

КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМЫ

Современные проблемы физических наук

Научная сессия Отделения физических наук
Российской академии наук, 26 октября 2011 г.

PACS number: 01.10.Fv

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201204d.0437

26 октября 2011 г. в конференц-зале Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (РАН) состоялась научная сессия Отделения физических наук РАН.

Объявленная на web-сайте ОФН РАН www.grad.ac.ru повестка заседания содержала следующие доклады:

1. **Морозов С.В.** (Институт проблем технологии микроэлектроники и особочистых материалов РАН, г. Черноголовка, Московская обл.). *Новые эффекты в графене с высокой подвижностью носителей.*

2. **Волостников В.Г.** (Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, г. Самара). *Современная оптика гауссовых пучков.*

3. **Мушников Н.В.** (Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург). *Магнитные материалы на основе интерметаллических соединений.*

Статьи, написанные на основе докладов, публикуются ниже.

PACS numbers: 72.80.Vp, **73.20.-r**, 81.05.ue

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201204e.0437

Новые эффекты в графене с высокой подвижностью носителей

С.В. Морозов

1. Пути повышения подвижности и баллистический транспорт в графене

Изучение графена является одной из самых бурно развивающихся областей физики твёрдого тела. Графен продолжает удивлять разнообразными свойствами, сочетая в себе большую прочность, рекордно высокую способность к растяжению, а также высокие проводимость, теплопроводность, оптическую прозрачность и т.д. Но главное, что привлекает к графену внимание

многих исследователей, — это его необычная электронная система и уникальные транспортные свойства [1–5].

Уже в первых экспериментальных работах носители в графене демонстрировали довольно высокую подвижность, несмотря на то что плёнка толщиной всего в один атом была никак не защищена от окружающей среды. Существенно, что высокая подвижность носителей благодаря относительно слабому электрон-фононному рассеянию сохранялась при увеличении температуры вплоть до комнатной. Однако долгое время не удавалось повысить подвижность до величин, превышающих типичные значения $(1–2) \times 10^4 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, наблюдаемые в графене на подложках из окисленного кремния. В качестве основных механизмов рассеяния, ограничивающих подвижность в графене, рассматривалось рассеяние на нановолнистой структуре плёнок, а позднее — на резонансных примесях [2, 3].

Новый этап в изучении графена начался с появления структур, имеющих гораздо большую (на 1–2 порядка) подвижность. Стало ясно, что новые структуры позволяют изучать многие тонкие многочастичные эффекты, в частности дробный квантовый эффект Холла, который был обнаружен на новых структурах [6].

Настоящее сообщение посвящено обзору реализованных в последнее время на высокоподвижных структурах графена экспериментов, выполненных автором вместе с группой А. Гейма из Манчестерского университета.

Наметилось два пути получения более совершенных структур графена: использование подвешенных мостиков и инкапсуляция графена между кристаллитами из нитрида бора (BN). Первый метод заключается в формировании подвешенных между металлическими контактами графеновых мостиков (рис. 1а). Сначала с помощью стандартного способа микромеханического расслоения

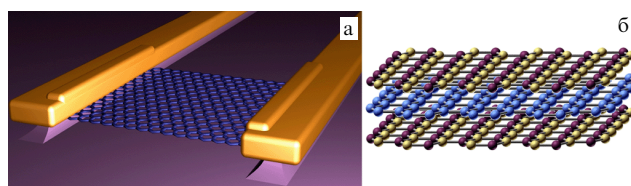


Рис. 1. (а) Подвешенный мостик графена. (б) Графен, инкапсулированный между двумерными кристаллами нитрида бора.

С.В. Морозов. Институт проблем технологии микроэлектроники и особочистых материалов РАН, г. Черноголовка, Московская обл., РФ
E-mail: morozov@iptm.ru

изготавливаются мостики из графена на подложке из окисленного кремния. Затем часть оксида под графеновым мостиком химически травливается. Важной операцией является завершающий отжиг структуры с помощью импульсов тока, пропускаемых через подвешенный графеновый мостик. Отжиг проводится в режиме, близком к режиму разрушения мостика, однако он позволяет локально достичь достаточно высоких температур (по оценке, 700–800 °C), не приводя к деградации остальных частей структуры. По нашему опыту, длительная выдержка структур графена на оксиде кремния при температурах более 400 °C приводит к ухудшению его транспортных свойств.

Указанный способ позволяет достичь рекордно высокой подвижности в графене (более $10^6 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$), но в то же время ему присущ ряд недостатков. Во-первых, данный метод позволяет формировать весьма ограниченные как по размерам (как правило, микрометрового масштаба), так и по топологии (обычно только двухконтактные) структуры. Во-вторых, подвешенные графеновые структуры по-прежнему никак не защищены от окружающей среды и завершающий отжиг проводится непосредственно в низкотемпературном криостате в инертной гелиевой атмосфере.

Второй способ получения высокоподвижных структур заключается в размещении графена между тонкими (вплоть до монослойных) кристаллитами из нитрида бора (рис. 16).

С более общей точки зрения, последний способ построения слоистых структур графен–нитрид бора является одним из путей создания трёхмерных кристаллов на основе различных двумерных составляющих. Существуют различные подходы к формированию новых квазидвумерных кристаллов на основе графена. В последние годы была продемонстрирована возможность получения новых квазидвумерных кристаллов химической модификацией графена. Таким способом были получены графан [7] и флюорографен [8], в которых к решётке графена упорядоченным образом присоединены атомы водорода и фтора соответственно. Графан и флюорографен обладают диэлектрическими свойствами, причём после термической обработки они могут быть восстановлены до исходного графена.

Ранее мы показали [9], что двумерные кристаллы не являются исключительной особенностью углерода и что они могут быть получены также из других слоистых материалов, таких как нитрид бора, высокотемпературная сверхпроводящая керамика BiSCCO, некоторые дихалькогениды. Таким образом, спектр двумерных кристаллов довольно широк — от полуметаллов до диэлектриков и сверхпроводников. Располагая отдельные монослои различных двумерных кристаллов один над другим, можно получить, по существу, новые гетероструктуры с самыми разнообразными свойствами.

Одним из первых примеров реализации таких гетероструктур является инкапсуляция графена между двумерными, имеющими атомарно гладкую поверхность, кристаллами нитрида бора, полученными микромеханическим расслоением. Процедура изготовления подобных структур включает в себя следующие стадии. Сначала тонкие кристаллиты нитрида бора с помощью микромеханического расслоения размещают на поверхности окисленного кремния. На другой подложке из окисленного кремния, предварительно покрытой полимером,

аналогичным образом формируют плёнку графена. Затем графен на полимере переносят на первую подложку, совмещая его с BN-кристаллитом. После растворения полимера, формирования топологии структуры и разводки металлизации структуру покрывают ещё одной плёнкой из нитрида бора.

Оба описанных способа имеют свои достоинства и недостатки. На сегодняшний день максимальная подвижность в структурах на подвешенных графеновых мостиках более $10^6 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$. В то же время подвешенные мостики сильно ограничены как по размерам, так и по топологии структур, что связано со сложностью их отжига импульсами тока, а двухточечная схема измерений значительно сужает круг возможных исследований. Графен на BN лишён этих недостатков, инкапсуляция графена в значительной степени защищает его от воздействия окружающей среды, но достигнутые значения подвижности несколько ниже (как правило, не более $(1-2) \times 10^5 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$).

Появление высокоподвижных структур графена на нитриде бора позволило в явном виде продемонстрировать баллистический транспорт [10]. Эксперимент проводился на холловских мостиках в геометрии изгибного сопротивления $R_B = V_{34}/I_{21}$ (см. вставку на рис. 2). Ток протекает между контактами 2 и 1, а измеряется падение потенциала между контактами 3 и 4, которое в случае диффузионного транспорта может быть рассчитано по формуле Ван дер Пау. Изгибное сопротивление в высокоподвижных структурах является отрицательным в широком диапазоне концентраций носителей, за исключением области малых концентраций, свидетельствуя о том, что инжектированные носители проходят из контакта 2 в контакт 4 практически без рассеяния (баллистически). Подобный эффект ранее был продемонстрирован на высокоподвижных GaAlAs-гетероструктурах, и для его реализации требуется, чтобы длина свободного пробега носителей существенно превышала характерные размеры активной области структуры [11]. При приложении слабого магнитного поля, перпендикулярного слою

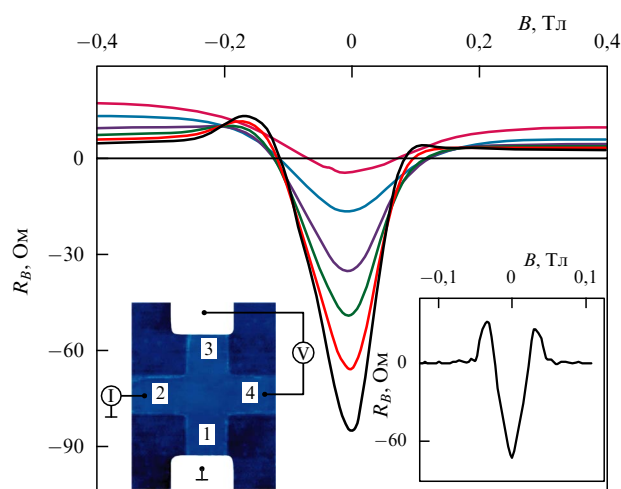


Рис. 2. Зависимость изгибного сопротивления $R_B = V_{34}/I_{21}$ от магнитного поля B при $n \approx 6 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$ и температурах 50, 80, 110, 140, 200 и 250 K (от нижней зависимости к верхней соответственно). На вставке в левой части рисунка — схема измерений, на вставке в правой части рисунка — результат расчёта $R_B(B)$ для $n \approx 6 \times 10^{11} \text{ см}^{-2}$ в бильярдной модели [11].

графена, изгибное сопротивление R_B становится положительным (см. рис. 2), поскольку магнитное поле искривляет траектории инжектированных электронов и они уже не могут достичь противоположного контакта баллистически. В предположении диффузного рассеяния носителей границами образца можно оценить длину свободного пробега в объёме плёнки: она составляет ~ 3 мкм при гелиевой температуре и $\sim 1,5$ мкм при комнатной. Таким образом, графен–BN-гетероструктуры демонстрируют баллистический транспорт микрометрового масштаба даже при комнатной температуре, что, безусловно, открывает новые перспективы для развития высокочастотных и малощумящих приложений микроэлектроники.

2. Особенности зонной структуры вблизи точки электронейтральности

Высокая подвижность носителей представляет собой одну из главных, но далеко не единственную особенность новых образцов. Множество интересных физических эффектов ожидается вблизи точки электронейтральности (при приближении к нулевой концентрации носителей). Но в реальной экспериментальной ситуации достичь этой точки практически невозможно. Действительно, поскольку всегда имеются хаотические флуктуации потенциала, при понижении концентрации носителей двумерный электронный газ разбивается на "лужи" с дырками и электронами (в местах локального повышения и понижения потенциала соответственно), поэтому однородная ситуация с нулевой концентрацией носителей не может быть достигнута. Конечно, от чистоты и качества образцов зависит, насколько близко можно подойти к дираковской точке. Новые структуры графена позволили уменьшить рабочую концентрацию носителей в 10–100 раз и подробно исследовать детали зонной структуры вблизи точки электронейтральности.

Сначала рассмотрим однослойный графен. Носители заряда в графене подобны релятивистским частицам с нулевой массой покоя. Линейный закон дисперсии описывается выражением $E = v_F \hbar k$, где скорость Ферми v_F играет роль скорости света, k — величина волнового вектора. По мере уменьшения концентрации носителей и приближения к точке электронейтральности длина экранирования возрастает и электрон-электронное взаимодействие играет всё большую роль. Стандартная теория ферми-жидкости Ландау, позволяющая представить сильно взаимодействующую электронную жидкость как газ невзаимодействующих электронов, уже будет неприменима. На вставке рис. 3 показан вид спектров однослойного графена, полученных в одночастичном приближении и методом ренормгруппы [12]. Учёт электрон-электронного взаимодействия приводит к понижению плотности состояний при малых энергиях и к возрастанию v_F с логарифмической расходимостью по концентрации вблизи нулевой энергии.

Посредством измерения температурных зависимостей осцилляций Шубникова–де Гааза была получена зависимость циклотронной массы от концентрации носителей n [12]. Соответствующий последней зависимости экспериментальный график $v_F(n)$ показан на рис. 3. В новых высокоподвижных образцах имеется возможность (отсутствовавшая в нашей более ранней работе [13]) изменять концентрацию носителей на три порядка. Экспериментальные точки демонстрируют возрастание

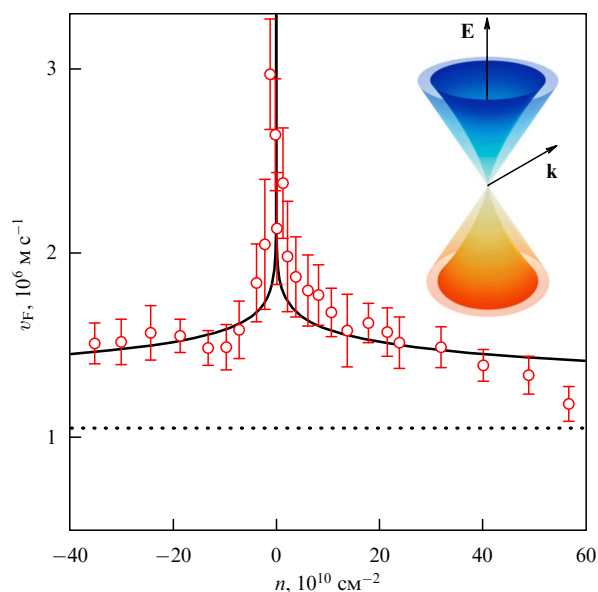


Рис. 3. Экспериментальная (кружки) и теоретическая (сплошная кривая) зависимости скорости Ферми v_F от концентрации носителей заряда n в однослойном графене. Пунктирной прямой показана стандартная величина v_F в графене при больших концентрациях. На вставке приведена схема зонной структуры однослойного графена при малых концентрациях без учёта (одночастичное приближение, внешний конус) и с учётом (внутренний конус) электрон-электронных взаимодействий.

v_F в три раза по мере приближения к дираковской точке, что хорошо согласуется с теорией. Кроме того, ряд теоретических работ [14–17] предсказывает, что электрон-электронное взаимодействие при низких энергиях может привести к появлению новых электронных фаз с образованием запрещённой зоны. Однако наши эксперименты не выявили никаких намёков на диэлектрическое поведение графена при энергиях вплоть до значений порядка 0,1 мэВ.

