Июль 2012 г. **Том 182, № 7**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Электростатические осцилляторы

В.А. Саранин

Рассмотрено несколько видов электростатических осцилляторов, грузом в которых служит электрически заряженный шарик. При этом физический и математический электростатические маятники совместно с проводящей заземлённой пластиной образуют бистабильный осциллятор, имеющий при одном и том же наборе параметров два устойчивых положения равновесия и одно неустойчивое. Для этого осциллятора построены бифуркационнные кривые и исследованы нелинейные колебания. Пружинный электростатический маятник тоже имеет точку бифуркации, кроме того, при электрическом пробое воздуха он может совершать автоколебания. Показано, что к электростатическим осцилляторам можно отнести заряженную границу раздела жидкостей, находящуюся во внешнем электрическом поле. Приведены результаты экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

PACS numbers: 01.50.Pa, 41.20.Cv, **45.50.–j** DOI: 10.3367/UFNr.0182.201207e.0749

Содержание

1. Введение

Систему, представляющую собой физический маятник, усложнённый наличием заряда на шарике, будем называть электростатическим маятником. Такого рода маятник, в частности, был использован в работе [1] в качестве электростатического динамометра для измерения электростатической силы. Эксперименты, направленные на измерение силы электрического изображения, действующей на заряженный шарик со стороны проводящей заземлённой пластины, с использованием электростатического динамометра, показали, что в таких условиях электростатический маятник проявляет интересные свойства. В частности, в рабочем интервале параметров имеются бифуркационные точки, разделяющие области существования состояний устойчивого равновесия, области состояний неустойчивого равновесия и области, где таких состояний нет. Причём для одного и того же набора параметров у маятника одновременно могут существовать одно неустойчивое и два устойчивых состояния равновесия. Тем самым такой электростатический маятник попадает в разряд бистабильных осцилляторов типа осциллятора Чуа [2, 3], которые при определённых условиях могут демонстрировать хаотическое поведение [2–4]. Однако в случае электростатического маятника вследствие двумерности его фазового пространства наличие бистабильности не может привести к хаотическому поведению маятника. Бифуркационными свойствами обладает и пружинный электростатический маятник. При некоторых условиях в системе, включающей в себя пружинный электростатический маятник, возможны автоколебания. Подобные автоколебания наблюдаются и в распределённых колебательных системах (например, в капиллярных).

Полученные результаты позволяют утверждать, что электростатические осцилляторы являются физическими объектами, представляющими научный и методический интерес.

2. Метод электрических изображений в эксперименте

При корректном изложении метода электрических изображений предполагается, что проводник занимает всё полупространство, ограниченное плоской поверхностью [5]. Если при этом заряд q, являющийся источником поля, положителен, $q > 0$, то на поверхности скапливается избыточный отрицательный заряд, а соответствующий положительный заряд находится на бесконечности и никак не влияет на ситуацию. В этом случае имеем полное изображение заряда $q' = -q$, расположенное на том же расстоянии от поверхности, что и источник. Как

В.А. Саранин. Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко,
ул. Первомайская 25, 427621 Глазов, Удмуртская Республика, Российская Федерация
Тел. (34141) 558-57
E-mail: saranin@ggpi.org, val-sar@yandex.ru

Статья поступила 14 января 2011 г., после доработки 12 октября 2011 г.

следствие, на заряд-источник со стороны заряда-изображения действует сила Кулона $F = kq^2/4S^2$, где S — расстояние от заряда до плоскости (в условиях, когда заряд можно считать точечным), притягивающая заряд к плоскости. Однако часто вместо проводящего полупространства рассматривают большую тонкую проводящую заземлённую пластину (см., например, [6, 7]), причём предполагается, что и в этом случае имеет место полное изображение заряда.

Для экспериментальной проверки этого предположения использовался электростатический динамометр [1] и заземлённая дюралевая пластина размерами 645× ×380 × 2 мм^3. Шарик диаметром 24 мм, изготовленный из пенопласта, покрывался тонкой алюминиевой фольгой и приклеивался к стержню от шариковой ручки, внутри которого проходил провод от высоковольтного источника. Вся система может поворачиваться под действием силы Кулона (рис. 1а). Другие параметры установки следующие: $a = \text{OC} = 2{,}0$ мм, $b = 60$ мм, $h = 100$ мм, $m = 1{,}1$ г. Напряжение, которое подавалось на шарик от высоковольтного источника по изолированному проводу, соответствовало 15 кВ. Для устранения поверхностной проводимости окружающих тел, а также наводимой дополнительной ёмкости пластина подвешивалась на рыболовной леске, тем самым изолировалась от всех тел, кроме заземляющего провода.

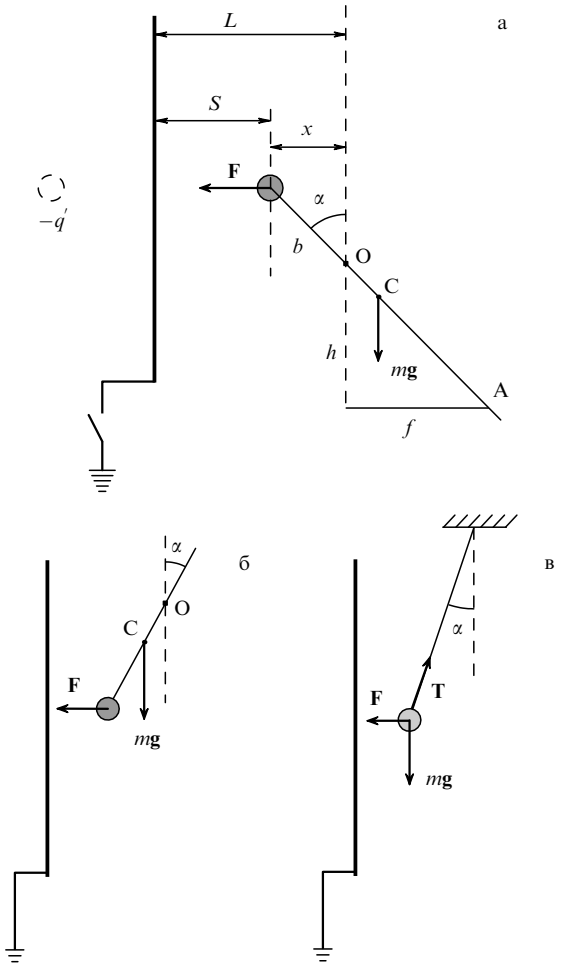

Рис. 1. (а) Схема электростатического динамометра. Точка C — центр масс. Ось вращения проходит через точку O. (б, в) Возможные варианты электростатических маятников.

