. Стационарный режим на деле оказывается хаотическим. Спектр пульсаций не зависит от "затравочного" шума, в нём преобладают низкие частоты. Чем ближе к бифуркации, тем выше и острее низкочастотный пик. В отличие от фликкер-шума [3], этот пик исчезает при удалении параметров от критических значений.

Численное моделирование окрестности бифуркаций считается ненадёжным: нет приемлемой воспроизводимости результатов счёта. Число разрядов всегда конечно, неизбежные округления при высокой восприимчивости ведут к беспорядочным скачкам решения в ответ на плавное изменение параметров. Выход мы видим в том, чтобы приблизить ситуацию к экспериментальной, в уравнениях к постоянному источнику добавлять малую случайную функцию времени, белый шум. Решения полученных таким образом уравнений Ланжевена (Langevin) [4] тоже являются случайными функциями и подлежат статистической обработке. Можно при данных значениях параметров найти дисперсию пульсаций, их частотные спектры, критические показатели, n -точечные корреляторы и т.д. Достигается достоверное описание критических явлений. Теория бифуркаций должна иметь статистический раздел.

Шум в реальной системе не является, вообще говоря, белым, его статистика чаще всего неизвестна. Однако по мере приближения к точке бифуркации корреляционное время пульсаций растёт и заведомо превышает корреляционное время шума. Поэтому любой шум выглядит как δ -коррелированный (белый). Для сложной (особенно распределённой) системы вычисление восприимчивости может оказаться трудным, достаточно глубоко в критической области существенна нелинейная восприимчивость. Вместе с тем использование этих величин не является необходимым. Как сказано выше, решения уравнений Ланжевена представляют собой хаотические временные ряды, подобные тому, что получается в натуральных экспериментах. При достаточной их длине (т.е. времени счёта) можно определить статистические характеристики бифуркаций с высокой точностью.

В случае систем с относительно небольшим числом независимых переменных, $n \geq 3$ [5], можно получить хао-

тические решения без шумовой добавки (динамический хаос). Но таким решениям отвечают локально гладкие фазовые траектории, и, для того чтобы заметить хаос, надо следить за ними длительное время (например, строить отображение Пуанкаре [6]). Траектории уравнений Ланжевена принадлежат к броуновскому типу. В типичных случаях спектральная плотность критических пульсаций, если её продолжить на все частоты (до обратного времени атомных столкновений), дала бы температуру $\sim 10^5$ К. В действительности спектр круто падает с ростом частоты, возбуждены лишь мягкие моды, вещество остаётся холодным. Происходит интенсивное перемешивание на масштабах, больших по сравнению с атомными размерами, но, как правило, малых по сравнению с размерами системы (критическая диффузия).

В теории бифуркаций (см., например, [7, 8]) большое внимание уделяется особенностям пространства состояний (в духе геометрии гладких отображений [9]). Вводятся такие экзотические объекты, как "седло-узел", "седло-фокус" и более сложные в случае многомерного пространства. Все эти изящные конструкции в реальности ненаблюдаемы. Как мы увидим, в критической области параметров окрестность предельной точки превращается в хаотический аттрактор, состоящий из броуновских траекторий. Особенности "размазываются".

Динамическому хаосу с локально гладкими траекториями посвящена обширная литература (см., например, обзор [10]). Так как в реальности подавить шум полностью невозможно, возникает вопрос: интересны ли такие аттракторы для физики? Вдали от бифуркации, когда восприимчивость невелика, достаточно слабым шумом можно пренебречь, броуновский характер траекторий незаметен. Наша цель — обратить внимание на своеобразные *критические аттракторы*, с которыми приходится иметь дело, если параметры близки к точке бифуркации стационарного режима. Критический аттрактор состоит из броуновских траекторий. Аналогичное замечание следует отнести и к гамильтоновым системам, в фазовом пространстве которых есть седловая точка. Появление "стохастического слоя", примыкающего к сепаратрисе [11], в действительности означает, что шумом пренебрегать в этой ситуации нельзя.

Из сказанного следует принципиальная возможность создавать приборы, предупреждающие о близкой бифуркации стационарного режима (катастрофе) сложной искусственной или природной системы по нарастанию мягких мод в спектре её шумов. Конечно, диапазон мягких мод у каждой системы свой. Например, для проточного реактора надо следить за частотами, меньшими обратного времени пребывания в нём смеси. При разработке такого прибора желательно представить, хотя бы в общих чертах, процессы в системе, для которой он создаётся. Эффективна запись макрокинетических уравнений, включая баланс массы, импульса и энергии.

2. Критическая восприимчивость

Рассмотрим сначала точечную систему,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots) + y_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь X_i — координаты (зависимые переменные), t — время, векторное поле f_i зависит от координат и от постоянного воздействия на систему, y_i — малые добавки к воздействию, зависящие от времени. Если этими добавками пренебречь, то среди решений (1) могут быть постоянные X_i^s , которые удовлетворяют уравнениям

$$f_i(X_1^s, X_2^s, \dots) = 0. \quad (2)$$

Такие решения отвечают стационарным режимам активной системы, заданной полем f_i . Для малых отклонений от стационарного режима, $x_i = X_i - X_i^s$, можно записать линейные уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = -\lambda_{ik}x_k + y_i, \quad (3)$$

по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование, $-\lambda_{ik} = \partial f_i / \partial X_k$ — матрица Якоби, подсчитанная в предельной точке $X_i = X_i^s$ пространства состояний.

Вблизи бифуркации к предельной точке приближается граница её бассейна притяжения, хотя бы по одному направлению. Пусть X — координата, соответствующая этому направлению. Время релаксации для отклонений $x = X - X^s$ велико по сравнению с такими временами для других степеней свободы, что обусловлено малостью "возвращающей силы" для этой координаты (бифуркационной переменной). Отклонения других координат, быстро релаксирующих, усредняются, так что по отношению к x их можно считать равными стационарным значениям, $x_i = 0$. Тогда от (3) остаётся одно уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + y. \quad (4)$$

Коэффициент λ играет роль бифуркационного параметра, в точке бифуркации $\lambda = 0$. Восприимчивость $\sigma(\omega)$ на частоте ω определяется как отношение компонент Фурье x_ω / y_ω . Согласно (4), имеем

$$\text{Re } \sigma = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}, \quad \text{Im } \sigma = \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2}. \quad (5)$$

При $\lambda \rightarrow 0$ и вещественная, и мнимая части восприимчивости нарастают преимущественно на низких частотах, $\omega < \lambda$. Чем ближе к точке бифуркации, тем выше и острее низкочастотный пик.