Ещё более интересная картина закона дисперсии при малых энергиях обнаружена в двуслойном графене [18]. Одночастичная теория [19] предсказывает, что параболический закон дисперсии в двуслойном графене переходит при энергии $E < 1$ мэВ в квазилинейный (четыре миниконуса на левой вставке рис. 4). Удостовериться в наличии этих особенностей на стандартных графеновых структурах с подложкой из окисленного кремния, имеющих типичную подвижность $\sim 10^4$ см² В⁻¹ с⁻¹, практически было невозможно. Однако на подвешенных мостиках из двуслойного графена с подвижностью $\sim 10^6$ см² В⁻¹ с⁻¹ удалось проверить результаты теоретических расчётов. Поведение температурной зависимости сопротивления и картина движения уровней Ландау по энергии при изменении магнитного поля (рис. 4) свидетельствуют в пользу того, что конусы с квазилинейным спектром действительно имеют место, но их не четыре, а всего два. Именно такую картину, обусловленную нематическим фазовым переходом с понижением вращательной симметрии в электронной подсистеме двуслойного графена, предсказывают многочастичные теории [20, 21].

3. Гигантский спиновый эффект Холла в графене

То, что графен является полупроводником с нулевой запрещённой зоной, неожиданным образом проявилось в экспериментах по нелокальному транспорту [22]. В

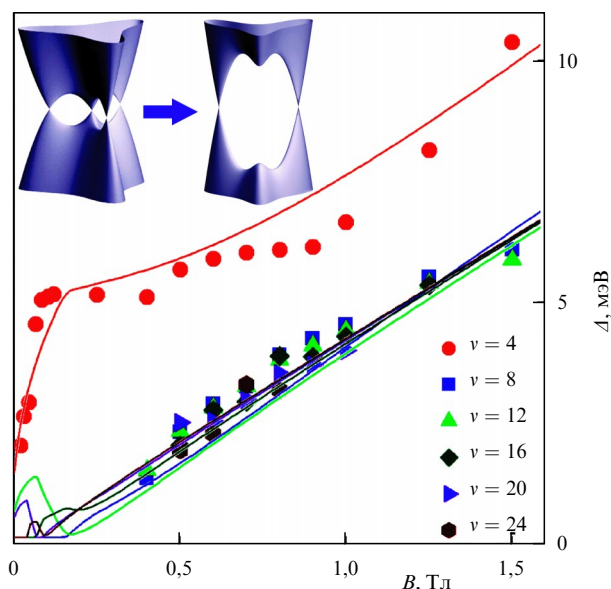


Рис. 4. Экспериментальные (символы) и расчётные (кривые) зависимости циклотронных щелей Δ при различных числах заполнения ν . На вставке — низкоэнергетическая часть спектра двуслойного графена в одночастичном приближении (левая часть вставки) и его реконструкция при нематическом фазовом переходе (правая часть вставки).

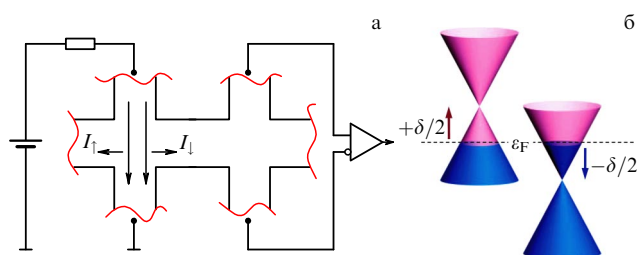


Рис. 5. Спиновый эффект Холла в графене. Схема эксперимента и иллюстрация возникновения спинового тока в направлении, перпендикулярном к току заряда (а), вследствие зеемановского сдвига уровней и образования электронов и дырок с противоположно направленными спинами в магнитном поле в точке электронейтральности (б).

эксперименте, схема которого показана на рис. 5а, электрический ток пропускается между контактами, находящимися в непосредственной близости друг от друга, а падение потенциала измеряется вдали от классического пути протекания тока. В магнитном поле на удалённых контактах появляется напряжение, зависимость которого от концентрации носителей или от магнитного поля качественно похожа на осцилляции продольного магнетосопротивления. Ранее подобные эксперименты проводились в высокоподвижных GaAs-гетероструктурах, и их результаты связывались с крайвым характером протекания тока в квантующем магнитном поле и рассеянием крайвых состояний [23, 24]. Одним из преимуществ нелокального эксперимента является то, что он позволяет отфильтровать омический вклад при протекании тока и детектировать более тонкие эффекты.

Однако экспериментальные результаты в графене имеют существенные отличия от таковых в полупроводниках [22]. Во-первых, эффект проявляется при увеличении температуры вплоть до комнатной, а при низких температурах имеет место также и в малых магнитных полях, вплоть до 0,1 Тл (рис. 6), что делает проблема-

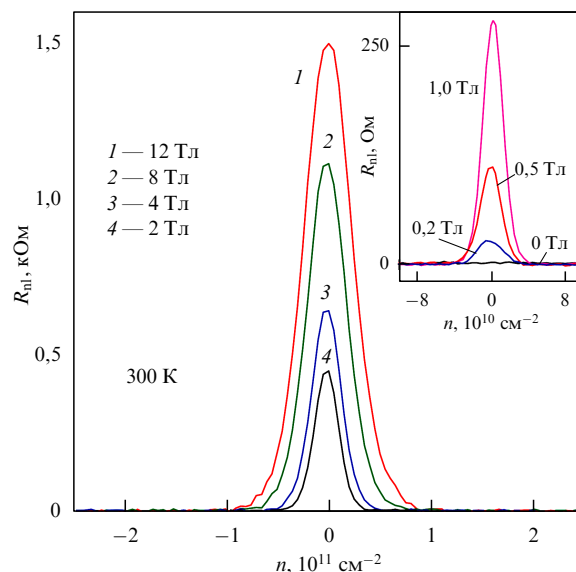


Рис. 6. Нелокальное сопротивление в однослойном графене, инкапсулированном между кристаллитами нитрида бора, в различных магнитных полях при комнатной температуре.

тичным объяснение результатов эксперимента рассеянием крайвых состояний. Во-вторых, эффект намного сильнее проявляется только для нулевого уровня Ландау (находящегося при нулевой энергии).

Идея объяснения нелокального отклика в графене вблизи точки электронейтральности проиллюстрирована на рис. 5б. Зеемановское расщепление уровней в магнитном поле смещает дираковские конусы вверх и вниз по энергии для квазичастиц с противоположными направлениями спина. В случае, когда графен находится в точке электронейтральности, это приводит к появлению конечной концентрации электронов и дырок с противоположными направлениями спина. При пропускании электрического тока сила Лоренца вызывает токи носителей с противоположными спинами в противоположных поперечных направлениях, приводя к пространственной разбалансировке спинов (спиновый эффект Холла). При этом токи заряда дырок и электронов компенсируют друг друга в поперечном направлении, и в точке электронейтральности холловское напряжение равняется нулю. Вследствие довольно слабой спиновой релаксации [2, 25] возникает падение потенциала на удалённых контактах из-за обратного преобразования.

Феноменологически ситуация похожа на таковую при спиновом эффекте Холла, обусловленном спин-орбитальным взаимодействием [26–28]. В графене спин-орбитальное взаимодействие является слабым и эффект обусловлен зеемановским расщеплением уровней в магнитном поле и нулевой запрещённой зоной. При этом его величина на два порядка превышает величину спинового эффекта Холла в традиционных полупроводниках, что делает спин-холл-эффект в графене вполне пригодным для использования в спинтронике.

4. Переход металл–диэлектрик в графене

В первых экспериментальных работах по графену оказалось сюрпризом, что вблизи точки электронейтральности максимальное удельное сопротивление графена ρ приближалось к величине $\propto h/e^2$ (в расчёте на каждый

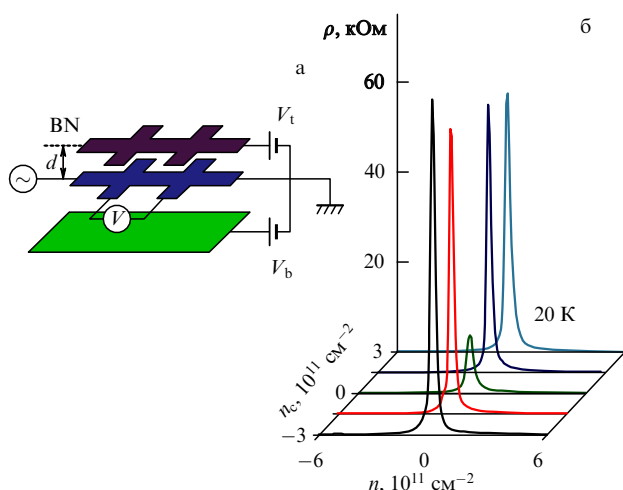


Рис. 7. (а) Схема измерений структуры, состоящей из двух разделённых слоёв графена, лежащих на подложке из окисленного кремния (нижний слой). Между всеми слоями находятся кристаллиты из нитрида бора (не показаны на рисунке). Толщина слоя нитрида бора между слоями графена $d \approx 10$ нм. (б) Зависимость сопротивления ρ от концентрации носителей n в исследуемом слое графена при различных концентрациях носителей n_c в управляющем (верхнем) слое графена.

тип носителей), но при этом не наблюдалось никаких признаков сильной локализации. Действительно, в двумерных системах даже слабые хаотические флуктуации потенциала приводят к резкому возрастанию сопротивления при понижении температуры и концентрации носителей [29, 30]. Значение ρ , превышающее величину h/e^2 , означает, что длина свободного пробега l становится меньше фермиевской длины волны λ_F , так что квантовая интерференция начинает играть доминирующую роль, приводя к сильной (андерсоновской) локализации. В графене даже в точке электронейтральности наблюдалась только слабая температурная зависимость проводимости вследствие термической активации носителей.

Ситуация кардинально изменилась после проведения экспериментов [31] с системой, состоящей из двух близко лежащих друг к другу, но электрически изолированных слоёв графена с высокой подвижностью ($\sim 10^6$ см² В⁻¹ с⁻¹). Схемы эксперимента и исследуемой многослойной структуры BN–графен–BN–графен–BN, лежащей на пластине окисленного кремния, представлены на рис. 7а. Измерялись транспортные свойства первого (исследуемого) слоя графена, при этом второй (управляющий) слой графена служил близлежащим затвором для первого слоя (наряду с Si-подложкой). Существенно, что толщина слоя нитрида бора между слоями графена составляла ≈ 10 нм и, изменяя концентрацию носителей в управляющем слое графена, можно было значительно изменять экранирование в исследуемом слое графена.

При низких концентрациях носителей в управляющем слое n_c исследуемый слой графена демонстрировал обычное поведение с минимумом проводимости $\propto 4e^2/h$. Однако при $n_c > 10^{11}$ см² В⁻¹ с⁻¹ сопротивление при низких температурах быстро возрастало вблизи точки электронейтральности (см. рис. 7). Причём возрастание сопротивления подавлялось перпендикулярным к слою графена слабым магнитным полем ($B < 0,1$ Тл), что

говорит скорее об интерференционном эффекте, чем об открытии запрещённой зоны в графене.

Такое поведение сопротивления свидетельствует о переходе металл–диэлектрик, демонстрируя андерсоновскую локализацию при повышении $\rho > h/e^2$. В стандартных образцах на кремниевой подложке переход металл–диэлектрик маскируется неоднородностями и формированием вблизи точки электронейтральности "луж" из электронов и дырок. Внутри каждой из них состояние графена далеко от точки электронейтральности и он остаётся металлическим. Соответственно, сопротивление системы определяется полупрозрачными (вследствие клейновского туннелирования [32, 33]) электрон-дырочными переходами со слабой температурной зависимостью [34, 35].

Управляющий слой может эффективно экранировать флуктуационный потенциал и подавлять возникновение "луж" из электронов и дырок, делая возможным изучение поведения графена в окрестности точки электронейтральности. Такая интерпретация свидетельствует также в пользу идеи о том, что близость минимальной проводимости в традиционных структурах к величине $4e^2/h$ обусловлена протеканием через границы "луж" электронов и дырок. Таким образом, в графене реализуется необычная, не свойственная традиционным металлам и полупроводникам, ситуация, в которой к локализации приводит не возрастание, а уменьшение разупорядочения.

В заключение отметим, что появление высокоподвижных структур графена привело не только к уточнению, но и к пересмотру некоторых представлений о физических свойствах графена. В то же время трудно переоценить перспективы начавшейся работы со слоистыми структурами, состоящими из двумерных кристаллов нитрида бора и графена.

Когда-то графен начал свою историю, отделившись от своего трёхмерного прародителя — графита. Возможно, в ближайшем будущем мы получим целый ряд новых трёхмерных материалов, составленных "по заказу" из различных двумерных кристаллов, с самыми разнообразными свойствами.

Автор благодарен за финансовую поддержку РФФИ и программам Президиума РАН.