В положении равновесия маятника момент силы Кулона относительно оси O уравновешивается моментом силы тяжести всей системы:

$$Fb\cos\alpha = mga\sin\alpha\,, \tag{1}$$

или

$$F = \left(\frac{mga}{b}\right)\tan\,,\alpha \quad \tan\alpha = \frac{f}{h}\,, \quad F = \left(\frac{mga}{bh}\right)f. \tag{2}$$

Если шарик считать точечным зарядом, то сила Кулона, действующая на него со стороны полного изображения, имеет вид

$$F = \frac{kq^2}{4S^2}\,, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,, \tag{3}$$

где ε_0 — электродинамическая постоянная. Расстояния L, b, h, f (рис. 1а) измерялись миллиметровой линейкой, расстояние S вычислялось по формуле

$$S = L - x = L - \frac{bf}{\sqrt{h^2+f^2}}\,. \tag{4}$$

По результатам опытов строился график зависимости силы F в относительных единицах (фактически по вертикальной оси отложена величина f в сантиметрах, так как все остальные величины в правой части последнего выражения (2) — постоянные) от обратного квадрата расстояния между центром шарика и пластиной (рис. 2; каждой экспериментальной точке соответствует не менее пяти измерений). Прямая линия соответствует закону Кулона (3). Каждому из трёх указанных на рисунке начальных положений шарика, $L = 8{,}0$; 8,2; 8,3 см, соответствуют два положения устойчивого равновесия маятника — слева и справа от затемнённой полосы. В области, выделенной тёмным цветом, согласно теории (см. раздел 3), устойчивых положений равновесия маятника нет. Не наблюдались устойчивые положения равновесия и в эксперименте.

Результаты проведённых экспериментов позволяют сделать вывод о том, что в достаточно большой тонкой проводящей заземлённой пластине формируется полное изображение заряда $q' = -q$, а сила взаимодействия заряда-источника с его изображением в исследованной области параметров, как и следовало ожидать, подчиняется закону Кулона. Кроме того, система проводящая

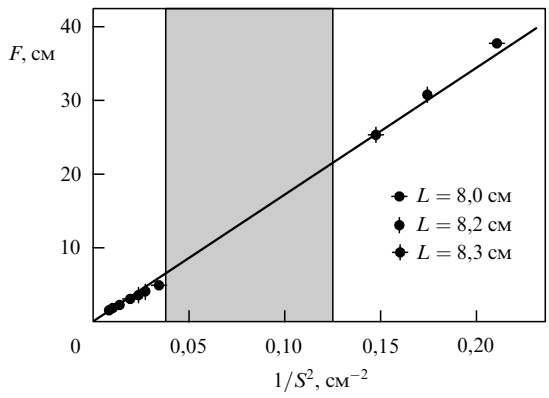

Рис. 2. Зависимость силы взаимодействия заряженного шарика с проводящей заземлённой пластиной от обратного квадрата расстояния от его центра до пластины. Прямая — закон Кулона. В затемнённой области нет устойчивых положений равновесия маятника.

плоскость – электростатический маятник неожиданно проявила свойство бистабильности: для одного и того же набора параметров у неё могут одновременно существовать два устойчивых положения равновесия.

3. Равновесие электростатического маятника и его устойчивость

Нетрудно убедиться в том, что задача о равновесии маятника, изображённого на рис. 1а, эквивалентна задачам о равновесии маятников, изображённых на рис. 1б, в. Действительно, условие равновесия маятника, изображённого на рис. 1б, в точности совпадает с (1), (2), условие равновесия маятника, изображённого на рис. 1в, имеет вид $F/(mg) = \tan\alpha$, и оно может быть сведено к (2) перенормировкой постоянных m или g.

Используя рис. 1а, можно получить условие равновесия в безразмерном виде

$$Q^2 = (\widetilde{L} - \sin\alpha)^2 \tan\alpha\,, \quad Q^2 = \frac{kq^2}{4mgab}\,, \quad \widetilde{L} = \frac{L}{b}\,. \qquad (5)$$

Трансцендентное уравнение (5) служит для определения угла отклонения маятника от положения равновесия в зависимости от двух параметров, Q^2 и L. Так как проще иметь дело с алгебраическим уравнением, исключим угол, используя равенство $\sin\alpha = \widetilde{L} - \widetilde{S}$, где $\widetilde{S} = S/b$. В дальнейшем знак тильда опускаем. Тогда условие равновесия будет следующим:

$$Q^2 = \frac{S^2(L-S)}{\sqrt{1-(L-S)^2}}\,. \qquad (6)$$

Уравнение (6) служит для определения S в зависимости от двух параметров, L и Q^2. Аналитическое разрешение (6) относительно S затруднено и вряд ли возможно. Однако в явном виде из (6) можно выразить, например, L как функцию S, оставив Q параметром. После преобразований получим

$$L = S + \frac{Q^2}{\sqrt{S^4 + Q^4}}\,. \qquad (7)$$

Обратные зависимости $S(L)$, построенные по (7) при различных значениях Q, показаны на рис. 3. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют $Q^2 = 0{,}05; 0{,}20; 0{,}60$. При заданном значении L на кривой *2* есть три значения S, соответствующие условию равновесия. Однако в точке B не может быть устойчивого равновесия, так как на этой ветви кривой *2* уменьшению L соответствует увеличение S, что с физической точки зрения невозможно.

Видно, что кривые *1*, *2* имеют локальные экстремумы, а на кривой *3* их нет. Для того чтобы установить, при каких параметрах имеются экстремумы, найдём производную от L по S и приравняем её нулю. Это даёт

$$S^4 - 2^{2/3}Q^{4/3}S^2 + Q^4 = 0\,. \qquad (8)$$

Уравнение (8) имеет положительные корни

$$S_{1,2} = \left[\frac{Q^{4/3}}{2^{1/3}} \pm \sqrt{\frac{Q^{8/3}}{2^{2/3}} - Q^4}\,\right]^{1/2}, \qquad (9)$$

которые существуют лишь при

$$Q^2 \leqslant Q^2_{\max} = 0{,}5\,. \qquad (10)$$

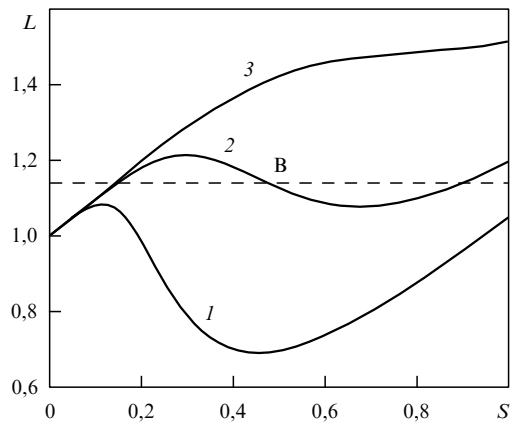

Рис. 3. Зависимости расстояния от центра шарика до плоскости S в положении равновесия от его начального расстояния L при различных значениях безразмерного заряда шарика Q.

Действительно, на кривой *3* (рис. 3), соответствующей $Q^2 = 0{,}6$, экстремумов уже нет.

