Май 2012 г. *Том 182, № 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Ковёр Серпинского с гибридной разветвлённостью: перколяционный переход, критические показатели, силовое поле

А.Н. Герега, Н.Г. Дрик, А.П. Угольников

Вводится представление о ковре Серпинского с гибридной (конечно-бесконечной) разветвлённостью; рассчитаны характеристики перколяционного перехода на нём. Получены рекуррентные соотношения для вычисления силовых полей предфрактала Серпинского произвольного поколения. Обсуждается возможность применения результатов в модели осцилляторного взаимодействия разномасштабных внутренних границ гетерогенного материала.

PACS numbers: 64.60.ae, 64.60.ah, 64.60.al, **64.60.–i** DOI: 10.3367/UFNr.0182.201205f.0555

Содержание

1. Введение

Ковёр Серпинского, который, как известно, является двумерным аналогом канторовского множества исключённых средних [1], может быть построен по простому алгоритму: каждая сторона квадрата единичной площади делится на три равные части; отрезки прямых, проходящие через точки деления параллельно сторонам, создают девять малых квадратов, центральный квадрат извлекается. Процедура повторяется бесконечное число раз на каждом из восьми оставшихся квадратов [1, 2]. Получившееся множество представляет собой регулярный фрактал с размерностью самоподобия $D = \ln 8/\ln 3 = 1{,}892789...$

А.Н. Герега. Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
ул. Дидрихсона 4, 65029 Одесса, Украина
Тел. (1038-048) 798-37-35. E-mail: aherega@gmail.com
Н.Г. Дрик. Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова,
ул. Дворянская 2, 65082 Одесса, Украина
Тел. (1038-048) 755-05-24. E-mail: dilatan@list.ru
А.П. Угольников. Одесская государственная академия холода,
ул. Дворянская 1/3, 65082 Одесса, Украина
Тел. (1038-048) 723-64-12. E-mail: coalman6@gmail.com

Статья поступила 1 августа 2011 г.

Малые квадраты (ячейки), полученные на произвольном шаге описанной итерационной процедуры, считаются соединёнными, если соприкасаются сторонами; другими словами, ковёр Серпинского обладает бесконечной разветвлённостью, т.е. задача разделения его на части может быть решена удалением бесконечного (счётного) множества точек. (Заметим, что с топологической точки зрения ковёр Серпинского является одномерным объектом с континуальным индексом ветвления во всех своих точках).

Конкретное значение разветвлённости неважно, но "некоторые свойства фракталов с конечной и бесконечной разветвлённостью существенно различны" [2]. "Наиболее интересным для нас свойством таких фрактальных решёток является то, что в отличие от решёток с конечной разветвлённостью, на которых путь протекания разрушается при выбрасывании конечного числа узлов, на этих существует самый настоящий перколяционный переход" [2]. Параметры перколяционного перехода на ковре Серпинского изучены в [3].

Предлагаемая модификация ковра Серпинского заключается в том, что соединёнными считаются клетки, либо соприкасающиеся сторонами, либо имеющие общую вершину. Будем называть такой аналог известного фрактала ковром Серпинского с гибридной разветвлённостью. Понятно, что модификация правил образования связности приводит к изменению перколяционных параметров бесконечного кластера ячеек ковра.

2. Перколяция на ковре Серпинского с гибридной разветвлённостью

По описанному алгоритму разделим любую ячейку ковра Серпинского произвольного шага итерации на девять клеток и удалим среднюю. Определим вероятность p' принадлежности ячейки перколяционному кластеру на ковре, т.е. вероятность того, что через ячейку можно "протечь" по составляющим её клеткам, каждая из которых входит в бесконечный кластер с вероятностью p. Так как ренормгрупповое преобразование [4] должно в нашем случае отражать факт наличия связности, количество подходящих комбинаций в расположении клеток в ячейке будет меньше комбинаторного. С учётом этого ренормпреобразование для ковра с гибридной разветвлённостью имеет вид

$$p' = R(p) = p^8 + 8p^7(1-p) + 27p^6(1-p)^2 + \\ + 44p^5(1-p)^3 + 38p^4(1-p)^4 + 8p^3(1-p)^5$$

с нетривиальной неподвижной точкой $p_c = 0{,}5093$, определяющей порог протекания.

Индекс длины корреляции перколяционной системы может быть найден из соотношения $\nu = \ln b / \ln \lambda = 1{,}801$, где $b = 3$ — количество клеток вдоль стороны ячейки, $\lambda = (\mathrm{d}R/\mathrm{d}p)|_{p=p_c}$. Критический показатель параметра порядка β определяется из равенства $D = d - \beta/\nu$, где аппроксимацией размерности D перколяционного кластера служит размерность ковра Серпинского; при размерности пространства $d = 2$ величина $\beta = 0{,}193$. (Для верификации полученных значений: в случае стандартного ковра Серпинского по нашим данным $\nu = 2{,}194$ и $\beta = 0{,}234$, а по результатам работы [3] $\nu = 2{,}13$ и $\beta = 0{,}27$).