Слабый шум, присущий всякому реальному воздействию (например, случайные колебания питающего напряжения), будет усиливаться из-за высокой восприимчивости. При достаточно малом λ размах беспорядочных пульсаций сопоставим со средним значением флуктуирующей величины (т.е. X^s) — как при развитой турбулентности. Иначе говоря, по мере приближения к бифуркации стационарный режим превращается в хаотический. Спектр пульсаций, как ясно из сказанного, должен иметь низкочастотный максимум вне зависимости от инициирующего шума. Но, в отличие от фликкер-шума [3], этот пик исчезает при удалении параметров от точки бифуркации.

В математической теории бифуркаций (см., например, [7, 8]) большое внимание уделяется перестройкам пространства состояний, рассматриваемым на основе геометрии гладких отображений [9]. Пусть, например, имеются две особые точки, узел и седло, и в результате

изменения параметров они сближаются. Согласно [7, 8], при критических параметрах появляется "седло-узел", после чего особенности исчезают. Учёт шума, как мы видели, делает седло-узел, седло-фокус (и более сложные объекты в многомерном пространстве состояний) ненаблюдаемыми. Траектории беспорядочно пересекаются, систему уравнений из-за усиления шума нельзя считать автономной даже приближённо. Подчеркнём также отличие критического хаоса от хаотических решений, которые в определённом диапазоне параметров дают автономные системы с относительно небольшим числом уравнений [5]. В последнем случае траектории являются локально гладкими, и, чтобы заметить хаос, надо следить за ними в течение конечного времени (например, строить отображение Пуанкаре [6]). Критическая траектория оканчивается броуновской, плотно покрывает окрестность предельной точки. Однако, как уже отмечалось выше, в отличие от обычного броуновского движения (тепловых флуктуаций), возбуждены только мягкие моды. Возрастает интенсивность перемешивания (критическая диффузия), что представляет интерес для химии [13].

Если бифуркация такова, что не одна, а n переменных релаксируют аномально медленно, то можно ввести матрицу восприимчивостей $\sigma_{ik}(\omega)$, которая, согласно (3), есть резольвента матрицы Якоби:

$$\sigma_{ik}(\omega) = (\lambda_{ik} - i\omega\delta_{ik})^{-1}. \quad (6)$$

Показатель степени -1 обозначает обратную матрицу. В случае равновесия дисперсию тепловых флуктуаций можно вычислить по формулам термодинамики. Коэффициенты λ_{ik} выражаются через производные энтропии S ,

$$\lambda_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (7)$$

взятые в предельной точке, где энтропия имеет максимум. Наиболее подробно изучены бифуркации равновесия, отвечающие непрерывным фазовым переходам. В этом случае бифуркационную переменную называют параметром порядка. На плоскости давление — температура около критической точки перехода жидкость — пар бифуркационные кривые спинодального распада сходятся к линии равновесия фаз (кривой кипения), образуя точку возврата бистабильной области (перегрева и переохлаждения). В окрестности этой точки велика сжимаемость (т.е. восприимчивость по отношению к плотности — параметру порядка перехода). Теория непрерывных переходов и критических явлений в условиях равновесия детально разработана (см., например, [12]). В дальнейшем мы не будем останавливаться на этих вопросах.

3. Уравнения Ланжевена

Численное моделирование окрестности бифуркаций считается ненадёжным: нет приемлемой воспроизводимости результатов счёта; плавное изменение параметров не приводит к плавным сдвигам решения, оно испытывает беспорядочные скачки. Причина очевидна: из-за высокой восприимчивости округления при численном интегрировании уравнений в конечных разностях вызывают значительные изменения этих решений. Выход состоит в том,

чтобы приблизить постановку задачи к экспериментальной ситуации. Беспорядочные пульсации в критической области наблюдаются не только при численном счёте, но и на опыте. Наряду с тепловыми флуктуациями их источником является сторонний шум. В равновесии это неоднородности, примеси и т.п., "размазывающие" непрерывный фазовый переход. В активных системах воздействие неизбежно сопровождается хотя бы слабым шумом. Необходимо вводить в уравнения контролируемый шум, который даёт хаотизацию решений, превышающую то, что обусловлено округлениями и контролем не поддаётся. Полученные при этом решения — случайные функции времени — подлежат статистической обработке.

Уравнения, содержащие слабый случайный источник, называют уравнениями Ланжевена [4]. В случае одного уравнения (4) рассмотрим в качестве функции $y(t)$ белый шум

$$\langle y(t)y(t') \rangle = \text{const} \delta(t - t'). \quad (8)$$

Под действием случайной накачки возникает беспорядочное движение около предельной точки. Согласно (4), коррелятор

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \exp[-\lambda(t_1 + t_2)] \times \times \int_{-\infty}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{t_2} dt' \langle y(t)y(t') \rangle \exp[\lambda(t + t')] \quad (9)$$

или

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \frac{\text{const}}{2\lambda} \exp(-\lambda|t_1 - t_2|). \quad (10)$$

Постоянная в (8), (10) равна $(y^2)_\omega$, где компонента Фурье белого шума не зависит от частоты. Для компонент Фурье коррелятора

$$(x^2)_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t - t') \rangle \exp(i\omega t') dt' \quad (11)$$

имеем

$$(x^2)_\omega = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \langle x^2 \rangle = \frac{(y^2)_\omega}{\lambda^2 + \omega^2}. \quad (12)$$

Формулы (9)–(12) совпадают с аналогичными выражениями [1] для равновесия. Однако в [1] дисперсия флуктуаций $\langle x^2 \rangle$ — известная величина, она вычисляется с помощью термодинамических формул. Например, для температуры $\langle \Delta T^2 \rangle = k_B T^2 / c_V$, k_B — постоянная Больцмана, c_V — теплоёмкость при заданном объёме. Поэтому постоянная в (8) не произвольна: её нужно подбирать так, чтобы выполнялись равенства (10) и (12) при заданной дисперсии $\langle x^2 \rangle$. В случае активной системы вдали от равновесия интенсивность случайного источника $y(t)$ нужно рассматривать как заданную шумовую составляющую воздействия. Как правило, пульсации, обусловленные этим шумом, больше тепловых флуктуаций.

Уравнения Ланжевена позволяют максимально приблизить к экспериментальной ситуации численное моделирование систем с высокой восприимчивостью. Последовательность действий такова. Источник слабого белого шума дописывается в одном или нескольких из рассматриваемых уравнений. Производится численное интегрирование полученной системы на выбранном интервале времени, который должен быть велик по

сравнению с характерными временами в исходной задаче (временем установления и др.). Эта процедура повторяется для ряда значений бифуркационного параметра в критической области, а также интенсивности (спектральной плотности) шума. Таким образом, получается массив данных (набор временных рядов) для статистической обработки. В разделе 4 мы рассмотрим простой пример численного моделирования критических явлений.