Определим условия, при которых возможны положения равновесия маятника при начальном положении $L \leqslant 1$. Подставив в (7) $L = 1$ и заменив в (7) знак равенства знаком $\leqslant$, после несложных преобразований получим

$$Q^2 \leqslant \frac{(1-S)\,S^2}{\sqrt{S(2-S)}}\,.$$

Анализ выражения в правой части показывает, что оно имеет максимум. Найдём этот максимум, взяв производную от правой части. После преобразований придём к квадратному уравнению

$$S^2 - 3S + \frac{3}{2} = 0\,,$$

имеющему подходящий ($S < 1$) корень

$$S = 1{,}5 - \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}634\,.$$

Соответствующее максимальное значение $Q_1^2 \approx 0{,}158$. Следовательно, при $Q^2 > 0{,}158$ и $L < 1$ не может существовать устойчивых положений равновесия маятника — из начального положения $L < 1$ он будет опрокидываться на плоскость.

Потенциальную энергию маятника при его отклонении от первоначального вертикального положения (в котором потенциальная энергия считается равной нулю) можно записать в виде

$$W(x) = mga\left[\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) + Q^2\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L-x}\right)\right], \qquad (11)$$
$$x = L - S = \sin\alpha\,.$$

Здесь и далее вместо S удобнее использовать непосредственно величину смещения шарика от начального положения x. Графики зависимости потенциальной энергии в единицах mga от величины отклонения маятника от положения равновесия x представлены на рис. 4. Кривым *1*, *2*, *3* соответствуют начальные положения $L < 1$: $L = 0{,}83$; $0{,}88$; $0{,}90$ и $Q^2 = 0{,}063$; $0{,}110$; $0{,}220$. Видно, что на кривой *1* имеются два локальных экстре-

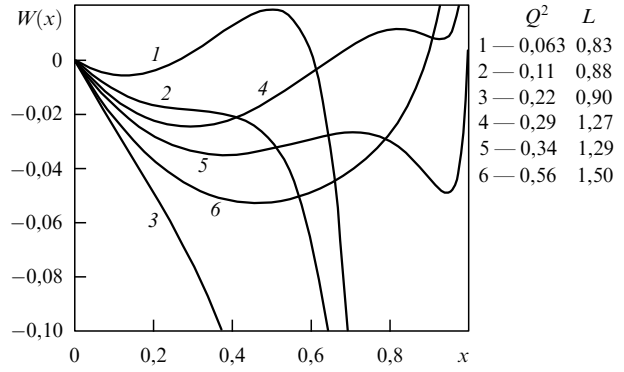

Рис. 4. Зависимости потенциальной энергии маятника от величины смещения его центра от начального положения (в безразмерных переменных) при различных значениях управляющих параметров L и Q.

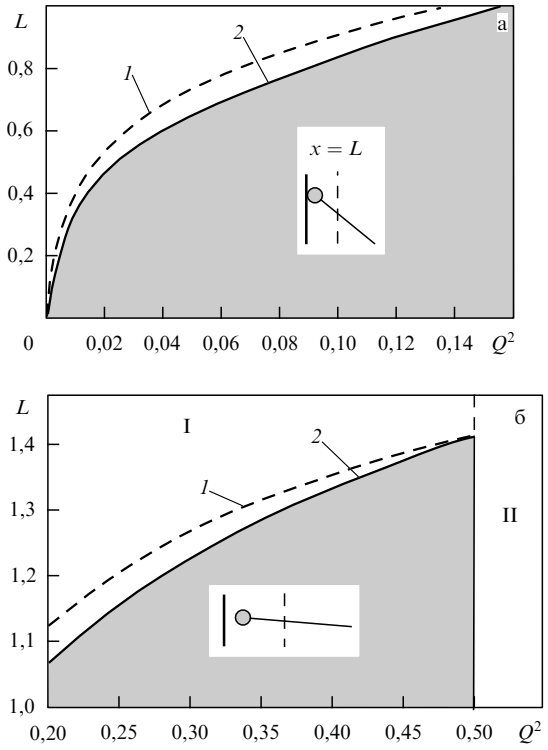

Рис. 5. Кривая *1* соответствует набору параметров, при которых потенциальная энергия маятника в точке максимума обращается в нуль. Кривая *2* на рис. а представляет собой бифуркационную линию, разделяющую области параметров, в которых есть положение устойчивого равновесия, и область параметров, в которой его нет (тёмная область). В точках на кривой *2* на рис. б исчезает первый минимум на кривых потенциальной энергии.

мума, соответствующие устойчивому и неустойчивому положениям равновесия маятника. На кривых *2*, *3* нет точек, соответствующих равновесию: из начального положения шарик сразу будет уходить в положение соприкосновения с плоскостью. Кривые *4*, *5*, *6* соответствуют начальному положению $L > 1$: $L = 1{,}27$; 1,29; 1,50, и $Q^2 = 0{,}29$; 0,34; 0,56. При этом кривые *4*, *5* имеют по два локальных минимума, соответствующих устойчивым положениям равновесия, и по одному максимуму, соответствующему положению неустойчивого равновесия. На кривой *6*, соответствующей $Q^2 = 0{,}56 > 0{,}5$, есть только одно устойчивое положение равновесия.

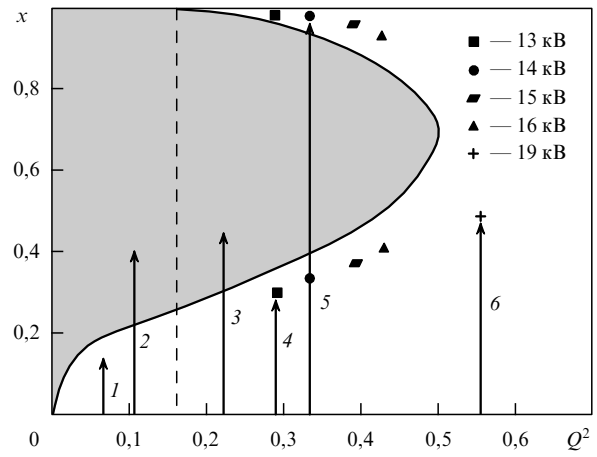

Рис. 6. Карта устойчивых положений равновесия маятника (светлая область). В тёмной области нет устойчивых положений равновесия. Различные символы соответствуют положениям устойчивого равновесия, наблюдавшимся в эксперименте при различных напряжениях.

Дальнейшие исследования положений экстремумов на кривых потенциальной энергии дали следующие результаты. На рисунке 5 кривая *1* соответствует набору параметров, при которых максимум потенциальной энергии обращается в нуль, $\max W = 0$. Затемнённая область на рис. 5а соответствует области параметров, в которой нет устойчивых положений равновесия маятника, внутри этой области маятник из начального положения опрокидывается, т.е. скачком переходит в положение $x = L$ (соприкосновение с плоскостью) при $L \leqslant 1$. Кривая *2* на рис. 5а фактически является бифуркационной линией, отделяющей область, в которой есть устойчивое положение равновесия маятника (светлая область), от области, в которой его нет (тёмная область). На рисунке 5б кривые *1*, *2* имеют тот же смысл, однако в тёмной области теперь имеется единственное устойчивое положение равновесия, соответствующее второму минимуму, в котором $x \approx 1$. Бифуркационное значение параметра $Q^2_{\max} = 0{,}5$ разделяет области I и II на рис. 5б, в области I существуют два устойчивых положения равновесия, в области II — только одно.

