

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Оптика анизотропных сред

Ф.В. Игнатович, В.К. Игнатович

Предложен новый эффективный способ аналитического описания электромагнитных волн в анизотропных средах. Показано, как рассчитывать отражение и преломление на границе раздела изотропной и анизотропной сред. Исследовано расщепление волн при отражении и преломлении и появление поверхностных волн. Обсуждаются поверхностные волны Дьяконова и способы их наблюдения. Показано, как аналитически и численно рассчитать отражение и пропускание плоскопараллельных одноосных пластин.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.-p, 78.20.Fm

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201207f.0759

Содержание

1. Введение (759).
2. Плоские волны в анизотропных средах (760).
 - 2.1. Плоские волны в одноосных анизотропных средах. 2.2. Магнитные поля.
3. Отражение волн от границы раздела анизотропной и изотропной сред (761).
 - 3.1. Незеркальность отражения. Преобразование мод. 3.2. Расщепление лучей с помощью двоякопреломляющего конуса.
4. Расчёт преломления на границах раздела плоскопараллельных пластин и их пропускания (763).
 - 4.1. Отражение и преломление при падении волны на границу раздела со стороны анизотропной среды. 4.2. Общие соотношения на основе граничных условий. 4.3. Отражение и преломление при падении волны на границу раздела со стороны вакуума. 4.4. Отражение и преломление в случае плоскопараллельной анизотропной пластины толщиной L .
5. Поверхностные волны Дьяконова (766).
 - 5.1. Волны при оси анизотропии, параллельной границе раздела. 5.2. Волны при оси анизотропии, перпендикулярной направлению распространения волны.
6. Возможный эксперимент по наблюдению поверхностных волн Дьяконова (768).
7. Заключение (768).
8. Приложения (769).
 - А. Плоские волны в двуслойной анизотропной среде. Б. Отражение от границы раздела со стороны анизотропной среды. В. Формулы для отражения и преломления на границе раздела снаружи анизотропной среды.

Список литературы (771).

Ф.В. Игнатович. Lumetrics Inc., Rochester, New York, USA
 В.К. Игнатович. Объединённый институт ядерных исследований, Лаборатория нейтронной физики им. И.М. Франка, ул. Жолио-Кюри 6, 141980 Дубна, Московская обл., Российская Федерация
 E-mail: v.ignatovi@gmail.com

Статья поступила 17 октября 2010 г.,
 после доработки 9 июля 2011 г.

1. Введение

Описание электромагнитных волн в однородных анизотропных средах оставалось неизменным на протяжении более чем 160 лет со времён Френеля. В настоящей статье впервые предлагается метод, радикально отличающийся от стандартного. Мы не будем проводить сравнения двух методов и непосредственно приступим к описанию нашего метода, поскольку читатель может сам получить представление о стандартном методе, открыв любой учебник по электродинамике или оптике (см., например, [1–13])¹, содержащий раздел по анизотропным средам.

Задача состоит в том, чтобы описать плоскую электромагнитную волну

$$\mathcal{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad (1)$$

распространяющуюся в произвольном направлении. Мы будем в основном рассматривать одноосные среды, поэтому задача состоит в том, чтобы описать такую волну при произвольном направлении её распространения относительно вектора анизотропии $\mathbf{a}$. Описать волну — значит найти её вектор поляризации $\mathcal{E}$ и величину волнового вектора $\mathbf{k}(\omega)$ при заданной частоте ω . В изотропных средах $\mathcal{E}$ может иметь произвольное направление в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}$, и $k = |\mathbf{k}| = n\omega/c$, где c — скорость света в вакууме, n — коэффициент преломления среды. В анизотропной среде всё несколько иначе.

Анизотропная среда обычно характеризуется симметричным тензором диэлектрической проницаемости с компонентами ε_{ij} . Как правило, эти компоненты рассматриваются как феноменологические параметры, и тогда для определения 3×3 -тензора в общем случае нужно вводить шесть чисел. На самом деле всё гораздо проще. Анизотропии всегда соответствуют некое направление и параметр, который характеризует особенность этого направления. В случае одной выделенной оси

¹ В совсем недавно изданной книге В.А. Алешкевича [21] из серии "Университетский курс общей физики" анизотропные среды также представлены стандартным образом. (Примеч. при корректуре.)

с направлением вдоль единичного вектора $\mathbf{a}$ диэлектрическая проницаемость записывается в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_1 \delta_{ij} + \varepsilon' a_i a_j, \quad (2)$$

где a_j — компоненты вектора $\mathbf{a}$, ε' — параметр, который показывает, насколько сильно проявляется анизотропия, — при $\varepsilon' \rightarrow 0$ среда становится изотропной.

Справедливость такого представления одноосной анизотропии доказана Фёдоровым [12]. Подобный подход оказался плодотворным не только в электродинамике, но и в теории упругих волн [14].

План данной статьи таков: мы будем стараться излагать главным образом идейную сторону и приводить простейшие примеры, а математические выкладки, необходимые для конкретных вычислений, вынесем в приложения. В разделе 2 будут найдены $\mathcal{E}$ и $\mathbf{k}(\omega)$ в одноосной анизотропной среде. Описание дуосных сред приводится в приложении А. В разделе 3 рассматривается отражение и преломление волн на границе раздела изотропной и анизотропной сред, отмечается расщепление волн при отражении, появление поверхностных волн, а также обсуждается возможное устройство для лабораторной демонстрации расщепления. В разделе 4 мы покажем, как рассчитать отражение и пропускание плоскопараллельных прозрачных анизотропных пластин. В разделах 5, 6 рассматриваются поверхностные волны Дьяконова и дополняются полученные Дьяконовым [15] результаты. В заключении (раздел 7) подводится итог полученным результатам.

2. Плоские волны в анизотропных средах

Прежде всего напомним, как выводится волновое уравнение из уравнений Максвелла. В отсутствие токов и зарядов уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \mathbf{D} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (4)$$

μ , ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости. Далее мы ограничимся немагнитными средами и примем $\mu = 1$. Тогда уравнения (3) упрощаются:

$$\begin{aligned} -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \mathbf{H} &= 0, \quad \nabla \varepsilon \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференцируя второе уравнение из (5) по времени и подставляя его в первое, получаем волновое уравнение

$$-\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

Заметим (это не оговаривается ни в одном учебнике), что данный вывод справедлив только для однородных сред. При наличии границы раздела между двумя полупространствами мы получаем разные уравнения в двух средах, и переход через границу определяется граничными условиями, которые диктуются уравнениями Максвелла. Для сравнения укажем, что волновое уравнение Шрёдингера в квантовой механике задаётся сразу во всём

пространстве, а граничные условия диктуются самим уравнением Шрёдингера.

2.1. Плоские волны в одноосных анизотропных средах

В одноосной анизотропной среде мы выбираем тензор ε в виде (2). Поэтому для плоской волны (1)

$$\varepsilon \mathcal{E} = \varepsilon_1 \mathcal{E} + \varepsilon' \mathbf{a}(\mathbf{a} \mathcal{E}) \quad (7)$$

и последнее уравнение в (5) эквивалентно уравнению

$$\varepsilon_1 \mathbf{k} \mathcal{E} + \varepsilon' (\mathbf{k} \mathbf{a})(\mathbf{a} \mathcal{E}) = 0. \quad (8)$$

Подстановка в уравнение (6) выражения (1) для плоской волны приводит к уравнению

$$k^2 \mathcal{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \mathcal{E}) = k_0^2 \varepsilon \mathcal{E}, \quad (9)$$

где $k_0 = \omega/c$, а подставляя (7) в (9), получаем

$$\begin{aligned} k^2 \mathcal{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \mathcal{E}) - k_0^2 \varepsilon \mathcal{E} &\equiv \\ &\equiv (k^2 - k_0^2 \varepsilon_1) \mathcal{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \mathcal{E}) - k_0^2 \varepsilon' \mathbf{a}(\mathbf{a} \mathcal{E}) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для того чтобы найти $\mathcal{E}$, необходимо решить (10) с учётом (8).

Трёхмерный вектор $\mathcal{E}$ можно разложить по некоторому координатному базису. Если $\mathbf{k}$ не параллелен $\mathbf{a}$, то в качестве базиса можно выбрать три независимых вектора: $\mathbf{a}$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}/k$ и

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{k}. \quad (11)$$

В этом базисе (заметим, что он не ортонормирован) поляризация $\mathcal{E}$ может быть представлена как

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{k} + \gamma \mathbf{e}_1, \quad (12)$$

т.е. $\mathcal{E}$ имеет координаты α , β и γ , которые не являются независимыми, поскольку они должны удовлетворять уравнениям (8) и (10).

Подстановка (12) в (8) даёт

$$\varepsilon_1 (k\beta + \alpha \mathbf{k} \mathbf{a}) + \varepsilon' \mathbf{k} \mathbf{a} (\alpha + \beta \mathbf{k} \mathbf{a}) = 0, \quad (13)$$

откуда следует

$$\beta = -\frac{(1 + \eta) \mathbf{k} \mathbf{a}}{1 + \eta (\mathbf{k} \mathbf{a})^2} \alpha, \quad (14)$$

где $\eta = \varepsilon'/\varepsilon_1$. Подставляя (14) в (12), получаем

$$\mathcal{E} = \alpha \left[\mathbf{a} - \mathbf{k} \frac{(1 + \eta) \mathbf{k} \mathbf{a}}{1 + \eta (\mathbf{k} \mathbf{a})^2} \right] + \gamma \mathbf{e}_1 = \alpha \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_1, \quad (15)$$

т.е. $\mathcal{E}$ определяется только двумя независимыми векторами: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{k}$ и ортогональным ему вектором

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{a} - \frac{1 + \eta}{1 + \eta (\mathbf{k} \mathbf{a})^2} \mathbf{k}(\mathbf{k} \mathbf{a}) \equiv \mathbf{a} - \frac{\varepsilon_2(\theta)}{\varepsilon_1} \mathbf{k}(\mathbf{k} \mathbf{a}), \quad (16)$$

где введены угол θ между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{a}$ и величина анизотропной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_2(\theta) = \varepsilon_1 \frac{1 + \eta}{1 + \eta \cos^2 \theta}. \quad (17)$$

Чтобы найти координаты α и β , подставим (15) в (10) и умножим полученное уравнение на вектор $\mathbf{e}_1$. В резуль-

тате имеем

$$(k^2 - k_0^2 \epsilon_1) \gamma \mathbf{e}_1^2 = 0. \quad (18)$$

Отсюда следует, что если $\gamma \neq 0$, то (18) удовлетворяется только при

$$k^2 = k_0^2 \epsilon_1. \quad (19)$$

Умножая (10) на $\mathbf{a}$ и принимая во внимание, что

$$\mathbf{a} \mathbf{e}_2 = \frac{1 - (\mathbf{k} \mathbf{a})^2}{1 + \eta (\mathbf{k} \mathbf{a})^2}, \quad \mathbf{k} \mathbf{e}_2 = -\eta \mathbf{k} \mathbf{a} \frac{1 - (\mathbf{k} \mathbf{a})^2}{1 + \eta (\mathbf{k} \mathbf{a})^2} = -\eta (\mathbf{k} \mathbf{a}) (\mathbf{a} \mathbf{e}_2), \quad (20)$$

получаем

$$(k^2 - k_0^2 \epsilon_2(\theta)) \alpha \mathbf{a} \mathbf{e}_2 = 0. \quad (21)$$

Поэтому если $\alpha \neq 0$ и $\mathbf{a} \neq \mathbf{k}$, то (21) удовлетворяется только при

$$k^2 = k_0^2 \epsilon_2(\theta), \quad (22)$$

где $\epsilon_2(\theta)$ определяется соотношением (17).

