

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Нетривиальные особенности гидротермодинамики морской воды и других стратифицированных растворов

Л.Х. Ингель, М.В. Калашник

Весьма общие гидротермодинамические свойства стратифицированных двухкомпонентных сред (например, солёной морской воды) могут существенно отличаться от свойств "обычных" жидкостей, плотность которых зависит только от температуры. Например, температурные возмущения в таких средах могут усиливаться, несмотря на гидростатически устойчивую стратификацию плотности. В обзоре рассматривается ряд новых физических механизмов и явлений, обнаруженных в последние годы: неизвестные ранее механизмы конвективной неустойчивости, гидродинамическая "память" двухкомпонентных сред, возможность формирования разрывов (скачков) температуры и концентрации примеси, аномальный отклик бинарных смесей на механические и термические воздействия, эффективная "отрицательная теплоёмкость" и др.

PACS numbers: 44.25. + f, 47.20.Bp, 47.20.Dr, 47.54.Bd, 47.55. – t, 92.10. – c

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201204b.0379

Содержание

1. Введение (379).
2. Конвективная неустойчивость, обусловленная двойной (дифференциальной) диффузией (380).
3. Гидростатическая адаптация в "дважды стратифицированной" жидкости. Гидродинамическая "память" (380).
 - 3.1. Явление гидродинамической "памяти". 3.2. Постановка задачи. 3.3. Линейное приближение. 3.4. Нелинейная теория. 3.5. Интегральные и лагранжевы законы сохранения для системы уравнений адиабатической динамики.
4. Формирование скомпенсированных неоднородностей в сдвиговых течениях (387).
5. Аномальные отклики на механические и термические воздействия на поверхности (388).
 - 5.1. Постановка задачи о неоднородных касательных напряжениях и предварительные оценки. 5.2. Решение и его анализ. 5.3. Отклики на термические воздействия.
6. Новые механизмы конвективной неустойчивости (393).
 - 6.1. Новый тип неустойчивости, обусловленной двойной (дифференциальной) диффузией. 6.2. Аномальная термокапиллярная

неустойчивость в двухкомпонентных средах. 6.3. Конвективная неустойчивость, обусловленная фоновым течением. 6.4. Неустойчивость, обусловленная более быстрым распространением одной из субстанций. 6.5. Конвективно-радиационная неустойчивость влажного воздуха. 6.6. Неустойчивость, связанная с фазовыми переходами на границе.

7. Эффекты вращения (401).
 8. Плотностные течения, обусловленные двойной диффузией (403).
 9. Аномальное гидродинамическое сопротивление (403).
 10. Конвекция: нелинейное взаимодействие полей двух субстанций (405).
 11. Заключение (405).
- Список литературы (405).

1. Введение

Несколько десятилетий назад впервые был обнаружен ряд удивительных, по выражению Дж. Тернера [1], явлений в стратифицированных двухкомпонентных средах (таких как солёная морская вода) в поле силы тяжести. В таких средах, например, оказалось возможным возникновение конвективной неустойчивости при гидростатически устойчивой стратификации плотности (при убывании фоновой плотности с увеличением высоты). Подобные явления, представляющие большой научный и практический интерес, с тех пор активно исследуются (см., например, [1–9]). Уже в обзоре [2], написанном около 30 лет назад, упоминается более ста публикаций. С тех пор их число многократно увеличилось.

Настоящий обзор не может претендовать на освещение всего этого огромного материала. Так, за рамками обзора осталось важное направление исследований, связанное с формулировкой и анализом амплитудных уравнений для описания нелинейных закрытых

Л.Х. Ингель. Федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-производственное объединение "Тайфун"», ул. Победы 4, 249038 Обнинск, Калужская обл., Российская Федерация
Тел. (48439) 7-18-21. E-mail: ingeli@obninsk.ru
М.В. Калашник. Федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-производственное объединение "Тайфун"», ул. Победы 4, 249038 Обнинск, Калужская обл., Российская Федерация;
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, 109017 Москва, Российская Федерация
E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Статья поступила 8 апреля 2011 г.,
после доработки 22 июля 2011 г.

режимов конвекции (обобщённых уравнений Гинзбурга–Ландау (см., например, [10–15] и библиографию к этим работам)). Как правило, не рассматриваются результаты лабораторного и численного моделирования конвекции в бинарных смесях. Данный обзор ограничивается описанием некоторых классов физических механизмов и явлений, обнаруженных (в основном авторами обзора) в последние 10–15 лет. К ним относятся новые механизмы конвективной неустойчивости, явление гидродинамической "памяти" двухкомпонентных сред, аномальные отклики бинарных смесей на механические и термические воздействия, эффективная "отрицательная теплоёмкость" таких сред, возможность формирования скачков температуры, аномальное гидродинамическое сопротивление и др.

2. Конвективная неустойчивость, обусловленная двойной (дифференциальной) диффузией

Явление конвективной неустойчивости, обусловленной двойной (дифференциальной) диффузией, открыто уже достаточно давно и подробно описано во многих публикациях (см., например, [1, 2, 5, 6, 8, 9]). Для удобства читателя кратко напомним основной физический механизм.

Для определённости в качестве примера бинарной смеси, как правило, рассматриваем случай солёной морской воды, уравнение состояния которой с большой точностью аппроксимируется линейным уравнением [1]

$$\rho = \rho_*(1 - \alpha T + \beta S), \quad (1)$$

где ρ_* — значение плотности ρ при постоянных средних значениях температуры T_* и солёности S_* ; T , S — соответствующие отклонения от средних; α — коэффициент термического расширения; β — концентрационный коэффициент (коэффициент солёностного сжатия). Если фоновые распределения температуры и солёности \bar{T} , \bar{S} зависят только от координаты z (ось z направлена вертикально вверх), то среда находится в состоянии механического (гидростатического) равновесия. В этом разделе (в большинстве случаев и ниже) считаются заданными постоянные вертикальные градиенты этих фоновых распределений, обозначаемые как γ_T и γ_S соответственно. Предполагаем также, что фоновая вертикальная стратификация среды гидростатически устойчива — плотность убывает с возрастанием высоты (при этом стратификация одной из компонент — температуры или солёности — может быть неустойчивой).

Предположим, что в начальный момент задано возмущение в виде небольшого смещения некоторого объёма среды по вертикали (для определённости — вверх). Поскольку стратификация предполагается устойчивой, такой объём в его новом положении становится плотнее и тяжелее окружающей среды и приобретает отрицательную плавучесть. Поэтому, на первый взгляд, неизбежно появление возвращающей силы. Но плавучесть данного объёма зависит также и от процессов обмена с окружающей средой. Детальный анализ показывает, что последнее обстоятельство, вообще говоря, может приводить к изменению знака возникающих сил плавучести. Это возможно, если две субстанции (тепло и соль) вносят разные по знаку вклады в фоновую стратификацию плотности и диффундируют с разными скоро-

стями (например, в морской воде коэффициент диффузии соли примерно в 100 раз меньше, чем тепла).

Пусть, например, среда устойчиво стратифицирована по температуре (температура возрастает с увеличением высоты). Стратификация солёности при этом является неустойчивой, но вносит меньший по абсолютной величине вклад в фоновую стратификацию плотности, так что фоновая плотность среды с увеличением высоты убывает. Смещённый вверх объём, на первый взгляд, должен быть более холодным, но более пресным, а в целом — более плотным, чем окружающая среда. Но обмен теплом с окружающей средой происходит гораздо быстрее, чем обмен солью. В результате отклонение температуры в смещённом объёме может быстро релаксировать (это зависит от пространственных масштабов возмущения), в отличие от возмущения солёности, которое вносит в возмущение плотности вклад противоположного знака. Поэтому, вообще говоря, становятся вполне возможными ситуации, в которых смещённый вверх объём среды в действительности оказывается не тяжелее, а легче окружающей среды. Это означает возможность положительной обратной связи — развития возмущения.