Карта устойчивых и неустойчивых состояний равновесия маятника в координатах (Q^2, x) показана на рис. 6. В тёмной области нет устойчивых положений равновесия маятника, и при подходящих значениях L возможно его опрокидывание на плоскость до положения $x = L$. Переход, обозначенный как *1*, соответствует переходу в состояние устойчивого равновесия на кривой *1* (см. рис. 4), переход 2 соответствует параметрам кривой *2* на рис. 4 и уходу шарика на плоскость. Переход *3* соответствует параметрам кривой *3* на рис. 4. Переход *4* соответствует переходу в устойчивое положение первого минимума кривой *4* на рис. 4. Переход *5* соответствует переходу в устойчивое положение второго минимума на кривой *5* рис. 4. Переход *6* соответствует переходу в точку минимума на кривой *6* рис. 4.

В экспериментах по обнаружению устойчивых состояний равновесия маятника использовалась схема электростатического динамометра, изображённая на рис. 1а. Параметры установки следующие: $a = 2{,}0$ мм, $b = 60$ мм, $h = 100$ мм, $m = 1{,}1$ г. Экспериментальные точки отложены на рис. 6. Параметр $x = \sin\alpha$ определялся либо по

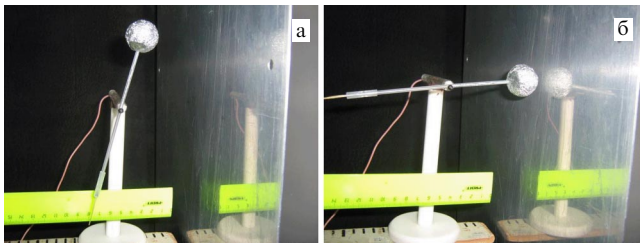

Рис. 7. Фотографии двух устойчивых положений равновесия маятника, реализующиеся при одном и том же наборе параметров.

фотоизображению на компьютере (при углах, близких к 90°), либо по формуле $\sin\alpha = f/\sqrt{f^2+h^2}$. Параметр Q^2 рассчитывался по формуле

$$Q^2 = \frac{f}{b^2 h}\left(L - \frac{fb}{\sqrt{f^2+h^2}}\right)^2,$$

которую можно получить, используя равенства (1)–(3). Отметим, что в экспериментах трение было настолько существенным, что во всех опытах сначала достигался первый минимум, затем после небольшого толчка стеклянной палочкой маятник переходил в положение равновесия, соответствующее второму минимуму. (Можно предположить, что основной вклад в трение вносит сила сопротивления воздуха при движении шарика). Эти два положения равновесия, первый и второй минимумы, показаны на рис. 7а и б соответственно (напряжение 15 кВ). Сравнение результатов экспериментов с теоретическими позволяет сделать вывод не только об очевидном качественном согласии, но и о количественном: так, например, согласно теории минимум на кривой *6* соответствует точке $x \approx 0{,}48$, такое же значение x получается в эксперименте, соответствующем переходу *6* на рис. 6.

Выясним, при каких расстояниях между центром шара и плоскостью следует учитывать конечный размер шара. В работе [8] показано, что взаимодействие заряженного шара с бесконечной проводящей плоскостью аналогично взаимодействию двух одинаковых шаров с противоположными зарядами (заряженный шар взаимодействует со своим изображением в плоскости). Расчёт энергии взаимодействия таких шаров показывает [8], что уже на расстоянии между центрами шаров, равном $l = 2{,}6R$ (R — радиус шара), энергия их взаимодействия менее чем на 10 % отличается от кулоновской (точечные заряды расположены в центрах шаров) в бóльшую сторону. Самый правый минимум на кривой *5* рис. 4 имеет место при $x \approx 0{,}975$. Это соответствует расстоянию между центрами шара и его изображения $l = 2Sb = 2(L-x)\,b \approx 40{,}3$ мм или $l \approx 3{,}36R$. Таким образом, поскольку только на очень близких расстояниях между шаром и плоскостью сила их взаимодействия отличается от кулоновской, причём в бóльшую сторону, принятое в настоящей статье приближение точечного заряда вполне приемлемо.

В довольно популярном задачнике [9], выдержавшем восемь изданий, приведена следующая задача: "Большая металлическая пластина расположена в вертикальной плоскости и соединена с землёй. На расстоянии $a = 10$ см от пластины находится неподвижная точка, к которой на нити длиной $l = 12$ см подвешен маленький шарик массой $m = 0{,}1$ г. При сообщении шарику заряда q он притянулся к пластине, в результате чего нить отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 30°$. Найти заряд шарика". К задаче приводится ответ

$$q = 2(a - l\sin\alpha)\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\tan\alpha} = 20 \text{ нКл}, \qquad (12)$$

который нетрудно получить из равенства нулю проекций всех сил, действующих на шарик (точно такая же задача приведена в [10, 11]). Однако условия задачи и ответ не верны. Действительно, параметр L в данной задаче равен $L = a/l \approx 0{,}83 < 1$, а углу 30° соответствует $x = \sin\alpha = 0{,}5$. Из рисунка 5 видим, что этой совокупности параметров соответствует область, в которой нет устойчивых решений. В условиях данной задачи параметр $Q^2 = (kq^2)/(mgl^2) \approx 0{,}063$. Таким значениям параметров L и Q^2 соответствует кривая *1* на рис. 4, а найденной в задаче точке неустойчивого равновесия соответствует максимум на этой кривой.

Отметим, что при другой формулировке задача имеет корректное решение. Например, при заданном заряде в 20 нКл найти угол, на который отклонится нить с шариком. Зависимость $W(x)$ (кривая *1* на рис. 4) для параметров задачи даёт возможность определить минимум на кривой, который соответствует положению устойчивого равновесия. Получим $x = \sin\alpha \approx 0{,}129$, соответственно угол $\alpha \approx 7{,}4°$.

4. Нелинейные колебания маятника

Рассмотрим теперь динамику электростатического маятника с учётом сил трения. Уравнение движения физического маятника: $I\ddot{\alpha} = \sum_i M_i$, где I — момент инерции маятника относительно оси вращения, M_i — моменты внешних сил, действующих на него. В нашем случае можно записать

$$I\ddot{\alpha} = Fb\cos\alpha - mga\sin\alpha - \gamma\dot{\alpha}\,. \qquad (13)$$

Последнее слагаемое в правой части (13) представляет собой момент силы трения, пропорциональный угловой скорости. Сила Кулона, действующая на шарик со стороны его изображения в проводящей пластине:

$$F = \frac{kq^2}{4(L - b\sin\alpha)^2} = \frac{kq^2}{4b^2(\widetilde{L} - \sin\alpha)^2}\,, \quad \widetilde{L} = \frac{L}{b}\,. \qquad (14)$$

(Далее знак тильда опускаем). Приведём уравнение движения к безразмерному виду, поделив обе его части на mga, а единицу измерения времени выберем так, чтобы коэффициент при $\ddot{\alpha}$ равнялся единице: $[t] = \sqrt{I/(mga)}$. В окончательном виде уравнение движения маятника будет таким:

$$\ddot{\alpha} + \beta\dot{\alpha} + \sin\alpha - \frac{Q^2\cos\alpha}{(L - \sin\alpha)^2} = 0\,,$$

$$Q^2 = \frac{kq^2}{4mgab}\,, \quad \beta = \frac{\gamma}{\sqrt{Igma}}\,. \qquad (15)$$

Численное интегрирование уравнения с помощью программного пакета MathCAD даёт следующие результаты.