Таким образом, в общем случае в каждом заданном направлении могут распространяться только два типа плоских волн: волны с вектором поляризации $\mathbf{e}_1$ и волны с вектором поляризации $\mathbf{e}_2$. Только при распространении вдоль вектора анизотропии ($\mathbf{k} = \mathbf{a}$) плоская волна, как и в изотропном случае, может иметь произвольную поляризацию, перпендикулярную волновому вектору $\mathbf{k}$, причём $k^2 = \epsilon_1 k_0^2$.

В общем случае будем называть "поперечной" волновую моду с поляризацией $\mathcal{E}_1 = \mathbf{e}_1$, поскольку $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{k}$, и "смешанной" — волновую моду с поляризацией вдоль $\mathcal{E}_2 = \mathbf{e}_2$, так как в этой моде вектор поляризации, согласно (20), содержит продольную составляющую, т.е. компоненту, направленную вдоль вектора $\mathbf{k}$. Нам представляется, что такие наименования более содержательны, чем ничего не говорящие названия "обыкновенная" для волны с поляризацией $\mathcal{E}_1 = \mathbf{e}_1$ и "необыкновенная" для волны с поляризацией $\mathcal{E}_2 = \mathbf{e}_2$.

Этот раздел нашей статьи является основным. В нём показано, как можно совершенно элементарным образом описать плоские волны при произвольном направлении их распространения относительно оси анизотропии, т.е. найти длины волновых векторов и направления векторов линейной поляризации. При этом привлечение таких дополнительных понятий, как лучевая или волновая поверхности, эллипсоид волновых векторов и эллипсоид диэлектрической проницаемости, оказывается совершенно ненужным. Отметим, что это стало возможным впервые со времён Френеля. Ради простоты и красоты этого раздела физики мы и решили заново "изобрести велосипед".

2.2. Магнитные поля

Каждая электромагнитная волна содержит кроме электрической магнитную компоненту. Из уравнения $\nabla \mathbf{H} = 0$, которое после подстановки плоской волны сводится к $\mathbf{k} \mathbf{H} = 0$, следует, что поле $\mathbf{H}$ всегда ортогонально волновому вектору $\mathbf{k}$, а также вектору электрической поляризации $\mathcal{E}$, что следует из первого уравнения в (5). После

подстановки в это уравнение выражения (1) и поля $\mathbf{H}$ в виде плоской волны,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H} \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r} - i \omega t), \quad (23)$$

с вектором магнитной поляризации, направленным вдоль $\mathcal{H}$, получаем

$$\mathcal{H} = \frac{k}{k_0} \mathbf{k} \times \mathcal{E}. \quad (24)$$

Поэтому для поперечной и смешанной мод находим соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{k}{k_0} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_1 = \frac{k}{k_0} \mathbf{k} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{k}], \\ \mathcal{H}_2 &= \frac{k}{k_0} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_2 = \frac{k}{k_0} \mathbf{k} \times \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (25)$$

таким образом, полное поле плоской волны имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_j \exp(i \mathbf{k}_j \mathbf{r} - i \omega t), \quad (26)$$

где $\Psi_j = \mathcal{E}_j + \mathcal{H}_j$, j — номер моды, $j = 1, 2$. В изотропной среде мы также можем выбрать, например, $\mathcal{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{k}$ и $\mathcal{H} = \mathbf{k} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{k}]$. Однако поскольку $\mathbf{a}$ в изотропной среде может иметь произвольное направление, то пару ортогональных векторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ можно повернуть на любой угол вокруг волнового вектора $\mathbf{k}$.

3. Отражение волн от границы раздела анизотропной и изотропной сред

Предположим, что пространство разделено плоскостью $z = 0$ на две части. Область $z < 0$ представляет собой одноосную анизотропную среду, а область $z > 0$ — вакуум с $\epsilon_1 = 1$, $\eta = 0$. В этих областях имеем два разных волновых уравнения, и переход волн из одной среды в другую через границу раздела описывается граничными условиями, задаваемыми уравнениями Максвелла.

Рассмотрим отражение двух мод, падающих на границу раздела из анизотропной среды.

3.1. Незеркальность отражения. Преобразование мод

Прежде всего отметим, что отражение смешанной моды в общем случае является незеркальным. Действительно, поскольку направление $\mathbf{k}$ после отражения меняется, то изменяется и угол θ между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{k}$. Поэтому в соответствии с (22) изменяется и длина вектора $\mathbf{k}$. Поскольку, однако, обе компоненты вектора $\mathbf{k}_{\parallel}$, параллельные границе раздела, остаются неизменными, то изменение k означает изменение величины нормальной компоненты $k_{\perp}$, что и означает незеркальность отражения.

Рассчитаем изменение $k_{\perp}$ в случае падающей смешанной моды (моды 2) с волновым вектором $\mathbf{k}_{2r}$, где индекс r обозначает, что мода 2 распространяется вправо по направлению к границе раздела. Для заданного угла θ между $\mathbf{k}_{2r}$ и $\mathbf{a}$

$$k_{2r\perp} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 k_0^2 (1 + \eta)}{1 + \eta \cos^2 \theta} - k_{\parallel}^2}, \quad (27)$$

однако $k_{2r\perp}$ неявно входит в определение $\cos \theta$, поэтому чтобы найти зависимость $k_{2r\perp}$ от $\mathbf{a}$, необходимо решить

уравнение (27), представленное в виде

$$k_{\parallel}^2 + x^2 + \eta(k_{\parallel}\mathbf{la} + x\mathbf{na})^2 = k_0^2\epsilon_1(1 + \eta), \quad (28)$$

где $x = k_{2r\perp}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, направленный внутрь среды, $\mathbf{l}$ — единичный вектор вдоль $\mathbf{k}_{\parallel}$, который вместе с $\mathbf{n}$ определяет плоскость падения. Решение уравнения имеет вид

$$x = \frac{1}{1 + \eta(\mathbf{na})^2} \left[-\eta k_{\parallel}(\mathbf{na})(\mathbf{la}) + \sqrt{\epsilon_1 k_0^2(1 + \eta)(1 + \eta(\mathbf{na})^2) - k_{\parallel}^2(1 + \eta(\mathbf{la})^2 + \eta(\mathbf{na})^2)} \right]. \quad (29)$$

Выбранный знак перед корнем обеспечивает правильную асимптотику при $\eta \rightarrow 0$, соответствующую изотропному случаю: $x \sim (\epsilon_1 k_0^2 - k_{\parallel}^2)^{1/2}$.

Вектор $\mathbf{a}$ представим в виде $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{l} + \gamma\mathbf{t}$, где $\mathbf{t} = [\mathbf{n}\mathbf{l}]$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости падения. Нормальная компонента $k_{2r\perp}$, как следует из (29), зависит только от проекции $\mathbf{a}' = \alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{l}$ вектора $\mathbf{a}$ на плоскость падения. Введём обозначения $\alpha = |\mathbf{a}'| \cos \theta_a$, $\beta = |\mathbf{a}'| \sin \theta_a$, а также новый параметр $\eta' = \eta|\mathbf{a}'|^2 \leq \eta$, тогда (29) примет вид

$$k_{2r\perp} = \frac{1}{2(1 + \eta' \cos^2 \theta_a)} \left[-\eta' k_{\parallel} \sin(2\theta_a) + 2\sqrt{\epsilon_1 k_0^2(1 + \eta)(1 + \eta' \cos^2 \theta_a) - k_{\parallel}^2(1 + \eta')} \right]. \quad (30)$$

Для отражённой смешанной моды (моды 2, распространяющейся с волновым вектором $\mathbf{k}_{2l}$ влево от плоскости раздела) уравнение (28) приобретает вид

$$k_{\parallel}^2 + x^2 + \eta(k_{\parallel}\mathbf{la} - x\mathbf{na})^2 = k_0^2\epsilon_1(1 + \eta), \quad (31)$$

где $x = k_{2l\perp}$; его решение:

$$k_{2l\perp} = \frac{1}{2(1 + \eta' \cos^2 \theta_a)} \left[\eta' k_{\parallel} \sin(2\theta_a) + 2\sqrt{\epsilon_1 k_0^2(1 + \eta)(1 + \eta' \cos^2 \theta_a) - k_{\parallel}^2(1 + \eta')} \right]. \quad (32)$$

Отсюда следует, что нормальные компоненты волновых векторов падающей и отражённой моды 2 отличаются на величину

$$k_{2l\perp} - k_{2r\perp} = \frac{\eta' k_{\parallel} \sin(2\theta_a)}{1 + \eta' \cos^2 \theta_a}, \quad (33)$$

что может быть представлено в безразмерном виде

$$\Delta_{22} \equiv \frac{k_{2l\perp} - k_{2r\perp}}{k_0 \sqrt{\epsilon_1}} = \frac{\eta' q \sin(2\theta_a)}{1 + \eta' \cos^2 \theta_a}, \quad (34)$$

где $q^2 = k_{\parallel}^2/k_0^2\epsilon_1$. Угол отражения, зависящий от ориентации вектора $\mathbf{a}$, может быть как больше, так и меньше угла падения, в зависимости от знака $\sin(2\theta_a)$.

В случае поперечной моды (моды 1) длина волнового вектора k , согласно (19), не зависит от ориентации вектора анизотропии $\mathbf{a}$, поэтому мода 1 отражается зеркально.

Однако каждая мода в общем случае при своём отражении порождает другую моду. Иначе невозможно

удовлетворить граничным условиям. При этом возникающая при отражении другая мода распространяется с иным волновым вектором, т.е. при отражении происходит расщепление отражённого луча.

Пусть падающая волна имеет моду 2. Порождённая при отражении мода 1 с волновым вектором $\mathbf{k}_{1l}$ будет распространяться влево от границы раздела, и нормальная компонента её волнового вектора $k_{1l\perp} = (\epsilon_1 k_0^2 - k_{\parallel}^2)^{1/2}$ будет отличаться, согласно (32), от $k_{2l\perp}$ на величину $\Delta_{12} = (k_{1l\perp} - k_{2l\perp})/k_0 \sqrt{\epsilon_1}$,

$$\Delta_{12} = \sqrt{1 - q^2} - \frac{\eta' q \sin(2\theta_a) + 2\sqrt{(1 + \eta)(1 + \eta' \cos^2 \theta_a) - q^2(1 + \eta')}}{2(1 + \eta' \cos^2 \theta_a)}. \quad (35)$$

В противоположном случае, когда падает мода 1 и порождается мода 2, имеем $\Delta_{21} = (k_{2l\perp} - k_{1l\perp})/k_0 \sqrt{\epsilon_1} = -\Delta_{12}$.