Список литературы

1. Geim A K, Novoselov K S *Nature Mater.* **6** 183 (2007)
2. Castro Neto A H et al. *Rev. Mod. Phys.* **81** 109 (2009)
3. Das Sarma S et al. *Rev. Mod. Phys.* **83** 407 (2011)
4. Лозовик Ю Е, Меркулова С П, Соколик А А *УФН* **178** 757 (2008) [Lozovik Yu E, Merkulova S P, Sokolik A A *Phys. Usp.* **51** 727 (2008)]
5. Морозов С В, Новоселов К С, Гейм А К *УФН* **178** 776 (2008) [Morozov S V, Novoselov K S, Geim A K *Phys. Usp.* **51** 744 (2008)]
6. Dean C R et al. *Nature Phys.* **7** 693 (2011)
7. Elias D C et al. *Science* **323** 610 (2009)
8. Nair R R et al. *Small* **6** 2877 (2010)
9. Novoselov K S et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102** 10451 (2005)
10. Mayorov A S et al. *Nano Lett.* **11** 2396 (2011)
11. Beenakker C W J, van Houten H *Phys. Rev. Lett.* **63** 1857 (1989)
12. Elias D C et al. *Nature Phys.* **7** 701 (2011)
13. Novoselov K S et al. *Nature* **438** 197 (2005)
14. Bostwick A et al. *Science* **328** 999 (2010)
15. Khveshchenko D V *Phys. Rev. Lett.* **87** 246802 (2001)
16. Gorbar E V et al. *Phys. Rev. B* **66** 045108 (2002)
17. Drut J E, Lähde T A *Phys. Rev. Lett.* **102** 026802 (2009)
18. Mayorov A S et al. *Science* **333** 860 (2011)
19. McCann E, Fal'ko V I *Phys. Rev. Lett.* **96** 086805 (2006)

20. Lemonik Y et al. *Phys. Rev. B* **82** 201408(R) (2010)
21. Vafek O, Yang K *Phys. Rev. B* **81** 041401(R) (2010)
22. Abanin D A et al. *Science* **332** 328 (2011)
23. McEuen P L et al. *Phys. Rev. Lett.* **64** 2062 (1990)
24. Haug R J *Semicond. Sci. Technol.* **8** 131 (1993)
25. Tombros N et al. *Nature* **448** 571 (2007)
26. Sinova J et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 126603 (2004)
27. Kato Y K *Science* **306** 1910 (2004)
28. Wunderlich J et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 047204 (2005)
29. Imada M, Fujimori A, Tokura Y *Rev. Mod. Phys.* **70** 1039 (1998)
30. Evers F, Mirlin A D *Rev. Mod. Phys.* **80** 1355 (2008)
31. Ponomarenko L A et al. *Nature Phys.* **7** 958 (2011)
32. Katsnelson M I, Novoselov K S, Geim A K *Nature Phys.* **2** 620 (2006)
33. Cheianov V V, Fal'ko V I *Phys. Rev. B* **74** 041403(R) (2006)
34. Adam S et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **104** 18392 (2007)
35. Cheianov V V et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 176801 (2007)

PACS numbers: **42.25.** – **p**, **42.30.** – **d**, 42.60.Jf
 DOI: 10.3367/UFNr.0182.201204f.0442

Современная оптика гауссовых пучков

В.Г. Волостников

1. Введение

Когерентное световое поле, как любой колебательный процесс, характеризуется амплитудой и фазой. Методы и средства анализа световых полей по измерениям интенсивности составляют основу оптических приборов, и с физической точки зрения решение любой задачи оптического измерения — это установление связи между энергетическими и структурными параметрами оптического излучения.

В силу специфики оптического диапазона регистрации поддается не комплексная амплитуда оптического сигнала, а лишь его интенсивность, которая в общем случае не является полной характеристикой светового поля. Традиционные методы интерферометрии представляют принципиальную возможность косвенных фазовых измерений, однако в ряде задач невозможно или трудно реализовать интерферометрический принцип получения информации о комплексной амплитуде или фазе поля. Данная ситуация имеет место в астрономии, рентгеновской и адаптивной оптике. В связи с этим является актуальным поиск и исследование таких связей между интенсивностью и фазой поля, которые дают ответ на вопрос: сколько и каких измерений интенсивности нужно произвести, чтобы по ним восстановить само поле или его определённые характеристики? С другой стороны, существует самостоятельная область исследований, в которой искомое поле необходимо не восстановить, а синтезировать. Это относится к задачам фокусировки излучения в область с заданными пространственными характеристиками, а также внутрирезонаторного формирования пучков с заданной структурой выходного излучения. Данные задачи являются родственными задаче анализа световых полей: все они связаны с получением информации о поле по его энергетическим характеристикам. Однако легко увидеть и их существен-

ное различие: физическая реализуемость поля с анализируемой интенсивностью заложена в самой постановке задачи анализа, тогда как для задачи синтеза вопрос о существовании поля с заданной интенсивностью является одним из центральных. Тем не менее оказалось, что результаты исследований, посвящённых анализу световых полей, дают принципиально новые возможности и для их синтеза в различных физических ситуациях. В последнее время получен ряд существенных новых результатов, не нашедших отражения в монографиях. Восполнение этого пробела и составляет основную задачу данного доклада.

В докладе приводятся результаты исследования так называемой одномерной фазовой проблемы в оптике. Найдена явная аналитическая связь между интенсивностью и фазой одномерного поля в зоне Френеля.

Рассмотрена двумерная фазовая проблема в оптике и показано её радикальное отличие от соответствующей одномерной проблемы. Установлено, что векторное поле потока световой энергии в общем случае содержит потенциальную и вихревую компоненты; для безвихревых полей найдена явная аналитическая связь двумерных распределений фазы и интенсивности в зоне Френеля; показано, что вихревая компонента подчиняется закону сохранения, а именно: интеграл от проекции ротора вектора потока световой энергии на направление распространения равен нулю для любой плоскости в зоне Френеля; показана связь между вихревой компонентой вектора потока световой энергии и дислокациями волнового фронта.

Получены явные аналитические зависимости фазы двумерного светового поля от его интенсивности как функции определённых параметров формирующей оптической системы.

Исследовано поведение гауссовых пучков при астигматических воздействиях. Теоретически показано, что определённые астигматические оптические системы осуществляют взаимное преобразование пучков Эрмита – Гаусса (ЭГ) и Лагерра – Гаусса (ЛГ). Найдены и экспериментально реализован параметрический класс световых полей — обобщённых пучков Эрмита – Лагерра – Гаусса (ЭЛГ), описываемый полной системой ортогональных функций, зависящих от параметра, причём известные пучки ЭГ и ЛГ являются его частными представителями. Приводятся описание оптических схем, реализующих преобразование пучков ЭГ в пучки ЛГ, и результаты соответствующих экспериментов.

В параксиальном приближении ставится и решается задача поиска световых полей, сохраняющих свою структуру при распространении и фокусировке с точностью до масштаба и вращения. Приводится полное описание таких световых полей, названных спиральными пучками, законы их распространения и вращения. Рассмотрена связь спиральных пучков с квантовой механикой. Описаны некоторые способы экспериментальной реализации спиральных пучков.

Рассмотрены методы синтеза структурно-устойчивых при распространении световых полей с заданным распределением интенсивности. На основе оптики спиральных пучков получены световые поля, распределение интенсивности которых имеет форму произвольной плоской кривой. Исследованы свойства спиральных пучков для замкнутых кривых. Установлено, что такие пучки проявляют характерные свойства квантования: во-пер-

вых, распределение интенсивности претерпевает радикальное изменение при преобразованиях подобия соответствующей кривой и имеет форму этой кривой лишь при определённых значениях коэффициента подобия; во-вторых, для этих же значений коэффициента подобия площадь под кривой пучка связана с гауссовым параметром целочисленным соотношением, при этом число фазовых сингулярностей спирального пучка внутри кривой также квантуется и их число определяется только площадью внутри кривой, но не её формой.

Приводятся результаты приложения оптики спиральных пучков к задаче синтеза фазовых дифракционных оптических элементов для фокусировки светового поля в плоскую кривую и двумерную область заданной формы. Предложены новый итеративный метод решения этой задачи, который основан на использовании фазового распределения спирального пучка в ближней зоне и распределения его интенсивности в дальней зоне для кривых, и соответствующие распределения фурье-инвариантных полей для фокусировки в область в качестве начальных приближений при синтезе соответствующих фазовых дифракционных оптических элементов. Приведены результаты численных и натуральных экспериментов.

2. Восстановление одномерного когерентного монохроматического поля

по измерениям интенсивности в зоне Френеля

Выясним связь между интенсивностью и фазой светового поля в зоне Френеля. Уравнение, описывающее преобразование Френеля, имеет вид

$$F(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi l}} \exp\left(-\frac{1}{4}\pi i\right) \int_a^b \exp\left[\frac{ik}{2l}(x - \xi)^2\right] U(\xi) d\xi. \quad (1)$$

Большинство работ по одномерной фазовой проблеме посвящено алгоритмическим, чисто численным, методам восстановления объектного поля по измерениям интенсивности. С другой стороны, представляет интерес выяснение физической стороны проблемы и её связь с математической постановкой, в частности получение явных формул, выражающих связь между интенсивностью и фазой. Такая постановка задачи оправдана ещё и потому, что использование явных формул даёт ряд преимуществ с практической точки зрения: сокращает время расчёта и позволяет, в принципе, оценить влияние погрешности измерения интенсивности на точность восстановления фазы.

Задача в аналогичной постановке для параболического приближения изучалась в ряде работ (см. [1] и цитируемую там литературу), из которых также следует, что для получения точного решения должна быть известна производная фазы $\partial\varphi/\partial x$ в некоторой точке. При этом утверждается, что возможность нахождения граничного условия для $\partial\varphi/\partial x$ из измерений интенсивности маловероятна.

Покажем, что указанную трудность можно преодолеть и по измерению интенсивности $I(x, l)$ и её производной вдоль направления распространения поля $I_l(x, l)$ в зоне Френеля определить поле $F(x, l)$ и, следовательно, объектное поле $U(\xi)$ [1]. В зоне Френеля $U(\xi) = F(x, 0)$ и $F(x, l)$ связаны соотношением (1). Можно показать [2], что поле $F(x, l)$ из (1) удовлетворяет параболическому

уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial l} = 0. \quad (2)$$

Подставляя $F(x, l)$ в уравнение (2) в виде $F(x, l) = \sqrt{I(x, l)} \exp(i\varphi(x, l))$ и разделяя вещественную и мнимую части, получим систему дифференциальных уравнений для интенсивности и фазы поля $F(x, l)$ в зоне Френеля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + k \frac{\partial I}{\partial l} &= 0, \\ 2I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 - 4I^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Первое уравнение является уравнением непрерывности для потока $\mathbf{j} = (j_x, j_l) = (I\partial\varphi/\partial x, kI)$ и выражает закон сохранения световой энергии в дифференциальной форме [1]. Интегрируя это уравнение, получим

$$I(x, l) \frac{\partial \varphi(x, l)}{\partial x} = -k \int_{x_0}^x I_l(t, l) dt + c, \quad (4)$$

где $c = I(x_0) \partial\varphi/\partial x(x_0)$. Повторное интегрирование даёт выражение для фазы поля в зоне Френеля:

$$\varphi(x) = \varphi(a) - k \int_a^x \frac{dt}{I(t)} \int_{x_0}^t I_l(\tau) d\tau + c \int_a^x \frac{dt}{I(t)}. \quad (5)$$

Из (4) видно, что для получения фазы должно быть известно граничное условие для $\partial\varphi/\partial x$ в некоторой точке x_0 , при этом нелинейный характер связи $I(x, l)$ с $\varphi(x, l)$ в (4) делает этот вопрос существенным. Покажем, что граничное условие для $\partial\varphi/\partial x$ можно получить из измерений интенсивности.

Определим дифференциальные операторы

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial l}, \quad L^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial l} \quad (6)$$

и перепишем уравнение (2) в виде

$$LF(z, l) = L^*F^*(z, l) \equiv 0.$$

Действие операторов L, L^* на $I(z, l)$ приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} LI(z, l) &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F(z, l) \frac{\partial F^*}{\partial z}(z, l) \right), \\ L^*I(z, l) &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F^*(z, l) \frac{\partial F}{\partial z}(z, l) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Оба дифференциальных соотношения (7) доказываются прямой подстановкой с использованием (2), например:

$$\begin{aligned} LI &= F^*LF + FLF^* + 2 \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F^*}{\partial z} = \\ &= 2F \frac{\partial^2 F^*}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F^*}{\partial z} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial F^*}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Поэтому, если z_1, z_2 являются нулями функции $F(z, l)$ при некотором фиксированном l , то

$$\int_{z_1}^{z_2} LI(z, l) dz = 0, \quad \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} L^*I(z, l) dz = 0. \quad (8)$$

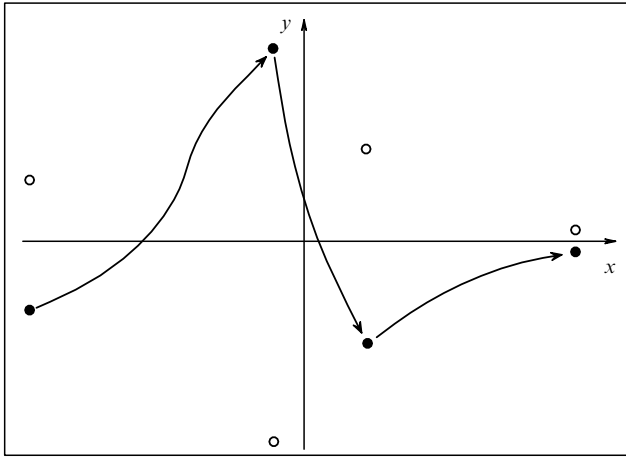


Рис. 1. Пары нулей $(z_m, \bar{z}_m)$ аналитического продолжения интенсивности $I(z, l)$. Чёрными кружками отмечены нули поля $F(z, l)$, для которых имеет место первое из равенств (8).

Использование равенств (8) позволяет определить (рис. 1) все нули функции F по данным интенсивности $I(z, l)$ и её производной $\partial I(z, l)/\partial l$ при некотором $l = l_0 = \text{const}$.

Таким образом, задача выделения множества нулей $F(z)$ из множества нулей $I(z)$ может быть решена по распределениям интенсивности $I(x)$ и её производной $I_l(x)$ на некоторой фиксированной плоскости $l = \text{const}$ с помощью аналитического продолжения и использования свойств функций $I(z)$, $I_l(z)$ в комплексной плоскости.

3. Восстановление двумерного когерентного монохроматического поля по измерениям интенсивности в зоне Френеля

Связь между интенсивностью и фазой двумерного светового поля $F(x, y)$ изучена гораздо слабее её одномерного аналога. В частности, не вполне ясны природа неединственности решения задачи и объём необходимых измерений для её решения.

Для содержательного анализа различий двумерной и одномерной фазовых проблем целесообразно рассмотреть двумерный вариант задачи, решённой в одномерном случае.

В этом разделе изучается задача в двумерной постановке, или восстановление светового поля $F(x, y)$ при $l = \text{const}$ по измерению интенсивности $I(x, y)$ и её производной вдоль направления распространения излучения $I_l(x, y)$ в зоне Френеля. Такая постановка фазовой проблемы представляет интерес при контроле качества крупногабаритной оптики, синтезе оптических элементов и световых полей и для ряда других приложений.

Известно, что в двумерном случае в области Френеля $U(\xi, \eta)$ и $I(x, y, l)$ связаны соотношением

$$I(x, y, l) = F(x, y, l) \bar{F}(x, y, l) = \left| \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\Omega} \exp \left(\frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right) U(\xi, \eta) d\xi d\eta \right|^2. \quad (9)$$

где Ω — носитель $U(\xi, \eta)$, т.е. $U(\xi, \eta) = 0$ при $(\xi, \eta) \notin \Omega$.