В этом в общих чертах и состоит суть механизма конвективной неустойчивости, обусловленной двойной (дифференциальной) диффузией (double-diffusive convection). Указанный эффект исследован теоретически и экспериментально; он оказался важным не только для океанологии, но и для ряда других приложений [1, 2, 4–6].

Кратко остановимся на противоположной ситуации, в которой устойчивая стратификация плотности обусловлена стратификацией солёности, а тепло вносит в фоновую стратификацию дестабилизирующий вклад, меньший по абсолютной величине. Рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу, что различие скоростей диффузии ("дифференциальная" диффузия) должно в этом случае приводить не к исчезновению, а напротив, к усилению возвращающей силы, действующей на смещённый по вертикали объём среды. Но известно, что возникновение больших возвращающих сил может в некоторых ситуациях не стабилизировать систему, а приводить к раскачке колебаний, к возникновению колебательной неустойчивости (overstability). И действительно, линейный анализ показал, что существует область значений параметров двухкомпонентных сред, в которой развивается колебательная неустойчивость [1, 2].

3. Гидростатическая адаптация в "дважды стратифицированной" жидкости. Гидродинамическая "память"

3.1. Явление гидродинамической "памяти"

В настоящем разделе показано, что процесс установления механического равновесия в идеальных стратифицированных двухкомпонентных средах может происходить иначе, чем в обычных жидкостях, стратифицированных только по температуре [16, 17]. В последних, как хорошо известно [18], начальные горизонтальные температурные неоднородности в поле силы тяжести со временем затухают благодаря возникающим при наличии таких неоднородностей волновым движениям, которые "выравнивают" неоднородности и рассеиваются в про-

странстве. Это обстоятельство очень существенно, например, для динамики геофизических сред (атмосфера, океан, жидкие недра планет). Оно, в частности, весьма затрудняет объяснение существования и распространённости некоторых типов "долгоживущих" термических неоднородностей в верхних слоях морской воды (см., например, [19, 20]). Из проведённого в разделах 3.2–3.5 анализа следует, что в двухкомпонентных средах начальные горизонтальные неоднородности распределения температуры и концентрации примеси не исчезают и на финальной стадии процесса установления механического равновесия. Другими словами, двухкомпонентные среды хранят "память" о начальных возмущениях, допуская возникновение и продолжительное существование горизонтально неоднородных "следов" в распределениях температуры и концентрации примеси. Возникновение долгоживущих термохалинных (в полях температуры и солёности) "следов" давно отмечалось не только при наблюдениях верхнего слоя океана, но и в лабораторных экспериментах (см., например, [21, с. 221]), однако достаточно обоснованная интерпретация подобных явлений до недавнего времени отсутствовала.

Универсальная особенность структуры "следов" состоит в возможности формирования разрывных распределений (скачков) из гладких начальных распределений. Подобные структуры (особенно скачки в вертикальных распределениях) распространены в верхнем слое океана [22, 23], и объяснение их происхождения — весьма актуальная задача.

Обнаруженное в [16, 17] свойство "памяти" двухкомпонентных сред с гидродинамической точки зрения связано с тем, что для адиабатических движений температура и концентрация примеси являются лагранжевыми инвариантами, т.е. величинами, сохраняющимися в каждой жидкой частице. С этим связан ряд специфических интегральных и лагранжевых законов сохранения, которые также обсуждаются ниже.

Считается очевидным, что в устойчиво стратифицированной по плотности среде гидротермодинамические возмущения должны затухать, поскольку вертикальные смещения приводят к появлению возвращающей силы. Тем более нетривиален ещё один приведённый в разделе 3.3 результат: возмущения температуры и концентрации примеси в бинарных смесях могут многократно усиливаться и при сколь угодно устойчивой стратификации плотности (даже если исключить упомянутые в разделе 2 эффекты двойной диффузии). В этом смысле подобные "дважды неравновесные" (стратифицированные по обоим субстанциям) жидкости являются активными средами.

3.2. Постановка задачи

Рассмотрим поведение возмущений в покоящейся идеальной безграничной двухкомпонентной среде в поле силы тяжести. Для определённости здесь (и, как правило, ниже) будем говорить о солёной воде, стратифицированной по температуре и концентрации примеси (соли) таким образом, что гидростатическое равновесие является устойчивым. При этом по отдельности температурная и солёностная стратификации могут быть неустойчивыми, но суммарная стратификация плотности устойчива.

Согласно обычно применяемому приближению [1, 3, 4, 22], воспользуемся линейным уравнением состояния

(1). С учётом (1) адиабатические движения среды описываются замкнутой системой уравнений гидродинамики и переноса примеси:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{u} — вектор скорости с компонентами u, v, w вдоль горизонтальных осей x, y и направленной вверх оси z соответственно, p — давление, g — ускорение свободного падения, \mathbf{k} — вертикальный орт, $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla)$ — оператор полной производной.

Начальные условия для (1)–(3) записываются в виде

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad T|_{t=0} = \gamma_T z + T_i(\mathbf{x}), \quad S|_{t=0} = \gamma_S z + S_i(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)$, T_i, S_i — заданные начальные возмущения. Постоянные значения фоновых вертикальных градиентов каждой из субстанций, γ_T и γ_S , как упоминалось, предполагаются такими, что фоновое состояние гидростатически устойчиво, чему отвечает убывание фоновой плотности $\bar{\rho}(z) = \rho_*(1 - \gamma z)$ с возрастанием высоты. В устойчивом состоянии $\gamma = \alpha\gamma_T - \beta\gamma_S > 0$.

Относительный вклад температуры и концентрации примеси в фоновую стратификацию плотности удобно характеризовать безразмерным параметром

$$\eta = \frac{\beta\gamma_S}{\alpha\gamma_T}, \quad (5)$$

отсюда $\gamma = \alpha\gamma_T(1 - \eta)$. Обычно рассматриваемой однокомпонентной температурно-стратифицированной среде соответствует $\eta = 0$. В некоторых случаях более удобно использование параметра

$$m = \frac{\eta}{\eta - 1} = \frac{\beta\gamma_S}{\beta\gamma_S - \alpha\gamma_T} = \frac{d\bar{\rho}_S/dz}{d(\bar{\rho}_S + \bar{\rho}_T)/dz}. \quad (5a)$$

Здесь $d\bar{\rho}_T/dz$ и $d\bar{\rho}_S/dz$ — фоновые вертикальные градиенты плотности, обусловленные стратификациями температуры и концентрации примеси соответственно. Таким образом, параметр m имеет смысл относительного вклада примеси в фоновую стратификацию плотности.

В безграничной устойчиво стратифицированной среде начальные горизонтальные неоднородности поля плотности $\rho_i = -\rho_*(\alpha T_i - \beta S_i)$ приводят к возникновению волновых движений, которые сглаживают плотностные неоднородности и на больших временах затухают. Соответствующий волновой процесс гидростатического приспособления наиболее просто исследуется в случае возмущений с малой амплитудой.