Поскольку отражение моды 2 в общем случае незеркально, может оказаться, что волновые векторы отражённых и преломлённых волн составят конфигурацию, показанную на рис. 1. Тогда имеются два критических угла падения φ . Первый критический угол, φ_{c1} ($q^2 = 1/\epsilon_1$),

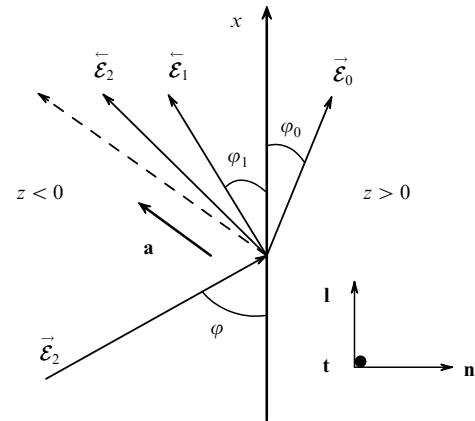


Рис. 1. Ориентация волновых векторов всех мод, возникающих при падении на границу раздела волны смешанной моды 2 с поляризацией $\mathcal{E}_2$, при направлении вектора анизотропии $\mathbf{a}$, показанном на рисунке. Угол скольжения отражённой моды 2, $\mathcal{E}_2$, меньше зеркального угла (соответствующего штриховой линии), а угол скольжения φ_1 порождённой при отражении моды 1, $\mathcal{E}_1$, оказывается ещё меньше. Угол скольжения φ_0 преломлённой волны $\mathcal{E}_0$ даже меньше, чем φ_1 . Можно представить, что при некотором критическом угле падения $\varphi = \varphi_{c1}$ угол φ_0 обращается в нуль. Следовательно, при $\varphi < \varphi_{c1}$ преломлённая волна экспоненциально затухает при удалении от границы раздела, и энергия падающей волны полностью отражается в виде двух мод. При ещё меньшем угле падения имеется второй критический угол φ_{c2} , при котором $\varphi_1 = 0$. При $\varphi < \varphi_{c2}$ мода $\mathcal{E}_1$ также экспоненциально затухает при удалении от границы раздела. Тогда вся энергия падающей волны полностью отражается незеркально в виде моды 2, а две экспоненциально затухающие волны, $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_2$, образуют поверхностную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела. Стрелки над $\mathcal{E}$ указывают направления распространения волн относительно поверхности раздела. Указан также координатный базис, состоящий из вектора нормали $\mathbf{n}$ (ось z), перпендикулярного ему вектора $\mathbf{l}$ (ось x), который вместе с $\mathbf{n}$ определяет плоскость падения, и вектора $\mathbf{t}$ (ось y), который перпендикулярен плоскости падения и направлен на читателя.

соответствует углу полного внутреннего отражения, а второй, φ_{c2} , в случае

$$1 < q^2 < \frac{(1+\eta)(1+\eta'\cos^2\theta_a)}{1+\eta'} \quad (36)$$

соответствует области полного незеркального отражения единственной моды $\mathcal{E}_2$ и возникновения связанной с ней поверхностной поперечной электромагнитной волны.

3.2. Расщепление лучей

с помощью двоякопреломляющего конуса

Расщепление лучей на границе анизотропной среды можно наглядно продемонстрировать с помощью двоякопреломляющего конуса, как показано на рис. 2. В приближении геометрической оптики узкий луч света расщепляется на два луча мод 1 и 2 при преломлении на боковой поверхности конуса и каждый из этих лучей расщепляется ещё на два при отражении от основания конуса. Получившиеся четыре луча выходят из другой боковой поверхности конуса и образуют на вертикальном экране четыре светлых пятна, которые передвигаются и меняют свою яркость при повороте конуса вокруг своей оси.

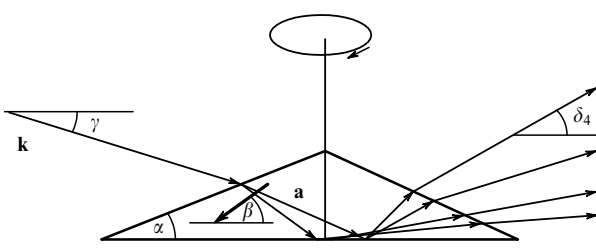


Рис. 2. Схема демонстрации расщепления лучей с помощью двоякопреломляющего конуса. При вращении конуса вокруг своей оси положение и яркость пятен на вертикальном экране изменяются.

Прямые вычисления для параметров $\epsilon_1 = 1,6$, $\eta = 0,8$ при векторе $\mathbf{a}$ в плоскости рисунка и $\sin \alpha = 0,5$, $\sin \beta = 0,3$ и $\sin \gamma = 0,5$ показывают, что выходящие лучи (снизу вверх) характеризуются следующими значениями тангенсов углов δ_i ($i = 1, \dots, 4$): $\tan \delta_1 = 0,2$, $\tan \delta_2 = 0,4$, $\tan \delta_3 = 0,6$ и $\tan \delta_4 = 0,7$ соответственно.

4. Расчёт преломления на границах раздела плоскопараллельных пластин и их пропускания

Для того чтобы определить пропускание и отражение плоскопараллельных анизотропных пластин, используемых во многих оптических приборах, необходимо рассчитать отражение и преломление на границах раздела. По известным амплитудам преломления и отражения на отдельных границах можно сразу, без дополнительного сшивания волновых функций, найти отражение и пропускание пластин с помощью представленного в [16] метода, идея которого будет кратко изложена ниже (соответствующие математические выкладки приведены в приложениях).

4.1. Отражение и преломление при падении волны на границу раздела со стороны анизотропной среды

Волновая функция электромагнитного поля во всём пространстве записывается в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Theta(z < 0) \left(\exp(i\vec{k}_j \mathbf{r}) \vec{\psi}_j + \sum_{j'=1,2} \exp(i\vec{k}_{j'} \mathbf{r}) \vec{\psi}_{j'} \vec{\rho}_{j'j} \right) + \Theta(z > 0) \exp(i\vec{k}_0 \mathbf{r}) (\psi_e \vec{\tau}_{ej} + \psi_m \vec{\tau}_{mj}), \quad (37)$$

где $\Psi = \mathcal{E} + \mathcal{H}$, Θ — ступенчатая функция, равная единице при выполнении неравенства в её аргументе и нулю в ином случае. Полупространство $z < 0$ содержит анизотропную среду, а полупространство $z > 0$ — вакуум. Стрелки над ψ указывают направление распространения соответствующих волн, $\vec{\psi}_j$ обозначает падающую волну моды j ($j = 1, 2$), а $\vec{\psi}_{j'}$ ($j' = 1, 2$) — отражённую волну моды j' ; $\vec{k}_j = (\mathbf{k}_{\parallel}, k_{j\perp})$, $\vec{k}_{j'} = (\mathbf{k}_{\parallel}, -k_{j'\perp})$, $\mathbf{k}_0 = (\mathbf{k}_{\parallel}, (k_0^2 - k_{\parallel}^2)^{1/2})$, $\psi_{e,m}$, $\vec{\tau}_{e,mj}$ — преломлённые поля и амплитуды ТЕ- и ТМ-мод для падающей моды j соответственно. Чтобы найти амплитуды отражённых $\vec{\rho}$ и преломлённых $\vec{\tau}$ волн (стрелки над ними указывают направление распространения падающей волны), необходимо сшить волновую функцию (37) с помощью граничных условий.

4.2. Общие соотношения на основе граничных условий

Поляризация каждой электромагнитной волны у поверхности раздела может быть разложена на ТЕ- и ТМ-моды. В ТЕ-моде электрическое поле перпендикулярно плоскости падения, т.е. при заданной поляризации $\mathcal{E}$ ТЕ-моды имеют компоненту $\mathcal{E} \propto \mathbf{t}$. Поэтому вклад моды j в ТЕ-моду равен $\mathcal{E}_j \mathbf{t}$. В ТМ-моде перпендикулярным плоскости падения является вектор магнитной поляризации $\mathcal{H} \propto \mathbf{t}$, поэтому вклад моды j в ТМ-моду равен $\mathcal{H}_j \mathbf{t}$. Для преломлённых полей ТЕ-моды можно сразу принять $\vec{\mathcal{E}}_e = \mathbf{t}$, $\vec{\mathcal{H}}_e = \mathbf{k}_0 \times \mathbf{t}$, а для преломлённых полей ТМ-моды — $\vec{\mathcal{H}}_m = \mathbf{t}$, $\vec{\mathcal{E}}_m = -\mathbf{k}_0 \times \mathbf{t}$.

4.2.1. Граничные условия для ТЕ-мод. Для ТЕ-моды электромагнитного поля в случае падающей волны моды j имеются следующие три граничные условия.

1. Непрерывность электрического поля (вектор поля параллелен границе раздела):

$$\mathbf{t} \vec{\mathcal{E}}_j + \mathbf{t} \vec{\mathcal{E}}_1 \vec{\rho}_{1j} + \mathbf{t} \vec{\mathcal{E}}_2 \vec{\rho}_{2j} = \mathbf{t} \vec{\mathcal{E}}_e \vec{\tau}_{ej}. \quad (38)$$

2. Непрерывность компоненты магнитного поля, параллельной границе раздела и плоскости падения:

$$i\vec{\mathcal{H}}_j + i\vec{\mathcal{H}}_1 \vec{\rho}_{1j} + i\vec{\mathcal{H}}_2 \vec{\rho}_{2j} = i[\mathbf{k}_0 \times \mathbf{t}] \vec{\tau}_{ej} \equiv -\kappa_{0\perp} \vec{\tau}_{ej}. \quad (39)$$

3. Непрерывность нормальной компоненты магнитной индукции внутри плоскости падения (в нашем случае $\mu = 1$ индукция равна магнитному полю):

$$\mathbf{n} \vec{\mathcal{H}}_j + \mathbf{n} \vec{\mathcal{H}}_1 \vec{\rho}_{1j} + \mathbf{n} \vec{\mathcal{H}}_2 \vec{\rho}_{2j} = \mathbf{n} [\mathbf{k}_0 \times \mathbf{t}] \vec{\tau}_{ej} \equiv \kappa_{0\parallel} \vec{\tau}_{ej}. \quad (40)$$

Последнее уравнение можно не рассматривать, поскольку оно сводится к виду (38).

4.2.2. Граничные условия для ТМ-мод. Для ТМ-моды тоже имеются три вида граничных условий.

1. Непрерывность магнитного поля (вектор поля параллелен границе раздела):

$$\vec{t}\vec{H}_j + \vec{t}\vec{H}_1\vec{\rho}_{1j} + \vec{t}\vec{H}_2\vec{\rho}_{2j} = \vec{\tau}_{mj}. \quad (41)$$

2. Непрерывность компоненты электрического поля, параллельной границе раздела и плоскости падения:

$$\vec{1}\vec{E}_j + \vec{1}\vec{E}_1\vec{\rho}_{1j} + \vec{1}\vec{E}_2\vec{\rho}_{2j} = -\vec{1}[\mathbf{k}_0 \times \vec{t}]\vec{\tau}_{mj} \equiv \kappa_{0\perp}\vec{\tau}_{mj}. \quad (42)$$

3. Непрерывность нормальной компоненты электрической индукции $\mathbf{D}$ внутри плоскости падения:

$$\mathbf{n}\vec{E}_j + \mathbf{n}\vec{E}_1\vec{\rho}_{1j} + \mathbf{n}\vec{E}_2\vec{\rho}_{2j} = \mathbf{n}[\mathbf{k}_0 \times \vec{t}]\vec{\tau}_{mj} \equiv \kappa_{0\parallel}\vec{\tau}_{mj}. \quad (43)$$

Последнее уравнение снова можно не рассматривать, поскольку оно сводится к виду (41). В дальнейшем мы не будем упоминать уравнения типа (40) и (43), поскольку они бесполезны.