Амплитуда $F(x, y, l)$ из (9) удовлетворяет квазиоптическому параболическому уравнению [1]:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial l} = 0. \quad (10)$$

По аналогии с одномерным случаем можно представить $F(x, y, l)$ в виде $F(x, y, l) = \sqrt{I(x, y, l)} \exp(i\varphi(x, y, l))$ и, подставив в (10), разделить вещественную и мнимую части.

Легко проверить, что

$$\frac{i\nabla\varphi}{k} = \frac{\bar{F}\nabla F - F\nabla\bar{F}}{2ik} = \mathbf{j} = (j_x, j_y), \quad (11)$$

где $\mathbf{j}$ — векторная составляющая потока световой энергии в плоскости (x, y) , и получить закон сохранения световой энергии, или уравнение непрерывности, которое можно рассматривать как трёхмерную дивергенцию вектора $\mathbf{j} = (j_x, j_y, I)$ либо как уравнение для плоского поля

$$\frac{\partial \rho}{\partial l} + \nabla \mathbf{j} = 0, \quad (12)$$

где $\rho = I(x, y, l)$, $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$. Подстановка $F(x, y, l) = U(x, y, l) + iV(x, y, l)$ в (11) даёт

$$\mathbf{j} = \frac{U\nabla V - V\nabla U}{k} = \frac{1}{k} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial x}, U \frac{\partial V}{\partial y} - V \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Из (11) видно, что проблема восстановления фазы в данной постановке сводится к задаче восстановления векторного поля по его ротору и дивергенции. Ротор потока определяется как

$$\text{roto } \mathbf{j} = \frac{2}{k} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (14)$$

Следует отметить принципиальное отличие двумерной фазовой проблемы от аналогичной одномерной. Решение двумерной задачи подобно решению одномерной лишь в случае $\text{roto } \mathbf{j}(x, y) \equiv 0$. Это справедливо, например, для полей $F(x, y, l) = F(g(x, y), l)$, где $g(x, y)$ — вещественная функция. Физический смысл отличия двумерного случая от одномерного можно трактовать следующим образом. Как показал анализ аналогичной одномерной задачи, фазовые, структурные свойства поля непосредственно и полностью могут быть представлены его энергетическими характеристиками, распределение интенсивности и закон сохранения энергии позволили получить явные формулы для фазы поля. Как следует, например, из (12), в двумерном случае структурные, фазовые свойства поля не обязательно представимы непосредственно его энергетическими характеристиками.

Полное определение $\text{roto } \mathbf{j}(x, y)$ через данные интенсивности не представляется возможным. Тем не менее можно доказать ряд результатов, характеризующих локальные и глобальные свойства $\text{roto } \mathbf{j}(x, y)$ [3].

Пусть $F(x, y) = \sqrt{I(x, y)} \exp(i\varphi(x, y))$ — преобразование Френеля при $l = \text{const}$ от некоторой функции с финитным носителем и скалярная функция $\text{roto } \mathbf{j}(x, y)$ определена равенством (14). Тогда:

1) если (x_0, y_0) — экстремальная точка интенсивности и $I(x_0, y_0) \neq 0$, то $\text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0) = 0$; если $I(x_0, y_0) = 0$, то

$$|\text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0)| = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right)^2} (x_0, y_0); \quad (15)$$

2) если (x_0, y_0) — изолированный простой нуль функции $F(x, y)$ и L — некоторый контур, не содержащий других нулей кроме (x_0, y_0) , то

$$\oint_L \nabla \varphi \, d\mathbf{r} = 2\pi \text{sign rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0); \quad (16)$$

3) имеет место следующий "закон сохранения" ротора:

$$\iint_{R^2} \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y) \, dx \, dy = 0. \quad (17)$$

Таким образом, в данном разделе рассмотрен вопрос о связи между интенсивностью и фазой светового поля $F(x, y, l)$. При этом выявлено радикальное различие между решениями двумерной и одномерной фазовых проблем, обусловленное наличием ротора вектора потока световой энергии. Исследованы свойства скалярной функции $\text{rot}_0 \mathbf{j}$, которая и порождает указанное различие.

4. Связь между фазой и интенсивностью светового поля как функциями параметров оптической системы

В разделе 3 показано, что пассивные измерения двумерного распределения интенсивности в зоне Френеля не позволяют в общем случае получить явную аналитическую связь между $I(x, y, l)$ и $\varphi(x, y, l)$. Иными словами, информация о действии оператора распространения поля $L = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + 2ik \partial/\partial l$ на интенсивность не даёт результата, аналогичного полученному для оператора $L = \partial^2/\partial x^2 + 2ik \partial/\partial l$ в одномерном случае. Закономерно поэтому поставить вопрос: существуют ли операторы, описывающие реальные физические ситуации и дающие решение этой задачи для двумерного светового поля?

Рассмотрим процесс преобразования светового поля оптической системой. Для упрощения выкладок в этом разделе положим $x = x_1, y = x_2$. Известно, что комплексная амплитуда в плоскости изображения $F(x_1, x_2)$ связана преобразованием Фурье с амплитудой на выходном зрачке оптической системы $U_0(\xi_1, \xi_2)$:

$$F(x_1, x_2) = \iint_{R^2} \exp[-i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] U_0(\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 \, d\xi_2, \quad (18)$$

где $U_0(\xi_1, \xi_2) = P(\xi_1, \xi_2)f(\xi_1, \xi_2)$, $P(\xi_1, \xi_2)$ — комплексная функция зрачка оптической системы, $f(\xi_1, \xi_2)$ — фурье-спектр изображения.

Очевидно, что $F(x_1, x_2)$ и $I(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) \overline{F(x_1, x_2)}$ зависят от параметров оптической системы, характеризуемых функцией $P(\xi_1, \xi_2)$.

Рассмотрим задачу восстановления $F(x_1, x_2)$ по измерениям интенсивности $I(x_1, x_2)$ как функции этих параметров. По аналогии с теорией aberrаций [1], представим $P(\xi_1, \xi_2)$ в виде

$$P(\xi_1, \xi_2) = \chi(\xi_1, \xi_2) \exp(-iW(\xi_1, \xi_2)), \quad (19)$$

где $\chi(\xi_1, \xi_2)$ — характеристическая функция зрачка Ω ,

$$\chi(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} 1, & (\xi_1, \xi_2) \in \Omega, \\ 0, & (\xi_1, \xi_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

$W(\xi_1, \xi_2) = W_{21}\xi_1^2 + W_{22}\xi_2^2$; здесь W_{2n} соответствует астигматизму.

Если теперь $W_{2n} = \alpha_{2n}$, то задача сводится к восстановлению $F(x_1, x_2)$ по измерениям интенсивности $I(x_1, x_2)$ и её производных по α_{2n} при $n = 1, 2$.

Уравнение (12) после аналогичных преобразований сводится к следующей системе:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_{2n}} + 2 \frac{\partial}{\partial x_n} \left(I \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) = 0, \quad n = 1, 2. \quad (20)$$

Система уравнений (20) соответствует оптической схеме с цилиндрической фазовой маской $\exp(-ik\alpha_{2n}\xi_n^2)$ на выходном зрачке оптической системы либо системе с цилиндрической дефокусировкой освещающего пучка и регистрацией в дальней зоне излучения. Заметим, что задача в одномерном случае полностью аналогична рассмотренной в разделе 2.

Таким образом, изменение поля при целенаправленном воздействии на него более информативно, чем его изменение при естественном распространении. Видимо, это является иллюстрацией известного факта, что активный эксперимент лучше пассивного наблюдения.

Нужные астигматические воздействия (20) на поле можно реализовать и прямым способом, используя специфические дифракционные элементы [4].

Выберем фазовую функцию $W(\xi_1, \xi_2)$ из (19) в виде

$$W(\xi_1, \xi_2) = T_0 \left(\frac{T}{2\pi} \alpha \xi_1^2 + \xi_1 \right) + T_0 \left(\frac{T}{2\pi} \alpha \xi_2^2 + \xi_2 \right), \quad (21)$$

где $T_0(x)$ — T -периодическая функция аргумента x , α — параметр. Фазовый элемент с профилем (21) можно представить в виде ряда Фурье:

$$\exp(iW(\xi_1, \xi_2)) = \sum_{m,n} c_m c_n \exp \left(im\alpha \xi_1^2 + im \frac{2\pi}{T} \xi_1 \right) \times \exp \left(in\alpha \xi_2^2 + in \frac{2\pi}{T} \xi_2 \right), \quad (22)$$

где

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left(-\frac{2\pi}{T} imx + iT_0(x) \right) dx.$$

Легко увидеть, что такой дифракционный элемент действует как система внеосевых астигматических линз с главными фокусными расстояниями $f_m = \pi/\alpha m \lambda$, $f_n = \pi/\alpha n \lambda$ в (m, n) -м порядке дифракции (рис. 2). Углы дифракции (m, n) -го порядка равны $\beta_m = \arcsin(m\lambda/T)$, $\beta_n = \arcsin(n\lambda/T)$ соответственно, и комплексная амплитуда в плоскости изображения (19) для фазовой функции (21) принимает вид

$$F(x_1, x_2) = \sum_{m,n} c_m c_n \iint_{R^2} \exp(-ix_1 \xi_1 - ix_2 \xi_2) U(\xi_1, \xi_2) \times \exp \left(im\alpha \xi_1^2 + im \frac{2\pi}{T} \xi_1 \right) \exp \left(in\alpha \xi_2^2 + in \frac{2\pi}{T} \xi_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{m,n} c_m c_n F_{mn} \left(x_1 - \frac{2\pi}{T} m, x_2 - \frac{2\pi}{T} n \right). \quad (23)$$

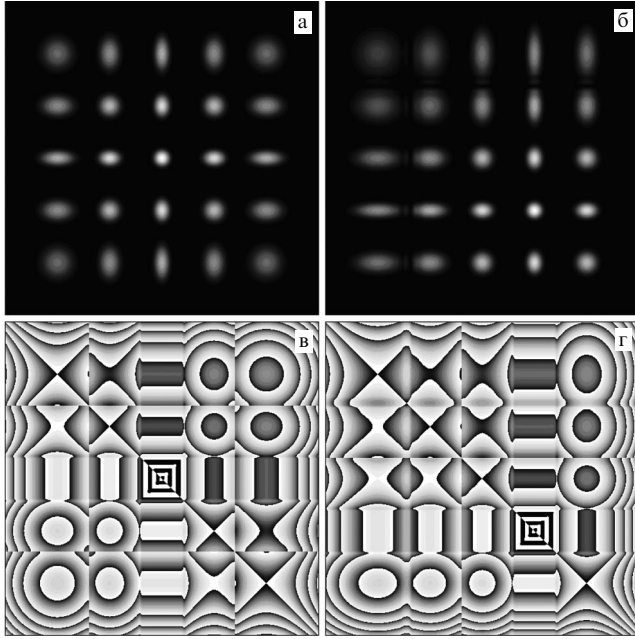


Рис. 2. Картина дифракции гауссова пучка: интенсивность (а, б) и фаза (в, г) на дифракционном элементе (21) без астигматизма на рис. а, в, при наличии астигматизма $\pi(\xi_2^2 - \xi_1^2)/\lambda f_g$, $f_g = \pi/\alpha\lambda$, на рис. б, г.

5. Преобразование пучков Эрмита – Гаусса в пучки Лагерра-Гаусса

Фазовую проблему в оптике можно рассматривать как проблему связи энергетических и структурных характеристик светового поля. В разделах 2–4 исследовалась связь между интенсивностью и фазой светового поля, которое в зоне Френеля удовлетворяет квазиоптическому параболическому уравнению.

Различные модификации данного уравнения описывают широкий класс явлений в квантовой механике и оптике. Очевидно, что поля, обладающие структурной устойчивостью при распространении, занимают особое место и связь между интенсивностью и фазой находит в них характерное воплощение.

С другой стороны, как отмечено в разделе 4, пучок ЭГ при дифракции на астигматическом дифракционном элементе (рис. 3) преобразуется в пучок ЛГ. В связи с этим структурно устойчивые решения параболического уравнения требуют более пристального изучения.

Пучки ЭГ являются хорошо известными семействами устойчивых решений параболического уравнения в оптике:

$$\mathcal{H}_{n,m}(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) \mathcal{H}_n(\sqrt{2}x) \mathcal{H}_m(\sqrt{2}y), \quad n, m = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

как и пучки ЛГ:

$$\mathcal{L}_{n,\pm m}(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) (x \pm iy)^m \mathcal{L}_n^m(2x^2 + 2y^2), \quad n, m = 0, 1, \dots, \quad (25)$$

и играют важную роль в теории резонаторов и световодов.

Таким образом, с точностью до квадратично-фазового множителя изменение пучков ЭГ при дефокусировке сводится лишь к изменению масштаба.

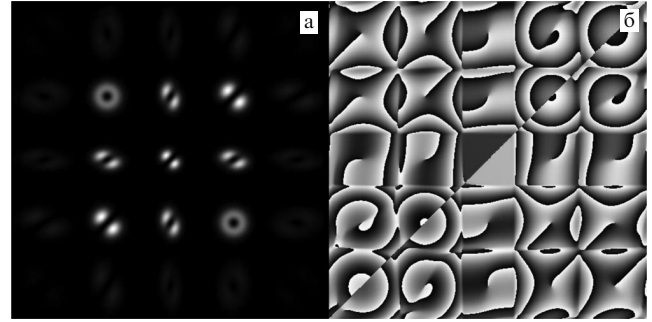


Рис. 3. Картина дифракции пучка Эрмита – Гаусса: интенсивность (а) и фаза (б) на дифракционном элементе (21).

С другой стороны, астигматизм общего вида описывается выражением

$$\psi(\xi, \eta, a, \alpha) = a[(\xi^2 - \eta^2) \cos 2\alpha + 2\xi\eta \sin 2\alpha]. \quad (26)$$

Из (26) видно, что в отличие от дефокусировки, инвариантной к вращениям, вид поля

$$F(x, y, a) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, a, \alpha)) \times U(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (27)$$

при распространении в "астигматическом" пространстве зависит от угла поворота α .