На рисунке 8 изображён фазовый портрет физического электростатического маятника в случае, когда он представляет собой консервативную систему с $\beta = 0$ и

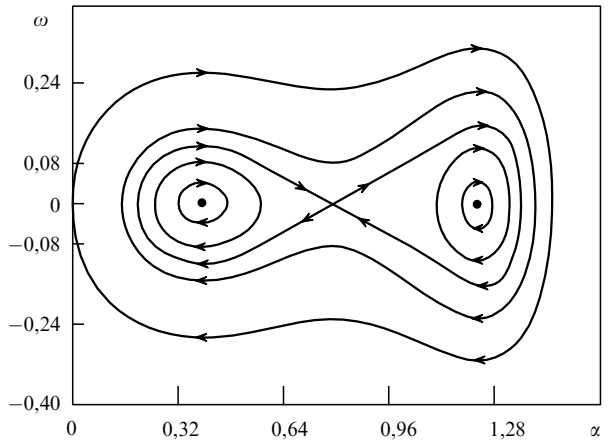

Рис. 8. Фазовый портрет электростатического маятника с $L = 1{,}29$; $Q^2 = 0{,}34$.

$L = 1{,}29$; $Q^2 = 0{,}34$ (для всех изображённых фазовых траекторий $\dot{\alpha}(t=0) = \omega(t=0) = 0$). В соответствии с рис. 4 (кривая *5*) на фазовом портрете видны два центра (чёрные кружки), седло, соответствующее локальному максимуму, и проходящие через седло ветви сепаратрисы.

Для примера приведём также форму колебаний и фазовую траекторию, полученные интегрированием (15) с начальными условиями $\alpha(t=0) = \dot{\alpha}(t=0) = 0$. Наибольший интерес представляет случай умеренных величин зарядов при $L > 1$, когда потенциальная энергия маятника имеет два локальных минимума. На рисунке 9 представлены зависимость угловой координаты от времени и соответствующая фазовая траектория для параметров $L = 1{,}25$, $Q^2 = 0{,}284$ и $\beta = 0{,}005$. Видно, что сначала колебания охватывают почти всю область изменения угловой координаты, затем сосредоточиваются вокруг устойчивого фокуса с координатами (0,31; 0).

5. Равновесие, устойчивость и колебания пружинного маятника

Перейдём к рассмотрению пружинного электростатического маятника. Иллюстрации к возможным постановкам задач в этом случае изображены на рис. 10 (k — жёсткость пружины, которая, как предполагается, может работать и на растяжение, и на сжатие).

В случае рис. 10б в проводящей заземлённой пластине формируется заряд-изображение, показанный штриховой линией. Пренебрежём силой тяжести, поскольку ясно, что она не играет здесь решающей роли. Будем также считать, что в начальный момент времени пружина не деформирована, расстояние от центра верхнего шара до центра нижнего равно L (в случае рис. 10б расстояние от центра шара до плоскости равно L), а шарам мгновенно сообщают заряды q. Шары для простоты будем считать точечными зарядами и далее сосредоточимся на рассмотрении ситуации, изображённой на рис. 10а. Впервые эта задача была рассмотрена в [12].

Если электрического пробоя не происходит, то после включения напряжения верхний шар начнёт двигаться вниз. Для того чтобы исследовать его дальнейшее поведение, запишем потенциальную энергию верхнего шара при смещении его вниз на величину x:

$$W = \frac{kx^2}{2} + k_{\mathrm{e}} q^2 \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L-x} \right), \quad k_{\mathrm{e}} \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,. \tag{16}$$

За начало отсчёта потенциальной энергии выбрано исходное положение шара. Перейдём к безразмерным переменным, выбрав в качестве единицы измерения длины L, а энергии — $kL^2/2$. В безразмерных переменных получим

$$W(x) = x^2 - Q^2\,\frac{x}{1-x}\,, \quad Q^2 = \frac{2k_{\mathrm{e}} q^2}{kL^3}\,. \tag{17}$$

Зависимости $W(x)$ при различных Q^2 приведены на рис. 11 (кривым *1–3* соответствуют $Q^2 = 0{,}15$; 0,23; 0,30). Видно, что начиная с некоторого значения Q_*^2 локальный минимум функции $W(x)$ исчезает, т.е. Q_*^2 — бифуркационное значение параметра Q^2, разделяющее область существования положений равновесия маятника (в том числе устойчивого) и область, в которой положений равновесия нет. Чтобы определить Q_*^2, найдём силу, действующую на шарик, и приравняем её нулю:

$$F_x = -2x + \frac{Q^2}{(1-x)^2} = 0\,, \quad \text{или} \quad Q^2 = 2x(1-x)^2\,. \tag{18}$$

Нетрудно убедиться, что правая часть последнего равенства (18) имеет локальный максимум при $x_{\mathrm{m}} = 1/3$. Максимальное значение $Q^2(x_{\mathrm{m}})$, которое как раз соот-

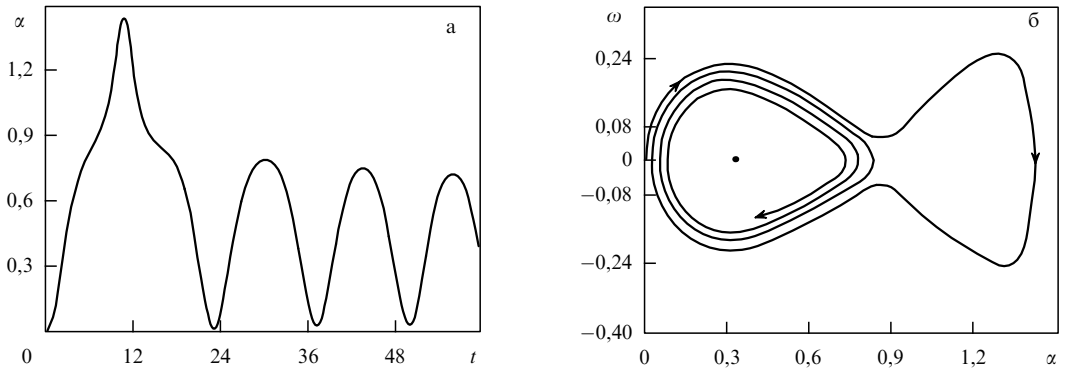

Рис. 9. Зависимости угловой координаты от времени (а) и соответствующие фазовые траектории (б) для параметров маятника $L = 1{,}25$, $Q^2 = 0{,}284$ и $\beta = 0{,}005$.