4. Критический аттрактор

С точки зрения нелинейной физики экзотермические реакции интересны тем, что между температурой и скоростью реакции имеет место обратная связь. Реакция вызывает нагрев, который, в свою очередь, ускоряет реакцию. Математическая модель, описывающая процессы с участием таких реакций, должна включать уравнения с экспоненциальными источниками (зависимость скорости реакции от температуры обычно активационная). Сильная нелинейность обеспечивает контрастную картину, легче обнаруживаются новые эффекты. Экзотермическое превращение вещества в проточном реакторе описывается с помощью уравнений [14, 15]

$$\frac{d\eta}{dt} = \Phi(\eta, T) - \eta\tau^{-1}, \quad (13)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{c} \Phi - \alpha(T - T_a) \quad (14)$$

для концентрации продукта реакции (глубины превращения) η и температуры T . Скорость реакции в простейшем случае равна

$$\Phi = (1 - \eta)k \exp\left(-\frac{E}{T}\right), \quad (15)$$

k — постоянная с размерностью частоты, E — энергия активации, выраженная в тех же единицах, что и температура. Обычно $E \gg T$. Другие обозначения: τ — время пребывания смеси в реакторе, Q — теплота реакции, c — теплоёмкость, $\alpha = \tau^{-1} + \tau_f^{-1}$, τ_f — время остывания реактора без протока, т.е. при $\tau \rightarrow \infty$, T_a — температура термостата и поступающей смеси.

Для системы (13), (14) ещё в [14] была обнаружена бистабильность: в зависимости от начальных условий возможен выход либо на холодный стационарный режим с температурой, близкой к T_a , либо на горячий режим с $T - T_a \approx Q/c\alpha\tau$. Предполагается, что время перемешивания мало по сравнению с τ . Вместо (13), (14) можно рассматривать одно уравнение второго порядка. Например, выражая η через T и dT/dt с помощью (14), получим [16]

$$\ddot{T} = -\frac{dV}{dT} - \gamma(T, \dot{T})\dot{T}, \quad (16)$$

точка над буквой означает дифференцирование по времени,

$$-\frac{dV}{dT} = -\frac{Q}{c\tau} k \exp\left(-\frac{E}{T}\right) + \left[k \exp\left(-\frac{E}{T}\right) + \frac{1}{\tau} \right] \alpha(T - T_a), \quad (17)$$

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{\tau} + k \exp\left(-\frac{E}{T}\right) - \frac{E}{T^2} [\alpha(T - T_a) + \dot{T}]. \quad (18)$$

Уравнение (16) в математическом отношении эквивалентно уравнению одномерного движения частицы с единичной массой и координатой T под действием потенциальной силы (17) и силы трения $-\gamma\dot{T}$. При задании в начальный момент времени η , T начальная "скорость" $\dot{T}$ определяется с помощью (14). "Коэффициент трения" (18) может в зависимости от параметров менять знак и становиться отрицательным. В этом (16) сходно с уравнением Ван-дер-Поля [17]. Возможность выполнения неравенства $\gamma < 0$ обусловлена, очевидно, накачкой — протоком вещества через реактор.

Вне бистабильной области потенциал $V(T)$ имеет один минимум, а внутри этой области — три экстремума: два минимума и максимум между ними. Положения экстремумов $T_d < T_m < T_u$, разумеется, совпадают с температурами стационарных решений системы (13), (14). Однако, рассматривая $V(T)$, можно увидеть, какое из двух устойчивых состояний отвечает более глубокому минимуму. Введём в качестве параметров числа Дамкёлера (Damköhler) и Семёнова,

$$D = \tau k \exp\left(-\frac{E}{T_c}\right), \quad S = D(\alpha\tau)^{-1}, \quad (19)$$

а масштабной температурой T_c выберем температуру в точке возврата, которой заканчивается бистабильная область на плоскости (D, S) . В этой точке все три экстремума сливаются.

Легко видеть, что точка возврата подобна [18] критической точке на плоскости давление–температура системы жидкость–пар. Линия $V_d = V_u$ подобна кривой кипения (равновесию фаз), а границы бистабильной области — спинодалям. Для численного моделирования введём безразмерную температуру

$$\vartheta = \frac{E}{T_c^2}(T - T_c), \quad \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \approx \exp\left(-\frac{E}{T_c}\right) \exp \vartheta. \quad (20)$$

В точке возврата $D = 1$, $S = 4/Z$, где $Z = EQ/(cT_c^2)$ — число Зельдовича, $\vartheta = 0$, температура термостата $\vartheta_a = -2$. В окрестности этой точки удобно использовать параметры d, s , $D = 1 + d$, $s = (4/Z)(1 + s)$. Тогда граница бистабильной области принимает вид

$$s = \frac{d}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}(-d)^{3/2}. \quad (21)$$

Прямая $s = d/2$ при $d < 0$ отвечает равновесию фаз, а при $d > 0$ подобна критической изохоре. На ней по-прежнему $\vartheta \approx 0$, а в бистабильной области $\vartheta \approx \pm\sqrt{-6d}$. На спинодалях $\vartheta \approx \mp\sqrt{-2d}$.

В пространстве состояний траектории, подходя к предельной точке, начинают беспорядочно осциллировать, плотно покрывая целую область — критический аттрактор. Свойства такого аттрактора изучим на примере системы

$$\dot{\eta} = (1 - \eta) \exp \vartheta - \eta D^{-1}, \quad (22)$$

$$\dot{\vartheta} = Z(1 - \eta) \exp \vartheta - \frac{2 + \vartheta}{S} - \frac{2}{S} \gamma(t), \quad (23)$$

полученной из (13), (14) с помощью преобразований, о которых сказано выше. Источник слабого шума в (23) может быть обусловлен турбулентностью в контуре охлаждения реактора. На рисунке 1 дана картина траек-

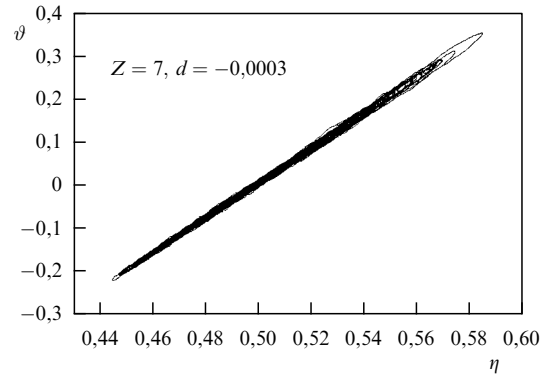


Рис. 1. Общий вид критического аттрактора.

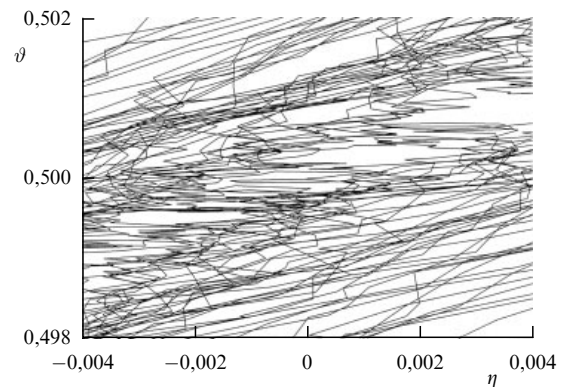


Рис. 2. Малый участок аттрактора, показанного на рис. 1. Масштаб увеличен в 100 раз. Виден броуновский характер траектории.