Рассмотрим теперь преобразование пучков ЭГ при общем астигматическом воздействии (см. также [1]):

$$F_{n,m}(x, y, a, \alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-i(x\xi + y\eta) + i\psi(\xi, \eta, a, \alpha)) \times \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}\right) d\xi d\eta. \quad (28)$$

Частный случай преобразования (28) представляет особый интерес: при $a = 1/\rho^2$, $\alpha = \pi/4$ пучки ЭГ переходят в пучки ЛГ [4]:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2}\right] \mathcal{H}_{n,m}\left(\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}\right) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} (-1)^{n+m} \exp\left(-\frac{1}{4}\rho^2 xy\right) \times \\ & \times \begin{cases} (2i)^n m! \mathcal{L}_{m,n-m}\left(\frac{\rho x}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho y}{2\sqrt{2}}\right) & \text{при } n \geq m, \\ (2i)^m n! \mathcal{L}_{n,m-n}\left(\frac{\rho y}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho x}{2\sqrt{2}}\right) & \text{при } n \leq m. \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Для любого фиксированного α набор полей является таким же полноценным семейством ортогональных структурно устойчивых пучков как семейства мод ЭГ $\{\mathcal{H}_{n,m}(x, y), n, m = 0, 1, \dots\}$ и ЛГ $\{\mathcal{L}_{n,m}(x, y), n, \pm m = 0, 1, \dots\}$. Эти поля, которые были названы обобщёнными пучками Эрмита – Лагерра – Гаусса, при различных α были получены экспериментально. При повороте цилиндрической линзы вокруг оптической оси на угол α осуществлялась последовательная реализация данных полей. Пример экспериментально полученных обобщённых пучков для случая $n = 5, m = 4$ приведён на рис. 4.

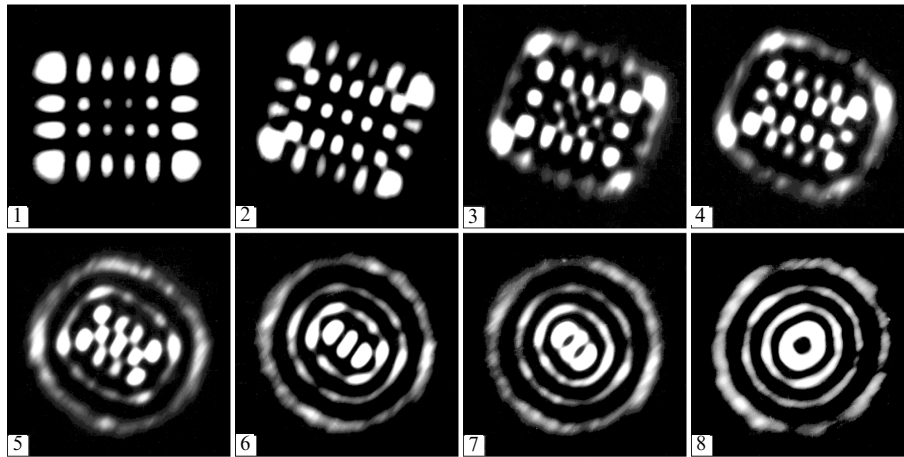


Рис. 4. Пучки Эрмита – Лагерра – Гаусса при изменении угла α от 0 до $\pi/4$.

6. Поля с вращением и их свойства

Как правило, изменение пучков при распространении и фокусировке ассоциируется с деформациями расширения – сжатия: сходящиеся и расходящиеся пучки. С другой стороны, очевидно, что даже при простой анизотропии фазы пучка его расходимость (деформация) также становится неоднородной. Закономерен вопрос: существует ли некая аналогия деформации кручения в случае пучка с неоднородной расходимостью? Как показано в разделе 2, поток световой энергии состоит в общем случае из двух компонент: дивергентной и вихревой. В определённом смысле первая компонента соответствует деформациям растяжения – сжатия, а вторая — деформациям кручения.

В разделе 5 были рассмотрены связи между пучками ЭГ и ЛГ. Характерным свойством этих пучков является сохранение структуры при распространении и фокусировке с точностью до масштаба. Принимая во внимание вихревую компоненту вектора потока световой энергии, можно расширить понятие структурной устойчивости световых полей, а именно исследовать вопрос существования световых полей, сохраняющих свою структуру с точностью до масштаба и характера вращения.

Условие структурной устойчивости при этом может быть определено следующим образом:

$$I(x, y, l) = D(l) \times \times I_0 \left(\frac{x \cos \theta(l) - y \sin \theta(l)}{d(l)}, \frac{x \sin \theta(l) + y \cos \theta(l)}{d(l)} \right), \quad (30)$$

где $\theta(l)$ — вращение интенсивности при распространении поля $F(x, y, l)$, $d(l) > 0$ — масштабное изменение интенсивности. Определим вещественные переменные равенством $X + iY = (x + iy) \exp(i\theta(l))/d(l)$. Экспоненциальное убывание интенсивности на бесконечности (28) позволяет выявить структуру фазы $\varphi_0(X, Y, l)$ и переписать представление для светового поля в виде

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} F_0(X, Y) \times \times \exp \left(\frac{1}{2} i k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + i \gamma(l) \right), \quad (31)$$

где $F_0(X, Y) = \sqrt{I_0(X, Y)} \exp(i\varphi_0(X, Y, 0))$. Тем самым структурная устойчивость интенсивности порождает структурную устойчивость фазы.

Подставляя (31) в параболическое уравнение, получим уравнение для функции $F_0(X, Y)$:

$$\nabla^2 F_0 + 4i\theta_0 \left(X \frac{\partial F_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial F_0}{\partial X} \right) - 4F_0(X^2 + Y^2 - \gamma_0) = 0. \quad (32)$$

При $\theta_0 = 0$ уравнение (32) является стационарным уравнением Шрёдингера для гармонического осциллятора и его решения хорошо известны. Это функции Эрмита – Гаусса $\mathcal{H}_{n,m}(X, Y)$, $\gamma_0 = n + m + 1$ при $n, m = 0, 1, \dots$ и Лагерра – Гаусса $\mathcal{L}_{n,m}(X, Y)$, $\gamma_0 = 2n + |m| + 1$ при $n, \pm m = 0, 1, \dots$

Будем искать решения уравнения (32) в виде

$$F_0(X, Y) = \sum_{n, \pm m=0}^{\infty} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y). \quad (33)$$

Разложение (33) всегда возможно благодаря конечности энергии поля $F_0(X, Y)$ и полноте системы функций $\{\mathcal{L}_{n,m}(X, Y), n, \pm m = 0, 1, \dots\}$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Подставляя (33) в (32), получим

$$\sum_{n,m} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y) (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0,$$

и в силу полноты системы функций ЛГ

$$c_{nm} (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0 \quad \text{для всех } n, m.$$

Таким образом, проблема поиска $F_0(X, Y)$ сводится к определению целых чисел n, m из уравнения

$$2n + |m| + \theta_0 m = \gamma_0 - 1. \quad (34)$$

Таким образом, завершено полное описание вращающихся структурно-устойчивых решений параболического уравнения, которые получили название "спиральные пучки света" [2].

Уравнение Шрёдингера для волновой функции заряженной частицы с массой M и зарядом e в однородном магнитном поле H имеет вид

$$\nabla^2 \psi + 4i \operatorname{sign}(eH) \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - 4\psi \left(R^2 - \frac{2cME_1}{\hbar|eH|} \right) = 0,$$

где $E_1 = E - p_z^2/2M$, E — энергия частицы, p_z — компонента импульса частицы вдоль направления поля. Видна эквивалентность последнего уравнения и уравнения (32).

7. Спиральные пучки

с заданным распределением интенсивности

Из различных работ по фазовой проблеме хорошо известно, что связи между интенсивностью и фазой в одномерном и двумерном случаях радикально различаются. Физические стороны этого различия рассматривались в разделах 2 и 3, где было показано, что оно тесно связано с возможностью появления вихревой составляющей у вектора потока световой энергии в двумерном случае. Ненулевой ротор вектора потока световой энергии значительно осложняет связь между интенсивностью и фазой в этом случае. С другой стороны, эта сложность порождает и новые возможности.

Из результатов, представленных в разделе 6, следует, что в двумерном случае существует класс когерентных световых полей — спиральных пучков — вида

$$F(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{\rho \sigma}\right), \quad (35)$$

Из данного представления видно, что класс полей достаточно широк, однако доказательство существования пучка с заданными свойствами и конструктивный способ выделения его из этого класса является нетривиальной задачей. Этот раздел посвящён исследованию возможностей целенаправленного синтеза пучков (35).

Рассмотрим некоторые вытекающие из представления (35) свойства данного класса спиральных пучков, используемые в дальнейшем.

Свойство А. Если $\mathcal{S}_n(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f_n(z/\rho)$ — некоторая совокупность спиральных пучков, то их линейная комбинация

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \sum_n c_n \mathcal{S}_n(z, \bar{z})$$

также является спиральным пучком. Вообще, если $\mathcal{S}_0(z, \bar{z}, a) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f_0(z/\rho, a)$ — параметрическое семейство спиральных пучков, то

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \int \mathcal{S}(z, \bar{z}, a) da$$

— также спиральный пучок.

Свойство Б. Если $\mathcal{S}_0(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ — некоторый спиральный пучок, то

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z \exp(-i\alpha)}{\rho}\right)$$

представляет собой спиральный пучок, обладающий тем же распределением интенсивности, что и $\mathcal{S}_0(z, \bar{z})$, но повернутым на угол α .

Свойство В. Если $\mathcal{S}_0(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$ — некоторый спиральный пучок, то

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) \quad (36)$$

также представляет собой спиральный пучок, обладающий тем же распределением интенсивности, что и $\mathcal{S}_0(z, \bar{z})$, но смещённым в точку z_0 . Полученные результаты, естественно, порождают следующий вопрос. Пусть имеется некоторая кривая на плоскости, заданная в комплексной параметрической форме $\zeta = \zeta(t)$, где пара-

метр t пробегает некоторый интервал $[0, T]$. Существует ли спиральный пучок $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T])$, имеющий форму этой кривой? Оказывается, такой пучок существует и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T]) = \\ = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \int_0^T \exp\left[-\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau\right] |\zeta'(t)| dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Характерно, что для практических применений, т.е. при представлении плоской кривой в дискретном виде более удобными оказываются не дифференциалы, а конечные приращения, поскольку в последнем случае не требуется нахождения производных, что является не слишком приятной задачей.

Пучки для замкнутых кривых занимают особое место и заслуживают отдельного рассмотрения. Пусть функция $\zeta(t)$, $t \in [0, T]$, описывает замкнутую кривую без самопересечений. Без ограничения общности можно считать, что с возрастанием t кривая обходит в направлении против часовой стрелки. Определим $\zeta(t)$ для всех вещественных t , продолжая её периодически за пределы отрезка $[0, T]$. Тогда функции $\zeta(t+a)$, $t \in [0, T]$, при различных a описывают одну кривую. Совпадают ли спиральные пучки для кривых $\zeta(t+a)$ при различных a ?

Покажем, что пучки, построенные для замкнутых кривых, проявляют характерные свойства квантования. Это выражается в том, что, во-первых, распределение интенсивности таких пучков претерпевает радикальные изменения при преобразовании подобия $\zeta(t) \rightarrow v\zeta(t)$ и обладает топологией кривой $v\zeta(t)$ лишь при определённых дискретных значениях параметра v . Во-вторых, только при этих же значениях v интенсивности пучков, построенных по кривым $v\zeta(t+a)$ при различных a , одинаковы.

Найдём условие, при котором спиральные пучки, построенные для кривых $\zeta(t)$ и $\zeta(t+a)$, совпадают:

$$|\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [a, a+T])|^2 \equiv |\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T])|^2.$$

Перепишем последнее тождество в виде

$$\begin{aligned} \exp(i\Phi(a)) \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [a, a+T]) \equiv \\ \equiv \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T]), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\Phi(a)$ — некоторая вещественная функция, независимая от z (иначе, сокращая обе части (38) на гауссову функцию, получаем, что Φ является аналитической функцией от z и, следовательно, не может быть вещественной при всех z). Дифференцируя (38) по a и используя периодичность $\zeta(t)$, получим

$$\begin{aligned} \exp(i\Phi(a)) \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [a, a+T]) \times \\ \times \left[i\Phi'(a) - \frac{\bar{\zeta}(a)\zeta'(a) - \zeta(a)\bar{\zeta}'(a)}{\rho^2} \right] + \\ + \exp\left[i\Phi(a) - \frac{z\bar{z} - 2z\bar{\zeta}(a) + \zeta(a)\bar{\zeta}(a)}{\rho^2} \right] \times \\ \times \left[\exp\left(\frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau\right) - 1 \right] |\zeta'(a)| = 0. \end{aligned}$$

Заменяя спиральный пучок в первом слагаемом в соответствии с (38) и сокращая на гауссову функцию, пере-

пишем последнее уравнение в символическом виде:

$$f(z) F_1(a) + \exp\left(\frac{2z\bar{\zeta}(a)}{\rho^2}\right) F_2(a) = 0,$$

где $f(z)$ — целая аналитическая функция, $F_1(a)$, $F_2(a)$ — некоторые функции от a . Это равенство имеет место для всех z , a только при $F_1(a) = F_2(a) \equiv 0$ (если $f(z)$ имеет нуль, это следует немедленно; случай, в котором $f(z)$ не имеет нулей, также прост). Поэтому

$$\Phi(a) = \frac{1}{i\rho^2} \int_0^a (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau, \exp\left(\frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right) = 1$$

и, следовательно, [4]:

$$\frac{1}{i\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)) d\tau = \frac{4S}{\rho^2} = 2\pi N,$$

где S — площадь, ограниченная контуром $\zeta(t)$.

Таким образом, интенсивность пучка не зависит от начала интегрирования a лишь для кривых, площадь которых удовлетворяет условию квантования:

$$S = \frac{1}{2} \pi \rho^2 N, \text{ где } N = 1, 2, \dots \quad (39)$$

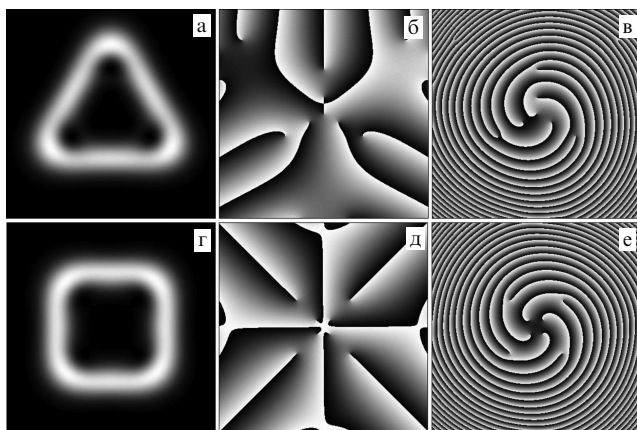


Рис. 5. Интенсивность (а, г), фаза (б, д) и фаза вне перетяжки (в, е) спирального пучка в форме границы треугольника на рис. а–в и квадрата на рис. г–е.