3.3. Линейное приближение

Обозначая малые возмущения термодинамических переменных штрихами и используя приближение Буссинеска, вместо (1)–(3) получим линейную систему

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_*} \nabla p' + g(\alpha T' - \beta S')\mathbf{k}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \gamma_T w = 0, \quad \frac{\partial S'}{\partial t} + \gamma_S w = 0 \quad (7)$$

с начальными условиями: $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{0}$, $T'|_{t=0} = T_1(\mathbf{x})$, $S'|_{t=0} = S_1(\mathbf{x})$. Для безразмерной плавучести

$$\sigma = -\frac{\rho'}{\rho_*} = \alpha T' - \beta S'$$

система (6), (7) сводится к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 \sigma + N^2 \Delta_2 \sigma = 0, \quad (8)$$

где $N = \sqrt{g\gamma}$ — частота Брента–Вайсяля (частота плавучести), Δ_3 , Δ_2 — соответственно трёхмерный и двухмерный (по горизонтальным координатам) операторы Лапласа. Уравнение (8) является основным уравнением линейной теории внутренних гравитационных волн [24] (обычно его формулируют для вертикальной компоненты скорости). Общее решение задачи Коши для этого уравнения построено в [25]. Из соответствующего решения, описывающего процесс рассеяния волн в пространстве, следует, что с течением времени возмущение плотности затухает: $\sigma \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В однокомпонентной среде (плотность которой зависит только от температуры) вместе с σ , очевидно, затухает также возмущение температуры T' . Совершенно иначе ведёт себя T' в двухкомпонентной среде. Обозначим финальные (при $t \rightarrow \infty$) возмущения температуры и концентрации примеси через T_f , S_f . Для нахождения этих возмущений используем простой локальный закон сохранения, представляющий собой линейаризованную форму специфического для двухкомпонентных сред уравнения в замороженности (см. раздел 3.5). Этот закон получается исключением w из уравнений (7):

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0, \quad r = \gamma_S T' - \gamma_T S'. \quad (9)$$

Согласно (9), поле величины $r(\mathbf{x})$ не изменяется со временем:

$$\gamma_S T_f - \gamma_T S_f = \gamma_S T_i - \gamma_T S_i. \quad (10)$$

Помимо этого в финальном состоянии $\sigma = 0$, т.е. $\alpha T_f = \beta S_f$. Из последнего соотношения и (10) получаем выражения

$$T_f = \frac{\alpha \eta T_i - \beta S_i}{\alpha(\eta - 1)}, \quad S_f = \frac{\alpha \eta T_i - \beta S_i}{\beta(\eta - 1)}, \quad (11)$$

которые показывают, что в двухкомпонентной среде возмущения T' , S' не исчезают и на финальной стадии процесса гидростатического приспособления. Эти возмущения компенсируют друг друга в поле плотности ($\sigma_f = 0$), формируя стационарный "след", который в случае солёной воды можно назвать термохалинным. Отметим, что в реальной двухкомпонентной среде "след", разумеется, будет разрушаться за характерное время диссипации, которое, однако, для возмущений с не слишком малыми пространственными масштабами существенно превосходит временной масштаб процесса гидростатического приспособления.

Соотношения (11) дают только финальные распределения температуры и концентрации примеси (солёности). В общем случае, определяя поля плавучести σ и инварианта r из уравнений (8), (9), для этих распределений в произвольный момент времени находим:

$$T' = \gamma^{-1}(\gamma_T \sigma - \beta r), \quad S' = \gamma^{-1}(\gamma_S \sigma - \alpha r). \quad (12)$$

Соотношения (12) следуют непосредственно из выражений для σ , r , которые можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно T' , S' . Согласно этим соотношениям, термохалинное поле (T' , S') (поле распределений температуры и солёности) можно представить в виде суммы "плотностного" ("волнового") компонента (вносящего вклад в возмущение плотности и, следовательно, влияющего на динамику среды) и "скомпенсированного" компонента:

$$(T', S') = (T_\sigma, S_\sigma) + (T_r, S_r), \quad (13)$$

$$(T_\sigma, S_\sigma) = \gamma^{-1} \sigma (\gamma_T, \gamma_S), \quad (T_r, S_r) = -\gamma^{-1} r (\beta, \alpha).$$

В отличие от плотностного компонента, непосредственно участвующего в волновой динамике, скомпенсированный компонент (T_r, S_r) сохраняется в процессе эволюции и не даёт вклада в поле плавучести (ведёт себя как пассивная консервативная примесь): $\alpha T_r = \beta S_r$. Подчеркнём, что представление (13) является однозначным и носит весьма общий характер.

Исследуем особенности финальных распределений в случае $S_i = 0$ (начальное возмущение концентрации примеси отсутствует):

$$T_f = \frac{\eta}{\eta - 1} T_i, \quad S_f = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta}{\eta - 1} T_i. \quad (14)$$

При $\eta = 0$ (однокомпонентная среда) "след" начального возмущения отсутствует: $T_f = S_f = 0$. При $\eta \neq 0$, с учётом ограничения $\gamma > 0$, возможны три качественно различные ситуации, отвечающие различным значениям параметра $m = \eta/(\eta - 1)$.

1. *Фоновые стратификации температуры и концентрации примеси устойчивы:* $\gamma_T > 0$, $\gamma_S < 0$, $\eta < 0$. В этом случае $0 < m < 1$, т.е. финальное температурное возмущение сохраняет знак начального и является меньшим его по амплитуде. Уменьшение амплитуды возмущения в устойчиво стратифицированной среде выглядит вполне естественным, хотя нетривиально то, что это возмущение не затухает полностью.

2. *Температурная стратификация неустойчива, но систему стабилизирует устойчивая стратификация примеси:* $\beta \gamma_S < \alpha \gamma_T < 0$, $\eta > 1$. В этом случае $m > 1$, т.е. амплитуда возмущения в финальном состоянии всегда больше начальной амплитуды, причём при $\eta \rightarrow 1 + 0$ (приближение к нейтральной плотностной стратификации) $T_f \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow \infty$). Эффект усиления возмущений в устойчиво стратифицированной двухкомпонентной среде можно объяснить исходя из следующих соображений. Начальное положительное возмущение температуры приводит к возникновению в среде восходящих движений, которые при $\gamma_T < 0$ приносят снизу более тёплые объёмы среды. Если стратификация плотности близка к нейтральной, то она не препятствует интенсивному развитию этих движений. Такая положительная обратная связь и приводит к формированию интенсивного "следа". Безразмерный параметр m имеет смысл коэффициента усиления начального возмущения. Отметим, что это усиление в принципе возможно и при сколь угодно устойчивой стратификации плотности. Последнее легко увидеть из выражения (5а), знаменатель которого $d(\bar{\rho}_S + \bar{\rho}_T)/dz$ в общем может быть сколь угодно большим по абсолютной величине, но при этом в рассматриваемом случае всегда уступает по абсолютной величине числителю $d\bar{\rho}_S/dz$.

3. Стратификация примеси неустойчива, но систему стабилизирует устойчивая стратификация температуры: $\alpha\gamma_T > \beta\gamma_S > 0$, $0 < \eta < 1$. В этом, наиболее интересном, случае $m < 0$, причём $|m| \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 1 - 0$. Таким образом, финальное и начальное возмущения имеют противоположные знаки; т.е., например, в ответ на первоначальный нагрев в среде формируется холодный "след", который может быть гораздо интенсивнее первоначального нагрева. Этот, на первый взгляд неожиданный, эффект "отрицательной теплоёмкости" стратифицированных двухкомпонентных сред [16, 17, 26, 27] также имеет простое объяснение: при $\gamma_T > 0$ и стратификации плотности, близкой к нейтральной, развиваются интенсивные вертикальные движения, приносящие снизу более холодные объёмы среды.

Процесс формирования термохалинного следа хорошо иллюстрирует задача с начальным распределением температуры (плавучести) в виде модулированного волнового пакета в отсутствие возмущения солёности: при $t = 0$

$$S' = 0, \quad T' = \varepsilon_T A(x) \cos kx \sin \lambda_n z, \quad \sigma = \alpha T, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{H},$$

где $A(x)$ — огибающая, медленно изменяющаяся на длине волны $2\pi/k$, ε_T — малый амплитудный параметр, H — толщина слоя жидкости, n — номер вертикальной моды возмущения, $n = 1, 2, \dots$. Для данных начальных условий инвариант $r = \gamma_S T_i$. Асимптотическое решение уравнения (8) для плавучести можно представить в виде

$$\sigma = 0,5\alpha\varepsilon_T \sin \lambda_n z [A(x - c_g t) \cos k(x - ct) + A(x + c_g t) \cos k(x + ct)],$$

где c , c_g — соответственно фазовая и групповая скорости n -й вертикальной моды внутренних гравитационных волн,

$$c = \frac{N}{(k^2 + \lambda_n^2)^{1/2}}, \quad c_g = \frac{N\lambda_n^2}{(k^2 + \lambda_n^2)^{3/2}}.$$

Данное решение описывает распад начального пакета на два волновых пакета, распространяющихся в противоположных направлениях от области начального возбуждения (рис. 1). После ухода этих пакетов из области начального возбуждения возмущение плавучести в ней исчезает, т.е. устанавливается состояние гидростатического равновесия. В расчётах, результаты которых представлены на рис. 1, форма огибающей задавалась в виде $A(x) = \exp[-(x/\Delta)^2]$, где $\Delta \gg k^{-1}$. Расчёты выполнены для значения $k = 1/H$, которому отвечает фазовая скорость $c = NH/(\pi\sqrt{2})$, групповая скорость $c_g = 0,5c$. При $H = 5$ км, $N = 2 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ фазовая скорость $c \approx 2 \text{ м с}^{-1}$.