тории [19] на плоскости (η, ϑ) при $D_c - 1 = 3 \times 10^{-4}$, $S_c - 1 = 1.5 \times 10^{-4}$. Видны форма и размеры критического аттрактора. Малый участок этого графика, показанный на рис. 2 в крупном масштабе, демонстрирует броуновский характер этой траектории.

5. Ван-дер-ваальсова и флуктуационная области

Линеаризованное около минимума ϑ_0 уравнение (16) принимает вид

$$\ddot{\vartheta}_1 + \gamma_0 \dot{\vartheta}_1 + \omega_0^2 \vartheta_1 = 0, \quad (24)$$

где масштаб времени $(1/k) \exp(E/T_c)$, $\vartheta_1 = \vartheta(t) - \vartheta_0$, $\gamma_0 = \gamma(\vartheta = \vartheta_0, \dot{\vartheta} = 0)$. Частота

$$\omega_0 = \left[\exp \vartheta_0 \left(\frac{Z}{D} - \frac{3 + \vartheta_0}{S} \right) - \frac{1}{DS} \right]^{1/2}. \quad (25)$$

В точке возврата частота ω_0 обращается в нуль, а вблизи этой точки мала. Иначе говоря, мала возвращающая сила, которая появляется при отклонении реактора от стационарного режима. Малое воздействие $\varepsilon \exp(-i\omega t)$ в правой части (24) вызывает отклик $A \exp(-i\omega t)$. Определяя восприимчивость $\sigma(\omega)$ как отношение A/ε , получаем

$$\operatorname{Re} \sigma = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R}, \quad \operatorname{Im} \sigma = \frac{\gamma_0 \omega}{R}, \quad R = (\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma_0^2 \omega^2. \quad (26)$$

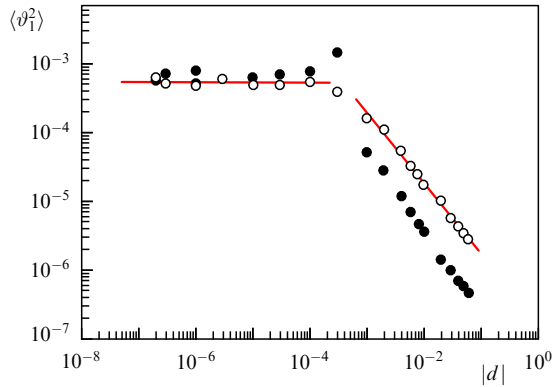


Рис. 3. Зависимость дисперсии флуктуаций температуры от расстояния до точки возврата: (○) $d > 0$, (●) $d < 0$. Прямые получены путём обработки соответствующей части графика по методу наименьших квадратов.

Если в правой части (24) рассматривать слабый белый шум, то компоненты Фурье корреляционной функции $\langle \vartheta_1(t) \vartheta_1(t') \rangle$ равны

$$(\vartheta^2)_\omega = \rho \gamma_0^{-1} \frac{\text{Im } \sigma}{\omega}, \quad (27)$$

где ρ — не зависящая от частоты спектральная плотность шума (аналог флуктуационно-диссипационной теоремы, роль температуры играет величина $\rho/2\gamma_0$). Интеграл по спектру (27) есть дисперсия, так что при $\vartheta_0 \rightarrow 0$ нарастают все моды, но усиление мягких мод преобладает. Чем ближе критическая точка, тем выше и острее низкочастотный пик.

Формулы (24)–(27) принадлежат, так сказать, ван-дер-ваальсовой области. В достаточно малой окрестно-

сти точки возврата существенна нелинейность. Границы этой окрестности можно определить, сопоставив, по аналогии с критерием Гинзбурга [20], дисперсию критических флуктуаций $\langle \vartheta_1^2 \rangle$ и характерное значение $\vartheta_0^2 \sim |d|$. Нелинейные эффекты изучены [21] с помощью численного интегрирования системы (22), (23). Источник слабого шума в (23) может быть обусловлен турбулентностью в контуре охлаждения реактора.

На рисунке 3 показана в дважды логарифмическом масштабе зависимость дисперсии $\langle \vartheta_1^2 \rangle$ от $|d|$. При $d > 0$, т.е. вне бистабильной области, сначала имеет место рост по степенному закону, затем — насыщение. Критический показатель, согласно (27), равен -1 , обработка по методу наименьших квадратов даёт $-0,99$.

6. Переходы Крамерса

При $d < 0$ между ван-дер-ваальсовой и флуктуационной частями графика на рис. 3 расположен пик дисперсии. В бистабильной области потенциал имеет два минимума, барьер между которыми понижается по мере уменьшения $|d|$. Появляется возможность спонтанных переходов между минимумами [22] в результате диффузии в поле $dV/d\vartheta$ под действием шума. Вероятность переходов W подчиняется закону Аррениуса, который в данном случае можно записать в виде

$$W \propto \exp \left[-\frac{2\gamma_0}{\rho} (V_m - V_{d,u}) \right]. \quad (28)$$

На рисунке 4 показана зависимость $\vartheta(t)$ для двух значений d , одинаковых по абсолютной величине, но отличающихся знаком. При $d < 0$ наряду с критическими пульсациями время от времени наблюдаются большие скачки