Итак, у нас есть четыре линейных уравнения, из которых можно найти четыре величины: две относятся к преломлённым ТЕ- и ТМ-волнам и две — к отражённым волнам мод 1 и 2. Отсюда видно, почему в общем случае отражение одной моды порождает другую моду.

Полученные линейные уравнения легко разрешимы в общем случае; соответствующие решения приведены в приложении Б. Здесь мы ограничимся рассмотрением частного случая.

4.2.3. Решение в частном случае нормального падения.

В случае нормального падения расчёт отражения и преломления очень прост, поскольку отражение не сопровождается расщеплением волн. Геометрию в этом случае можно описать тремя базисными векторами: $\mathbf{n}$, $\mathbf{l}$ и $\mathbf{t}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль вдоль оси z , а векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{t}$, которые лежат на поверхности раздела, определяют направления осей x и y , причём вектор анизотропии $\mathbf{a}$ лежит в плоскости (x, z) и составляет угол θ с $\mathbf{n}$.

Плоская волна, распространяющаяся вдоль $\mathbf{n}$ ($\mathbf{k} = \mathbf{k}/k = \mathbf{n}$), может иметь только два типа поляризации: поперечную, $\mathcal{E}_1 = \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{t}$ и $\mathcal{H}_1 = -n_1\mathbf{l}$, где $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ (см. (2)), или смешанную, $\mathcal{E}_2 = \mathbf{e}_2$ (см. (16)) и $\mathcal{H}_2 = n_2(\theta)\mathbf{n} \times \mathbf{a}$, где $n_2(\theta) = \sqrt{\epsilon_2(\theta)}$ (см. (17)).

Поскольку при нормальном падении расщепление отсутствует, то для моды 1 уравнения (38) и (39) сводятся к

$$1 + \vec{\rho}_{11} = \vec{\tau}_{e1}, \quad n_1(1 - \vec{\rho}_{11}) = \vec{\tau}_{e1}, \quad (44)$$

а преломлённая волна имеет поляризацию $\mathcal{E}_{e1} = \mathbf{t}$, $\mathcal{H}_{e1} = -\mathbf{l}$, такую же, как и поляризация падающей волны.

Из (44) следует

$$\vec{\rho}_{11} = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}, \quad \vec{\tau}_{e1} = \frac{2n_1}{n_1 + 1}, \quad n_1 = \sqrt{\epsilon_1}. \quad (45)$$

С помощью формул (45) можно тотчас же [16] найти коэффициенты отражения и преломления плоскопараллельной анизотропной пластины толщиной D для плос-

кой волны с поляризацией $\mathcal{E}_{e1} = \mathbf{t}$:

$$R_1 = -\vec{\rho}_{11} \frac{1 - \exp(2ik_1D)}{1 - \vec{\rho}_{11}^2 \exp(2ik_1D)}, \quad (46)$$

$$T_1 = \exp(ik_1D) \frac{1 - \vec{\rho}_{11}^2}{1 - \vec{\rho}_{11}^2 \exp(2ik_1D)},$$

где $k_1 = k_0n_1$. Видно, что плоская волна с линейной поляризацией $\mathcal{E}_{e1} = \mathbf{t}$, параллельной поляризации поперечной моды 1 внутри пластины, сохраняет направление поляризации после прохождения через пластину.

Рассмотрим теперь нормальное падение смешанной моды $\mathcal{E}_2$. В этом случае граничные условия приводят к уравнениям

$$\mathbf{la}(1 + \vec{\rho}_{22}(\theta)) = \vec{\tau}_{e2}, \quad (47)$$

$$k_2(\theta)\mathbf{la}(1 - \vec{\rho}_{22}(\theta)) = k_0\vec{\tau}_{e2},$$

где множитель $\mathbf{la}$ появляется вследствие проектирования вектора поляризации на поверхность раздела. Так как $k_2 = k_0n_2(\theta)$ и $n_2(\theta) = \sqrt{\epsilon_2(\theta)}$, решение уравнений (47) приводится к виду

$$\vec{\rho}_{22}(\theta) = \frac{n_2(\theta) - 1}{n_2(\theta) + 1}, \quad \vec{\tau}_{e2}(\theta) = \frac{2n_2(\theta)\mathbf{la}}{n_2(\theta) + 1}. \quad (48)$$

Из соображений симметрии можно сразу найти амплитуды отражения и преломления, когда волна с поляризацией вдоль $\mathbf{l}$ падает на границу раздела из вакуума:

$$\vec{\rho}_{e2}(\theta) = \frac{1 - n_2(\theta)}{1 + n_2(\theta)}, \quad \vec{\tau}_{e2}(\theta) = \frac{2}{\mathbf{la}(1 + n_2(\theta))}, \quad (49)$$

отсюда непосредственно следуют формулы для коэффициентов отражения и пропускания плоскопараллельной пластины толщиной L для плоской волны с поляризацией $\mathcal{E}_{e2} = \mathbf{l}$:

$$R_2(\theta) = -\vec{\rho}_{22}(\theta) \frac{1 - \exp(2ik_2(\theta)L)}{1 - \vec{\rho}_{22}^2(\theta) \exp(2ik_2(\theta)L)}, \quad (50)$$

$$T_2(\theta) = \exp(ik_2(\theta)L) \frac{1 - \vec{\rho}_{22}^2(\theta)}{1 - \vec{\rho}_{22}^2(\theta) \exp(2ik_2(\theta)L)},$$

где $k_2(\theta) = k_0n_2(\theta)$. Отсюда видно, что поляризация $\mathcal{E}_{e2} = \mathbf{l}$ не меняется при прохождении через пластину.

Если падающая на пластину плоская волна $\exp(ik_0z - i\omega_0t)\mathcal{E}_e$ имеет произвольную поперечную поляризацию $\mathcal{E}_e = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{l}$, где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, то прошедшая через пластину волна,

$$\mathbf{E}_l(z, t) = \exp(ik_0(z - L) - i\omega_0t) [\alpha T_1\mathbf{t} + \beta T_2(\theta)\mathbf{l}], \quad (51)$$

может в общем случае иметь эллиптическую поляризацию.

4.3. Отражение и преломление при падении волны на границу раздела со стороны вакуума

Пусть теперь область $z < 0$ принадлежит вакууму, а в области $z > 0$ находится анизотропная среда. Волна, падающая на границу раздела, поступает из вакуума.

Полная волновая функция во всём пространстве имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Theta(z < 0) \left[\exp(i\vec{k}_0 \mathbf{r}) \vec{\psi}_j + \exp(i\vec{k}_0 \mathbf{r}) \sum_{j'=e,m} \vec{\psi}_{j'} \vec{\rho}_{jj'} \right] + \Theta(z > 0) \left[\exp(i\vec{k}_1 \mathbf{r}) \vec{\psi}_1 \vec{\tau}_{1j} + \exp(i\vec{k}_2 \mathbf{r}) \vec{\psi}_2 \vec{\tau}_{2j} \right], \quad (52)$$

где j, j' означают e или m для ТЕ- и ТМ-мод соответственно. Слагаемое $\exp(i\vec{k}_0 \mathbf{r}) \vec{\psi}_j$ с волновым вектором $\vec{k}_0 = (\mathbf{k}_{\parallel}, k_{0\perp}) = (k_0^2 - k_{\parallel}^2)^{1/2}$ описывает падающую плоскую волну. Для ТЕ-моды $\vec{\psi}_e = \vec{\mathcal{E}}_e + \vec{\mathcal{H}}_e$, где $\vec{\mathcal{E}}_e = \mathbf{t}$ и $\vec{\mathcal{H}}_e = \vec{k}_0 \times \mathbf{t}$. Для ТМ-моды $\vec{\psi}_m = \vec{\mathcal{E}}_m + \vec{\mathcal{H}}_m$, где $\vec{\mathcal{E}}_m = -\vec{k}_0 \times \mathbf{t}$ и $\vec{\mathcal{H}}_m = \mathbf{t}$.

Отражённая волна имеет волновой вектор $\vec{k}_0 = (\mathbf{k}_{\parallel}, -k_{0\perp})$, поля $\vec{\mathcal{E}}_e = \mathbf{t}$, $\vec{\mathcal{H}}_e = \vec{k}_0 \times \mathbf{t}$, $\vec{\mathcal{H}}_m = \mathbf{t}$ и $\vec{\mathcal{E}}_m = -\vec{k}_0 \times \mathbf{t}$. Преломлённое поле содержит две волновые моды с волновыми векторами $\vec{k}_1 = (\mathbf{k}_{\parallel}, k_{1\perp})$, $\vec{k}_2 = (\mathbf{k}_{\parallel}, k_{2\perp})$ и электрическими полями $\vec{\mathcal{E}}_1 = \mathbf{e}_1 = \mathbf{a} \times \vec{k}_1$ и $\vec{\mathcal{E}}_2 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{a} - \vec{k}_2 [\mathbf{a} \times \vec{k}_2] \epsilon_2(\theta_2)/\epsilon_1$. Здесь $\mathbf{k} = \mathbf{k}/k$, $k_{1\perp} = (\epsilon_1 k_0^2 - k_{\parallel}^2)^{1/2}$; $k_{2\perp}$ определяется соотношением (30). В случае падающей ТЕ-моды амплитуды отражения ρ_{ee} , ρ_{me} и преломления τ_{je} ($j = 1, 2$) определяются из граничных условий

$$\mathbf{t} \vec{\mathcal{E}}_1 \vec{\tau}_{1e} + \mathbf{t} \vec{\mathcal{E}}_2 \vec{\tau}_{2e} = 1 + \vec{\rho}_{ee}, \quad (53)$$

$$\mathbf{t} \vec{\mathcal{H}}_1 \vec{\tau}_{1e} + \mathbf{t} \vec{\mathcal{H}}_2 \vec{\tau}_{2e} = -\kappa_{0\perp} (1 - \vec{\rho}_{ee}), \quad (54)$$

$$\mathbf{t} \vec{\mathcal{H}}_1 \vec{\tau}_{1e} + \mathbf{t} \vec{\mathcal{H}}_2 \vec{\tau}_{2e} = \vec{\rho}_{me}, \quad (55)$$

$$\mathbf{l} \vec{\mathcal{E}}_1 \vec{\tau}_{1e} + \mathbf{l} \vec{\mathcal{E}}_2 \vec{\tau}_{2e} = -\kappa_{0\perp} \vec{\rho}_{me}. \quad (56)$$

Решение уравнений (53)–(56) элементарно, оно приводится в приложении В.