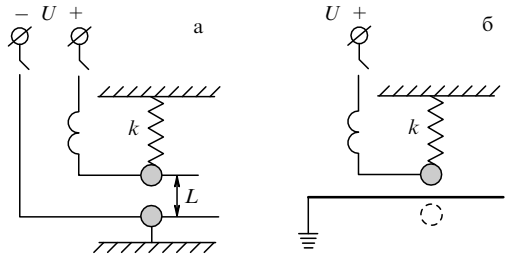

Рис. 10. Схемы пружинных электростатических маятников.

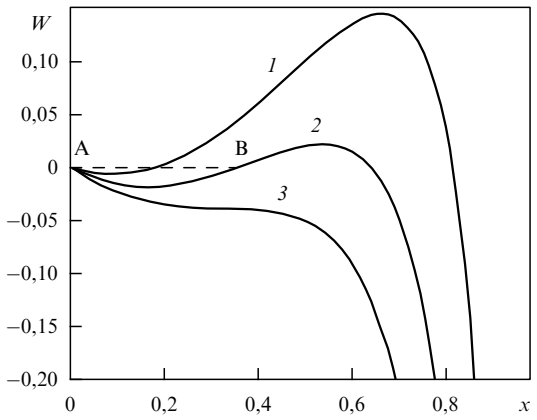

Рис. 11. Зависимости потенциальной энергии пружинного маятника от величины смещения в безразмерных переменных. Кривым *1–3* соответствуют $Q^2 = 0{,}15;\ 0{,}23;\ 0{,}30$.

ветствует Q_*^2, равно

$$Q_*^2 = \frac{8}{27} \approx 0{,}296\,. \tag{19}$$

(Интересный факт: $Q_* = (2/3)^{3/2}$.) При $Q^2 < Q_*^2$ уравнение (18) в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет два действительных корня, меньший из которых соответствует положению устойчивого равновесия, больший — неустойчивого.

Таким образом, если параметры задачи таковы, что $Q^2 < Q_*^2$, то возможным движением будут затухающие колебания верхнего шарика около дна потенциальной ямы (т.е. около положения устойчивого равновесия), а при $Q^2 \geqslant Q_*^2$ шарик будет монотонно приближаться ко второму шарику сколь угодно близко. Отметим также следующее обстоятельство. Если трение в системе пренебрежимо мало, то в случае, когда локальный максимум потенциальной энергии находится ниже линии AB на рис. 11, верхний шар, начиная движение из точки A, может пройти положение локального максимума и перейти в состояние необратимого движения к нижнему шару. Найдём, какой величине параметра Q^2 соответствует этот кризис. Для этого потребуем выполнения равенства $W(x) = W(x = 0) = 0$. Это даёт

$$x^2 - \frac{Q^2}{1-x} + Q^2 = 0\,. \tag{20}$$

Учитывая, что x также должно удовлетворять условию максимума потенциальной энергии (18), после исключения Q^2 из (20) получим $x_{\mathrm{m}} = 1/2$. Соответствующее критическое значение $Q_1^2 = 1/4 = 0{,}25$.

Рассмотренная задача имеет следующую хорошо известную магнитную аналогию [13]. Провод длиной l с током I_1 подвешен на двух пружинах жёсткостью k. На расстоянии L от него в той же плоскости расположен бесконечный прямой провод, по которому в начальный момент времени пускают ток I_2. Характер движения короткого провода и его возможные положения равновесия определяются здесь параметром $J^2 = \mu_0 I_1 I_2 l/(4\pi k L^2)$ (аналог Q^2). Бифуркационное значение параметра J^2, разделяющее область, в которой есть точка устойчивого равновесия, и область, в которой её нет, $J_*^2 = 1/4$.

Таким образом, из сказанного следует, что задачи о движении электростатического и магнитного пружинных маятников аналогичны, но не тождественны. Более того, у них есть существенное различие — в случае электростатического маятника неизбежен электрический пробой воздушного промежутка между разноимённо заряженными шарами при их неограниченном сближении.

6. Автоколебания

Как показано, например, в [12], с уменьшением расстояния между противоположно заряженными шарами напряжённость поля в промежутке между ними неограниченно возрастает. Тем самым в ситуации, изображённой на рис. 10а, при $Q^2 \geqslant Q_*^2$ электрический пробой воздушного промежутка неизбежен. Если теперь в момент, когда верхний шар вернулся в исходное положение, шарам вновь мгновенно сообщить прежние заряды, то процесс повторится. Таким образом, в системе можно возбудить автоколебания, используя электрическую схему, показанную на рис. 12а, с подходящими величинами параметров цепи.

Подобные автоколебательные системы, называемые электромеханическими автоколебательными системами, известны. Классическим примером такой системы является пружинный маятник с электрическим током (см., например, [14]). Свободный конец пружины опущен в сосуд с проводящей жидкостью. При протекании тока пружина сжимается под действием сил Ампера и цепь разрывается, ток перестаёт течь, пружина опускается под действием силы тяжести — и всё повторяется.

По механизму процесса автоколебаний такие автоколебания называются разрывными или релаксационными [13–16]. Разрывные автоколебания (например, колебания напряжения в конденсаторе) с электрическим разрядом возникают в показанной на рис. 12б схеме, где разрядником служит неоновая лампа N [13, 15], но может использоваться и просто воздушный промежуток между электродами [16].

Основное различие между системами на рис. 12 состоит в том, что в системе на рис. 12б период колебаний определяется временем релаксации $\tau = RC$, тогда как в

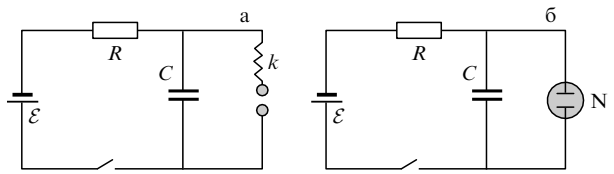

Рис. 12. Схемы, с помощью которых реализуются разрывные автоколебания. N — неоновая лампа.

системе на рис. 12а — периодом собственных колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, где m — масса шарика. В этом случае для организации положительной обратной связи время релаксации должно быть близко к половине периода собственных колебаний $RC \approx T/2$ (считаем, что разряд происходит за пренебрежимо малое время). Отметим, что условие $Q^2 \geqslant Q_*^2$ не является необходимым условием для возникновения автоколебаний в системе на рис. 12а, так как если пробой воздушного промежутка будет происходить внутри интервала АВ на рис. 11, то автоколебания также будут возможны, но с меньшей амплитудой. Поскольку потеря устойчивости равновесия имеет характер кризиса, автоколебания внутри интервала АВ можно назвать докритическими, а автоколебания при $Q^2 \geqslant Q_*^2$ — закритическими. Докритические автоколебания стального шара на пружине, которые наблюдались в экспериментах автора, описаны в [12].