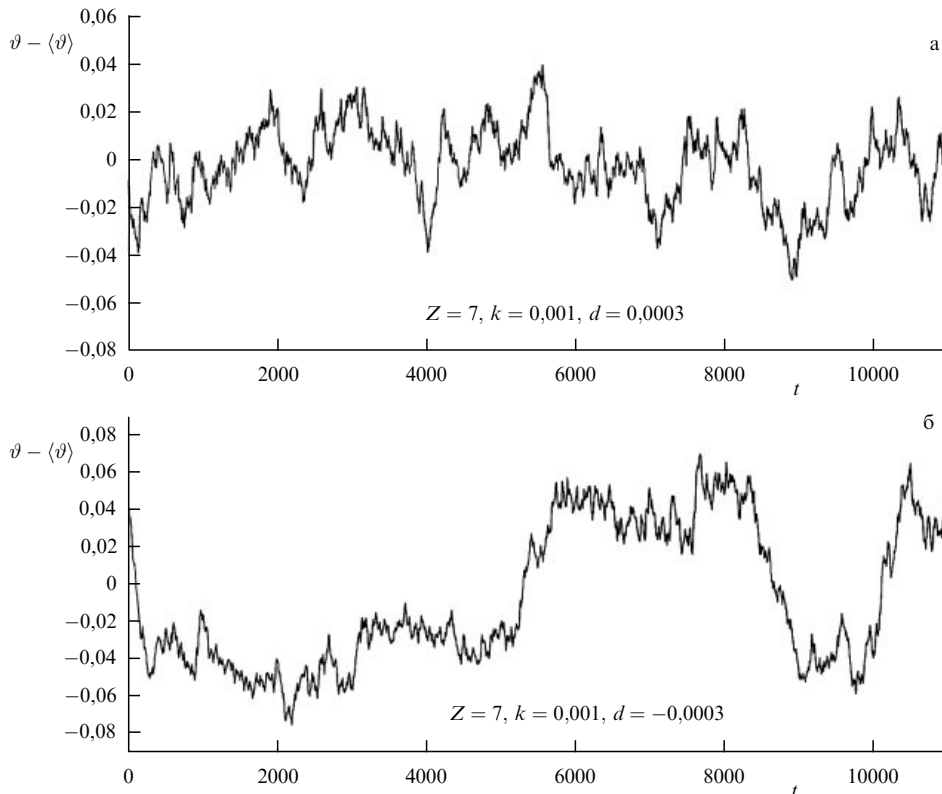


Рис. 4. Примеры зависимости температуры от времени, $|d| = 3 \times 10^{-4}$. (а) $d > 0$, (б) $d < 0$.

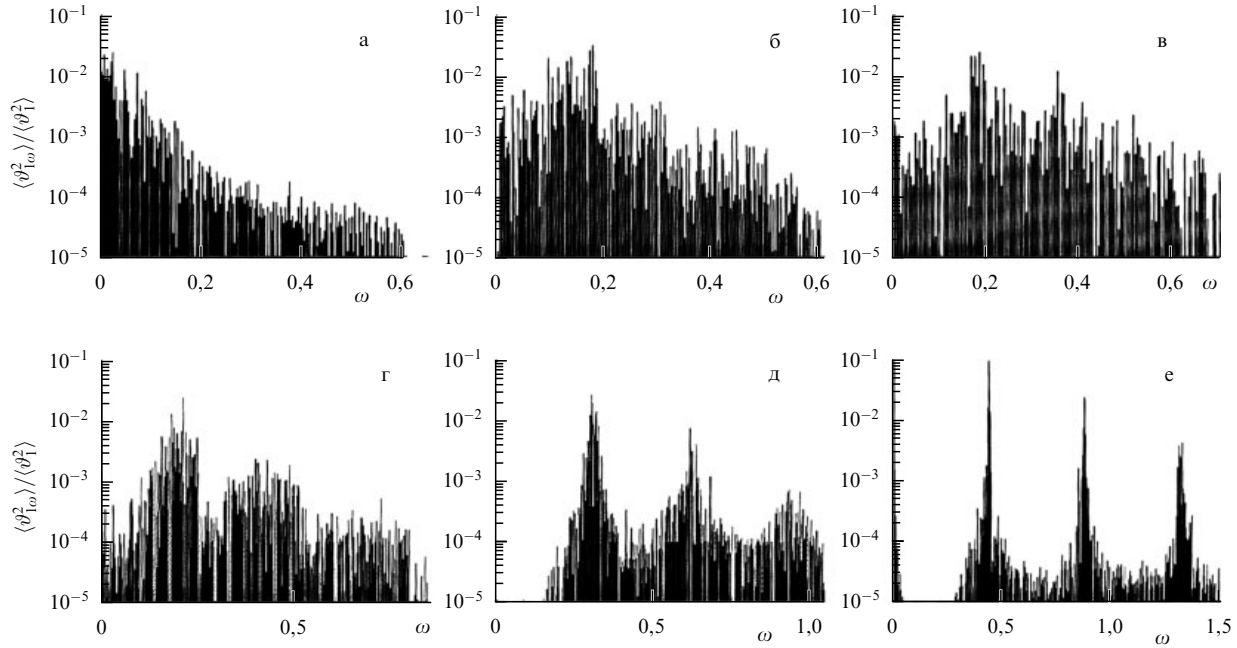


Рис. 5. Частотные спектры при $Z = 7$ (а), 8 (б), $8,1$ (в), $8,2$ (г), $8,5$ (д), 9 (е). По оси абсцисс отложена величина $\omega = 2\pi n/t_0$, n — целые числа, t_0 — время счёта.

температуры: хаотические колебания около одной из предельных точек на плоскости (η, ϑ) сменяются колебаниями около другой точки. График демонстрирует своеобразную перемежаемость. Переходы между горячим и холодным состояниями приводят к существенному росту дисперсии, вычисляемой как $\langle (\vartheta - \vartheta_0)^2 \rangle$. При $|d| \rightarrow 0$ разность $V_m - V_{d,u}$ уменьшается и вклад скачков исчезает. Если $|d|$ увеличивать, то вероятность (28) экспоненциально спадает, за время счёта не происходит ни одного скачка. Нелинейные эффекты в бистабильной области более выражены благодаря квадратичному члену в разложении $dV/d\vartheta$ около минимума потенциала по степеням ϑ (при $d > 0$ такой член отсутствует). Как видно из рис. 3, для этой области тоже есть интервал, где действует степенной закон $\langle \vartheta^2 \rangle \propto |d|^{-n}$, но показатель $n \approx 1,2$ заметно больше единицы.

Сходные скачки в бистабильной системе описаны в [23]: изучались вынужденные колебания микромеханического вибратора, бистабильность обусловлена S-образной кривой нелинейного резонанса. Отметим также, что в [24] численно моделировались флуктуации при переходе от одной потенциальной ямы к двум, но изучалась только "симметричная" фаза (с одним минимумом).

7. Рождение предельного цикла из критического хаоса

В отличие от критической точки переходов между фазами одинаковой симметрии, система (22), (23) может иметь периодические решения [25–27]. Граница колебательной неустойчивости определяется, согласно (16), условием $\gamma(T = T_0, \dot{T} = 0) = 0$, где T_0 — температура рассматриваемого стационарного режима. Если смещать параметры вдоль прямой $s = d/2$ ($d > 0$), то γ обращается в нуль при $Z = Z_c \approx 8 + 2d^2$. Вблизи этого порога, при $Z = 8$, вид спектра пульсаций качественно не отличается от картины при $Z = 7$. Дальнейшая эволюция

спектра показана на рис. 5. При $Z = 8$ спектр расширяется, возбуждается много мод из-за малости "трения", но спектр остаётся сплошным. Расширение продолжается и при $Z = 8,1$, т.е. в области, где без шума установился бы режим регулярных колебаний. Лишь при больших значениях Z , глубоко в области неустойчивости, на фоне непрерывного спектра появляются пики основной частоты и обертонов. Сгущение мощности сплошного спектра в линии можно интерпретировать как эффект синхронизации [28] или классический аналог бозе-эйнштейновской конденсации. Действительно, состояние при периодическом режиме характеризуется фазой. При конденсации число частиц (или квантов) в данном состоянии велико, и соотношение неопределённостей для числа частиц и фазы не накладывает существенных ограничений на точность определения последней. Сходные соображения о макроскопическом заполнении длинноволновых мод за счёт коротковолновых содержатся в [29].

