

PACS numbers: 02.70.-c, 05.10.-a, 05.50.+q
DOI: 10.3367/UFNr.0182.201207j.0787

Вычислительная физика и проверка теоретических предсказаний

Л.Н. Щур

1. Введение

Вычислительная физика зародилась одновременно с созданием первых электронно-вычислительных машин¹. ЭВМ использовались физиками для достижения практической на то время цели по созданию термоядерного оружия. Одной из первых вычислительных задач мирного использования были исследования Ферми, Паста и Улама [1] по моделированию динамики одномерной нелинейной цепочки, проведённые на ЭВМ MANIAC 1 [2] в Лос Аламосе. В начале 1950-х годов было общепринято мнение о том, что нелинейность должна приводить к равномерному распределению энергии по степеням свободы, т.е. к стохастизации. Напротив, проведённые численные эксперименты выявили квазипериодическое поведение. Объяснение этому явлению было дано в 1965 г. Забуски и Крускалом [3], которые численно идентифицировали солитоны (и ввели в оборот термин "солитон") и обнаружили их неупругое рассеяние. Этот результат послужил толчком к открытию метода обратной задачи рассеяния [4], который, в свою очередь, стал ключом для точного решения нелинейных задач (см., например, монографию [5]). Это яркий пример успеха вычислительной физики и, в частности, вычислительного эксперимента — впервые численный эксперимент привёл к получению нового знания.

Другой важный метод, родившийся примерно в то же самое время, — это метод Монте-Карло, разработанный Метрополисом в сотрудничестве с Розенблэтом и Теллером для моделирования термодинамических явлений [6]. Метод Монте-Карло лежит в основе практически всех современных исследований в области статистической вычислительной физики.

Отличительная характеристика вычислительной физики состоит в использовании вычислительной техники для исследования физических явлений. Важными аспектами успешного применения ЭВМ являются алгоритмы и методы расчётов и моделирования, а также методы обработки полученных при этом результатов для извлечения нового знания.

В докладе излагается опыт автора по применению методов вычислительной физики для проверки теоретических предсказаний и гипотез. В качестве иллюстрации выбрано несколько конкретных примеров решения задач нелинейной физики и статистической механики, которые развивают и демонстрируют современное состояние этих первых областей вычислительной физики.

¹ Мы будем применять русский термин "электронно-вычислительная машина" (ЭВМ) наравне с общепринятым сегодня термином "компьютер" в тех разделах текста, где это исторически оправдано.

Л.Н. Щур. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, г. Черноголовка, Московская область, РФ
E-mail: lev@landau.ac.ru

2. Проверка интегрируемости нелинейных моделей

Развитие метода обратной задачи рассеяния привело в 1960–1980-е годы к взрывному росту числа точно решённых моделей теоретической и математической физики. В частности, были попытки точно решить уравнения двумерной гидродинамики, уравнения Янга–Миллса, космологические задачи и т.п. Применение вычислительной физики может дать наводящие аргументы в пользу интегрируемости модели или дать определённый ответ о неинтегрируемости рассматриваемой модели, а в ряде случаев достичь результата уровня "computer assistant proof", т.е. строгости на уровне теоремы.

2.1. Неинтегрируемость двумерной гидродинамики

На вопрос об интегрируемости двумерной гидродинамики можно ответить элегантно способом [7]. Энергия двумерного вихря расходится логарифмически. Составим пару из вихрей разной по знаку, но равной по модулю завихрённости κ . Энергия такой вихревой пары конечна, у неё сохраняется импульс (обе проекции), т.е. вихревая пара имеет свойства частицы. Эта частица не покоится, в одиночестве она движется по прямой с постоянной скоростью $v = \kappa/a$, где a — расстояние между вихрями. Исследуем численно задачу рассеяния друг на друге вихревых частиц завихрённости κ и $\kappa + \epsilon$, $\epsilon \ll \kappa$. Полученная зависимость угла рассеяния от прицельного расстояния нерегулярная, имеются точки накопления. Вблизи этих точек накопления растёт время жизни захваченного состояния, в котором все четыре вихря находятся по отношению друг к другу на конечном расстоянии порядка $\kappa a/\epsilon$. Расходимость времени захвата аналогична известному явлению захвата трёх тел в небесной механике, неинтегрируемость которой доказал Пуанкаре [8]. Надежда на существование дополнительных интегралов движения (в дополнение к упомянутым выше энергии и импульсам) в рассеянии вихревых пар несовместима с фактом стохастичности их рассеяния. Заметим, что работа [7] — по-видимому, первая вычислительная работа по стохастическому рассеянию.