Другие критические показатели могут быть определены из системы равенств двухпоказательного скейлинга [2]: индекс средней длины конечного кластера $\gamma = \nu d - 2\beta = 3{,}216$; критический показатель аналога теплоёмкости $\alpha = 2 - \nu d = -1{,}602$; определяющий наибольший размер конечных кластеров индекс $\Delta = \nu d - \beta = 1{,}809$.

3. Модель силового поля квадрата Серпинского

Рассмотрим "проволочную" модель ковра Серпинского. Пусть исходная квадратная рамка разделена четырьмя "проволоками" на девять равных квадратов. Процедура многократно повторяется на каждой из 8^m получаемых на очередном шаге рамок (за исключением центральных). Пусть также на каждой образующей рамок любого "поколения" с линейной плотностью λ содержатся точечные источники, создающие поля напряжённостью $E \sim 1/r^2$. Определим аналитически силовое поле, создаваемое полимасштабной сетью внутренних границ квадрата Серпинского на произвольном шаге разбиения m.

Для упрощения формы записи соотношений начало системы координат расположим в точке, в которой определяется напряжённость, оси — параллельно сторонам квадрата. Причём начало координат не лежит ни на одной из прямых, содержащих рёбра ячеек ковра m-го поколения. Пусть также центр ковра находится в точке $(\xi; \eta)$.

Обозначим:

$$E_x \equiv X_m(\xi;\eta), \quad E_y \equiv Y_m(\xi;\eta),$$

$$\xi(n,p) = \xi + (-1)^n p, \quad \eta(n,p) = \eta + (-1)^n p,$$

$$h = \frac{H}{3^m}, \quad m \in \mathrm{N},$$

$$A(u;v) = \frac{k\lambda}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad B(u;v) = \frac{k\lambda v}{u\sqrt{u^2+v^2}},$$

где k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц измерения.

Тогда

$$X_0(\xi;\eta) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i \times \\ \times \left[A\big(\xi(i,h);\, \eta(j,h)\big) - B\big(\xi\big(j,h\big);\, \eta(i,h)\big)\right],$$

$$Y_0(\xi;\eta) = X_0(\eta;\xi);$$

$$X_m(\xi;\eta) = \sum_{i=1}^{2}\left\{X_{m-1}\left(\xi;\eta\left(i,\frac{2H}{3}\right)\right) + \right. \\ + X_{m-1}\left(\xi\left(i,\frac{2H}{3}\right);\eta\right) + \\ + \sum_{j=1}^{2}\left\{X_{m-1}\left(\xi\left(j,\frac{2H}{3}\right);\, \eta\left(i,\frac{2H}{3}\right)\right) + \right. \\ + (-1)^j\left[A\left(\xi\left(j,\frac{H}{3}\right);\eta\left(i,\frac{H}{3}\right)\right) - A\left(\xi(j,H);\, \eta\left(i,\frac{H}{3}\right)\right) + \right. \\ \left.\left.\left. + B\left(\xi\left(i,\frac{H}{3}\right);\eta(j,H)\right) - B\left(\xi\left(i,\frac{H}{3}\right);\eta\left(j,\frac{H}{3}\right)\right)\right]\right\}\right\};$$

$$Y_m(\xi;\eta) = X_m(\eta;\xi).$$

Для физических приложений естественно начало координат расположить в центре ковра Серпинского, а напряжённость вычислять в произвольной точке с координатами $(x;\, y)$. Формально для такого параллельного переноса системы координат достаточно в функциях X_m и Y_m вместо ξ и η подставить $-x$ и $-y$ соответственно.

4. Заключение

Одно из возможных приложений полученных результатов — описание осцилляторного взаимодействия разномасштабных внутренних границ гетерогенного материала. Имеется в виду тот факт, что статистическое самоподобие в расположении внутренних границ материала приводит к возникновению в локальных областях энергетических предпосылок для образования более крупных границ. В свою очередь поля деформаций этих границ, воздействуя на неоднородности меньших масштабов, провоцируют их дальнейший рост. Это происходит синхронно на всех масштабах [5–7]. Простейшими модельными аналогами таких сетей внутренних границ могут быть модифицированные с помощью аффинного отображения фракталы типа ковра Серпинского и губки Менгера.