8. Бегущие фронты и импульсы у порога распространения

В качестве примера системы с распределёнными параметрами рассмотрим набор малых реакторов мгновенного перемешивания, взаимодействующих посредством диффузии и теплопроводности. Вместо (22), (23) теперь запишем

$$\dot{\eta} = L\Delta\eta + (1 - \eta) \exp \vartheta - \eta D^{-1}, \quad (29)$$

$$\dot{\vartheta} = \Delta\vartheta + Z(1 - \eta) \exp \vartheta - \frac{2 + \vartheta}{S} - \frac{2}{S} y(t), \quad (30)$$

где масштаб длины $\sqrt{(\chi/k) \exp(E/T_*)}$, χ — температуропроводность, L — отношение коэффициента диффузии к χ (число Льюиса, Lewis), масштабную температуру теперь удобно выбрать как $T_* = T_a + Q/c$. Реакторы

можно расположить в виде цепочки или мембраны соответственно, Δ — одно- или двумерный оператор Лапласа. Для уединённых волн в цепочке граничные условия для (29), (30) запишутся в виде

$$x = \pm\infty, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0. \quad (31)$$

Бегущий фронт изучим в системе без протока, при $\tau \rightarrow \infty$. Если отключить шум $y(t)$ в (30), то такой фронт будет состоять из трёх зон — прогрева, реакции и остывания [30]. Зона реакции сосредоточена около температурного максимума и узка по сравнению с двумя другими. В зоне прогрева реакцией можно пренебречь, так как температура недостаточно высока, в зоне остывания исходное вещество уже израсходовано. В системе отсчёта, движущейся вместе с волной, уравнения (29), (30) стационарны, $\partial/\partial t \rightarrow u\partial/\partial x$, u — скорость фронта. Химический источник в (30) заменим приближённо функцией $\delta(x)$, x — координата зоны реакции, а вместо (29) используем условие

$$u = u_0 \exp \vartheta_m, \quad (32)$$

где u_0 — скорость фронта без потерь, при $S \rightarrow \infty$, ϑ_m — максимальная температура. Легко увидеть, что задача (29)–(32) имеет два решения, две ветви $u(S)$. Верхняя ветвь растёт с возрастанием S , нижняя — падает. Такая ветвь очевидно неустойчива. Порогу отвечает слияние ветвей.

Для задачи с δ -источником нетрудно записать решение, относящееся к нестационарной волне:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\pi L}} \int_0^t \frac{\varphi(t')}{\sqrt{t-t'}} \exp \left[-\frac{L^2(t', t)}{4L(t-t')} \right] dt' &= 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(t')}{\sqrt{t-t'}} \exp \left[-\frac{L^2(t', t)}{4(t-t')} - \frac{t-t'}{S} \right] dt' &= 1 + Z\vartheta_m. \end{aligned} \quad (33)$$

$$(34)$$

Здесь $\varphi^2 = u_0^2 \exp \vartheta_m$, $L(t', t) = \int_{t'}^t u(t'') dt''$. Однако в общем случае (33), (34) — нелинейные интегро-дифференциальные уравнения для u , ϑ_m , решать их отнюдь не проще, чем исходную задачу. Вблизи порога скорость меняется медленно, и, используя разложение по степеням малого ускорения du/dt , удаётся получить [31] квазистационарное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \frac{s - 2v^2}{t_*}, \quad t_* = \frac{Z\sqrt{e}}{u_0^2} \left[L - 1 + \frac{2}{Z}(L+2) \right], \quad (35)$$

где $v = u/u_{th} - 1$, $s = S/S_{th} - 1$, индекс th отвечает пороговым значениям. Над порогом имеются две стационарные точки, меньшая неустойчива, при $s < 0$ скорость падает, волна затухает. Так как реальная среда всегда содержит хотя бы небольшие неоднородности, а восприимчивость вблизи порога велика, движение волны становится хаотическим. Мягкие моды преобладают. Поведение спектра флуктуаций скорости показано на рис. 6.

Квазистационарное уравнение фактически применимо лишь при значениях L , близких к единице. При $L > 1$ плоский фронт неустойчив и превращается в искривлённый, при $L < 1$ развивается колебательная неустойчивость. Около порога эта неустойчивость даёт

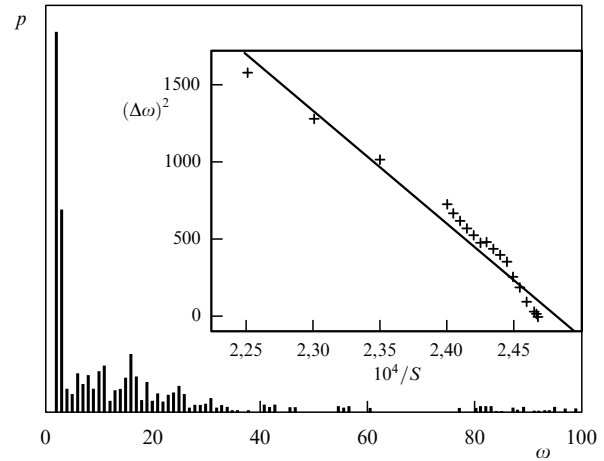


Рис. 6. Типичный спектр пульсаций $u(t) - \langle u \rangle$. На оси абсцисс отложена частота $\omega = 2\pi n/t_0$, n — целое число, $t_0 = 60000$ — время счёта. На вставке показана зависимость ширины спектрального максимума от расстояния до порога.

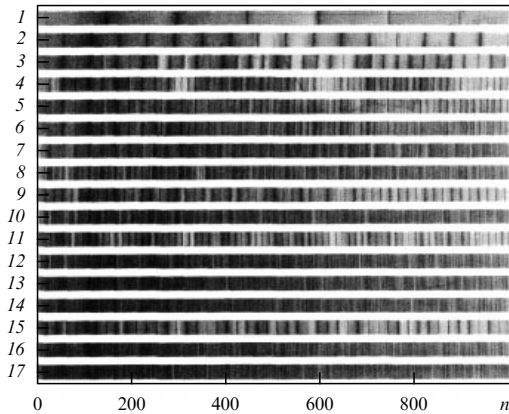


Рис. 7. (См. в цвете онлайн.) Частотные спектры пульсаций скорости фронта в зависимости от $\omega = 2\pi n/t_0$, время счёта $t_0 = 10^5$. Значения S : 350 (1), 328 (2), 326,914 (3), 326,640 (4), 326,620 (5), 326,611 (6), 326,551 (7), 326,500 (8), 326,466 (9), 326,400 (10), 326,375 (11), 326,350 (12), 326,315 (13), 326,250 (14), 326,230 (15), 326,219 (16), 326,213 (17). Превращение дискретного спектра в непрерывный идёт через перемежаемость.