2.2. Неинтегрируемость классических полей Янга–Миллса

Вопрос об интегрируемости классических полей Янга–Миллса был поставлен В.Е. Захаровым и широко обсуждался в научной литературе, в том числе с помощью численного решения уравнений. Чёткий ответ на этот вопрос был получен в работе [9]. Исходные уравнения Янга–Миллса с помощью допустимой подстановки можно свести к динамической системе, описываемой гамильтонианом с двумя степенями свободы. Фазовое пространство динамической системы (x, \dot{x}, y, \dot{y}) , где (x, y) — две координаты и (\dot{x}, \dot{y}) — соответствующие им импульсы, четырёхмерное. Фиксированное значение интеграла энергии $E = -(1/2)\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 y^2\} = \text{const}$ определяет в четырёхмерном пространстве трёхмерную гиперповерхность. Численно строится фазовый портрет системы в сечении Пуанкаре, т.е. сечении трёхмерной гиперповерхности полуплоскостью $y = 0$, $\dot{y} > 0$. Если бы существовал дополнительный интеграл движения I_1 , то начальные значения задавали бы его значение $I_1 = \text{const}$ и точки сечения Пуанкаре были бы изолированы или

лежали бы на замкнутых кривых, определяемых этим значением $I_1 = \text{const}$. Численное исследование выявило, что инвариантные кривые (или сепаратрисы) неподвижных точек пересекаются под ненулевым углом. Например, тривиальным периодическим решениям $x = y = +F$ и $x = y = -F$, где $F = \text{sn}(t, 1/\sqrt{2})$ — эллиптический косинус Якоби, соответствуют неподвижные точки в сечении Пуанкаре с координатами $(0; 1/\sqrt{2})$ и $(0; -1/\sqrt{2})$. Линеаризованное отображение в окрестности этих точек гиперболическое, с собственными значениями $\lambda_1 = 129,647014\dots$ и $\lambda_2 = 1/\lambda_1$. Построенные численно сепаратрисы этих точек пересекаются под углом примерно 72° . При условиях вычислений полученное значение угла намного превышает возможные погрешности его вычисления, что является доказательством неинтегрируемости уравнений Янга–Миллса в стиле computer assistant proof.

2.3. Точное решение задачи смены казнеровских эпох

Следующий пример относится к изучению статистических свойств колебательной эволюции [10] вакуумной однородной космологической модели типа IX по Бианки [11]. Длина эры n измеряется в числе колебаний эры k_n . Бесконечная последовательность k_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) определяется числами $x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$ ($0 < x_s < 1$), связанными друг с другом преобразованием $x_{s+1} = \{1/x_s\}$, где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. При этом длины $k_s = [1/x_{s-1}]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Можно написать выражение для x_s через k_s в виде цепной дроби $x_{s-1} = 1/(k_s + 1/(k_{s+1} + 1/(k_{s+2} + \dots \equiv x_s^+))$. Такой закон смены длин эпох приводит к стохастизации поведения модели при её эволюции к особенностям. Плотность распределения вероятностей на отрезке $(0, 1)$ значений $x_s \equiv x$ задаётся формулой Гаусса $w(x) = 1/(1+x) \ln 2$. Обозначим через Ω_s момент начала s -й эры, тогда можно получить следующие рекуррентные формулы, связывающие характеристики двух последовательных эр

$$\frac{\Omega_{s+1}}{\Omega_s} = 1 + \delta_s k_s \left(k_s + x_s + \frac{1}{x_s} \right),$$

$$\frac{\delta_{s+1}}{\delta_s} = 1 - \frac{k_s/x_s + 1}{\Omega_{s+1}/\Omega_s}.$$

Численное решение этих уравнений показало [12], что величина $\delta_s \equiv \delta$ имеет устойчивое распределение $P(\delta)$, график которой хорошо аппроксимируется функцией $P(\delta) = 1/(|1 - 2\delta| + 1) \ln 2$. Аналитические исследования показали, что задача может быть решена с помощью введения цепной дроби с обратной последовательностью знаменателей $x_s^- = 1/(k_{s-1} + 1/(k_{s-2} + 1/(k_{s-3} + \dots$. Оказывается, что совместное распределение вероятностей x_s^+ и x_s^- задаётся формулой $P(x^+, x^-) = 1/(1 + x^+ x^-)^2 \ln 2$, с помощью которой исходная задача решается точно и подтверждает, что выше приведённая аппроксимирующая функция является решением задачи, причём точным решением.

Это пример показателен тем, что аккуратное решение задачи может привести к открытию точного результата [12]. В своё время он существенно изменил отношение теоретиков к работам по вычислительной физике.