В работах [7, 8] исследована формальная стохастическая модель взаимодействия структурных неоднородностей разных масштабных уровней. Структура материала представлена как открытая динамическая система с тремя взаимодействующими масштабными уровнями неоднородностей, и её эволюция описывается системой билинейных итерационных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - k_{xy}\, p x_n^2 + k_{yx}\, q y_n^2 + x_{\mathrm{in}}, \\ y_{n+1} = y_n + k_{xy}\, p x_n^2 - (k_{yx} + k_{yz})\, q y_n^2 + k_{zy} r z_n^2, \\ z_{n+1} = z_n + k_{yz}\, q y_n^2 - (k_{zy} + k_{\mathrm{out}})\, r z_n^2, \end{cases}$$

где x, y, z — динамические переменные, определяющие потенциальную энергию уровня, x_{in} определяет энергию внешнего воздействия. Коэффициенты k_{ij} задают долю переходящей между неоднородностями разных масштабов энергии, а коэффициенты p, q, r — её долю, расходуемую на перестройку структуры, причём $\{k_{ij}\}$ и $\{p, q, r\} \in (0, 1)$, $\{x, y, z\} \in R^+$.

Характер эволюции такой системы в зависимости от интенсивности подвода энергии изучен в работах [8, 9]. Показано, что при малых значениях параметра x_{in} в системе существует стационарное состояние, а с возрастанием x_{in} возможны два варианта развития системы: в первом реализуется сценарий Фейгенбаума, во втором после периодического режима возникает ситуация, аналогичная бифуркации Хопфа. Дальнейшее увеличение x_{in} приводит к бифуркации, в результате которой наступает хаотический режим.

Коэффициенты в приведённой системе уравнений должны характеризовать особенности строения материала. В основу определения их численных значений в [8, 9] положены максимально общие предположения, основанные на анализе физической ситуации. Уточнение этих значений видится на пути использования знаний о структуре и свойствах силовых полей внутренних границ.

Список литературы

1. Божокин С В, Паршин Д А *Фракталы и мультифракталы* (Ижевск: РХД, 2001)
2. Соколов И М *УФН* **150** 221 (1986) [Sokolov I M *Sov. Phys. Usp.* **29** 924 (1986)]
3. Ben-Avraham D, Havlin S, Movshovitz D *Philos. Mag. B* **50** 297 (1984)
4. Reynolds P J, Stanley H E, Klein W *Phys. Rev. B* **21** 1233 (1980)
5. Панин А Е и др. *Структурные уровни пластической деформации и разрушения* (Отв. ред. В Е Панин) (Новосибирск: Наука, 1990)
6. Олемской А И, Скляр И А *УФН* **162** (6) 29 (1992) [Olemskoi A I, Sklyar I A *Sov. Phys. Usp.* **35** 455 (1992)]
7. Выровой В Н, Герега А Н, Коробко О А, в сб. *Труды ИПМЭ НАН Украины* (Под ред. В Ф Евдокимова) (Киев: ИПМЭ НАН Украины, 2010) с. 253
8. Bekker M, Herega A, Lozovskiy T *Adv. Dynam. Syst. Appl.* **4** (2) 179 (2009)
9. Асланов А М, Герега А Н, Лозовский Т Л *ЖТФ* **76** (6) 134 (2006) [Aslanov A M, Herega A N, Lozovski T L *Tech. Phys.* **51** 812 (2006)]

Hybrid ramified Sierpinski carpet: percolation transition, critical exponents, and force field

A.N. Herega
Odessa State Academy of Construction and Architecture,
ul. Didrikhsona 4, 65029 Odessa, Ukraine
Tel. (*1038-048*) *798-37-35*
E-mail: *aherega@gmail.com*
N.G. Drik
I.I. Mechnikov Odessa National University,
ul. Dvoryanskaya 2, 65082 Odessa, Ukraine
Tel. (*1038-048*) *755-05-24*
E-mail: *dilatan@list.ru*
A.P. Ugol'nikov
Odessa State Academy of Refrigeration,
ul. Dvoryanskaya 1/3, 65082 Odessa, Ukraine
Tel. (*1038-048*) *723-64-12*
E-mail: *coalman6@gmail.com*

This methodological note introduces the concept of and calculates percolation transition characteristics for a Sierpinski carpet with hybrid (finite-infinite) ramifying. Recurrence formulas for calculating the force fields of Sierpinski prefractals of arbitrary generation are obtained. The possibility of using the obtained results in the model of oscillatory interacting different-scale inner boundaries of a heterogeneous material is discussed.

PACS numbers: 64.60.ae, 64.60.ah, 64.60.al, **64.60.–i** DOI: 10.3367/UFNr.0182.201205f.0555

Bibliography — 9 references *Received 1 August 2011*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (5) 555–557 (2012) *Physics – Uspekhi* **55** (5) (2012)