При известных распределениях σ , r возмущения температуры и солёности находятся из соотношений (12):

$$\begin{aligned} T' &= \frac{\varepsilon_T}{1 - \eta} \sin(\lambda_n z) \times \\ &\times \left[0,5 \sum A(x \pm c_g t) \cos k(x \pm ct) - \eta A(x) \cos kx \right], \\ S' &= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\varepsilon_T \eta}{1 - \eta} \sin(\lambda_n z) \times \\ &\times \left[0,5 \sum A(x \pm c_g t) \cos k(x \pm ct) - A(x) \cos kx \right], \end{aligned} \quad (15)$$

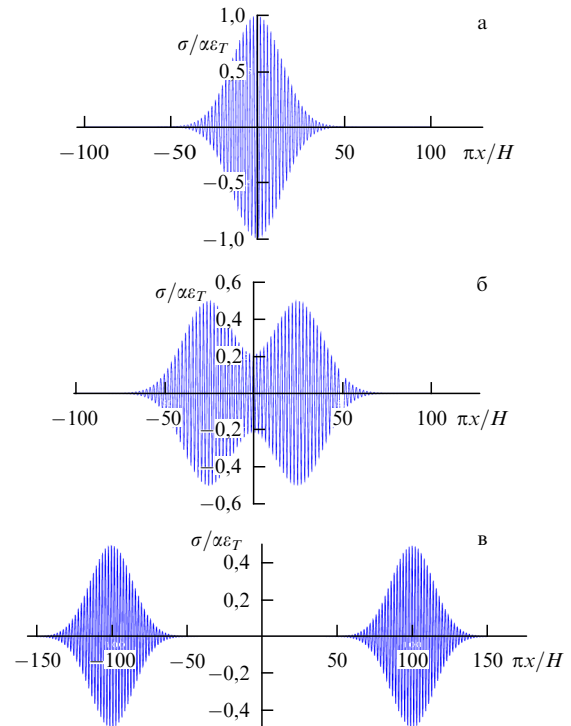


Рис. 1. Горизонтальные распределения плавучести на среднем уровне в последовательные моменты времени $t = 0$ (а), $t = 20$ (б), $t = 40$ (в). Масштаб времени $H/\pi c$.

где символом \sum обозначена сумма двух слагаемых со знаками плюс и минус. Из графиков горизонтальных распределений (15) на уровне $z = H/2$ в различные моменты времени, представленных на рис. 2, 3 (для первой вертикальной моды), видно, что в полях температуры и солёности в центральной части (области начального возмущения), наряду с распространяющимися волновыми пакетами, формируется стационарный пакет с нулевым возмущением плотности — термохалинный след. Подчёркнём, что амплитуда этого пакета (амплитуда температурного возмущения) может значительно превосходить начальную; для принятого в данном примере значения $\eta = 2$ она превышает начальную ровно в два раза. Таким образом, начальное температурное возмущение может усиливаться (вообще говоря, неограниченно, в зависимости от значения параметра η) при сколь угодно сильной гидростатической устойчивости среды!

Отметим ещё одну особенность финальных возмущений. Из выражений (11) следует, что разрывы (скачки) в начальных распределениях T_i , S_i сохраняются и на финальной стадии. Если в начальный момент разрыв существует лишь в поле одной из субстанций (например, температуры), то, согласно (11), в процессе гидростатического приспособления он возникает и в поле другой субстанции (концентрации примеси). Как показано в разделе 3.4, универсальное свойство нелинейной динамики состоит в формировании разрывов из гладких начальных возмущений.

3.4. Нелинейная теория

Исследуем теперь структуру финальных возмущений в нелинейной задаче. Для простоты рассмотрим двумерные движения, происходящие в плоскости (x, z) . Считаем

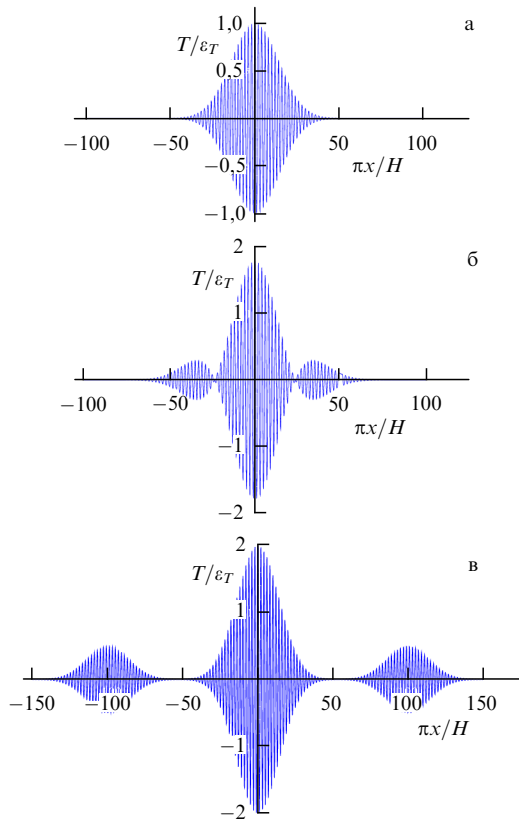


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для безразмерного возмущения температуры T/ε_T .

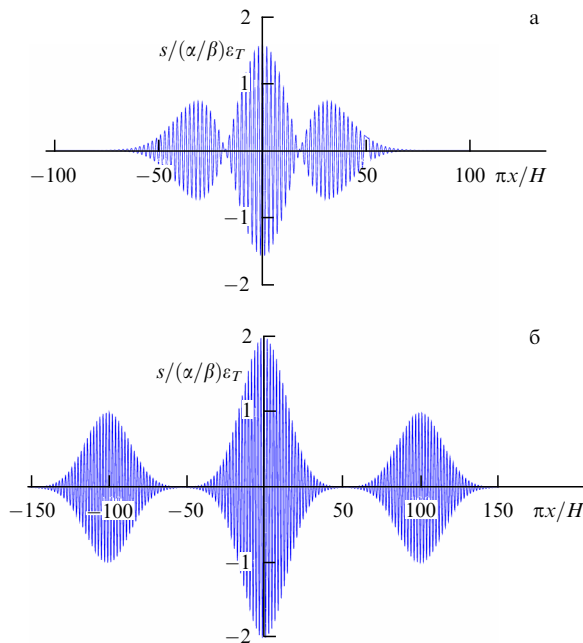


Рис. 3. Горизонтальные распределения безразмерного возмущения солёности $S/(\alpha/\beta)\varepsilon_T$ в моменты $t = 20$ (а), $t = 40$ (б). В начальный момент $t = 0$ возмущение солёности отсутствует.

также, что в начальный момент $S_i = 0$, а возмущение температуры $T_i(x, z)$ локализовано по горизонтали: $T_i \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Соответствующее начальное распределение плотности имеет вид $\rho_0(x, z) = \bar{\rho}(z) + \rho_i(x, z)$, где $\bar{\rho} = \rho_*(1 - \gamma z)$, $\rho_i = -\alpha \rho_* T_i$.