4.4. Отражение и преломление в случае плоскопараллельной анизотропной пластины толщиной L

В приложениях показано, что, поскольку мы в общем случае имеем дело с двумя модами, которые можно рассматривать как компоненты двумерного вектора-столбца, амплитуды отражения и преломления на границе раздела удобно представлять в виде матриц. Зная эти матрицы, мы можем сконструировать [16] выражения для матричных амплитуд отражения $\vec{R}(L)$ и пропускания $\vec{T}(L)$ анизотропной плоскопараллельной пластины толщиной L при произвольном состоянии $|\vec{\xi}_0\rangle$ падающей волны без какого-либо сшивания на границах раздела [16]. Суть метода состоит в том, что мы обозначаем состояние комбинации полей мод $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, падающих на выходную внутреннюю поверхность пластины в точке $z = L$, неким неизвестным двумерным вектором $|\vec{x}\rangle$ (106). Если бы вектор $|\vec{x}\rangle$ был известен, то мы могли бы сразу найти поле, прошедшее через пластину:

$$\vec{T}(L)|\vec{\xi}_0\rangle = \vec{T}'|\vec{x}\rangle, \quad (57)$$

где $\vec{T}'$ — матрица перехода через правую границу раздела. Состояние поля, отражённого от всей пластины, тогда можно записать в виде

$$\vec{R}(L)|\vec{\xi}_0\rangle = \vec{R}|\vec{\xi}_0\rangle + \vec{T}'\vec{E}(L)\vec{R}'|\vec{x}\rangle, \quad (58)$$

где $\vec{R}$, $\vec{R}'$ — матрицы отражения от левой (со стороны вакуума) и от правой (со стороны анизотропной среды) границ соответственно, $\vec{T}'$ — матрица перехода через левую границу раздела, $\vec{E}(L)$, $\vec{E}(L)$ — диагональные матрицы,

$$\vec{E}(L) = \begin{pmatrix} \exp(ik_{1\perp}L) & 0 \\ 0 & \exp(ik_{2\perp}L) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$\vec{E}(L) = \begin{pmatrix} \exp(ik_{1\perp}L) & 0 \\ 0 & \exp(ik_{2\perp}L) \end{pmatrix},$$

описывающие распространение двух мод внутри пластины между её двумя границами. Здесь $k_{1\perp} = (\epsilon_1 k_0^2 - k_{\parallel}^2)^{1/2}$, причём $k_{2\perp}$ и $k_{2\perp}$ вычисляются из (29) или (30) и (32) соответственно.

Для вектора $|\vec{x}\rangle$ легко составить простое самосогласованное уравнение:

$$|\vec{x}\rangle = \vec{E}(L)\vec{T}'|\vec{\xi}_0\rangle + \vec{E}(L)\vec{R}'\vec{E}(L)\vec{R}'|\vec{x}\rangle. \quad (60)$$

Первое слагаемое в правой части описывает состояние падающей волны, преломлённой на входной границе раздела и дошедшей до выходной поверхности внутри пластины. Второе слагаемое описывает вклад в $|\vec{x}\rangle$ самого состояния $|\vec{x}\rangle$. После отражения от выходной поверхности волна, описываемая этим состоянием, распространяется в сторону входной поверхности, отражается от неё и возвращается к выходной поверхности в точку $z = L$. Оба слагаемых в правой части (58) вместе создают некое новое состояние. Но поскольку мы обозначили это состояние как $|\vec{x}\rangle$, отсюда и следует уравнение (58).

Из (58) можно сразу определить

$$|\vec{x}\rangle = [\hat{I} - \vec{E}(L)\vec{R}'\vec{E}(L)\vec{R}']^{-1} \vec{E}(L)\vec{T}'|\vec{\xi}_0\rangle, \quad (61)$$

а подстановка (61) в (57) и (58) даёт

$$\vec{T}(L) \equiv \begin{pmatrix} T_{ee} & T_{em} \\ T_{me} & T_{mm} \end{pmatrix} = \vec{T}' [\hat{I} - \vec{E}(L)\vec{R}'\vec{E}(L)\vec{R}']^{-1} \vec{E}(L)\vec{T}, \quad (62)$$

$$\vec{R}(L) \equiv \begin{pmatrix} R_{ee} & R_{em} \\ R_{me} & R_{mm} \end{pmatrix} = \vec{R} + \vec{T}'\vec{E}(L)\vec{R}' [\hat{I} - \vec{E}(L)\vec{R}'\vec{E}(L)\vec{R}']^{-1} \vec{E}(L)\vec{T}. \quad (63)$$

С помощью этих формул легко рассчитать все коэффициенты отражения и пропускания для плоских пластин:

$$\begin{pmatrix} |R_{ee}|^2 & |R_{em}|^2 \\ |R_{me}|^2 & |R_{mm}|^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} |T_{ee}|^2 & |T_{em}|^2 \\ |T_{me}|^2 & |T_{mm}|^2 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

для произвольных параметров, произвольного угла падения, произвольной поляризации падающей волны и

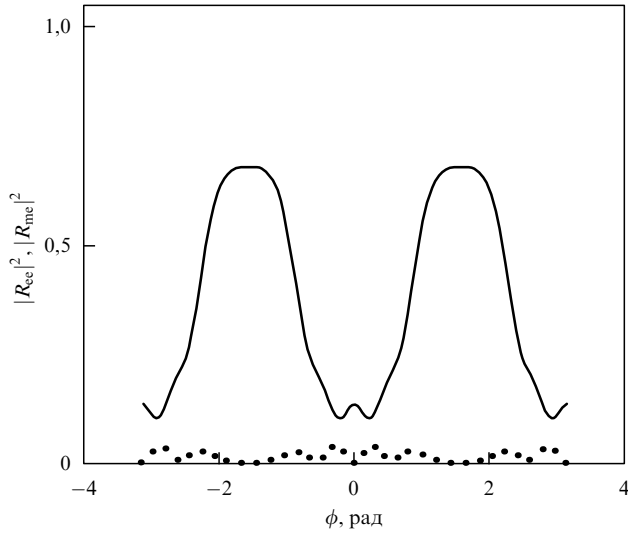


Рис. 3. Зависимости коэффициентов отражения $|R_{ee}|^2$ (сплошная кривая) и $|R_{me}|^2$ (пунктирная кривая) для анизотропной пластины с $\epsilon_1 = 1,6$, $\eta = 0,8$ и безразмерной толщиной $L\omega/c = 10$ от угла поворота ϕ пластины вокруг её нормали в случае, когда вектор анизотропии **a** параллелен плоскости пластины и при $\phi = 0$ совпадает по направлению с $\mathbf{k}_{||}$. Угол падения θ выбирался так, чтобы выполнялось равенство $\sin \theta = 0,9$.

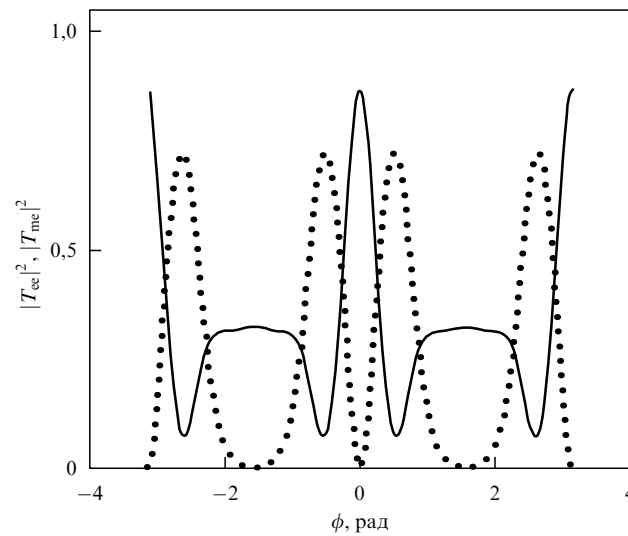


Рис. 4. Зависимости коэффициентов пропускания $|T_{ee}|^2$ (сплошная кривая) и $|T_{me}|^2$ (пунктирная кривая) анизотропной пластины от угла ϕ поворота пластины вокруг её поверхности. Все параметры такие же, как указанные в подписи к рис. 3.

произвольного направления вектора анизотропии **a**. На рисунке 3 показаны коэффициенты отражения от пластины с безразмерной толщиной $L\omega/c = 10$ для падающей ТЕ-моды. Вектор анизотропии параллелен плоскости пластины. Поэтому его ориентация относительно волнового вектора $\mathbf{k}_0$ при повороте пластины на угол ϕ вокруг нормали меняется. Зависимость коэффициентов пропускания от угла ϕ поворота такой же пластины показана на рис. 4.

5. Поверхностные волны Дьяконова

В разделах 3, 4 было показано, что при полном внутреннем отражении смешанных мод возможно также появле-

ние поверхностных волн. Однако эти волны связаны с падающей и отражённой волнами и существовать без них не могут. Дьяконов в 1988 г. обнаружил [15] (см. также [16–19]), что на поверхности одноосной анизотропной среды могут существовать свободные поверхностные волны, аналогичные упругим рэлеевским волнам. В стандартном описании анизотропных сред вывод соотношений для поверхностных волн довольно затруднителен, и Дьяконов опубликовал свой результат фактически без вывода. Здесь будет показано, как вывести уравнения для поверхностных волн Дьяконова (ПВД) с помощью диэлектрического тензора (2). При этом выясняется, что результат Дьяконова можно несколько подправить.

Рассмотрим снова поверхность раздела при $z = 0$ между двумя полупространствами, как показано на рис. 1. Левое полупространство ($z < 0$) занимает одноосная анизотропная среда с тензором диэлектрической проницаемости (2), а правое — изотропная среда с $\epsilon = \epsilon_1$.

Поверхностные волны описываются волновой функцией

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \left\{ \Theta(z < 0) [\psi_1 \exp(p_1 z) + \psi_2 \exp(p_2 z)] + \Theta(z > 0) \psi_i \exp(-p_i z) \right\} \exp(i\mathbf{k}_{||} \mathbf{r}_{||} - i\omega t), \quad (65)$$

где $\Psi = \mathcal{E} + \mathcal{H}$,

$$\mathcal{H}_{1,2} = \frac{k_{||}}{k_0} (\mathbf{l} \times \mathcal{E}_{1,2} - iq_{1,2} \mathbf{n} \times \mathcal{E}_{1,2}), \quad (66)$$

$$\mathcal{H}_i = \frac{k_{||}}{k_0} (\mathbf{l} \times \mathcal{E}_i + iq_i \mathbf{n} \times \mathcal{E}_i),$$

и параметры $p_{1,2,i}$ обеспечивают экспоненциальное затухание при удалении от поверхности в обе стороны. В (66) введены также безразмерные параметры $q_{1,2,i} = p_{1,2,i}/k_{||}$. Для $\Psi_{1,i}$ имеем

$$q_{1,i} = \sqrt{1 - \epsilon_{1,i} z}, \quad (67)$$

где $z = k_0^2/k_{||}^2$. Параметры $q_{1,i}$ вещественны и положительны, когда $\epsilon_{1,i} z < 1$.