беспорядочные пульсации скорости без источника стороннего шума (динамический хаос). По мере смещения параметров к порогу происходят удвоения периода. Интервалы между удвоениями, в согласии с [32], убывают по закону геометрической прогрессии. Граница хаотических режимов $S_* = 326,611$. Между S_* и порогом $S_{th} = 326,2$ наблюдается перемежаемость как в зависимости скорости от времени, так и в эволюции частотных спектров с возрастанием S . Примеры [33] спектров показаны на рис. 7.

Если скорость протока (поперечного по отношению к цепочке) отлична от нуля, то решения могут иметь вид волн переключения между горячим и холодным участками или бегущих импульсов. В импульсе после зоны реакции исходное состояние восстанавливается благодаря потоку. Численное моделирование проводилось [34] при $L = 1$. По мере приближения значений параметров к пороговым время выхода на режим равномерного движения импульса растёт и сопровождается осцилля-

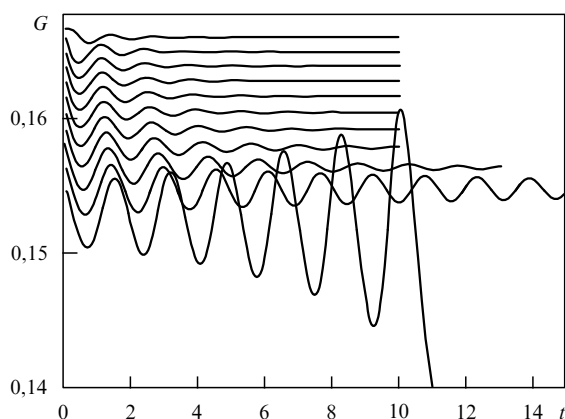


Рис. 8. Изменение во времени мощности импульса (интеграла по источнику) при значениях S , близких к порогу. Верхняя кривая отвечает $S = 770$, каждая из последующих построена при уменьшении S на единицу. При $S \leq 761$ импульс необратимо затухает.

циями (рис. 8). Период осцилляций велик по сравнению с характерным временем $(1/k) \exp[E/(T_a + Qc^{-1})]$ и растёт при $S \rightarrow S_{th}$. Вновь мы видим доминирование мягких мод около бифуркации.

9. Заключение

Нарастание мягких мод около бифуркации стационарного режима является универсальным. Наряду с численным моделированием оно изучалось в реальных опытах [35] с электрической схемой, рабочим элементом которой служил диностор. Этот прибор имеет S-образную вольт-амперную характеристику. Последовательно с диностором включалось постоянное (не зависящее от тока) сопротивление R . Режимы постоянного тока определяются пересечением характеристики $I(V)$ и нагрузочной прямой $I = (V_0 - V)/R$ (I — ток, V_0 — приложенное напряжение, V — напряжение на диносторе). В зависимости от значений R , V_0 возможны либо одно, либо три пересечения, среднее из них неустойчиво. Для каждой пары значений R , V_0 записывалась зависимость пульсаций напряжения V от времени, время каждой записи составляло 100 с. Всего было проведено 256 опытов. На рисунке 9 даны примеры спектров. Вдали от бифуркации получается обычный белый шум, вблизи — растут все моды (спектр нормирован на дисперсию), но мягкие — в большей степени. Формируется максимум, точнее, резонанс на нулевой частоте.

Судить о приближении бифуркации стационарного режима (катастрофы) сложной искусственной или природной системы можно заранее по нарастанию мягких мод в спектре её шумов. Создание приборов, следящих за спектром, имеет очевидное значение. Отчёт Ростехнадзора по расследованию аварии на Саяно-Шушенской ГЭС, опубликованный на сайте <http://www.scientific.ru/trv/archive/act.doc>, содержит лишь один график амплитуды вибраций крышки подшипника турбины. Крышка была сорвана, в машинный зал хлынула вода. За время наблюдений (около 4,5 месяцев) среднее значение амплитуды возросло в три раза, а максимальное — в 15 раз. Сообщается, что резонансов обнаружено не было. Это означает, что различие среднего и максимального значений обусловлено сжатием спектра (резонанс на нулевой

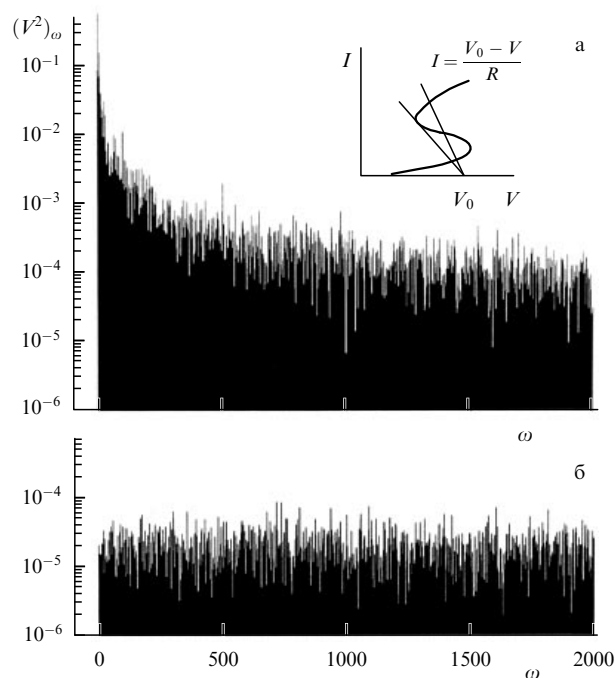


Рис. 9. (См. в цвете онлайн.) Частотные спектры пульсаций вблизи и на некотором удалении от точки бифуркации. (а) $R = 75$ кОм, $V_0 = 30$ В, (б) $R = 60$ кОм, $V_0 = 32$ В. Частота дана в единицах $2\pi n/t_0$, t_0 — время опыта.