В электромеханических системах трение неизбежно. Чтобы понять, как оно влияет на процесс автоколебаний, численно промоделируем возникновение автоколебаний в системе, изображённой на рис. 10а. Для этого запишем уравнение движения верхнего шарика с учётом силы трения, пропорциональной скорости:

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + \frac{k_e q^2}{(L-x)^2}\,, \tag{21}$$

где m — масса шарика, γ — коэффициент трения. С целью уменьшения числа параметров приведём уравнение (21) к безразмерному виду, выбрав в качестве единицы длины L, единицы времени — $\sqrt{m/k}$. Отсюда получим

$$\dot{v} = -x - \beta v + \frac{Q^2}{2(1-x)^2}\,, \quad \dot{x} = v\,, \quad \beta = \frac{\gamma}{k}\,. \tag{22}$$

Система двух дифференциальных уравнений первого порядка (22) интегрировалась численно с начальными условиями $x(t=0) = v(t=0) = 0$. Для упрощения расчётов предполагались мгновенные зарядка и разрядка шаров. Сначала интегрирование проводилось для случая $Q^2 = 0{,}23$ при $t = 0$. Как только начинало выполняться условие $x > 0{,}3$, заряды шаров мгновенно обращались в нуль (полагалось $Q^2 = 0$ при $x > 0{,}3$) и шары вновь мгновенно приобретали прежние заряды $Q^2 = 0{,}23$ уже при движении верхнего шара вверх и при $x < \delta$. В основных расчётах полагалось $\delta = 0{,}001$. В связи с этим к уравнениям (22) следует добавить условия

$$Q^2 = 0{,}23 \text{ при } t = 0\,, \quad Q^2 = 0, \text{ если } x > 0{,}3 \text{ и } \dot{x} > 0\,,$$
$$Q^2 = 0{,}23\,, \text{ если } x < \delta \text{ и } \dot{x} < 0\,. \tag{23}$$

На рисунке 13 представлены результаты интегрирования системы (22) с условиями (23) при $\beta = 0{,}05$ (кривая *1*) и $\beta = 0{,}15$ (кривая *2*). Колебания устанавливались в интервале $-0{,}487 < x < 0{,}599$ при коэффициенте трения $\beta = 0{,}05$ и в интервале $-0{,}240 < x < 0{,}394$ при $\beta = 0{,}15$ за время, примерно равное длительности десяти и четырёх полных колебаний соответственно (установление колебаний означало неизменность в дальнейшем расчёте трёх значащих цифр в минимальном и максимальном значении координаты x; соответствующие пределы показаны на рис. 13 штриховыми линиями). Видно, что увеличение трения приводит к уменьшению как размаха колебаний, так и времени их установления.

Как и предполагалось, период колебаний оказался близким к периоду собственных колебаний пружины, т.е. в выбранных единицах $T \approx 2\pi$. Изменение координаты δ, вблизи которой шары вновь приобретают прежние заряды, на $\pm 0{,}01$ показало, что при увеличении δ размах колебаний слегка возрастает, а при уменьшении — убывает.

Интегрирование системы (22) совместно с условиями (23) при $Q^2 = 0{,}4$ (т.е. в закритическом режиме) при тех же значениях остальных параметров не изменило основных выводов. Размах колебаний увеличился и составил $(-0{,}628;\, 0{,}798)$ при $\beta = 0{,}05$ и $(-0{,}300;\, 0{,}523)$ при $\beta = 0{,}15$.

Рассмотренные автоколебания пружинного электростатического маятника аналогичны автоколебаниям в распределённых колебательных системах с непрерывным набором частот. Так, например, в [17] описаны автоколебания границы раздела жидкостей во внешнем электрическом поле. Схема установки, в которой наблюдались автоколебания, изображена на рис. 14. В цилиндрический сосуд были налиты раствор поваренной соли (NaCl) (плотность ρ_2) и слой керосина (плотность ρ_1). Другие параметры установки: сопротивление $R = 10$ мОм, ёмкость конденсатора $C = 100-400$ пФ, плавно меняющееся напряжение высоковольтного источника до 15 кВ. В керосине на расстоянии 1,5–2,0 см от границы раздела жидкостей располагался электрод, вторым электродом служила граница раздела. При увеличении напряжения до некоторого критического (порядка 7 кВ) равновесие плоской границы раздела жидкостей становится неустойчивым — на поверхности появляются гравитационно-капиллярные волны в виде бугорков и впадин. Такая

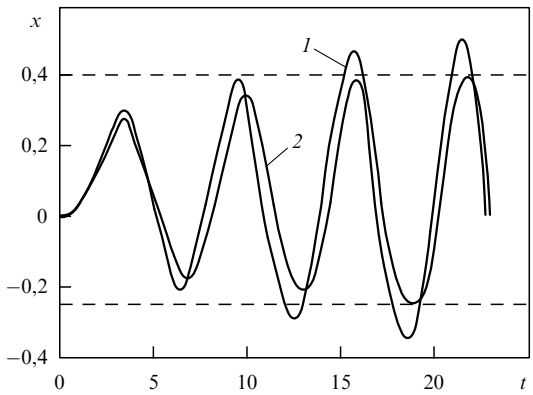

Рис. 13. Кривые зависимости координаты центра шарика от времени, иллюстрирующие процесс установления автоколебаний пружинного электростатического маятника при коэффициентах трения $\beta = 0{,}05$ (кривая *1*) и $\beta = 0{,}15$ (кривая *2*).

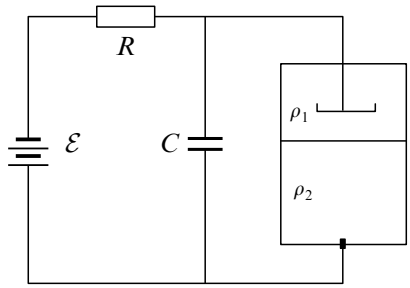

Рис. 14. Схема установки, в которой наблюдались автоколебания границы раздела жидкостей во внешнем электрическом поле.

Рис. 15. Фотографии трёх последовательных фаз колеблющейся капли во внешнем электрическом поле.

неустойчивость хорошо известна под названием неустойчивости Тонкса – Френкеля (см., например, [12]). Неустойчивость приводит к пробою слоя керосина, в конечном итоге в пробое и установившихся автоколебаниях поверхности участвует только одна основная мода с длиной волны, равной примерно 2/3 диаметра сосуда. В данном случае автоколебания поверхности являются закритическими, так как происходят после потери устойчивости.

Капиллярные колебания возможны и на поверхности одиночной капли. Поэтому при определённых условиях капля проводящей жидкости может также участвовать в разрывных автоколебаниях. Такие автоколебания случайно наблюдал в своих экспериментах А.И. Жакин, который любезно предоставил автору сведения о них и соответствующий видеоролик, кадры из которого представлены на рис. 15. Показаны три последовательных фазы колеблющейся капли на кончике капилляра во внешнем электрическом поле. Жидкость — вода, разность потенциалов между капилляром и электродом в виде проволочного кольца радиусом 0,5 см (диаметр проволоки 2 мм), расположенного на 2 см выше конца капилляра, равнялась примерно 5 кВ, диаметр капилляра 1 мм. Время между соседними фазами, показанными на рис. 15, соответствует четверти периода колебаний и составляет 0,13 с, соответственно период колебаний капли равен 0,52 с (частота колебаний $\omega = 12$ с$^{-1}$). Видно, что фазе на рис. 15б соответствует вытягивание капли и сброс заряда (сопровождался свечением фиолетового цвета). Поскольку спектр частот капиллярных колебаний капли зависит от величины заряда капли и напряжённости внешнего поля [12], частота колебаний основной моды $n = 2$ вполне может составлять около 12 с$^{-1}$.