Чтобы найти q_2 для поля ψ_2 , нужно решить уравнение (28), которое в безразмерных переменных имеет вид

$$1 - x^2 + \eta(\mathbf{l}\mathbf{a} - i\mathbf{x}\mathbf{n}\mathbf{a})^2 = z\epsilon_1(1 + \eta), \quad (68)$$

где $x = q_2$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, направленный в сторону изотропной среды, $\mathbf{l}$ — единичный вектор вдоль $\mathbf{k}_{||}$. Из уравнения (68) следует, что q_2 может быть вещественным только тогда, когда вектор **a** перпендикулярен **n** или **l**. В первом случае ось анизотропии перпендикулярна границе раздела [15]:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{l} + a_t \mathbf{t} = \cos \theta \mathbf{l} + \sin \theta \mathbf{t}, \quad (69)$$

и решение уравнения (68) выражается в виде

$$x = q_2(\theta) = \sqrt{1 + \eta \cos^2 \theta - \epsilon_1 z(1 + \eta)}. \quad (70)$$

Отсюда видно, что $q_2(\theta)$ является положительным вещественным числом, когда

$$z\epsilon_1 \frac{1 + \eta}{1 + \eta \cos^2 \theta} \equiv z\epsilon_2(\theta) < 1. \quad (71)$$

Во втором случае

$$\mathbf{a} = a_n \mathbf{n} + a_t \mathbf{t} = \cos \phi \mathbf{n} + \sin \phi \mathbf{t} \quad (72)$$

и решение уравнения (68) имеет вид

$$q_2(\phi) = \frac{\sqrt{1 - \epsilon_1(1 + \eta)z}}{\sqrt{1 + \eta \cos^2 \phi}}. \quad (73)$$

В разделе 5.2 показано, что во втором случае поверхностные волны не существуют.

5.1. Волны при оси анизотропии, параллельной границе раздела

Когда вектор $\mathbf{a}$ параллелен границе раздела, векторы $\mathcal{E}_{1,2}$ (см. раздел 2.1) с учётом соотношений (70) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -\frac{C_1}{k_{\parallel}} \mathbf{a} \times \mathbf{k} = C_1(\sin \theta \mathbf{n} + iq_1 \mathbf{a} \times \mathbf{n}) = \\ &= C_1(\sin \theta \mathbf{n} + iq_1 \sin \theta \mathbf{l} - iq_1 \cos \theta \mathbf{t}), \\ \mathcal{E}_2 &= \tilde{C}_2 \left[\mathbf{a} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{a}\mathbf{k})}{k_{\parallel}^2} \frac{1 + \eta}{1 - q_2^2 + \eta(\mathbf{l}\mathbf{a})^2} \right] = \\ &= \tilde{C}_2 \left[\mathbf{a} - (\mathbf{l} - iq_2 \mathbf{n}) \mathbf{a} \mathbf{l} \frac{1}{1 - q_1^2} \right] = \\ &= C_2(iq_2 \cos \theta \mathbf{n} - q_1^2 \cos \theta \mathbf{l} + (1 - q_1^2) \sin \theta \mathbf{t}), \end{aligned} \quad (74)$$

где $C_2 = \tilde{C}_2/(1 - q_1^2)$, $C_{1,2}$ — некоторые комплексные коэффициенты.

В базисе $\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{t}$, показанном на рис. 1, поляризация $\mathcal{E}_i$ в изотропной среде представляется в виде

$$\mathcal{E}_i = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{l} + \gamma \mathbf{t} \quad (76)$$

с координатами α, β и γ . С учётом уравнения $\epsilon_i \nabla \mathcal{E}_i = 0$, которое эквивалентно

$$iq_i \alpha + \beta = 0, \quad (77)$$

вектор (76) приводится к виду

$$\mathcal{E}_i = \alpha(\mathbf{n} - iq_i \mathbf{l}) + \gamma \mathbf{t}. \quad (78)$$

Из требования непрерывности $\mathbf{t}$ - и $\mathbf{l}$ -компонент электрического поля на границе следуют уравнения

$$\begin{aligned} iC_1 q_1 \sin \theta - C_2 q_1^2 \cos \theta &= -iq_i \alpha, \\ -iC_1 q_1 \cos \theta + C_2(1 - q_1^2) \sin \theta &= \gamma. \end{aligned} \quad (79)$$

Ещё два уравнения возникают из требования непрерывности компонент магнитного поля, параллельных поверхности раздела. Подставляя (74), (75) и (78) в (66) и исключая общий множитель $k_{\parallel}/k_0$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= C_1[-iq_1 \cos \theta \mathbf{n} + q_1^2 \cos \theta \mathbf{l} - (1 - q_1^2) \sin \theta \mathbf{t}], \\ \mathcal{H}_2 &= C_2(1 - q_1^2)(\sin \theta \mathbf{n} + iq_2 \sin \theta \mathbf{l} - iq_2 \cos \theta \mathbf{t}), \\ \mathcal{H}_i &= (\gamma \mathbf{n} - iq_i \gamma \mathbf{l} - \alpha(1 - q_i^2) \mathbf{t}). \end{aligned} \quad (80)$$

Условие непрерывности $\mathbf{l}$ - и $\mathbf{t}$ -компонент даёт

$$\begin{aligned} q_1^2 C_1 \cos \theta + iC_2 q_2(1 - q_1^2) \sin \theta &= -iq_i \gamma, \\ C_1 \sin \theta + iq_2 C_2 \cos \theta &= \alpha \epsilon, \end{aligned} \quad (81)$$

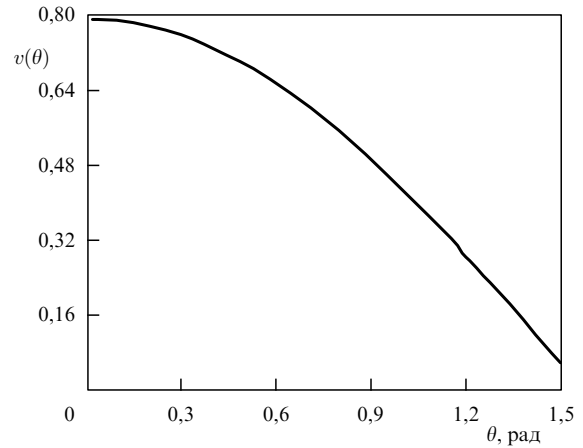


Рис. 5. Зависимость $v(\theta) = c_D(z)/c$ от угла θ между вектором анизотропии $\mathbf{a}$ и направлением $\mathbf{k}_{\parallel}$ распространения поверхностной волны. Расчёт выполнен для $\epsilon_1 = 1.6$, $\eta = 0.4$ и $\epsilon_i = 1$.

где $\epsilon = \epsilon_i/\epsilon_1$. После исключения γ и α из уравнений (79) и (81) получаем однородную систему из двух уравнений для неизвестных $C_{1,2}$:

$$\begin{aligned} q_1 \cos \theta (q_1 + q_i) C_1 + iC_2 (q_2 + q_i) \epsilon_1 z \sin \theta &= 0, \\ iC_1 \sin \theta (q_1 \epsilon + q_i) - C_2 \cos \theta (\epsilon q_1^2 + q_i q_2) &= 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Система (82) имеет решение при равном нулю детерминанте. Это условие представляет собой уравнение для определения $z = k_0^2/k_{\parallel}^2$:

$$\begin{aligned} f(z) &= q_1(q_1 + q_i)(\epsilon q_1^2 + q_i q_2) \cos^2 \theta - \\ &- \epsilon_1 z (q_2 + q_i)(q_1 \epsilon + q_i) \sin^2 \theta = 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Решение уравнения (83) определяет скорость ПВД: $c_D(z) = c\sqrt{z}$.

Вывод уравнения (83) представлен здесь столь подробно, чтобы показать, чем полученный нами результат отличается от результата, приведённого в уравнении (8) в работе Дьяконова [15]. Выражение (83) не приводится к виду (9) в [15], потому что решение (83) существует даже при $\epsilon_i < \epsilon_1$ (в [15] ϵ_1 эквивалентно $\epsilon_{\perp}$). Более того, из (83) следует, что ПВД существуют в гораздо большем диапазоне углов θ , чем это указано в [15]. Например, на рис. 5 приведена зависимость отношения $v(\theta) = c_D(z)/c$ от θ . Видно, что решение уравнения (83) существует во всём диапазоне углов $0 < \theta < \pi/2$, когда $\epsilon_1 = 1.6$, $\eta = 0.4$ и $\epsilon_i = 1$.

5.2. Волны при оси анизотропии, перпендикулярной направлению распространения волны

Когда $\mathbf{a} \perp \mathbf{l}$, векторы $\mathcal{E}_{1,2}$ (см. раздел 2.1) и $\mathcal{H}_{1,2}$, согласно (66), представимы в виде

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{C_1}{k_{\parallel}} \mathbf{a} \times \mathbf{k} = C_1(\sin \phi \mathbf{n} + iq_1 \sin \phi \mathbf{l} - \cos \phi \mathbf{t}), \quad (84)$$

$$\mathcal{E}_2 = C_2[(1 - q_1^2 + q_2^2) \cos \phi \mathbf{n} + iq_2 \cos \phi \mathbf{l} + \sin \theta \mathbf{t}], \quad (85)$$

$$\mathcal{H}_1 = C_1[-\cos \phi \mathbf{n} - iq_1 \cos \phi \mathbf{l} - (1 - q_1^2) \sin \phi \mathbf{t}], \quad (86)$$

$$\mathcal{H}_2 = C_2(1 - q_1^2)(\sin \phi \mathbf{n} + iq_2 \sin \phi \mathbf{l} - \cos \phi \mathbf{t}),$$

а $\mathcal{E}_i, \mathcal{H}_i$ имеют по-прежнему вид (78) и (80) соответственно. После проведения той же самой процедуры,

что и в разделе 5.1, для $z = k_0^2/k_{\parallel}^2$ получаем уравнение

$$f_1(z) = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} q_2 + q_1\right) \cos^2 \phi + (q_2 + q_1)(1 - q_1 q_1) \sin^2 \phi = 0, \quad (87)$$

которое не имеет решения, поскольку все слагаемые здесь положительны. Поэтому при такой ориентации оси **a** поверхностные волны не существуют, на что указывалось и в [15].

6. Возможный эксперимент по наблюдению поверхностных волн Дьяконова

В литературе имеются сообщения об экспериментальном наблюдении ПВД (см., например, статью [20] и обзор [17]). Можно предложить ещё одну схему эксперимента, показанную на рис. 6. В эксперименте необходимо возбудить ПВД и зарегистрировать их. ПВД возбуждаются в диске с осью анизотропии **a**, параллельной поверхности. Диск может поворачиваться вокруг своей оси для изменения угла между векторами **a** и **k** = **k**_∥/k_∥. ПВД возбуждаются в результате нарушения полного отражения от основания анизотропного конуса, подобного конусу, показанному на рис. 2 (здесь для простоты изображён только один луч). ПВД возбуждаются только тогда, когда скорость вдоль основания конуса у падающей или отражённой волн совпадает со скоростью ПВД в диске. Вращение конуса вокруг его оси позволяет производить настройку.