3. Методы Монте-Карло

Как отмечалось во введении, уже на заре применения ЭВМ для решения физических задач был разработан метод Монте-Карло для решения задач статистической физики. Само название указывает на то, что в методе используется случайность (например, при выборе значения случайной величины из определённого распределения). На ЭВМ выполняются строго детерминированные алгоритмы, поэтому случайность достичь невозможно в ходе выполнения программы. Напрашиваются два подхода, оба из которых применялись с первых дней использования ЭВМ: алгоритмический подход по генерации псевдослучайной последовательности и подход по использованию внешнего источника настоящего шума. В первом подходе поначалу применялся метод середины квадрата, предложенный фон Нейманом. Целое число из n бит возводится в квадрат. В общем случае получается $2n$ бит, из которых крайние $n/2$ бит отбрасываются, а средние n бит используются как следующее псевдослучайное число. Довольно скоро обнаружилось, что этот метод не даёт последовательности, удовлетворяющей интуитивно ожидаемой случайности. По сути, алгоритмы генерации случайного числа задают некоторое отображение некоторого количества равномерно распределённых точек единичного отрезка в себя. То есть алгоритм генерации случайного числа эквивалентен некоторой динамической системе на множестве рациональных чисел единичного отрезка. Памятуя урок первого вычислительного эксперимента Ферми, Паста и Улама по стохастизации, не следует удивляться тому, что разработка алгоритмических методов генерации псевдослучайных чисел является серьёзной научной проблемой, требующей специального внимания. В настоящем докладе мы не будем специально обсуждать эту проблему, поскольку она скорее математическая, и отошлём читателя за деталями обсуждения проблемы к нашим работам [13–15]. Второй способ состоит в использовании устройства, генерация случайности в котором основана на физическом принципе. Недавно предложен, например, метод оцифровывания флуктуирующей интенсивности хаотического полупроводникового лазера [16].

Мы уделим внимание в этом разделе методике численного анализа моделей статистической физики. При этом основная цель численного анализа моделей состоит в проверке теоретических гипотез и предсказаний.

3.1. Двумерная модель Изинга с примесями

Вопрос о влиянии примесей на критическое поведение систем является одним из наиболее интересных как с теоретической, так и с практической точек зрения. Критическое поведение двумерной модели Изинга было исследовано точно Онзагером в одной из наиболее красивых теоретических работ [17], опубликованной в 1944 г. В начале 1980-х годов братья Владимир и Виктор Доценко обнаружили, что критическое поведение теплоёмкости модифицируется логарифмической поправкой [18]. В течение длительного времени их теория была предметом интенсивных обсуждений с противоречивыми утверждениями. Было решено провести интенсивные численные исследования.

3.2. Специализированные процессоры SPP-1 и SPP-2

В 1980-е годы мощности суперкомпьютеров не было достаточно для численного исследования тонкого логарифмического поведения. Группой сотрудников Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау (ИТФ) были построены два специализированных процессора для атаки столь сложной на то время проблемы.

В 1990 г. был построен процессор [19], реализующий метод Монте-Карло с алгоритмом Метрополиса [6] и генератором псевдослучайных чисел типа сдвигового регистра R250 [20]. Был применён метод программирования с помощью паяльника. Алгоритм был проанализирован, сформулирован в виде логических операций над целыми числами и операций записи и чтения памяти. В результате удалось реализовать идеальную по эффективности архитектуру ЭВМ — все операции одного шага Монте-Карло выполнялись за один цикл памяти. Это позволило превзойти производительность суперкомпьютера Cray 1. Однако методические ошибки, связанные с порядком использования случайных чисел, не позволили получить сколь-либо значимых результатов.

В 1994 г. был построен второй специализированный процессор [21], в котором был впервые реализован кластерный метод Монте-Карло, позволяющий избежать явления критического замедления, свойственного методу Метрополиса. С помощью этого процессора было исследовано критическое поведение намагниченности, магнитной восприимчивости и теплоёмкости с достаточной точностью для уверенного подтверждения логарифмических поправок ко всем упомянутым величинам [22]. Результаты можно интерпретировать следующим образом. Корреляционная длина чистой модели Изинга $\xi \propto 1/|\tau|$, где $\tau = (T - T_c)/T$ — приведенная температура, модифицируется примесями таким образом

$$\xi \propto \frac{\sqrt{1 + (4/\pi)g_0 \ln(1/|\tau|)}}{|\tau|}.$$

При этом термодинамические величины, такие как намагниченность, восприимчивость и теплоёмкость, имеют одинаковую функциональную зависимость от корреляционной длины как в чистой модели, так и в примесной модели.