В нелинейной задаче переменные ρ , T , S являются лагранжевыми инвариантами, т.е. величинами, сохраняющимися в каждой жидкой частице. Используя этот факт, можно однозначно определить распределения этих переменных в финальном состоянии. Покажем сначала, что если в процессе гидростатического приспособления в среде устанавливается состояние механического равновесия, то в этом состоянии $\rho_f(z) = \bar{\rho}(z)$, т.е. финальное распределение совпадает с фоновым (возмущение плотности исчезает). Действительно, из определения лагранжевых инвариантов следует, что для любого $t > 0$ $\rho = \rho_0(x_0, z_0)$, где x_0 , z_0 — начальные (лагранжевы) координаты жидкой частицы. Отсюда $\rho_f(z) = \rho_0(x_0, z_0)$, т.е.

$$\rho_f(z) = \bar{\rho}(z_0) + \rho_i(x_0, z_0). \quad (16)$$

Переходя в (16) к пределу $|x_0| \rightarrow \infty$ и учитывая, что при этом $\rho_i \rightarrow 0$, $z_0 \rightarrow z$, получим $\rho_f(z) = \bar{\rho}(z)$.

Положим в (16) $\rho_f(z) = \bar{\rho}(z)$. Тогда (16) можно записать в виде $\rho_*(1 - \gamma z) = \rho_*(1 - \gamma z_0) - \alpha \rho_* T_i(x_0, z_0)$, откуда

$$z = z_0 + \frac{\alpha}{\gamma} T_i(x_0, z_0). \quad (17)$$

Физический смысл формулы (17) достаточно прозрачен — она определяет зависимость конечной (эйлеровой) вертикальной координаты z жидкой частицы от её начальных (лагранжевых) координат. Если эта зависимость известна, то аналогичная зависимость $x = x(x_0, z_0)$ для горизонтальной координаты может быть найдена из уравнения неразрывности в лагранжевых переменных

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(x_0, z_0)} = 1. \quad (18)$$

Отыскивая решение (18) в виде $x = x(x_0, z_0)$, получим $\partial x / \partial x_0 = (\partial z / \partial z_0)^{-1}$, откуда x находится простым интегрированием. Уравнения (17), (18), таким образом, образуют замкнутую систему уравнений для нахождения поля лагранжевых смещений жидких частиц.

Найдём теперь финальные распределения температуры и концентрации примеси. Из определения лагранжевых инвариантов и начальных условий (4) следуют выражения

$$T_f = \gamma_T z_0 + T_i(x_0, z_0), \quad S_f = \gamma_S z_0, \quad (19)$$

которые вместе с зависимостями $x = x(x_0, z_0)$, $z = z(x_0, z_0)$ дают параметрическое (x_0 , z_0 — параметры) представление функций $T_f = T_f(x, z)$, $S_f = S_f(x, z)$. Выражения (19) можно преобразовать, учитывая, что, согласно (17), $z_0 = z - (\alpha/\gamma) T_i$. Подставляя последнее выражение в (19), с учётом $\alpha \gamma_T / \gamma = 1/(1 - \eta)$ получим

$$T_f = \gamma_T z + \frac{\eta}{\eta - 1} T_i(x_0, z_0), \quad (20)$$

$$S_f = \gamma_S z + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta}{\eta - 1} T_i(x_0, z_0).$$

Сопоставим формулы (20) с результатами линейной теории. Легко увидеть, что для отклонений от фоновых линейных распределений из (20) следуют формулы (14), с той разницей, что левые и правые части (14) теперь выражены соответственно в эйлеровых и лагранжевых координатах. В рамках линейной теории $x_0 \sim x$, $z_0 \sim z$ и

формулы (14), (20) эквивалентны. В нелинейной задаче определяемая из (17), (18) зависимость между координатами приводит к весьма сложной деформации начальных распределений. Наиболее яркая особенность при этом связана с формированием разрывов (скачков) по вертикали.

Далее будем рассматривать начальные распределения вида $T_i = \Delta T h(x/L) \tau(z/H)$, где ΔT , L , H — соответственно амплитуда, горизонтальный и вертикальный масштаб T_i . Убывающую на бесконечности функцию $h(x)$ считаем чётной, неотрицательной, удовлетворяющей условию $h(0) = 1$. Для зависимостей между безразмерными (нормированными соответственно на L и H) эйлеровыми и лагранжевыми координатами из (17), (18) получим

$$\begin{aligned} z &= z_0 + ah(x_0) \tau(z_0), \\ x &= x_0 - a \int_0^{x_0} \frac{h(x_0) \tau'(z_0)}{1 + ah(x_0) \tau'(z_0)} dx_0, \end{aligned} \quad (21)$$

где введён безразмерный амплитудный параметр $a = \alpha \Delta T / (\gamma H)$ и штрихом обозначена производная. Отметим, что выражение для x в (21) получено интегрированием уравнения $\partial x / \partial x_0 = (\partial z / \partial z_0)^{-1}$ с учётом условия симметрии: $x = 0$ при $x_0 = 0$. Под знаком интеграла в (21) полагается $z_0 = z_0(x_0, z)$ (выражение для z разрешено относительно z_0).

Рассмотрим вначале простой пример, в котором зависимости между координатами находятся в явном виде. Пусть рассматривается задача в слое $0 < z < 1$ (далее координаты безразмерны) и $\tau(z_0)$ — кусочно-линейная функция:

$$\tau(z_0) = \begin{cases} z_0, & 0 < z_0 < 0,5, \\ 1 - z_0, & 0,5 < z_0 < 1 \end{cases}$$

(максимум температурного возмущения находится в центре слоя, на границах возмущение отсутствует). Из соотношений (21) получим

$$\begin{aligned} z &= z_0(1 + ah(x_0)), \\ x &= x_0 - a \int_0^{x_0} \frac{h(x_0)}{1 + ah(x_0)} dx_0, & 0 < z_0 < 0,5, \\ z &= z_0 + ah(x_0)(1 - z_0), \\ x &= x_0 + a \int_0^{x_0} \frac{h(x_0)}{1 - ah(x_0)} dx_0, & 0,5 < z_0 < 1. \end{aligned} \quad (22)$$

При $a > 0$ формулы (22) определяют перемещения жидких частиц, связанные с процессом конвективного подъёма жидкости и растекания вблизи верхней границы. Выразив из (22) координату z_0 через z и подставляя её в (20), для отклонения от фонового линейного распределения $T_f' = T_f - \gamma_T z$ находим

$$T_f' = \Delta T \frac{\eta}{\eta - 1} h(x_0) \begin{cases} \frac{z}{1+a}, & 0 < z < 0,5(1+a), \\ \frac{1-z}{1-a}, & 0,5(1+a) < z < 1. \end{cases} \quad (23)$$

Зависимость (23) при $x_0 = x = 0$ и различных значениях параметра a представлена на рис. 4. Этот рисунок отражает тенденцию к образованию разрывов в финаль-

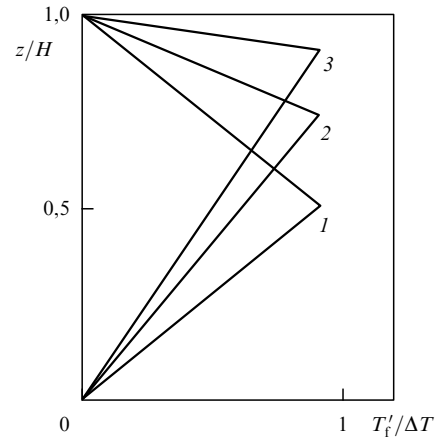


Рис. 4. Отклонения температуры от фонового линейного распределения для различных значений параметра a в случае кусочно-линейной зависимости $\tau(z_0)$ при $\eta = 2$: $a \ll 1$ (1), $a = 0,5$ (2), $a = 0,8$ (3).

ных вертикальных распределениях — с возрастанием a происходит "опрокидывание" начального треугольного распределения в верхней половине слоя.