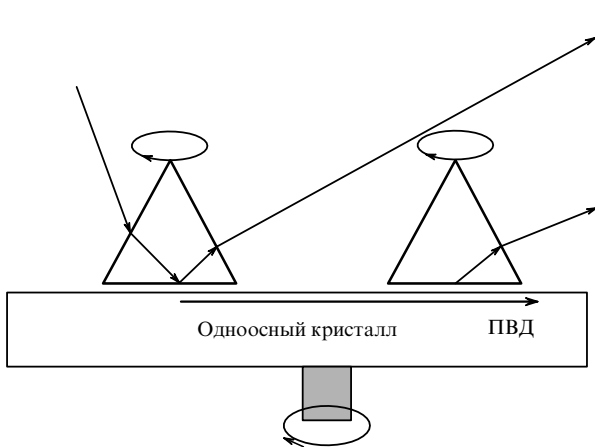


Рис. 6. Схема эксперимента по возбуждению и регистрации ПВД.

Для регистрации ПВД используется второй конус, аналогичный первому. Луч, прошедший вследствие нарушения полного отражения из диска внутрь второго конуса, можно сделать видимым на вертикальном экране, как показано на рис. 6.

7. Заключение

В данной статье тензоры ϵ_{ij} диэлектрической проницаемости для одноосных и двuosных анизотропных сред представлялись соответственно в виде

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_1(\delta_{ij} + \eta a_i a_j), \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_1(\delta_{ij} + \eta_a a_i a_j + \eta_b b_i b_j), \quad (88)$$

где ϵ_1 — соответствует изотропной части, **a**, **b** — единичные векторы вдоль осей анизотропии, η , $\eta_{a,b}$ —

соответствующие параметры анизотропии. С помощью этих тензоров удаётся легко описать плоские волны внутри анизотропных сред $\mathcal{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ при произвольном направлении их распространения относительно векторов анизотропии, т.е. найти аналитические выражения для векторов поляризации $\mathcal{E}$ и волновых чисел $k(\omega)$. В случае одноосной среды показано, что в виде плоских волн могут распространяться только волны с двумя поляризациями: поперечной и смешанной. Поперечная мода имеет характеристики

$$\mathcal{E}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{k}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1}, \quad (89)$$

а характеристики смешанной моды (её поляризация обладает ненулевой компонентой вдоль волнового вектора) выражается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \mathbf{a} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{a}) \frac{\epsilon_2(\theta)}{\epsilon_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2(\theta)}, \\ \epsilon_2(\theta) &= \frac{\epsilon_1(1 + \eta)}{1 + \eta \cos^2 \theta}, \quad \cos \theta = \mathbf{a}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (90)$$

Рассмотрено отражение таких плоских волн от границы раздела с изотропной средой и показано, что при отражении от границы каждой моды происходит появление в отражённом поле волны другой моды, т.е. отражение сопровождается двулучевым расщеплением отражённой волны. Показано также, что смешанная мода (мода 2) отражается в общем случае незеркально и при некоторых критических углах падения она может испытывать полное отражение и создавать поперечную поверхностную волну, которая связана с падающей и отражённой волнами смешанной моды. Показано, что расщепление при отражении может быть наглядно продемонстрировано с помощью конуса, изготовленного из одноосного материала.

После расчёта отражений и преломлений на границе раздела изотропных и анизотропных сред в случае падения под произвольным углом первичных волн изнутри и снаружи анизотропной среды показано, как аналитически без сшивания на границах раздела рассчитать отражение и пропускание плоскопараллельной анизотропной пластины с произвольной толщиной L , когда падающая волна имеет произвольные направление и поляризацию. С помощью аналитических формул проведён численный расчёт для частного случая конкретных значений параметров, из которого видно, как при отражении и пропускании происходит переход ТЕ-мод в ТМ-моды. В частном случае нормального падения волн на анизотропную пластинку показано, когда пропускание пластинки сопровождается переходом линейной поляризации в эллиптическую и когда линейная поляризация падающей волны сохраняется.

Представлен также аналитический вывод выражений для поверхностных волн Дьяконова, что позволило откорректировать результаты, полученные в [15]. Оказалось, что ПВД существуют в более широком диапазоне изменения диэлектрических постоянных и в более широком диапазоне углов между вектором анизотропии и направлением распространения ПВД, чем указывалось в [15]. Предложена также схема эксперимента по возбуждению и регистрации ПВД.

Мы благодарны Лукасу Новотному, Светлане Лукишовой и Сергио Г. Родриго из Оптического института

Рочестерского университета (штат Нью-Йорк, США) за их интерес и поддержку.

8. Приложения

А. Плоские волны в двуосной анизотропной среде

Двуосная анизотропная среда характеризуется двумя единичными векторами, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а также двумя параметрами анизотропии, ϵ'_a и ϵ'_b . Поэтому матричные элементы тензора ε выражаются как

$$\varepsilon_{ij} = \epsilon_1 \delta_{ij} + \epsilon'_a a_i a_j + \epsilon'_b b_i b_j, \quad (91)$$

а уравнения (7), (8) и (10) преобразуются в следующие:

$$\varepsilon \mathcal{E} = \epsilon_1 \mathcal{E} + \epsilon'_a \mathbf{a}(\mathbf{a} \mathcal{E}) + \epsilon'_b \mathbf{b}(\mathbf{b} \mathcal{E}), \quad (92)$$

$$\mathbf{k} \mathcal{E} + \eta_a (\mathbf{k} \mathbf{a})(\mathbf{a} \mathcal{E}) + \eta_b (\mathbf{k} \mathbf{b})(\mathbf{b} \mathcal{E}) = 0, \quad (93)$$

$$(k^2 - k_0^2 \epsilon_1) \mathcal{E} - k^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \mathcal{E}) - k_0^2 \epsilon_1 \eta_a \mathbf{a}(\mathbf{a} \mathcal{E}) - k_0^2 \epsilon_1 \eta_b \mathbf{b}(\mathbf{b} \mathcal{E}) = 0. \quad (94)$$

В уравнениях (93), (94) введены обозначения $\eta_a = \epsilon'_a / \epsilon_1$ и $\eta_b = \epsilon'_b / \epsilon_1$. Для простоты примем, что $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$; введём ортонормированный базис $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и запишем в этом базисе

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \quad (95)$$

с координатами α , β , γ , которые не являются полностью независимыми, поскольку вектор (95) должен удовлетворять уравнению (93). Подстановка (95) в (93) приводит к уравнению

$$\alpha \mathbf{k} \mathbf{a} + \beta \mathbf{k} \mathbf{b} + \gamma \mathbf{k} \mathbf{c} + \eta_a \mathbf{k} \mathbf{a} \alpha + \eta_b \mathbf{k} \mathbf{b} \beta = 0. \quad (96)$$

Следовательно,

$$\gamma \mathbf{k} \mathbf{c} = -\alpha \mathbf{k} \mathbf{a} (1 + \eta_a) - \beta \mathbf{k} \mathbf{b} (1 + \eta_b). \quad (97)$$

Из (95) также следует, что

$$\mathcal{E} \mathbf{a} = \alpha, \quad \mathcal{E} \mathbf{b} = \beta. \quad (98)$$

Подставим (98) и $\mathbf{k} \mathcal{E}$ из (93) в (94) и умножим (94) последовательно на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. В результате получим систему двух однородных уравнений:

$$\begin{aligned} (k^2 [1 + \eta_a (\mathbf{k} \mathbf{a})^2] - k_0^2 \epsilon_1 (1 + \eta_a)) \alpha + \eta_b k^2 (\mathbf{k} \mathbf{a})(\mathbf{k} \mathbf{b}) \beta &= 0, \\ (k^2 [1 + \eta_b (\mathbf{k} \mathbf{b})^2] - k_0^2 \epsilon_1 (1 + \eta_b)) \beta + \eta_a k^2 (\mathbf{k} \mathbf{a})(\mathbf{k} \mathbf{b}) \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (99)$$

решение которой существует только при равном нулю детерминанте, т.е. при выполнении условия

$$(k^2 - \epsilon_a(\theta_a) k_0^2) (k^2 - \epsilon_b(\theta_b) k_0^2) = \frac{\eta_a \eta_b k^2 (\mathbf{k} \mathbf{a})^2 (\mathbf{k} \mathbf{b})^2}{[1 + \eta_a (\mathbf{k} \mathbf{a})^2] [1 + \eta_b (\mathbf{k} \mathbf{b})^2]}, \quad (100)$$

где введены обозначения

$$\epsilon_{a,b}(\theta_{a,b}) = \frac{\epsilon_1 (1 + \eta_{a,b})}{1 + \eta_{a,b} \cos^2 \theta_{a,b}}, \quad \cos \theta_a = \mathbf{k} \mathbf{a}, \quad \cos \theta_b = \mathbf{k} \mathbf{b}. \quad (101)$$

Решение уравнения (100) позволяет определить два различных значения $k_{1,2}$, с помощью которых находятся α , β . После подстановки двух найденных координат в (97) получаем третью координату, γ . Таким образом, имеем два вида плоских волн с волновыми векторами $\mathbf{k}_{1,2} = k_{1,2} \mathbf{k}$ и линейными поляризациями $\mathcal{E}_{1,2}$ (95).

Б. Отражение от границы раздела со стороны анизотропной среды

Исключение $\vec{\tau}_{ej}$ из (38) и (39), а также исключение $\vec{\tau}_{mj}$ из (41) и (42) приводит к двум уравнениям для $\vec{\rho}_{1j}$, $\vec{\rho}_{2j}$, которые удобно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \vec{\mathcal{H}}_1 + \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_1 & \vec{\mathcal{H}}_2 + \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_2 \\ \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_1 & \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{E}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_{1j} \\ \vec{\rho}_{2j} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{H}}_j + \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_j \\ \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_j - \vec{\mathcal{E}}_j \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Уравнение (102) имеет решение

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}_{1j} \\ \vec{\rho}_{2j} \end{pmatrix} = \frac{-1}{D} \begin{pmatrix} \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{E}}_2 & -\vec{\mathcal{H}}_2 - \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_2 \\ -\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_1 & \vec{\mathcal{H}}_1 + \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{H}}_j + \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_j \\ \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_j - \vec{\mathcal{E}}_j \end{pmatrix}, \quad (103)$$

где детерминант

$$D = (\vec{\mathcal{H}}_1 + \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_1)(\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{E}}_2) - (\vec{\mathcal{H}}_2 + \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_2)(\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_1). \quad (104)$$

Подстановка выражений (102)–(104) в (38) и (41) даёт амплитуды преломлённых волн $\vec{\tau}_{e,mj}$:

$$\begin{pmatrix} \vec{\tau}_{ej} \\ \vec{\tau}_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_j \\ \vec{\mathcal{H}}_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_1 & \vec{\mathcal{E}}_2 \\ \vec{\mathcal{H}}_1 & \vec{\mathcal{H}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_{1j} \\ \vec{\rho}_{2j} \end{pmatrix}. \quad (105)$$

Наиболее общий случай. Выше был рассмотрен случай, в котором на границу раздела падает одна волна с единичным вектором поляризации $\mathbf{e}_j$ и единичной амплитудой. (Векторы $\mathbf{e}_j$, вообще говоря, не обязаны быть нормированными.) Для того чтобы найти отражение и пропускание плоских пластин, необходимо уметь рассчитывать общий случай, когда на границу раздела падают сразу волны обеих мод с амплитудами $x_{1,2}$. В этом случае удобно представлять состояние падающего поля в виде двумерного вектора

$$|\vec{\mathbf{x}}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Тогда состояния отражённого и преломлённого полей также представляются двумерными векторами:

$$|\vec{\Psi}\rangle = \begin{pmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \end{pmatrix} = \vec{\mathcal{R}}' |\vec{\mathbf{x}}\rangle, \quad |\vec{\Psi}_0\rangle = \begin{pmatrix} \vec{\psi}_e \\ \vec{\psi}_m \end{pmatrix} = \vec{\mathcal{T}}' |\vec{\mathbf{x}}\rangle, \quad (107)$$

где $\vec{\mathcal{R}}'$ и $\vec{\mathcal{T}}'$ — 2×2 -матрицы,

$$\vec{\mathcal{R}}' = \begin{pmatrix} \vec{\rho}_{11} & \vec{\rho}_{12} \\ \vec{\rho}_{21} & \vec{\rho}_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{T}}' = \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{e1} & \vec{\tau}_{e2} \\ \vec{\tau}_{m1} & \vec{\tau}_{m2} \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Штрихами отмечены амплитуды отражения и преломления для волн, падающих из анизотропной среды, чтобы отличить их от аналогичных амплитуд волн, падающих снаружи.