Отметим, что сброс заряда с капли может происходить как в результате коронного разряда, так и в результате развития неустойчивости равновесной эллипсоидальной формы поверхности капли [12]. Условием развития неустойчивости можно считать условие, что электрическое давление на поверхности капли больше лапласовского:

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} > \frac{2\sigma}{R}\,, \tag{24}$$

где ε_0 — электродинамическая постоянная, σ — коэффициент поверхностного натяжения воды, E — напряжённость электрического поля на поверхности капли, R — радиус кривизны поверхности капли. Принимая $R = 0{,}5$ мм, $\sigma = 72$ мН м$^{-1}$, из (24) для напряжённости поля получим оценку $E > 80$ кВ см$^{-1}$. Поскольку такое значение напряжённости вряд ли достигалось в описанном выше эксперименте, следует сделать вывод, что сброс заряда происходил в результате коронного разряда, т.е. автоколебания являлись докритическими. В заключение отметим, что условия эксперимента вполне воспроизводимы в природных условиях (например, при грозе), поэтому не исключено, что подобное явление возможно и в природе.

7. Заключение

Эксперименты по измерению силы, действующей на заряженный шарик со стороны его электрического изображения в проводящей заземлённой пластине, показали, что большая заземлённая пластина, с точки зрения формирования электрического изображения, эквивалентна проводящему полупространству: электрическое изображение в пластине получается полным, $q' = -q$, а сила подчиняется закону Кулона и равняется $F = kq^2/4S^2$, где S — расстояние от центра шарика до пластины. Кроме того, электростатический маятник как основной элемент электростатического динамометра проявил в этой ситуации интересное свойство: при одном и том же наборе параметров он может иметь два положения устойчивого равновесия и одно — неустойчивого.

Теоретически и экспериментально рассмотрены возможные случаи взаимодействия маятника с проводящей плоскостью. Такая система имеет два существенных (управляющих) параметра: параметр, пропорциональный квадрату заряда шарика, и параметр, пропорциональный первоначальному расстоянию шарика от плоскости. На плоскости этих параметров построена бифуркационная кривая, разделяющая область параметров, в которой есть положения устойчивого равновесия маятника, и область параметров, в которой нет таких состояний. В координатах (Q^2, x) построена карта устойчивых и неустойчивых состояний равновесия, показаны экспериментальные точки, в которых наблюдалось по одному и по два устойчивых состояний равновесия. Отмечена некорректность постановки задачи о равновесии электростатического маятника, встречающаяся в ряде вузовских задачников [9 – 11], связанная с тем, что авторы задачников не учитывают возможную неустойчивость положений равновесия маятника, находимых в качестве решений.

С помощью численного решения уравнения движения физического электростатического маятника рассмотрены его нелинейные колебания, построен фазовый портрет маятника.

Изучена динамика пружинного электростатического маятника. Показано, что эта система с одним управляю-

щим параметром Q^2, пропорциональным квадрату заряда шаров, имеет точку бифуркации, разделяющую область существования устойчивых состояний и область, в которой таких состояний нет. В случае, когда в системе пружинного маятника возможен электрический разряд и шары подключены к источнику постоянного напряжения, маятник может совершать автоколебания с частотой, близкой к собственной. Приведены примеры распределённых (имеющих непрерывный набор собственных частот) капиллярных электростатических осцилляторов, в которых автоколебания реализуются на частоте основной моды.

Автор благодарит А.Б. Фёдорова за помощь в проведении экспериментов.

Список литературы

1. Саранин В А, Майер В В *УФН* **180** 1109 (2010) [Saranin V A, Mayer V V *Phys. Usp.* **53** 1067 (2010)]
2. Бугаевский М Ю, Пономаренко В И *Исследование поведения цепи Чуа* (Саратов: Колледж, 1999)
3. Matsumoto T A *IEEE Trans. Circuits* **31** 1055 (1984)
4. Никитина Н В, Repots of the National Academy of Sciences of Ukraine No. 12 (2007)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Landau L D, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
6. Батыгин В В, Топтыгин И Н *Сборник задач по электродинамике* (М.: Наука, 1970) [Batygin V V, Toptygin I N *Problems in Electrodynamics* (London: Academic Press, 1978)]
7. Векштейн Е Г *Сборник задач по электродинамике* (М.: Высшая школа, 1966)
8. Саранин В А *УФН* **169** 453 (1999) [Saranin V A *Phys. Usp.* **42** 385 (1999)]
9. Чертов А Г, Воробьев А А *Задачник по физике* (М.: Высшая школа, 2009)
10. Рубан И И и др. *Физика: Задания к практическим занятиям* (Минск: Вышейшая школа, 1989)
11. Алиев И Н, Толмачев В В *Сборник задач по электродинамике* (М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996)
12. Саранин В А *Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях* (М.–Ижевск: РХД, 2009)
13. Андронов А А, Витт А А, Хайкин С Э *Теория колебаний* (М.: Наука, 1981) [Andronov A A, Vitt A A, Khaikin S E *Theory of Oscillators* (Oxford: Pergamon Press, 1966)]
14. Малов Н Н *Основы теории колебаний* (М.: Просвещение, 1971)
15. Харкевич А А *Автоколебания* (М.: Гостехиздат, 1953)
16. Теодорчик К Ф *Автоколебательные системы* (М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948)
17. Нестеров С В, Секерж-Зенькович С Я *ДАН СССР* **256** 318 (1981) [Nesterov S V, Sekerzh-Zen'kovich S Ya *Sov. Phys. Dokl.* **26** 20 (1981)]

Electrostatic oscillators

V.A. Saranin
V.G. Korolenko Glazov State Pedagogical Institute,
ul. Pervomaiskaya 25, 427621 Glazov, Udmurt Republic, Russian Federation
Tel. 7 (34141) 558 57
E-mail: saranin@ggpi.org, val-sar@yandex.ru

Several types of electrostatic oscillators, with an electrically charged ball as the load, are examined noting that a physical and a mathematical electrostatic pendulum together with a grounded conducting plate form a bistable oscillator for which one and the same set of parameters produces two stable and one unstable equilibrium position. For this oscillator, bifurcation curves are drawn and nonlinear oscillations are studied. The electrostatic string pendulum also has a bifurcation point and, besides, can self-oscillate when electrically broken down. It is shown that a liquid-liquid interface placed in an outer electric field can be considered as an electrostatic oscillator. Experimental results confirming theoretical predictions are presented.

PACS numbers: 01.50.Pa, 41.20.Cv, **45.50.–j** DOI: 10.3367/UFNr.0182.201207e.0749

Bibliography — 17 references *Received 14 January 2011, revised 12 October 2011*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (7) 749–758 (2012) *Physics – Uspekhi* **55** (7) (2012)