Применение специализированного процессора за счёт высокой производительности, по мощности превосходящей суперкомпьютер Cray 2, позволило впервые исследовать численно корреляционную функцию как чистой, так и примесной модели Изинга [23] в полном соответствии с упомянутой выше интерпретацией.

Таким образом, применение специализированной вычислительной техники позволило закрыть длительно существовавшую проблему проверки наличия логарифмических поправок к термодинамическим функциям двумерной модели Изинга с примесями.

3.3. Центральный заряд модели Изинга с примесями

Для модели Изинга с примесными немагнитными узлами Плечко [24] вычислил (см. также работу [25]) зависимость центрального заряда теории $g = 4,843q/(1-q)$, где q — концентрация примесных узлов. Центральный заряд входит в зависимость магнитной восприимчивости в критической области от приведенной температуры $\tau = (T - T_c)/T$ как коэффициент

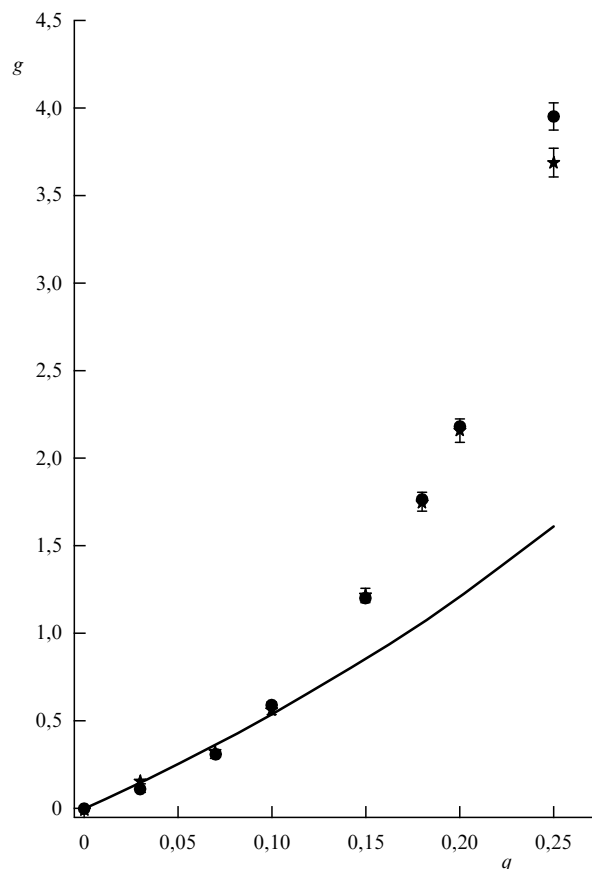


Рис. 1. Значение центрального заряда g в зависимости от концентрации примесей q . Линия — теоретическое предсказание Плечко [24]. Крестики (звёздочки) соответствуют аппроксимации численных данных для восприимчивости в низкотемпературной (высокотемпературной) области.

перед логарифмом

$$\chi(\tau) = \Gamma |\tau|^{-7/4} (1 + 0,07790315\tau)(1 - g \ln |\tau|)^{7/8}.$$

Аппроксимируя численные данные для зависимости магнитной восприимчивости от температуры этим выражением, можно получить значения двух параметров, амплитуды Γ и центрального заряда g . На рисунке 1 сплошной линией показана теоретическая зависимость центрального заряда, а также результаты аппроксимации магнитной восприимчивости по обе стороны критической точки. Обе аппроксимации дают совпадающие в пределах погрешности значения центрального заряда. При этом оба они совпадают с теоретическим предсказанием вплоть до значения концентрации примесей $q \approx 0,1$. Это значение можно оценить следующим образом. В дополнение к двум масштабам чистой модели Изинга, корреляционной длине $\xi \propto 1/|\tau|$ и размеру системы L , примесная модель имеет ещё два масштаба, среднее расстояние между примесями $l_i \propto \exp(-1/g)$ [18] и перколяционную длину $\xi_p \propto (q_c - q)^{4/3}$ [26]. Интересно, что эти две последние длины совпадают при значении $q \approx 0,1$. Физически это можно интерпретировать так, что размер кластера из немагнитных примесей достигает среднего расстояния между примесями, после чего примеси нельзя считать независимыми, т.е. беспорядок уже не слабый.