Будем называть замкнутые кривые, которые удовлетворяют равенству (39), N -квантованными кривыми, а спиральные пучки для таких кривых — N -квантованными пучками¹.

Квантованному пучку соответствует строго определённое количество оптических вихрей внутри области, ограниченной порождающей кривой, которое зависит от площади области, но не от её формы (рис. 5) [3, 4]. Отсюда следует, что при изменении площади области, например от $S = (1/2) \pi \rho^2 N$ до $S = (1/2) \pi \rho^2 (N+1)$, происходит увеличение числа нулей внутри области в результате прихода одного нуля извне. На рисунке 6, где показана эволюция спирального пучка для окружности $\zeta(t) = R \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, при $2R^2/\rho^2 \in [4, 0, 5, 0]$, виден процесс проникновения нуля внутрь контура. Зона проникновения нуля определяется, как уже отмечалось, началом интегрирования.

8. Заключение

Цель заключения — дать суммарный и сопоставительный анализ представленных новых результатов, а также сформулировать некоторые не решённые до конца проблемы.

Обобщённые пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса, найденные при исследовании астигматических преобразований гауссовых пучков, представляют собой параметрическое семейство, в котором известные ранее пучки ЭГ и ЛГ являются частными представителями, соответствующими некоторым двум значениям параметра. Кроме того, астигматические преобразования гауссовых пучков позволили предложить новый подход к синтезу фазовых элементов для формирования световых полей в виде областей произвольной формы. Данная задача сейчас находится в стадии исследования, и уровень её решения пока далёк от результатов, полученных для световых полей в виде кривых. Причиной этого, на наш взгляд, являются два взаимосвязанных обстоятельства: во-первых, область, в отличие от кривой, не является

¹ Если обратиться к квантово-механической аналогии, отмеченной в разделе 6, то спиральным пучкам с $\theta_0 = \pm 1$, $\gamma_0 = 1$ соответствуют волновые функции частицы в постоянном магнитном поле в основном состоянии. При этом условие (39) соответствует квантованному магнитному потоку через контур $\zeta(t)$: $\Phi = (2\pi\hbar c/|e|) N$ (см. также [2]).

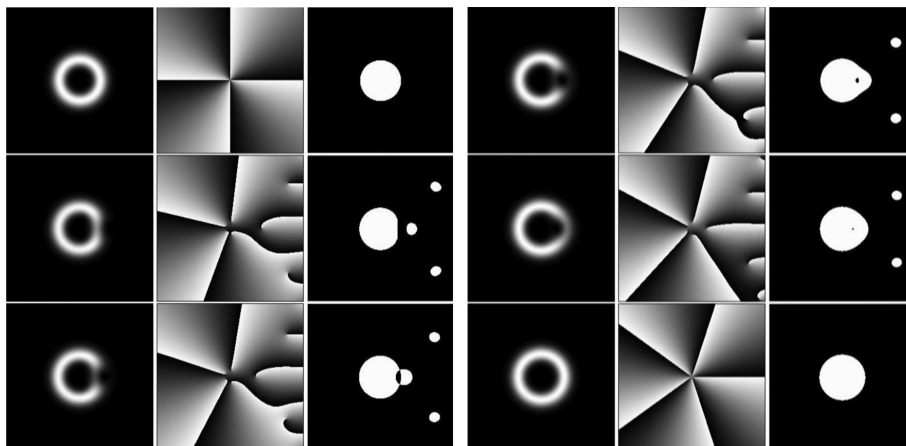


Рис. 6. Эволюция спирального пучка при изменении радиуса порождающей окружности.

упорядоченным множеством. Во-вторых, световые поля в виде областей содержат фазовые сингулярности обоих знаков и не являются структурно устойчивыми в зоне Френеля. В связи с этим синтез соответствующих фазовых элементов осложняется рядом факторов: формой области, способом синтеза и т.п.

Сингулярной оптикой в последние годы называют область исследований, касающуюся световых полей с дислокациями волнового фронта, или оптическими вихрями. Поля такого вида, которые формируются и наблюдаются как в линейных, так и в нелинейных оптических средах, являются предметом достаточно интенсивного изучения, поэтому потребность в адекватных теоретических и экспериментальных подходах для исследования полей с оптическими вихрями представляет собой актуальную задачу.

Конечно, с формальной точки зрения, любое когерентное световое поле можно представить в виде суперпозиций известных пучков ЭГ и ЛГ, однако такой подход оказывается неоптимальным для анализа и синтеза полей с фазовыми сингулярностями.

Вихревые световые поля, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба и характера вращения при распространении, или спиральные пучки, которым посвящён раздел 7, являясь своеобразными "вихревыми модами" в классе полей с фазовыми сингулярностями, заслуживают отдельного внимания как объект когерентной оптики.

На наш взгляд, это обусловлено следующими основными причинами. Во-первых, спиральные пучки, несмотря на то что они обладают весьма разнообразной формой распределения интенсивности, описываются явными аналитическими выражениями, что делает их эффективным инструментом исследования закономерностей формирования и преобразования световых полей с фазовыми сингулярностями общего вида.

Во-вторых, имеется прямой аналог спиральным пучкам в квантовой механике — волновые функции заряженной частицы в однородном магнитном поле, а законы преобразования спиральных пучков имеют своё представление в теории когерентных состояний. Вполне возможно, эти аналогии будут взаимно полезны и для квантовой механики, и для оптики. Наконец, возможность гибкого изменения распределений интенсивности спиральных пучков с сохранением их структурной устойчивости при распространении и фокусировке представляет интерес для лазерных технологий, создания специфических атомных ловушек, а ненулевой угловой момент этих пучков открывает новые возможности для манипулирования микрообъектами.

Список литературы

1. Волостников В Г, Препринт № 93 (М.: ФИАН, 1990); Volostnikov V G *J. Sov. Laser Res.* **11** 601 (1990)
2. Абрамочкин Е Г, Волостников В Г *УФН* **174** 1273 (2004) [Abramochkin E G, Volostnikov V G *Phys. Usp.* **47** 1177 (2004)]
3. Абрамочкин Е Г, Волостников В Г *Современная оптика гауссовых пучков* (М.: Физматлит, 2010)
4. Волостников В Г, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (Саратов: Саратовский гос. ун-тет, 1997)

PACS numbers: **75.30. - m**, **75.50. - y**, 81.05.Bx
DOI: 10.3367/UFNr.0182.201204g.0450

Магнитные материалы на основе интерметаллических соединений

Н.В. Мушников

1. Введение

Интерметаллические соединения переходных f- и d-металлов интересны тем, что в них могут существовать различные по своей природе системы электронов, ответственные за магнетизм: локализованная и коллективизированная. В редкоземельных атомах 4f-электроны пространственно и энергетически локализованы. Взаимодействие орбитального момента с кристаллическим полем решётки обеспечивает высокие значения магнитной анизотропии и магнитострикции. В то же время косвенное обменное взаимодействие между 4f-электронами относительно слабо и температуры магнитного упорядочения редкоземельных металлов низки. В отличие от энергетического спектра 4f-металлов энергетический спектр переходных 3d-металлов имеет квазинепрерывный, зонный характер. Для 3d-металлов группы железа характерны высокие температуры магнитного упорядочения, но небольшая анизотропия. Редкоземельные интерметаллические соединения, которые часто сочетают в себе магнитные параметры, характерные для чистых 4f- и 3d-металлов, могут иметь одновременно высокую температуру упорядочения и гигантскую анизотропию или магнитострикцию. Это обеспечивает возможности их применения в качестве материалов для постоянных магнитов и для магнитного охлаждения, а также магнитострикционных и магниторезистивных материалов.

Магнитные свойства редкоземельных интерметаллидов являются предметом интенсивных исследований с конца 1960-х годов. Пионерские результаты были получены под руководством К.П. Белова в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Исследования магнетизма редкоземельных интерметаллидов были инициированы С.В. Вонсовским и Я.С. Шуром в Институте физики металлов (ИФМ) УрО РАН (Екатеринбург) и А.В. Дерягиным в Уральском государственном университете им. А.М. Горького. За прошедшие годы в мире получено огромное количество интересных результатов. Данное сообщение не претендует на то, чтобы показать все достижения в этом обширном разделе физики магнитных явлений. Речь пойдёт лишь о результатах в области магнетизма интерметаллидов, полученных в последнее время преимущественно в ИФМ УрО РАН в тесной кооперации с учёными других научных центров страны и зарубежья.

2. Материалы для постоянных магнитов

Начиная с середины 1970-х гг. все материалы для постоянных магнитов с максимальными значениями удельной магнитной энергии основаны на высокоанизотропных интерметаллидных фазах: SmCo_5 , $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$, $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ и др. [1]. Наиболее важным для применения

Н.В. Мушников. Институт физики металлов УрО РАН,
Екатеринбург, РФ
E-mail: mushnikov@imp.uran.ru

является сегмент высокоэнергетических постоянных магнитов на основе Nd–Fe–B [2], мировое производство которых составляет около 100 000 т в год. Россия значительно отстаёт от развитых стран по объёмам производства (около 140 т в год) и уровню свойств редкоземельных постоянных магнитов. Типичные значения максимального энергетического произведения $(BH)_{\max}$ постоянных магнитов, произведённых в России, составляют 40 МГс Э, в то время как на мировом рынке доступны постоянные магниты с удельной магнитной энергией 50 МГс Э. Недавно совместными усилиями специалистов ИФМ УрО РАН, Уральского государственного университета, Уральского электромеханического завода и Московского института стали и сплавов была разработана низкокислородная технология получения спечённых постоянных магнитов Nd–Fe–B с использованием быстрозакалённых пластинчатых сплавов. В результате оптимизации основных технологических процессов на промышленном оборудовании получены постоянные магниты с величиной максимального энергетического произведения $(BH)_{\max} \geq 50$ МГс Э, что соответствует характеристикам лучших производимых магнитов и на 25 % превышает характеристики промышленных отечественных аналогов [3]. Между тем максимальное теоретическое значение для фазы Nd₂Fe₁₄B составляет 68 МГс Э, и для развития технологии остаётся значительный резерв. Максимальное теоретическое значение энергетического произведения постоянного магнита определяется намагниченностью. Самой высокой намагниченностью при абсолютном нуле температуры обладает гольмий, для которого теоретическая величина $(BH)_{\max}$ составляет 350 МГс Э. Таким образом, ресурс использования магнитных материалов на основе интерметаллических соединений редкоземельных металлов с металлами группы железа далеко не исчерпан.

Высокотехнологические производства, включая производство компьютерного оборудования, роботов, автомобильной техники и т. д., немыслимы без использования постоянных магнитов. В роторах высокоскоростных гистерезисных двигателей, применяемых в центрифугах, можно использовать лишь механически прочные магнитотвёрдые материалы. В лаборатории ферромагнитных сплавов ИФМ разработан высокопрочный магнитотвёрдый сплав на основе Fe–Cr–Co с нанокристаллической структурой, который по сочетанию функциональных свойств не имеет аналогов в мире. Механические свойства этого сплава близки к свойствам высокопрочных сталей, в то время как магнитные характеристики оптимальны для гистерезисных двигателей [4].

В сплавах Fe–Cr–Co, легированных вольфрамом и галлием, с использованием закалок, отжигов и интенсивной пластической деформации прокаткой сформировано вместо традиционной модулированной структуры состояние многофазного нанокомпозита, что позволило получить высокую прочность и пластичность (условный предел текучести до 1500 МПа, относительное удлинение до 6 %). Структура исследована методами ядерного гамма-резонанса, рентгеновской дифракции и просвечивающей электронной микроскопии [5, 6]. Установлено, что упрочнение сплава и формирование высококоэрцитивного состояния связаны с распадом однородного твёрдого раствора на основе α -Fe и выделением наноразмерных частиц парамагнитной интерметаллической фазы, обогащённой вольфрамом.

3. Материалы

для магнитотепловых приложений

Одним из перспективных приложений магнитных материалов в последнее время считается использование магнетокалорического эффекта для создания холодильных машин [7]. В отличие от механических компрессоров современных холодильников, устройства магнитного охлаждения не шумят, потребляют меньше электроэнергии и являются экологически безопасными. Рабочим телом большинства действующих макетов таких установок является гадолиний. Вместе с тем большой потенциал использования есть у ряда редкоземельных интерметаллидов, таких как La(Fe,Si)₁₃H_x, RCo₂ (R — редкоземельный элемент) и др. Поскольку изменение температуры при размагничивании материала определяется магнитной энтропией, в качестве материалов для магнитных холодильников перспективны соединения с резким температурным изменением намагниченности при температурах, близких к комнатной. Поэтому в последнее время интерес исследователей привлекли соединения со структурными фазовыми переходами при температурах, близких к комнатной, для которых намагниченности различных структурных компонентов существенно различаются. Наиболее широко известными примерами таких соединений являются сплавы Гейслера Ni₂MnGa [8], а также сплавы на основе Gd₅(Si,Ge)₄ [7]. В ИФМ УрО РАН ведутся работы по поиску новых материалов с большим магнетокалорическим эффектом на основе CoMnGe, Ni–Mn–Sn–In и др.

В соединении CoMnGe при температуре 470 К происходит бездиффузионный структурный переход мартенситного типа от высокотемпературной гексагональной структуры типа Ni₂In к низкотемпературной орторомбической фазе типа TiNiSi [9]. Обе структурные модификации ферромагнитны, но их намагниченности и температуры Кюри (T_C) значительно различаются. Варьируя состав в системе (CoMn)_{1–x}Ge, нам удалось получить сплавы, для которых при температурах, близких к температуре ферромагнитного упорядочения, происходит структурный переход из парамагнитной гексагональной фазы в ферромагнитную орторомбическую [10] (рис. 1). Именно для таких составов следует ожидать максимальных магнитотепловых эффектов. Для соединения с $x = 0,02$ переход происходит в области комнатных температур и сопровождается изменением энтропии 33,8 Дж (кг К)^{–1}. Приложение магнитного поля, превышающего пороговое значение 20 кЭ в области структурного перехода, вызывает увеличение относительного объёма орторомбической фазы, имеющей более высокую намагниченность.

Магнитный эффект памяти формы ещё сильнее проявляется в сплавах Ni–Mn–In и Ni–Mn–Sn [11], в которых намагниченности в аустенитной и мартенситной фазах резко различаются. Для сплава Ni₅₀Mn₃₇(Sn_{0,8}In_{0,2})₁₃ в импульсных магнитных полях с длительностью импульса 8 мс удаётся наблюдать индуцированное полем мартенситное превращение (рис. 2) [12]. Критическое поле перехода уменьшается при приближении температуры измерения к температуре спонтанного мартенситного превращения. Как спонтанное, так и индуцированное полем мартенситное превращение сопровождаются значительным изменением электросопротивления, $\Delta R/R \approx -45\%$.