Исследуем теперь структуру вертикальных распределений температуры в случае произвольных гладких зависимостей $\tau(z_0)$. Согласно (19), (21), распределение $T_f = T_f(z)$ на оси симметрии $x_0 = 0$ температурного возмущения описывается параметрическими (z_0 — безразмерный параметр) выражениями

$$z = z_0 + a\tau(z_0), \quad T_f = \gamma_T H [z_0 + a(1 - \eta) \tau(z_0)], \quad (24)$$

где учтено, что $\Delta T / (\gamma_T H) = a(1 - \eta)$. На рисунке 5а представлена зависимость (24) для различных значений параметра a в случае гладкого локализованного распределения $\tau(z_0) > 0$ и $\eta < 0$ (рассматривается неограниченная по вертикали среда). Как видно из рисунка, с

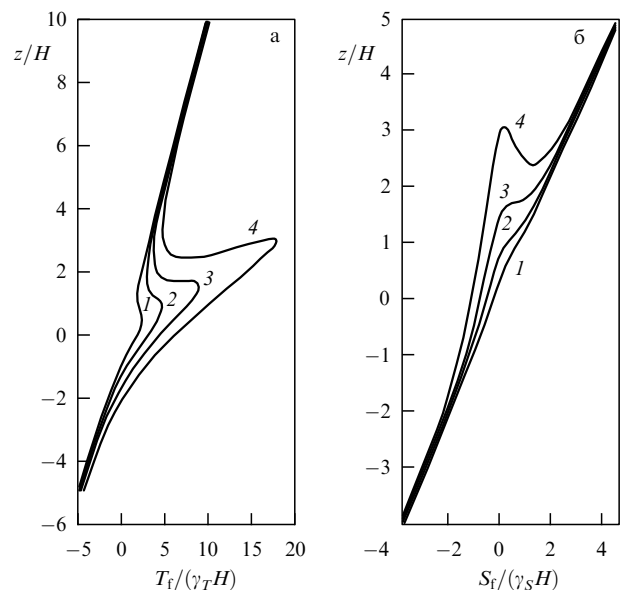


Рис. 5. Вертикальное распределение температуры (а) и концентрации примеси (б) на оси симметрии возмущения при $\tau(z_0) = 1/(1 + z_0^2)$, $\eta = -5$ и различных значениях параметра a : $a = 0,4$ (1), $a = 0,8$ (2), $a = a_{cr} = 8\sqrt{3}/9 \approx 1,54$ (3), $a = 3$ (4).

возрастанием a при некотором значении $a = a_{cr}$ на вертикальном профиле T_f формируется разрыв в точке $z = z_{cr}$. Аналогичный разрыв формируется и на вертикальном профиле концентрации примеси (рис. 5б). Эти разрывы компенсируют друг друга, так что вертикальное распределение плотности остаётся непрерывным (линейным).

Определим значения критических параметров, следуя работе [28]. Как и в [28], можно показать, что возникновению разрыва отвечает появление точки перегиба z_* на графике зависимости $z = z(z_0)$. Эта точка находится из уравнения $\tau''(z_0) = 0$ (здесь штрихом обозначены производные). Поскольку $\partial T / \partial z = (\partial T / \partial z_0) / (1 + a\tau'(z_0))$, для критических параметров найдём

$$a_{cr} = -\frac{1}{\tau'(z_*)}, \quad z_{cr} = z_* + a_{cr}\tau(z_*).$$

В частности, при $\tau(z_0) = 1/(1 + z_0^2)$ элементарные вычисления дают $a_{cr} = 8\sqrt{3}/9 \approx 1,54$, $z_{cr} = \sqrt{3}$. Для профиля $\tau(z_0) = \exp(-z_0^2)$ получим $a_{cr} = \exp(0,5)/\sqrt{2} \approx 1,17$, $z_{cr} = \sqrt{2}$. Вертикальные распределения температуры и концентрации являются непрерывными при $a < a_{cr}$ и многозначными (разрывными) при $a > a_{cr}$. Используя приведённые значения, можно оценить критическую величину ΔT , при превышении которой возникает разрыв: $\Delta T = a_{cr}\gamma H/\alpha$ (эта величина линейно зависит от масштаба возмущения H). Для профиля $\tau(z_0) = 1/(1 + z_0^2)$ и характерных для океана значений $H = 10$ м, $\alpha = 2 \times 10^{-4}$ К $^{-1}$, $\gamma = 9 \times 10^{-7}$ м $^{-1}$ ($N = 3 \times 10^{-3}$ с $^{-1}$) получим $\Delta T = 7 \times 10^{-2}$ К, т.е. начальное возмущение с амплитудой порядка десятой доли градуса уже приводит к формированию разрыва.

Подчеркнём, что эффект формирования разрывов имеет универсальный характер, не связанный с деталями структуры $\tau(z_0)$. Его физическое объяснение несложно. Действительно, согласно (17), вертикальное смещение жидкой частицы $l = z - z_0$ определяется интенсивностью ΔT начального возмущения T_i . При $\Delta T > 0$ более тёплые частицы, всплывая, догоняют относительно холодные, что и приводит к формированию разрывного профиля, напоминающего известную N -волну (простую волну Римана) в газовой динамике [29]. Подобные профили достаточно часто фиксируются измерениями в океане; они характерны для так называемых температурных инверсий [22, 23].

Зависимость (24) при $\tau(z_0) = \cos(\lambda z_0)$ для двух значений параметра a представлена на рис. 6, из которого видно, что в случае периодического по вертикали начального возмущения, вызванного, например, внутренней волной, может сформироваться стационарный пилообразный профиль температуры, в котором слои с постоянными градиентами разделены резкими скачками (инверсиями). Условие формирования разрывов для периодического возмущения имеет вид $a > a_{cr} = 1/\lambda$; соответствующее критическое значение ΔT при $\lambda = 1$ и приведённых выше значениях параметров составляет $4,5 \times 10^{-2}$ К. Если начальное распределение аperiodично (имеет положительные и отрицательные фазы), то очевидно, что сформируется профиль с нерегулярным распределением скачков. Подобные профили характерны для тонкой структуры океана, которая, согласно данному в [22, с. 119] определению, "представляет собой неупорядоченное или систематическое чередование по глубине участков с низкими и высокими вертикальными

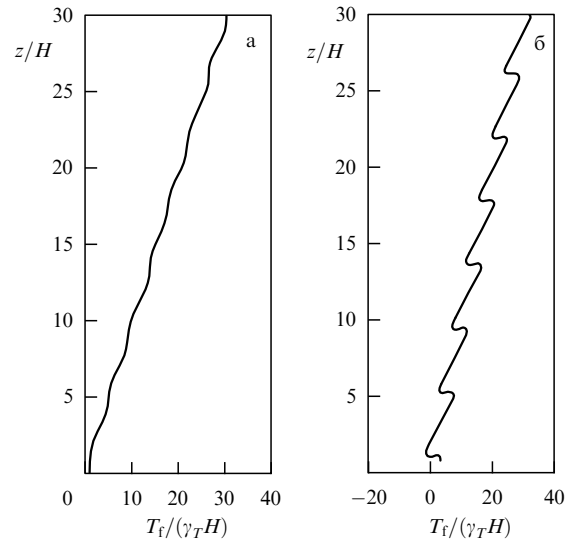


Рис. 6. Вертикальное распределение температуры на оси симметрии возмущения при $\tau(z_0) = \cos(\lambda z_0)$, $\lambda = 1,5$, $\eta = -2$ и значениях параметра $a = 0,2$ (а) и $a = 0,95 > a_{cr}$ (б).

градиентами того или иного свойства". Отметим, что для тонкой структуры характерные значения скачков температуры составляют несколько десятых долей градуса, что соответствует закритическим режимам.

3.5. Интегральные и лагранжевы законы сохранения для системы уравнений адиабатической динамики

Гидродинамическая "память" стратифицированных двухкомпонентных сред тесно связана с существованием ряда специфических интегральных и лагранжевых законов сохранения. В этом разделе рассматриваются некоторые из этих законов.