3.4. Трёхмерная модель Изинга и специализированные процессоры

Попытки точного решения трёхмерной модели Изинга пока не привели к успеху. Исследования проводятся приближёнными аналитическими методами и с помощью методов численного моделирования. Для проверки теоретических гипотез необходимы оценки критической температуры и критических индексов. Численные методы моделирования трёхмерной модели Изинга аналогичны тем, которые обсуждались выше для двумерной модели. Оценка критических индексов с помощью ренорм-групповых методов [27] $y_t = 1,587(4)$ и $y_h = 2,485(2)$ даёт значения с меньшей точностью, чем, например, полученные с помощью численного анализа высокотемпературных рядов [28] $y_t = 1,5869(4)$ и $y_h = 2,48180(15)$. Ранние оценки с помощью метода Монте-Карло [29] $y_t = 1,590(2)$ и $y_h = 2,482(7)$ находились в не очень хорошем согласии с предсказаниями аналитической ренормгрупповой теории.

В середине 1990-х годов сотрудниками ИТФ совместно с Х. Блете из университета в Дельфте был разработан кластерный процессор для исследования трёхмерной модели Изинга [30]. Был реализован однокластерный алгоритм Вольфа, с успехом ранее использованный нами в реализации процессора для исследования примесной модели Изинга [21]. Для генерации случайных чисел был разработан программируемый блок, который позволял реализовывать алгоритмы генератора типа сдвиговый регистр длиной до 16384. Каждый процессор имеет два таких блока (на рис. 2 слева сверху в два слоя), работающих параллельно, причём случайное число получается в результате операции сложения по модулю 2. Такой приём позволяет избежать практически наблюдаемых систематических ошибок [13, 31]. Спиновая память содержит 16777216 спинов, граничные условия программируемые. Всего было изготовлено 12 процессоров, которыми управляли три сервера. Полученные с их помощью оценки критической температуры трёхмерной модели Изинга и значений критических индексов [32] $y_t = 1,5865(14)$ и $y_h = 2,4814(5)$ и критической температуры $1/T_c = 0,62358(15)$ являются рекордными по точности расчётами методом Монте-Карло до настоящего времени.

3.5. Критическая перколяция

В 1995 г. Айзенман [33] на конференции по статистической физике высказал гипотезу о том, что в критической перколяции вероятность наблюдения двух бесконечных протекающих кластеров конечна в термодинамическом пределе. Этот факт противоречил интуиции. Однако численное моделирование показало, что на самом деле это имеет место, хотя это и относительно редко наблюдаемое событие. Например, из тысячи квадратных образцов *бесконечного* линейного размера в среднем 13 образцов имеют два протекающих кластера. Из одного миллиона образцов три образца имеют три протекающих кластера. Нами были проведены численные эксперименты, в которых для каждого размера образца было сгенерировано по 100 миллионов кластеров, и был рассмотрен предел решёток бесконечного размера. Полученные численные оценки были опубликованы [34] до аналитического решения проблемы Джоном Карди [35]. Совпадение оценок и аналитического решения оказалось весьма хорошим.