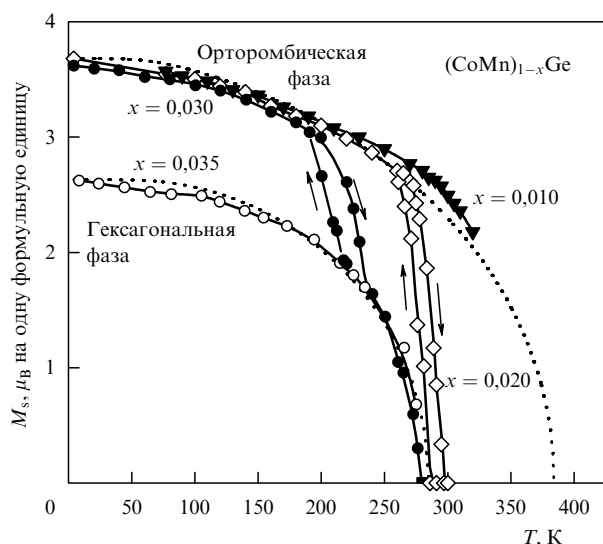


Рис. 1. Температурные зависимости спонтанной намагниченности соединений $(\text{CoMn})_{1-x}\text{Ge}$ с различными x . Пунктирные кривые — расчётные зависимости для гексагональной и орторомбической фаз.

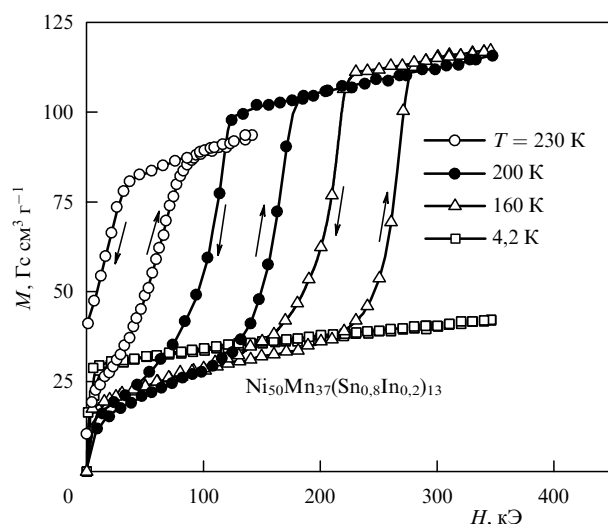


Рис. 2. Кривые намагничивания сплава $\text{Ni}_{50}\text{Mn}_{37}(\text{Sn}_{0.8}\text{In}_{0.2})_{13}$, демонстрирующие мартенситное превращение, индуцированное импульсным магнитным полем.

4. Соединения с переменной валентностью и зонные метамгнетики

Если в интерметаллиде два существенно различающихся магнитных состояния имеют близкие энергии, то небольшое воздействие на систему (приложение внешнего поля или давления, изменение температуры, гидрирование или легирование) может привести к кардинальному изменению магнитных и других физических свойств, что представляет интерес для практических приложений.

Свободный ион Yb^{3+} имеет одно незаполненное 4f-электронное состояние и обладает магнитным моментом. Нередко в соединениях вакансии в 4f-электронной оболочке заполняются электронами проводимости и формируется диамагнитное состояние Yb^{2+} . В соединении YbInCu_4 изменение валентности происходит в узком интервале температур в результате изоструктурного фазового перехода 1-го рода [13]. Валентность Yb уменьшается всего лишь на 0,1, но при этом кардинально изменяются магнитная восприимчивость и элект-

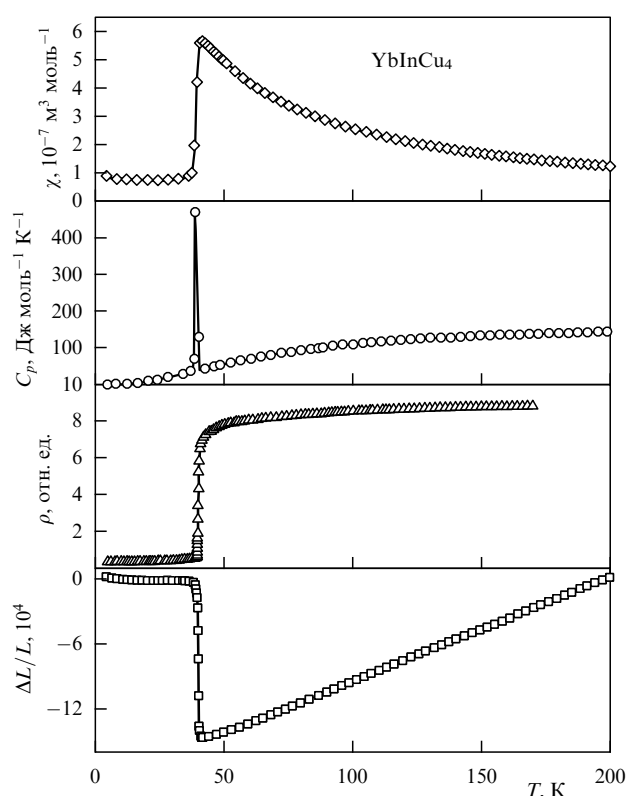


Рис. 3. Температурные зависимости магнитной восприимчивости χ , теплоёмкости C_p электросопротивления ρ и относительного изменения размера образца $\Delta L/L$ YbInCu_4 . Изоструктурный переход с изменением валентности при $T = 40$ К сопровождается резким изменением свойств.

росопротивление, возникает аномалия теплоёмкости и изменяется объём образца (рис. 3). При низких температурах ферми-жидкостное состояние с низкой намагниченностью может быть разрушено приложением магнитного поля.

Нами было исследовано влияние давления и легирования на температуру и поле перехода, магнитную восприимчивость [14], теплоёмкость [15], магнитострикцию [16]. Экспериментально установлено, что за аномалию физических свойств при небольшом изменении валентности в данном соединении ответственно пятикратное изменение коэффициента гибридизации f-электронов с электронами проводимости [17].

В системе коллективизированных электронов ферромагнитное упорядочение возникает при наличии высокой плотности электронных состояний вблизи уровня Ферми. Если зонная структура соединения такова, что уровень Ферми расположен на крутом спадающем участке кривой плотности состояний, то обменные взаимодействия нестабильны. В этом случае магнитное поле может индуцировать ферромагнетизм в парамагнитном соединении (явление зонного метамгнетизма) [18]. Как правило, для этого необходимо приложение сильных магнитных полей [19, 20]. Соединение YCo_2 , будучи парамагнетиком Паули, переходит в ферромагнитное состояние во внешнем магнитном поле величиной 700 кЭ [21]. Введение алюминия уменьшает критическое поле перехода [22]. В соединениях $\text{Y}(\text{Co}, \text{Al})_2$ нами было исследовано в импульсных полях влияние гидростатического давления на критическое поле перехода [23]. Сравнение эффектов легирования, гидрирования и прило-

жения давления позволило разделить вклады в изменение поля перехода, связанные с изменением межатомных расстояний и концентрацией электронов в d-зоне [24].

Соединение UCoAl также обладает признаками зонного метамагнетика [25], однако его свойства сильно отличаются от свойств YCo_2 . Критическое поле перехода в UCoAl не превышает 6 кЭ. Магнитный момент возникает на уране, в то время как кобальт не несёт магнитного момента. Метамагнетизм наблюдается лишь вдоль c -оси, т.е. является анизотропным, в отличие от изотропного метамагнетизма YCo_2 . Задачей исследования, которое выполнялось в тесной кооперации с научными коллективами из Японии и Чехии, являлось выяснение общих закономерностей и отличительных особенностей анизотропного зонного 5f-электронного метамагнетизма.

Метамагнитные кривые намагничивания UCoAl , измеренные при различных давлениях, были проанализированы в феноменологической теории метамагнитных переходов с использованием магнитного уравнения состояния в виде разложения Ландау по нечётным степеням намагниченности [26]. Из наилучшего совпадения расчётных кривых с экспериментальными были определены коэффициенты Ландау для разных давлений. В теории спиновых флуктуаций эти коэффициенты определяют особенности температурной зависимости магнитной восприимчивости [27]. Численные оценки максимальной магнитной восприимчивости и зависимости критического поля перехода от температуры показали хорошее согласие с расчётными данными, что свидетельствует о применимости теории спиновых флуктуаций к описанию свойств анизотропных зонных метамагнетиков.

К зонным метамагнетикам относят также ферромагнетики, в которых ферромагнетизм исчезает при приложении давления или изменении температуры и возникает метамагнетизм. Такой переход особенно интересен, поскольку в относительно небольших полях резко изменяется намагниченность, а также размер образца и его электропроводность. В UCoAl можно получить ферромагнетизм, заменив лишь 2 % немагнитного кобальта немагнитным железом. С приложением давления выше 0,4 ГПа ферромагнетизм подавляется и наблюдаются метамагнитный переход (рис. 4а) и максимум на температурной зависимости восприимчивости, типичные для UCoAl . Исследование этого образца при разных температурах и давлениях позволило построить полную магнитную фазовую диаграмму в плоскости давление – температура [28] (рис. 4б), которая хорошо согласуется с теоретической фазовой диаграммой, полученной для зонного метамагнетика с учётом спиновых флуктуаций [29]. Таким образом, полученные результаты позволяют отнести соединения типа UCoAl к новому классу анизотропных 5f-электронных зонных метамагнетиков.

5. Слоистые магнетики

Исследование физических свойств квазидвумерных и многослойных структур является одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений современной физики конденсированных сред. Наиболее распространёнными объектами для изучения обычно служат тонкие многослойные плёнки. В то же время среди интерметаллических соединений имеется ряд объёмных природных аналогов мультислойных структур. К таким соединениям, в частности, относятся интерметаллиды типа

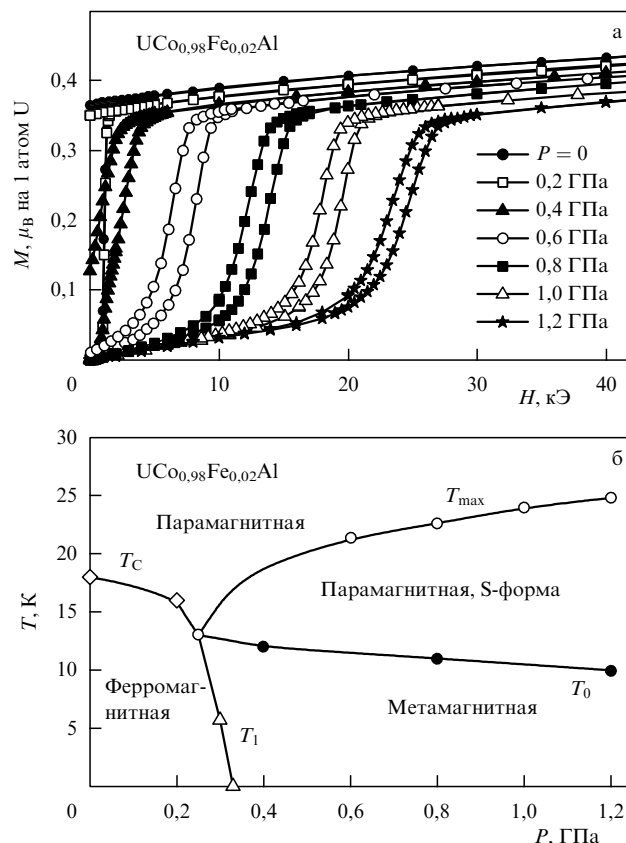


Рис. 4. (а) Петли гистерезиса при температуре 1,5 К, измеренные при различных значениях внешнего гидростатического давления. (б) Магнитная T – P -фазовая диаграмма анизотропного зонного метамагнетика $\text{UCo}_{0.98}\text{Fe}_{0.02}\text{Al}$.

RM_2X_2 и RM_6X_6 (где R — редкоземельный металл, M — 3d (4d)-переходный металл, X — Si, Sn или Ge). В этих соединениях магнитные атомы образуют слои, отделённые друг от друга слоями немагнитных атомов. Сильное ферромагнитное взаимодействие магнитных атомов внутри слоя обеспечивает высокие значения температур магнитного упорядочения. Поэтому магнитный момент каждого магнитного слоя оказывается макроскопической величиной и может рассматриваться как классический вектор. В то же время ответственным за формирование магнитной структуры материала в целом оказывается относительно слабое и легко регулируемое межслойное взаимодействие.

В интерметаллидах RMn_2X_2 величина и знак межслойного обменного взаимодействия между магнитными моментами атомов марганца, расположенными в соседних слоях, сильно зависят от расстояния между ближайшими атомами марганца в слое и фактически не зависят от межслойного расстояния [30]. В соединениях RMn_2Si_2 максимальное межатомное расстояние Mn–Mn наблюдается для $R = \text{La}$, и только в этом соединении возникает ферромагнитное упорядочение. Замещая лантан любым другим редкоземельным металлом, можно плавно уменьшать межатомные расстояния, дестабилизируя ферромагнетизм. В соединении $\text{La}_{0.75}\text{Sm}_{0.25}\text{Mn}_2\text{Si}_2$, в котором расстояние Mn–Mn близко к критическому, возникает несколько спонтанных магнитных фазовых переходов, связанных с температурным изменением параметров решётки. Магнитные структуры всех фаз, определённые с помощью дифракции нейтронов [31], показаны на рис. 5. Результаты

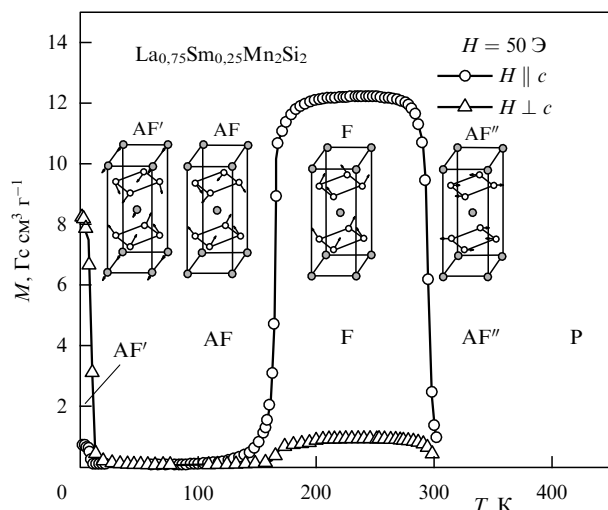


Рис. 5. Температурные зависимости намагниченности в поле величины 50 Э вдоль различных направлений монокристалла. На вставке показаны магнитные структуры, реализующиеся в интерметаллиде $\text{La}_{0.75}\text{Sm}_{0.25}\text{Mn}_2\text{Si}_2$ при различных температурах (AF — антиферромагнитная структура, F — ферромагнитная, P — парамагнитная).