Разъясним вначале гидродинамический смысл локального закона сохранения (11), ответственного за формирование "следа" в линейной теории. Как указано ранее, в нелинейном случае переменные T , S являются лагранжевыми инвариантами — величинами, сохраняющимися в жидкой частице. Отсюда сразу следует, что линии пересечения поверхностей $T = \text{const}$, $S = \text{const}$ всё время состоят из одних и тех же частиц, т.е. являются жидкими линиями. Введём в рассмотрение векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$, касательное к линиям пересечения указанных поверхностей:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \nabla T \times \nabla S. \quad (25)$$

Из уравнений (3) следует, что поле $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению $\partial \mathbf{R} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{R})$, которое с использованием известного векторного тождества можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{u}. \quad (26)$$

Уравнение (26) в гидродинамике известно как уравнение вмерзновенности векторного поля в жидкости [30, 31]. При выполнении (26) векторные линии поля \mathbf{R} всё время состоят из одних и тех же частиц и сохраняются интенсивности векторных трубок.

Покажем, что закон сохранения (9) представляет собой линеаризованную форму уравнения вмерзновенности (26). Действительно, полагая в (25) $T = \bar{T} + T'$,

$S = \bar{S} + S'$, для малых отклонений получим $\mathbf{R} = (\gamma_T \mathbf{k} + \nabla T') \times (\gamma_S \mathbf{k} + \nabla S') \sim \mathbf{R}' = \nabla r \times \mathbf{k}$. В линейном приближении (26) запишется как $\partial \mathbf{R} / \partial t = 0$. Для ограниченных на бесконечности возмущений последнее (векторное) уравнение эквивалентно (9).

Отметим, что наряду с T и S ещё одним лагранжевым инвариантом системы уравнений адиабатической динамики (1)–(3) является потенциальный вихрь Эртеля [30]:

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad q = \text{rot } \mathbf{u} \nabla \rho.$$

Уравнению вмерзности (26), очевидно, удовлетворяет поле \mathbf{R} , образованное произвольной парой инвариантов из набора T, S, q , например $\mathbf{R} = \nabla \rho \times \nabla q$.

С уравнением вмерзности (26) связаны интересные интегральные законы сохранения. Нетрудно проверить, что для векторных полей \mathbf{u}, \mathbf{R} , удовлетворяющих соответственно системе (1)–(3) и уравнению (26), справедлива формула

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{u}) = \text{div}(L\mathbf{R}) + p\mathbf{R}\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (27)$$

$$L = \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \frac{p}{\rho} - gz.$$

Положим в (27) $\mathbf{R} = \nabla \rho \times \nabla q$. При этом второе слагаемое в правой части (27) обратится в нуль, и после интегрирования по объёму V получим закон сохранения

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = 0, \quad I_1 = \int_V (\nabla \rho \times \nabla q) \mathbf{u} \, d\mathbf{x}. \quad (28)$$

Здесь предполагается, что граница области интегрирования составлена из частей, касательных к \mathbf{R} .

Аналогично, полагая в (27) $\mathbf{R} = \nabla T \times \nabla S$, после интегрирования получим ещё один закон:

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} = 0, \quad I_2 = \int_V [\nabla T \times \nabla S] \mathbf{u} \, d\mathbf{x}. \quad (29)$$

Под знаки интегралов в (28), (29) можно внести произвольную функцию $\mu(T, S, q)$ (поле $\mu \mathbf{R}$ удовлетворяет (26), если \mathbf{R} удовлетворяет этому уравнению).

Для общего случая движений сжимаемой однокомпонентной среды аналог закона сохранения (28) получен в [32]. Специфический для двухкомпонентных сред закон сохранения (29) получен в [33] в рамках гамильтоновского описания динамики (инвариант Казимира C_3). Законы сохранения (28), (29), аналогичные законам сохранения Моффата и Вольтерра в обычной и магнитной гидродинамике [30, 32], независимы от закона сохранения полной энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad E = \int_V \left[\frac{\mathbf{u}^2}{2} + gz \right] \rho \, d\mathbf{x}.$$

Отметим ещё одну важную особенность адиабатической динамики двухкомпонентных сред, связанную с задачей Коши для системы (1)–(3). При решении этой задачи удобно свести уравнения (3) к одному уравнению для плотности. Поля \mathbf{u}, p, ρ при этом могут быть найдены из решения "укороченной" системы

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k}, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (30)$$

совпадающей с обычной системой уравнений динамики несжимаемой однокомпонентной среды. После нахождения

этих полей возникает вопрос о нахождении полей температуры и концентрации примеси. Как показано в [16], в произвольный момент времени поля T, S однозначно восстанавливаются по известным полям плотности, скорости и начальным данным. Описание динамики двухкомпонентной среды, таким образом, можно проводить на основе системы уравнений (30), восстанавливая поля температуры и концентрации примеси на каждом временном шаге.

Итак, выше показана возможность формирования в бинарных смесях долгоживущих "следов" в полях температуры и концентрации примеси, в том числе формирования разрывных распределений упомянутых субстанций. Кроме того, продемонстрирована возможность интенсификации термических возмущений в гидростатически устойчивых средах, а также смена знака таких возмущений (например, понижение температуры в ответ на тепловыделение, т.е. возможность существования эффективной "отрицательной теплоёмкости").

Отметим, что неоднородности температуры и солёности, компенсирующие друг друга в поле плотности, систематически наблюдаются в океане (см., например, [34–36]). В океанологической литературе они получили название "спайсы" (от англ. *spices* — специи). Описанный выше механизм гидростатического приспособления естественным образом объясняет происхождение и широкую распространённость спайсов.

4. Формирование скомпенсированных неоднородностей в сдвиговых течениях

Кроме рассмотренного в разделе 3 механизма гидростатического приспособления, ещё один механизм формирования скомпенсированных (T, S) -распределений (скомпенсированных следов) может быть связан с особенностями динамики возмущений в гидродинамически устойчивых сдвиговых течениях [37]. В таких течениях возмущения полей плавучести (плотности) и скорости с течением времени затухают, в то время как скомпенсированные возмущения полей температуры и концентрации примеси (солёности) без затухания переносятся потоком идеальной жидкости, формируя движущуюся скомпенсированную неоднородность.

Ограничимся для простоты рассмотрением двумерных возмущений в плоскопараллельном течении с вертикальным сдвигом $\mathbf{u} = U(z)\mathbf{i}$, где \mathbf{i} — горизонтальный орт. Поведение возмущений с малой амплитудой (ниже, там, где это не приводит к недоразумениям, опускаем штрихи) описывается системой уравнений [30, 38]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U(z) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dU}{dz} w = -\frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U(z) \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_*} \frac{\partial p}{\partial z} + g(\alpha T - \beta S),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U(z) \frac{\partial T}{\partial x} + \gamma_T w = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + U(z) \frac{\partial S}{\partial x} + \gamma_S w = 0, \quad (32)$$

к которой присоединим начальные условия (4).

Для решений системы (31), (32) также справедливо общее представление (12) поля термохалинных возмущений суммой плотностного и скомпенсированного компонентов. Согласно (12), эти компоненты однозначно определяются по значениям инварианта $r = \gamma_S T - \gamma_T S$ и

плавуности $\sigma = -\rho'/\rho_* = \alpha T - \beta S$. В сдвиговом течении эволюция r описывается простым уравнением $\partial r/\partial t + U(z) \partial r/\partial x = 0$, которое, как и ранее, получается исключением w из уравнений (32). Решение с начальным условием $r|_{t=0} = r_i(x, z) = \gamma_S T_i - \gamma_T S_i$ имеет вид $r = r_i(x - U(z)t, z)$. Отсюда следует, что в сдвиговом течении скомпенсированный компонент $T_r = -\gamma^{-1}\beta r$, $S_r = -\gamma^{-1}\alpha r$ играет роль пассивного трассера, переносимого потоком. Этот компонент распространяется без затухания, испытывая лишь сдвиговые деформации.