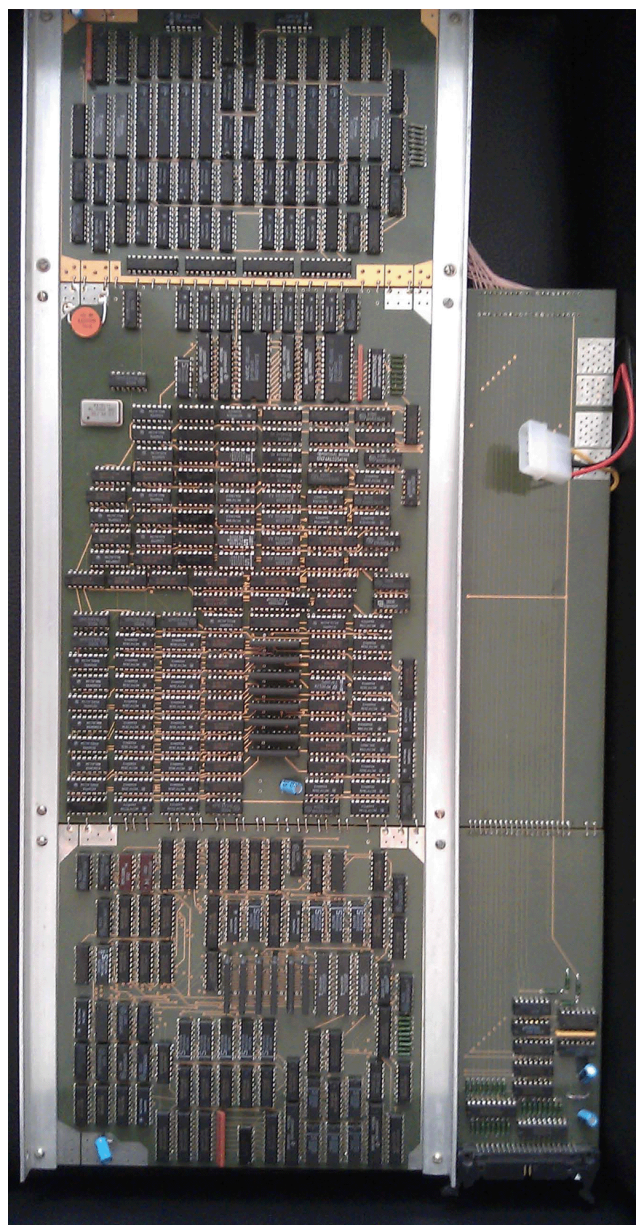


Рис. 2. Фотография платы одного из специализированных процессоров для численного исследования трёхмерной модели Изинга. Слева сверху вниз: блок генератора случайных чисел, блок однокластерного алгоритма, память спинов. Справа: блок ввода/вывода с разъёмами подключения к серверной ЭВМ.

Проведённое позднее моделирование критической перколяции [36] подтвердило полную гипотезу Айзенмана по зависимости критического индекса множественности протекания кластеров ζ_d от размерности пространства $2 < d < 6$: $\zeta_d = d/(d-1)$.

3.6. Дуальность критических интерфейсов

Критические кластеры являются фрактальными объектами [37]. Конформная теория поля [38] даёт предсказание для критических индексов двумерных объектов [39]. На основе этой теории можно вычислить фрактальные размерности критических кластеров двумерных моделей Поттса, $O(N)$ модели и т.п. Метод аналитического вычисления фрактальной размерности границ таких кластеров (так называемых критических интерфейсов) был развит сравнительно недавно [40], и уже получены

точные результаты для некоторых моделей [41]. В то же самое время Дуплантье высказал гипотезу о дуальности критических интерфейсов [42], основанную на некоторых качественных рассуждениях и аналогиях.

Проверка гипотезы дуальности критических интерфейсов с помощью численного эксперимента требует идентификации интерфейсов на решётке. Как показал анализ [43] численных результатов для моделей Поттса с числом компонент от 1 до 4 (причём не только целых!), дуальными являются границы кластеров двух типов. Первый — это геометрический кластер, который состоит из соседних спинов, имеющих один и тот же цвет. Второй — это кластер Фортуина–Кастеляйна, который содержит меньше спинов и является более разреженным, чем геометрический кластер, поскольку некоторые ближайшие спины разориентированы (нескоррелированы) в силу воздействия теплового резервуара. Их определение на медиальной решётке даётся однозначно и чётко алгоритмизируется [43]. В литературе по случайным фрактальным кластерам обсуждалось много вариантов определения границ кластеров на решётке. По сути, все они сводятся к упомянутым выше границам двух кластеров.

3.7. Критические амплитуды

Кратко упомяну весьма активно развивающееся в последние годы направление по вычислению универсальных соотношений критических амплитуд. Эта область требует отдельного обзора. Краткий обзор современного состояния численных исследований можно найти в работе [44].

3.8. Задача случайного роста за счёт диффузии

Задача роста структур за счёт диффузии хорошо определена в двумерном случае. Её можно сформулировать как случайное блуждание в бесконечной плоскости с прилипанием частицы к растущему зародышу. Вероятность ухода частицы на бесконечность нулевая, т.е. частица за время случайного блуждания (которое может быть сколь угодно велико) в конечном счёте коснётся границы кластера, за счёт чего он вырастет на одну частицу. Такая постановка позволяет построить алгоритм, при котором точность соблюдения граничных условий может быть сколь угодно хороша. Это важно, поскольку такое блуждание описывается решением двумерного уравнения Лапласа с двумя граничными условиями: на границе растущего кластера и на бесконечности, и известно, что такое решение может приводить к взрывной неустойчивости. В работе [45] был предложен алгоритм, точно реализующий такие граничные условия для моделирования случайной агрегации за счёт диффузии (в англоязычной литературе DLA — diffusion limited aggregation [46]).

Для получения фрактальной размерности таких кластеров требуется анализ большого количества кластеров с большими размерами. Такое моделирование можно с успехом провести на специально построенном для такого круга задач вычислительном кластере, каждый узел которого обладает большой оперативной памятью (по 4 гигабайта на одну нить), что позволяет всю расчётную структуру кластера до миллиарда частиц держать в памяти. При каждом значении параметра было построено по тысяче кластеров размером по сто миллионов частиц в каждом. Анализ таких кластеров с помощью специально разработанного метода пробных