измерения намагниченности на рис. 5 показывают области существования ферромагнитной и антиферромагнитных фаз. Приложение магнитного поля в низкотемпературном антиферромагнитном состоянии индуцирует фазовый переход первого рода антиферромагнетик–ферромагнетик [32]. Переход сопровождается большими изменениями параметров ($\Delta a/a = 1,5 \times 10^{-3}$) и объёма кристаллической решётки, а также магнетосопротивления ($\Delta R/R = -27\%$) [33] (рис. 6). Температуры и критические поля перехода в данных соединениях можно изменять в широких пределах, варьируя соотношение компонентов сплава.

Если межслойные обменные взаимодействия являются дальнедействующими, то в случае конкуренции взаимодействий между ближайшими и следующими за ближайшими слоями может возникнуть спиральная магнитная структура. Особенностью такой структуры, экспериментально обнаруженной в соединении $\text{Y}\text{Mn}_6\text{Sn}_6$ [34], является наличие двух ветвей спирали, сдвинутых на некоторый угол. Для анализа условий возникновения структур типа двойной плоской спирали с учётом трёх межслойных обменных взаимодействий была разработана теория, которая также использовалась для моделирования процессов намагничивания спиральных структур [35, 36]. Результаты моделирования позволили объяснить экспериментально наблюдаемое скачкообразное изменение намагниченности при приложении магнитного поля в базисной плоскости.

В высокоанизотропных одноосных ферромагнетиках при приложении магнитного поля вдоль направления трудного намагничивания вектор намагниченности обычно плавно поворачивается в направлении поля. Однако в тех случаях, когда угловая зависимость магнитной энергии образца носит немонотонный характер, в некотором критическом поле происходит индуцированный полем спин-переориентационный фазовый переход, сопровождающийся резким изменением намагниченности [37, 38]. В отличие от большинства переходов 1-го рода, такой переход сопровождается малым магнитным гистерезисом, и поэтому он представляет интерес для практических приложений.

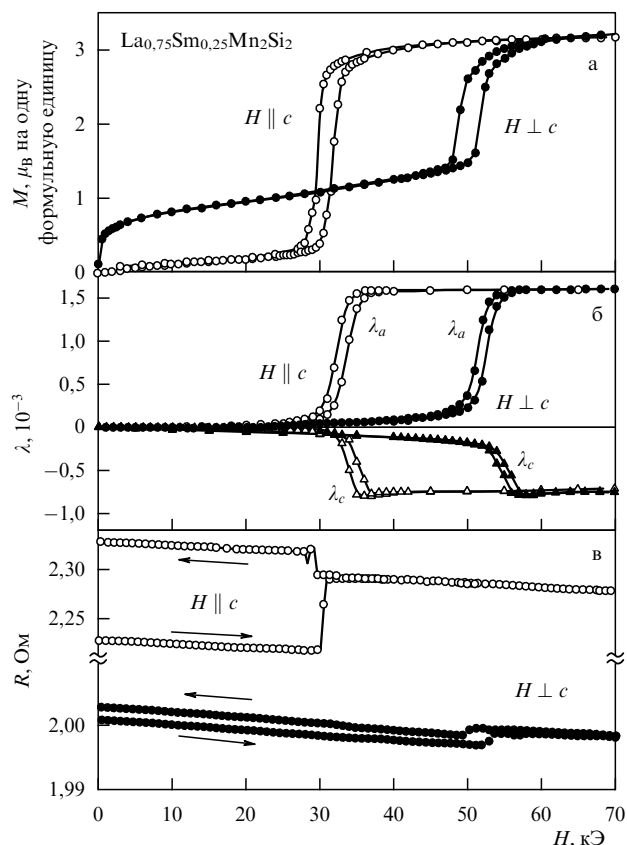


Рис. 6. Полевые зависимости намагниченности M (а), линейной магнетострикции λ (б) и электросопротивления R (в) вдоль различных направлений монокристалла $\text{La}_{0.75}\text{Sm}_{0.25}\text{Mn}_2\text{Si}_2$ при $T = 4,2$ К.

Появление индуцированных магнитным полем фазовых переходов 1-го рода связывают с особенностями магнитной анизотропии соединения: наличием сильных вкладов высокого порядка в разложении энергии анизотропии по направляющим косинусам вектора намагниченности. В соответствии с теорией одноионной анизотропии, чем выше порядок вклада, тем быстрее его величина уменьшается с возрастанием температуры. Поэтому такие переходы, как правило, наблюдаются при низких температурах в сильных магнитных полях. В соединении TbMn_6Sn_6 вследствие конкуренции вкладов в магнитную анизотропию от подрешёток Tb и Mn и наличия спонтанного спин-переориентационного перехода индуцированный магнитным полем фазовый переход 1-го рода происходит в малых полях при температурах, близких к комнатной [39]. Это позволило впервые с использованием магнитной нейтронографии исследовать изменение компонент намагниченности в процессе перехода [40]. При замещении тербия гадолинием в квазитройной системе $\text{Tb}_{1-x}\text{Gd}_x\text{Mn}_6\text{Sn}_6$ формируется неупорядоченный твёрдый раствор в пределах редземельной подрешётки. Это позволяет плавно регулировать магнитную анизотропию и обменные взаимодействия и смещать температуры и поля магнитных фазовых переходов [41].

6. Нестехиометрические интерметаллиды

Поскольку соединения 4f- и 3d-металлов, как правило, характеризуются определённой стехиометрией, их количество ограничено. Синтезированы все бинарные и

многие тройные интерметаллиды, и их магнитные характеристики можно найти в справочниках и обзорах. В то же время многие структуры допускают отклонение от стехиометрии, и свойства соединений в пределах области гомогенности могут сильно различаться.

Недавно обнаружено [42], что сплавы RNi_2Mn с $R = Tb, Dy, Ho$ и Er кристаллизуются в гранцентрированную кубическую структуру типа $MgCu_2$, как соединения RNi_2 и RMn_2 , несмотря на то что отношение числа редкоземельных атомов к числу атомов переходного 3d-металла равно 1:3. Атомы Mn частично занимают как редкоземельные позиции, так и позиции Ni [43], чего ранее никогда не наблюдалось для редкоземельных фаз Лавеса. Исследования показали, что в сплавах RNi_2Mn_x кубическая структура сохраняется в широком интервале концентраций марганца [44, 45]. Обнаружено, что введение марганца приводит к резкому усилению обменных взаимодействий и значительному возрастанию температуры магнитного упорядочения (в 4–7 раз по сравнению с таковой в исходных RNi_2). Максимальная величина $T_C = 160$ К достигнута для состава $TbNi_2Mn_{0.75}$.

В системе $TbNi_2Mn_x$ с увеличением x наблюдается монотонное уменьшение спонтанной намагниченности. При введении марганца в соединение $TbNi_2$ возникает магнитный момент 3d-подрешётки, ориентированный противоположно магнитному моменту подрешётки тербия, тогда как в исходном соединении $TbNi_2$ подрешётка никеля практически не несёт магнитного момента. Кривые намагничивания ферромагнитных образцов не достигают насыщения в магнитных полях величиной до 15 Тл. Введение марганца сопровождается монотонным возрастанием коэрцитивной силы, которая обусловлена пиннингом узких доменных стенок на дефектах структуры. По-видимому, частичное замещение атомов тербия атомами марганца приводит к локальным искажениям кристаллического поля, действующего на ионы Tb. В результате формируется локальная хаотическая одноосная анизотропия, которая приводит к возникновению неколлинеарной магнитной структуры подрешётки тербия.

Исходное соединение $TbNi_2$ обладает гигантской магнитострикцией при низких температурах [46]. При добавлении марганца анизотропная магнитострикция монотонно уменьшается. К сожалению, поскольку локальная анизотропия на узлах Tb в этих материалах одноосна, магнитострикция, обусловленная редкоземельной подрешёткой, может быть реализована только в очень сильных магнитных полях. Однако само по себе существование нестехиометрических редкоземельных интерметаллидов открывает широкие возможности поиска новых магнитных материалов.

7. Заключение

Таким образом, ресурс использования магнитных материалов на основе интерметаллических соединений редкоземельных металлов с металлами группы железа далеко не исчерпан. Актуален поиск новых материалов с большими магнетокалорическими, магнитострикционными и магниторезистивными эффектами. Сохраняется значительный потенциал увеличения максимального энергетического произведения, расширения температурного интервала работы и повышения стабильности постоянных магнитов. Сегодня создание новых магнитных материалов и развитие технологии их производства в значительной степени определяют технический прогресс.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 10-02-96019) и Программой фундаментальных исследований УрО РАН (проект 12-П-23-2005).

Список литературы

1. Дерягин А В *УФН* **120** 393 (1976) [Deryagin A V *Phys. Usp.* **19** 909 (1976)]
2. Buschow K H J *Rep. Prog. Phys.* **54** 1123 (1991)
3. Попов А Г и др. *ФММ* **109** 257 (2010) [Popov A G et al. *Phys. Met. Metallogr.* **109** 238 (2010)]
4. Belozero V Ye et al. *Solid State Phenom.* **152–153** 54 (2009)
5. Ivanova G V et al. *J. Alloys Comp.* **509** 1809 (2011)
6. Иванова Г В и др. *ФММ* **109** 474 (2010) [Ivanova G V et al. *Phys. Met. Metallogr.* **109** 438 (2010)]
7. Gschneidner K A (Jr.), Pecharsky V K, Tsokol A O *Rep. Prog. Phys.* **68** 1479 (2005)
8. Khovailo V V et al. *J. Appl. Phys.* **93** 8483 (2003)
9. Johnson V *Inorg. Chem.* **14** 1117 (1975)
10. Markin P E, Mushnikov N V *Solid State Phenom.* **152–153** 489 (2009)
11. Kainuma R et al. *Nature* **439** 957 (2006)
12. Gerasimov E G et al. *Solid State Phenom.* **168–169** 204 (2011)
13. Felner I et al. *Phys. Rev. B* **35** 6956 (1987)
14. Mushnikov N V et al. *J. Alloys Comp.* **345** 20 (2002)
15. Voloshok T N et al. *Phys. Rev. B* **76** 172408 (2007)
16. Mushnikov N V, Goto T *Phys. Rev. B* **70** 054411 (2004)
17. Mushnikov N V et al. *J. Phys. Condens. Matter* **16** 2395 (2004)
18. Левитин Р З, Маркосян А С *УФН* **155** 623 (1988) [Levitin R Z, Markosyan A S *Sov. Phys. Usp.* **31** 730 (1988)]
19. Звездин А К и др. *УФН* **168** 1141 (1998) [Zvezdin A K et al. *Phys. Usp.* **41** 1037 (1998)]
20. Дубенко И С и др. *Письма в ЖЭТФ* **64** 188 (1996) [Dubenko I S et al. *JETP Lett.* **64** 202 (1996)]
21. Goto T et al. *J. Appl. Phys.* **76** 6682 (1994)
22. Александрян В В и др. *ЖЭТФ* **89** 271 (1985) [Aleksandryan V V et al. *JETP* **62** 153 (1985)]
23. Mushnikov N V, Goto T *J. Phys. Condens. Matter* **11** 8095 (1999)
24. Mushnikov N V et al. *J. Magn. Soc. Jpn.* **23** 445 (1999)
25. Sechovský V, Havela L, in *Ferromagnetic Materials: A Handbook on the Properties of Magnetically Ordered Substances* Vol. 4 (Eds E P Wohlfarth, K H J Buschow) (Amsterdam: Elsevier, 1988) p. 309
26. Mushnikov N V et al. *Phys. Rev. B* **59** 6877 (1999)
27. Yamada H *Phys. Rev. B* **47** 11211 (1993)
28. Mushnikov N V et al. *Phys. Rev. B* **66** 064433 (2002)
29. Yamada H, Fukamichi K, Goto T *Phys. Rev. B* **65** 024413 (2002)
30. Szytula A, in *Handbook of Magnetic Materials* Vol. 6 (Ed. K H J Buschow) (Amsterdam: Elsevier, 1991) p. 85
31. Герасимов Е Г и др. *ФММ* **94** (2) 49 (2002) [Gerasimov E G et al. *Phys. Met. Metallogr.* **94** 161 (2002)]
32. Gerasimov E G, Mushnikov N V, Goto T *Phys. Rev. B* **72** 064446 (2005)
33. Gerasimov E G et al. *J. Phys. Condens. Matter* **20** 445219 (2008)
34. Venturini G, Fruchart D, Malaman B *J. Alloys Comp.* **236** 102 (1996)
35. Rosenfeld E V, Mushnikov N V *Physica B* **403** 1898 (2008)
36. Розенфельд Е В, Мушников Н В, Дякин В В *ФММ* **107** 599 (2009) [Rozenfel'd E V, Mushnikov N V, Dyakin V V *Phys. Met. Metallogr.* **107** 557 (2009)]
37. Asti G, Bolzoni F *J. Magn. Magn. Mater.* **20** 29 (1980)
38. Белов К П, Звездин А К, Кадомцева А М, Левитин Р З *Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках* (М.: Наука, 1979)
39. Терентьев П Б, Мушников Н В *ФММ* **100** (6) 50 (2005) [Terent'ev P B, Mushnikov N V *Phys. Met. Metallogr.* **100** 571 (2005)]
40. Зайков Н К и др. *Письма в ЖЭТФ* **72** 623 (2000) [Zaikov N K et al. *JETP Lett.* **72** 436 (2000)]
41. Terent'ev P B et al. *J. Magn. Magn. Mater.* **320** 836 (2008)
42. Wang J L et al. *Phys. Rev. B* **73** 094436 (2006)
43. Mushnikov N V et al. *Phys. Rev. B* **79** 184419 (2009)
44. Мушников Н В и др. *ФММ* **110** 223 (2010) [Mushnikov N V et al. *Phys. Met. Metallogr.* **110** 210 (2010)]
45. Mushnikov N V et al. *Solid State Phenom.* **168–169** 200 (2011)
46. Abbundi R, Clark A, McMasters O *IEEE Trans. Magn.* **16** 1074 (1980)