Эти формулы используются далее при расчёте отражения и пропускания плоских пластин. Пластина имеет две границы, и нужно знать отражение и преломление на левой границе при падении волн из анизотропной среды. Однако эти величины легко определить исходя из соображений симметрии. Для их получения из выражений (103)–(105) достаточно поменять направление стрелок и знак перед $\kappa_{0\perp}$. В результате получаем

$$\vec{\mathcal{R}}' = \begin{pmatrix} \vec{\rho}_{11} & \vec{\rho}_{12} \\ \vec{\rho}_{21} & \vec{\rho}_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{T}}' = \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{e1} & \vec{\tau}_{e2} \\ \vec{\tau}_{m1} & \vec{\tau}_{m2} \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Отражение снаружи изотропной среды рассмотрено отдельно.

Закон сохранения энергии. При всех расчётах необходимо контролировать правильность формул. Одним из критериев их правильности является выполнение закона сохранения энергии. Необходимо проверять, равна ли нормальная плотность потока падающей энергии суммарной нормальной плотности потока энергии отражённых и преломлённых волн. При этом необходимо правильно определить плотность потока энергии. В изотропной среде плотность потока энергии вдоль нормали $\mathbf{n}$ можно определить как

$$\mathbf{Jn} = \frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{k} \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\epsilon \mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2}{8\pi}, \quad (110)$$

или

$$\mathbf{Jn} = c \frac{\mathbf{n}[\mathcal{E} \times \mathcal{H}]}{4\pi}. \quad (111)$$

В изотропных средах выражения (110), (111) эквивалентны, потому что $\mathcal{H} = \mathbf{k} \times \mathcal{E}/k_0$ и $\mathbf{k}\mathcal{E} = 0$. Первое определение в этом случае является предпочтительным, поскольку второе может быть записано и для стационарных полей, в которых никаких потоков нет.

В анизотропных средах только второе определение является правильным, а поскольку в моде 2 поле $\mathcal{E}$ не ортогонально $\mathbf{k}$, направление плотности потока энергии определяется не только направлением волнового вектора, но и направлением поляризации $\mathcal{E}$ самого поля.

В. Формулы для отражения и преломления на границе раздела снаружи анизотропной среды

Исключение $\vec{\rho}_{ee}$ и $\vec{\rho}_{me}$ приводит к уравнению

$$\begin{pmatrix} \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_1 & \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_2 \\ \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_1 & \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_2 + \vec{\mathcal{E}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{1e} \\ \vec{\tau}_{2e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\kappa_{0\perp} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (112)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} \vec{\tau}_{1e} \\ \vec{\tau}_{2e} \end{pmatrix} = \frac{1}{D_e} \begin{pmatrix} \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_2 + \vec{\mathcal{E}}_2 & -\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_2 + \vec{\mathcal{H}}_2 \\ -\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_1 & \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\kappa_{0\perp} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (113)$$

где детерминант

$$D_e = (\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_1)(\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_2 + \vec{\mathcal{E}}_2) - (\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_2)(\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_1). \quad (114)$$

Подстановка $\vec{\tau}_{je}$ в (53) и (55) даёт

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}_{ee} \\ \vec{\rho}_{me} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_1 & \vec{\mathcal{E}}_2 \\ \vec{\mathcal{H}}_1 & \vec{\mathcal{H}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{1e} \\ \vec{\tau}_{2e} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (115)$$

В случае падения ТМ-моды имеем следующие граничные условия:

$$\vec{\mathcal{H}}_1 \vec{\tau}_{1m} + \vec{\mathcal{H}}_2 \vec{\tau}_{2m} = 1 + \vec{\rho}_{mm}, \quad (116)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \vec{\tau}_{1m} + \vec{\mathcal{E}}_2 \vec{\tau}_{2m} = \kappa_{0\perp} (1 - \vec{\rho}_{mm}), \quad (117)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 \vec{\tau}_{1m} + \vec{\mathcal{E}}_2 \vec{\tau}_{2m} = \vec{\rho}_{em}, \quad (118)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_1 \vec{\tau}_{1m} + \vec{\mathcal{H}}_2 \vec{\tau}_{2m} = \kappa_{0\perp} \vec{\rho}_{em}. \quad (119)$$

Исключая $\vec{\rho}_{me}$ и $\vec{\rho}_{mm}$, получаем

$$\begin{pmatrix} \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_1 & \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_2 + \vec{\mathcal{E}}_2 \\ \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{H}}_1 & \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{1m} \\ \vec{\tau}_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\kappa_{0\perp} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (120)$$

отсюда следует

$$\begin{pmatrix} \vec{\tau}_{1m} \\ \vec{\tau}_{2m} \end{pmatrix} = \frac{1}{D_m} \begin{pmatrix} \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_2 - \vec{\mathcal{H}}_2 & -\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_2 - \vec{\mathcal{E}}_2 \\ -\kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{H}}_1 & \kappa_{0\perp} \vec{\mathcal{H}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\kappa_{0\perp} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (121)$$

где $D_m = -D_e$ (114). Подставляя $\vec{\tau}_{jm}$ в (116) и (118), находим

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}_{em} \\ \vec{\rho}_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_1 & \vec{\mathcal{E}}_2 \\ \vec{\mathcal{H}}_1 & \vec{\mathcal{H}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{1m} \\ \vec{\tau}_{2m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (122)$$

В общем случае, когда падающая волна имеет амплитуду $\vec{\xi}_e$ в ТЕ-моды и амплитуду $\vec{\xi}_m$ в ТМ-моды, состояние падающего поля может быть представлено двумерным вектором

$$|\vec{\xi}_0\rangle = \begin{pmatrix} \vec{\xi}_e \\ \vec{\xi}_m \end{pmatrix}, \quad (123)$$

а состояния отражённых и преломлённых волн — векторами

$$|\vec{\xi}_0\rangle = \begin{pmatrix} \vec{\xi}_e \\ \vec{\xi}_m \end{pmatrix} = \vec{\mathcal{R}} |\vec{\xi}_0\rangle, \quad |\vec{\xi}\rangle = \begin{pmatrix} \vec{\xi}_1 \\ \vec{\xi}_2 \end{pmatrix} = \vec{\mathcal{T}} |\vec{\xi}_0\rangle, \quad (124)$$

где $\vec{\hat{R}}$ и $\vec{\hat{T}}$ — 2×2 -матрицы,

$$\vec{\hat{R}} = \begin{pmatrix} \vec{\rho}_{ee} & \vec{\rho}_{em} \\ \vec{\rho}_{me} & \vec{\rho}_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{\hat{T}} = \begin{pmatrix} \vec{\tau}_{1e} & \vec{\tau}_{1m} \\ \vec{\tau}_{2e} & \vec{\tau}_{2m} \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Список литературы

1. Drude P *Lehrbuch der Optik* (Leipzig: Verlag von S. Hirzel, 1912) [*The Theory of Optics* (New York: Dover Publ., 1959)]
2. Azzam R M A, Bashara N M *Ellipsometry and Polarized Light* (Amsterdam: North-Holland, 1977)
3. Ландсберг Г С *Оптика* (М.: Физматлит, 2010)
4. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999)
5. Кизель В А *Отражение света* (М.: Наука, 1973)
6. Kūzhel P *Electromagnetisme des milieux continus. "Optique"* (Paris: Univ. Paris-Nord, 2000/2001)
7. Kūzhel P, "Lecture 8: Light propagation in anisotropic media", <http://www.fzu.cz/~kuzelp/Optics/Lecture8.pdf>
8. Ditchburn R W *Light* (New York: Dover Publ., 1991)
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2005) [Landau L D, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2004)]
10. Pedrotti F L, Pedrotti L M, Pedrotti L S *Introduction to Optics* 3rd ed. (Upper Saddle River, N.J.: Pearson/Prentice Hall, 2007)
11. Hecht E *Optics* 4th ed. (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 2008)
12. Федоров Ф И *Оптика анизотропных сред* (Минск: Изд-во АН БССР, 1958) Гл. XI, уравнение (20.4)
13. Раутнан С Г *Введение в физическую оптику* (М.: Либроком, 2009)
14. Ignatovich V K, Phan L T N *Am. J. Phys.* **77** 1162 (2009)
15. Дьяконов М И *ЖЭТФ* **94** (4) 119 (1988) [D'yakonov M I *Sov. Phys. JETP* **67** 714 (1988)]
16. Utsuro M, Ignatovich V K *Handbook on Neutron Optics* (New York: Wiley-VCH Verlag, 2009)
17. Takayama O et al. *Electromagnetics* **28** 126 (2008)
18. Nikitin A Yu et al. *Opt. Lett.* **34** 3911 (2009)
19. Torner L, Artigas D, Takayama O *Opt. Photon. News* **20** (12) 25 (2009)
20. Takayama O et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 043903 (2009)
21. Алешкевич В А *Оптика* (М.: Физматлит, 2011)

Optics of anisotropic media

F.V. Ignatovich

Lumetrics Inc., Rochester, New York, USA

V.K. Ignatovich

*I.M. Frank Laboratory of Neutron Physics, Joint Institute for Nuclear Research,
ul. Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russian Federation
E-mail: v.ignatovi@gmail.com*

A new effective analytic approach for describing electromagnetic waves in nonmagnetic anisotropic media is proposed. Analytical description of refraction and reflection at an interface between an isotropic and an anisotropic medium is demonstrated. Beam splitting at the reflection and refraction is reviewed, and surface wave generation is examined. D'yakonov surface waves and methods for their observation are discussed. Analytical and numerical calculations of the reflection and transmission of plane-parallel uniaxial plates are outlined.

PACS numbers: 41.20.Jb, **42.25**–p, 78.20.Fm

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201207f.0759

Bibliography — 21 references

Received 17 October 2010, revised 9 July 2011

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (7) 759–771 (2012)

Physics—Uspekhi **55** (7) (2012)