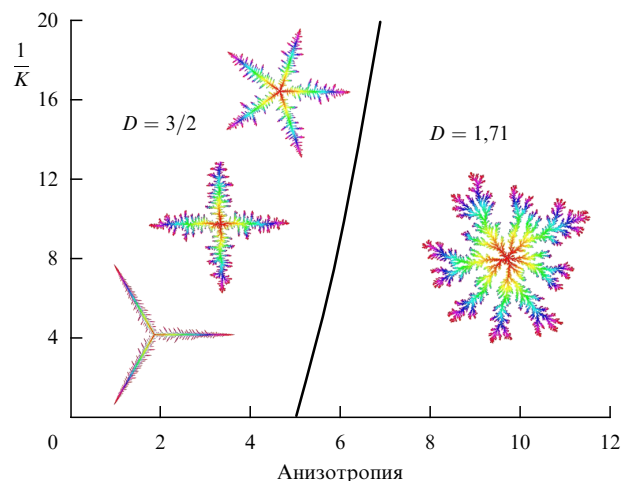


Рис. 3. Морфологическая диаграмма роста случайных структур за счёт диффузии. Горизонтальная ось — симметрия внешнего кристаллического поля. Вертикальная ось — обратный коэффициент адгезии частиц. Сплошная линия — линия фазового перехода первого рода. D — значения фрактальной размерности кластеров в термодинамическом пределе.

частиц [47] позволил построить морфологическую гистограмму, показанную на рис. 3 и качественно описывающую фазовый переход первого рода между кластерами с симметрией и случайными кластерами в плоскости двух параметров — коэффициента адгезии и симметрии внешнего кристаллического поля (например, кристаллической подложки, на которой происходит диффузия) [48].

Исследование вероятности роста построенных кластеров позволило опровергнуть гипотезу о мультискейлинге кластеров случайного роста в рамках теории DLA и обнаружить масштабно инвариантную форму вероятности присоединения частиц к кластеру [49].

4. Заключение

Приведённые примеры убедительно показывают, что вычислительная физика может быть с успехом применена для проверки теоретических гипотез и предсказаний в различных областях физики.

В ряде случаев оказывается весьма успешным применение специализированных вычислительных устройств. Следует при этом отметить, что повышенный уровень специализации ведёт к созданию устройств, полезность которых для научных исследований ограничена во времени при относительно высоких затратах интеллектуального труда. Хотя их применение во времени ограничено 5–6 годами, в течение которых они превосходят мощность других вычислительных систем, они могут привести к получению научных результатов за счёт значительного опережения во времени возможностей других подходов.

Международный союз физиков IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics) в 1996 г. основал комиссию по вычислительной физике C20 [50]. Её задача состоит в ежегодном проведении конференций по вычислительной физике. Конференция проводится поочерёдно в трёх географических секторах — Северной и Южной Америке, Азии и Океании, Европе и Африке. В следующем, 2013 году конференция будет проводиться Российской академией наук в Москве, что даст возмож-

ность российским учёным представить международной общественности свои достижения в области вычислительной физики.

Автор благодарен Министерству образования и науки РФ за поддержку работы по государственному контракту 07.514.11.4032.