частоте, как сказано выше). В [36] мягкие моды названы предвестниками катастроф. Другой способ предсказания катастроф, compressive sensing, предложен в [37]. Неизвестные уравнения восстанавливаются по экспериментальным данным (временным рядам). Правая часть каждого из искоемых уравнений записывается в виде разложения по степеням зависимых переменных. Коэффициенты в разложениях определяются с помощью компьютерной программы, причём оказывается, что большая часть из них пренебрежимо мала. Однако из описания [37] видно, что такую процедуру реально провести лишь для относительно небольшого числа степеней свободы (уравнений), не говоря уже о распределённых системах. Наш метод, представленный в настоящей статье, прост и не имеет таких ограничений. Мы видим свой долг в том, чтобы как можно шире ознакомить с этим методом научно-техническое сообщество.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-03-00058-а, и Программы Президиума РАН П-02, подпрограмма 1, код 2114.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1 (М.: Физматлит, 1995) [Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
2. Ornstein L S, Zernike F *Proc. Acad. Sci. Amsterdam* **12** 793 (1914)
3. Weissman M B *Rev. Mod. Phys.* **60** 537 (1988)
4. Langevin P C R. *Acad. Sci.* **146** 530 (1908) [Ланжевэн П *Избранные труды* (М.: Изд-во АН СССР, 1960) с. 338]
5. Lorenz E N J. *Atmos. Sci.* **20** 130 (1963)
6. Poincaré H *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles* (Paris: Gauthier-Villars, 1879); Пуанкаре А *Избранные труды* Т. 1 *Новые методы небесной механики* (М.: Наука, 1971)

7. Арнольд В И *УФН* **141** 569 (1983) [Arnol'd V I *Sov. Phys. Usp.* **26** 1025 (1983)]
8. Арнольд В И *Теория катастроф* 5-е изд. (М.: URSS, 2007) [Arnold V I *Catastrophe Theory* 3rd ed. (Berlin: Springer-Verlag, 1992)]
9. Whitney H *Ann. Math.* **62** 374 (1955)
10. Лоскутов А Ю *УФН* **180** 1305 (2010) [Loskutov A *Phys. Usp.* **53** 1257 (2010)]
11. Заславский Г М, Сагдеев Р З *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса* (М.: Наука, 1988); Sagdeev R Z, Usikov D A, Zaslavsky G M *Nonlinear Physics. From the Pendulum to Turbulence and Chaos* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1988)
12. Binney J J et al. *The Theory of Critical Phenomena. An Introduction to the Renormalization Group* (Oxford: Clarendon Press, 1998)
13. Ivleva T P et al. *Chem. Eng. J.* **168** 1 (2011)
14. Франк-Каменецкий Д А *ЖФХ* **13** 738 (1939); Frank-Kamenetskii D A *Acta Physicochim. USSR* **10** 365 (1939)
15. Зельдович Я Б *ЖТФ* **11** 493 (1941)
16. Руманов Э Н *Докл. РАН* **408** 325 (2006) [Rumanov É N *Dokl. Phys.* **51** 238 (2006)]
17. Van der Pol B *Radio Rev.* **1** 701 (1920)
18. Мержанов А Г, Руманов Э Н *УФН* **151** 553 (1987) [Merzhanov A G, Rumanov É N *Sov. Phys. Usp.* **30** 293 (1987)]
19. Ваганова Н И, Руманов Э Н *Докл. РАН* **440** 463 (2011) [Vaganova N I, Rumanov E N *Dokl. Phys.* **56** 507 (2011)]
20. Гинзбург В Л *ФТТ* **2** 2031 (1960) [Ginzburg V L *Sov. Phys. Solid State* **2** 1824 (1961)]
21. Ваганова Н И, Руманов Э Н *ЖЭТФ* **135** 395 (2009) [Vaganova N I, Rumanov É N *JETP* **108** 349 (2009)]
22. Kramers H A *Physica* **7** 284 (1940)
23. Chan H B, Stambaugh C *Phys. Rev. Lett.* **99** 060601 (2007)
24. Kravtsov Yu A, Surovyatkina E D *Phys. Lett. A* **319** 348 (2003)
25. Франк-Каменецкий Д А, Сальников И Е *ЖФХ* **17** 79 (1943)
26. Aris R, Amundson N R *Chem. Eng. Sci.* **7** 121 (1958)
27. Vaganov D A, Samoilenko N G, Abramov V G *Chem. Eng. Sci.* **33** 1131 (1978)
28. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001) [Пиковский А, Розенблум М, Куртс Ю *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (М.: Техносфера, 2003)]
29. Келдыш Л В, Тиходеев С Г *ЖЭТФ* **91** 78 (1986) [Keldysh L V, Tikhodeev S G *Sov. Phys. JETP* **64** 45 (1986)]
30. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **11** 159 (1941)
31. Довженко А Ю, Маклаков С В, Руманов И Э, Руманов Э Н *ЖЭТФ* **122** 1125 (2002) [Dovzhenko A Yu, Maklakov S V, Rumanov I E, Rumanov E N *JETP* **95** 973 (2002)]
32. Feigenbaum M J *J. Stat. Phys.* **19** 25 (1978)
33. Довженко А Ю, Руманов Э Н *ЖЭТФ* **125** 406 (2004) [Dovzhenko A Yu, Rumanov É N *JETP* **98** 359 (2004)]
34. Довженко А Ю, Руманов Э Н *ЖЭТФ* **131** 567 (2007) [Dovzhenko A Yu, Rumanov É N *JETP* **104** 508 (2007)]
35. Довженко А Ю, Довженко М, Машкинов Л Б, Руманов Э Н *Докл. РАН* **388** 181 (2003) [Dovzhenko A Yu, Dovzhenko M, Mashkinov L B, Rumanov É N *Dokl. Phys.* **48** 13 (2003)]
36. Руманов Э Н, Ваганова Н И *Природа* (10) 23 (2011)
37. Wang W-X et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 154101 (2011)

Critical phenomena far from equilibrium

E.N. Rumanov

*Institute of Structural Macrokinetics and Materials Science, Russian Academy of Sciences,
ul. Akad. Osipyana 8, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation
E-mail: ed@ism.ac.ru*

Stationary regimes of an active system — i.e., one in which dissipation is compensated by pumping — are considered. Approaching the bifurcation point of such a regime leads to an increase in susceptibility, with soft modes giving the dominant contribution. Weak noise, which is inherent to any real system, increases. Sufficiently close to bifurcation, the amplitude of random pulsations is comparable to the average value of the fluctuating quantity — as in the case of developed turbulence. Critical pulses have their spectrum independent of the original noise. The numerical simulation of the neighborhood of the bifurcation is considered unreliable because of the poor reproducibility of results. Due to the high susceptibility, calculation roundings result in ‘chaotic’ jumps in the solution in response to a smooth change in parameters. For this reason, it is necessary in the simulation process to introduce a small random function of time, the white noise. The solutions of the Langevin equations solved in this way should be processed statistically. Their properties (except for the pulse intensity) are independent of the noise induced. Examples of the statistical description of bifurcations are given.

PACS numbers: **02.70. – c**, **05.45. – a**, **64.60. – i**

DOI: 10.3367/UFNr.0183.201301f.0103

Bibliography — 37 references

Received 24 June 2011, revised 22 December 2011

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **183** (1) 103 – 112 (2013)

Physics – Uspekhi **56** (1) (2013)