Список литературы

1. Fermi E, Pasta J, Ulam S "Studies of nonlinear problem", Los Alamos Sci. Lab. Rep. LA-1940 (Los Alamos: Los Alamos Sci. Lab., 1955)
2. Harlow F H, Metropolis N "Computing & computers: Weapons simulation leads to the computer era" *Los Alamos Science* (Winter/Spring) 132 (1983); <http://library.lanl.gov/cgi-bin/getfile?07-15.pdf>
3. Zabusky N J, Kruskal M D *Phys. Rev. Lett.* **15** 240 (1965)
4. Gardner C S et al. *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095 (1967)
5. Захаров В Е и др. *Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния* (М.: Наука, 1980)
6. Metropolis N et al. *J. Chem. Phys.* **21** 1087 (1953)
7. Манаков С В, Щур Л Н *Письма в ЖЭТФ* **37** 45 (1983) [Manakov S V, Shchur L N *JETP Lett.* **37** 54 (1983)]
8. Poincaré H *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Paris: Gauthier-Villars et fils, 1899) [*New Methods of Celestial Mechanics* (Washington: NASA, 1960); Пуанкаре А *Избранные труды* Т. 1 *Новые методы небесной механики* (М.: Наука, 1971)]
9. Николаевский Е С, Щур Л Н *Письма в ЖЭТФ* **36** 176 (1982) [Nikolaevskii E S, Shchur L N *JETP Lett.* **36** 218 (1982)]
10. Белинский В А, Лифшиц Е М, Халатников И М *УФН* **102** 463 (1970) [Belinskii V A, Lifshitz E M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. Usp.* **13** 745 (1971)]
11. Лифшиц Е М, Лифшиц И М, Халатников И М *ЖЭТФ* **59** 322 (1970) [Lifshitz E M, Lifshitz I M, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **32** 173 (1971)]
12. Лифшиц Е М и др. *Письма в ЖЭТФ* **38** 79 (1983) [Lifshitz E M et al. *JETP Lett.* **38** 91 (1983)]
13. Shchur L N *Comput. Phys. Commun.* **121**–**122** 83 (1999)
14. Barash L, Shchur L N *Phys. Rev. E* **73** 036701 (2006)
15. Barash L Yu, Shchur L N *Comput. Phys. Commun.* **182** 1518 (2011)
16. Reidler I et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 024102 (2009)
17. Onsager L *Phys. Rev.* **65** 117 (1944)
18. Dotsenko V S, Dotsenko V S *Adv. Phys.* **32** 129 (1983)
19. Талапов А Л, Андрейченко В Б, Доценко Вл С, Щур Л Н *Письма в ЖЭТФ* **51** 161 (1990) [Talapov A L, Andreichenko V B, Dotsenko V S, Shchur L N *JETP Lett.* **51** 182 (1990)]
20. Kirkpatrick S, Stoll E P *J. Comput. Phys.* **40** 517 (1981)
21. Talapov A L, Shchur L N, Andreichenko V B, Dotsenko V S *Mod. Phys. Lett. B* **6** 1111 (1992)
22. Talapov A L, Shchur L N *J. Phys. Condens. Matter* **6** 8295 (1994)
23. Talapov A L, Shchur L N *Europhys. Lett.* **27** 193 (1994)
24. Plechko V N *Phys. Lett. A* **239** 289 (1998)
25. Andreichenko V B et al. *Nucl. Phys. B* **344** 531 (1990)
26. Shchur L N, Vasilyev O A *Phys. Rev. E* **65** 016107 (2002)
27. Le Guillou J C, Zinn-Justin J *J. Physique* **48** 19 (1987)
28. Campostrini M et al. *Phys. Rev. E* **65** 066127 (2002)
29. Landau D P *Physica A* **205** 41 (1994)
30. Talapov A L, Blöte H W J, Shchur L N *Письма в ЖЭТФ* **62** 157 (1995) [*JETP Lett.* **62** 174 (1995)]
31. Shchur L N, Blöte H W J *Phys. Rev. E* **55** R4905 (1997)
32. Blöte H W J, Shchur L N, Talapov A L *Int. J. Mod. Phys. C* **10** 1137 (1999)
33. Aizenman M, in *Statphys 19. Proc. of the 19th IUPAP Intern. Conf. on Statistical Physics, Xiamen, China, July 31 – August 4, 1995* (Ed. H Bai-Lin) (Singapore: World Scientific, 1996)
34. Shchur L N, Kosyakov S S *Int. J. Mod. Phys. C* **8** 473 (1997)
35. Cardy J J *Phys. A Math. Gen.* **31** L105 (1998)
36. Shchur L N, Rostunov T *Письма в ЖЭТФ* **76** 553 (2002) [*JETP Lett.* **76** 475 (2002)]
37. Mandelbrot B B *Physica A* **191** 95 (1992)
38. Belavin A A, Polyakov A M, Zamolodchikov A B *Nucl. Phys. B* **241** 333 (1984)
39. Dotsenko V S, Fateev V A *Nucl. Phys. B* **240** 312 (1984)
40. Schramm O *Isr. J. Math.* **118** 221 (2000)
41. Smirnov S, in *Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians (ICM), Madrid, Spain, August 22–30 Vol. II* (Helsinki: The European Mathematical Soc., 2006) p. 1421; http://www.icm2006.org/proceedings/Vol_II/contents/ICM_Vol_2_68.pdf
42. Duplantier B *Phys. Rev. Lett.* **84** 1363 (2000)
43. Zatelepin A, Shchur L, arXiv:1008.3573
44. Shchur L N, Janke W *Nucl. Phys. B* **840** 491 (2010)
45. Menshutin A Yu, Shchur L N *Phys. Rev. E* **73** 011407 (2006)
46. Witten T A (Jr.), Sander L M *Phys. Rev. Lett.* **47** 1400 (1981)
47. Menshutin A Yu, Shchur L N, Vinokur V M *Phys. Rev. E* **75** 010401(R) (2007)
48. Menshutin A Yu, Shchur L N *Comput. Phys. Commun.* **182** 1819 (2011)
49. Menshutin A *Phys. Rev. Lett.* **108** 015501 (2012)
50. Commission on Computational Phys. (C20), <http://www.iupap.org/commissions/c20/members/index.html>