Сведение уравнений (32) к одному уравнению для плавуности σ приводит к замкнутой (укороченной) системе для нахождения полей плавуности и скорости. В терминах функции тока $u = -\partial\psi/\partial z$, $w = \partial\psi/\partial x$ система имеет вид

$$\frac{D}{Dt} \Delta_2 \psi - U''(z) \frac{\partial \psi}{\partial x} = g \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{D}{Dt} \sigma + \frac{N^2}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (33)$$

где Δ_2 — плоский оператор Лапласа, $D/Dt = \partial/\partial t + U \partial/\partial x$. Данная система, совпадающая с системой уравнений динамики возмущений в однокомпонентной среде, представляет собой основной объект теории гидродинамической устойчивости сдвиговых течений стратифицированной жидкости [30, 38]. Полученный на основе метода нормальных мод классический результат этой теории состоит в том, что неустойчивость возможна лишь при числах Ричардсона $Ri = N^2/U'^2 < 1/4$. При $Ri > 1/4$ (условие устойчивости) общее решение системы (33) представляет собой суперпозицию нейтральных мод дискретного спектра (распространяющихся без затухания) и затухающих мод непрерывного спектра. Для широкого класса гладких сдвиговых течений моды дискретного спектра отсутствуют. Возмущения полей плавуности и скорости при этом с течением времени затухают, соответственно затухает и плотностной компонент T_σ , S_σ поля термохалинных возмущений. Напротив, скомпенсированный компонент без затухания переносится потоком, формируя движущуюся скомпенсированную неоднородность. В этом и состоит механизм формирования скомпенсированных неоднородностей в гидродинамически устойчивых сдвиговых течениях.

В качестве иллюстрации описанного механизма рассмотрим динамику возмущений в неограниченном течении с постоянным вертикальным сдвигом $U(z) = dz$, $d = \text{const}$. Будем считать, что в начальный момент ($t = 0$) задано гармоническое возмущение температуры, а возмущения полей солёности и скорости отсутствуют:

$$\psi_i = 0, \quad S_i = 0, \quad T_i = \varepsilon_T \cos(kx + mz) \quad \text{при } t = 0.$$

Для данных начальных условий скомпенсированный компонент поля термохалинных возмущений определяется выражениями

$$T_r = \frac{\eta}{\eta - 1} \cos \theta, \quad S_r = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta}{\eta - 1} \cos \theta, \quad (34)$$

$$\theta = kx + (m - dkt)z.$$

Возмущения полей плавуности и скорости находятся из системы (33) с начальными условиями $\psi_i = 0$, $\sigma_i = \alpha T_i$. Решение представляется в виде $\sigma = \hat{\sigma}(t) \cos \theta$, $\psi = \hat{\psi}(t) \sin \theta$, где амплитудные функции $\hat{\sigma}(t)$, $\hat{\psi}(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных

уравнений

$$\frac{d}{dt} [k^2 + (m - dkt)^2] \hat{\psi} - gk \hat{\sigma} = 0, \quad \frac{d\hat{\sigma}}{dt} + \frac{N^2}{g} k \hat{\psi} = 0 \quad (35)$$

с условиями $\hat{\psi}(0) = 0$, $\hat{\sigma}(0) = \alpha \varepsilon_T$. Перейдя к безразмерному времени $\tau = dt$, систему (35) можно свести к одному уравнению

$$\frac{d^2 \hat{\xi}}{d\tau^2} + Ri \omega^2(\tau) \hat{\xi} = 0, \quad \omega^2(\tau) = [1 + (\delta - \tau)^2]^{-1},$$

где $\hat{\xi} = [1 + (\delta - \tau)^2] \hat{\psi}$ — безразмерное возмущение завихренности, $\delta = m/k$, $Ri = N^2/d^2$ — число Ричардсона. При $Ri \gg 1$ стандартный метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) приводит к асимптотическому решению [38]:

$$\hat{\xi}(t) = \alpha \varepsilon_T \frac{\sqrt{Ri}}{k \sqrt{\omega(\tau)}} \sin \left(\sqrt{Ri} \int_0^\tau \omega(\tau) d\tau \right), \quad \tau = dt,$$

$$\hat{\sigma}(t) = \alpha \varepsilon_T \sqrt{\frac{\omega(\tau)}{\omega(0)}} \cos \left(\sqrt{Ri} \int_0^\tau \omega(\tau) d\tau \right),$$

справедливому с точностью до слагаемых порядка $O(1/\sqrt{Ri})$. Непосредственно из приведённых выражений следует, что в сдвиговом течении возмущения полей плавуности и скорости затухают как $1/\sqrt{t}$. По аналогичному закону затухает и возмущение плотности. В результирующем решении на больших временах сохраняются, таким образом, только возмущения температуры и солёности (34), компенсирующие друг друга в поле плотности.

5. Аномальные отклики на механические и термические воздействия на поверхности

5.1. Постановка задачи о неоднородных касательных напряжениях и предварительные оценки

В настоящем разделе рассматривается отклик стратифицированной бинарной смеси на неоднородные касательные напряжения на поверхности [39]. Для однокомпонентных жидкостей эта задача хорошо изучена, поскольку она представляет значительный интерес для ряда приложений. Сюда относятся, прежде всего, некоторые известные задачи геофизики — реакция верхнего слоя водоёмов на неоднородные ветровые воздействия [40]. Другой пример относится к некоторым обсуждаемым в последние годы механизмам конвективной неустойчивости двуслойных систем ("антиконвекция" [41]). В таких системах конвективные движения в одной из соприкасающихся сред вызывают на границе раздела горизонтально-неоднородные касательные напряжения. Последние вызывают в смежном по вертикали слое стратифицированной среды течения и термические возмущения, которые могут поддерживать конвекцию в первой среде, осуществляя тем самым положительную обратную связь. Один из важнейших элементов динамики таких систем — отклик стратифицированной среды на неоднородные касательные напряжения на горизонтальной границе. В ещё большей степени это относится к задачам термокапиллярной конвекции [42, 43]. В [39] обращено внимание на нетривиальные особенности реакции двухкомпонентных сред на подобные механические воздействия.

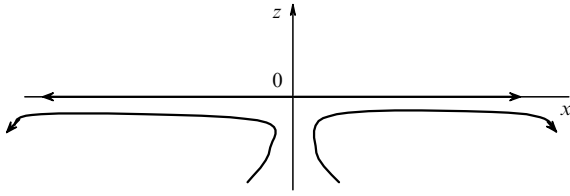


Рис. 7. Геометрия задачи. Жирными стрелками схематически обозначены неоднородные касательные напряжения на горизонтальной поверхности жидкости и линии тока возникающих течений.

Геометрия задачи схематически изображена на рис. 7. Рассматривается полуограниченный слой среды, $z \leq 0$ (ось z направлена вертикально вверх), стратифицированный по температуре и концентрации примеси (соли).

Линеаризованная стационарная система уравнений для возмущений в приближении Буссинеска имеет вид [1–3]

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g(\alpha T - \beta S) \mathbf{e}_z, & \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \gamma_T \mathbf{v} \mathbf{e}_z &= \kappa \nabla^2 T, & \gamma_S \mathbf{v} \mathbf{e}_z &= \chi \nabla^2 S. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь \mathbf{v} — вектор возмущения поля скорости; \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении оси z , ρ_0 — средняя ("отсчётная") плотность среды, ν — кинематический коэффициент вязкости, κ — коэффициент температуропроводности, χ — коэффициент диффузии примеси.

Предполагаем, что на поверхности жидкости $z = 0$ заданы стационарные касательные напряжения, гармонически зависящие от горизонтальной координаты x (для простоты ограничиваемся двумерной задачей на плоскости (x, z)):

$$\rho_0 \nu \frac{\partial u}{\partial z} = E \sin kx \quad \text{при } z = 0, \quad (37)$$

где E — амплитуда напряжения, u — горизонтальная составляющая скорости, k — волновое число. Пренебрегаем деформациями поверхности, так что вертикальная составляющая скорости w на поверхности $z = 0$ обращается в нуль. Для температуры и концентрации примеси на поверхности предполагается выполнение краевых условий третьего рода:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{T}{h_T}, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{S}{h_S} \quad \text{при } z = 0, \quad (38)$$

где неотрицательные величины h_T , h_S — заданные масштабы длины. Полагаем, что вдали от поверхности (при $z \rightarrow -\infty$) все возмущения затухают.

Неоднородные касательные напряжения на поверхности приводят к возникновению в жидкости горизонтально неоднородных течений. Если горизонтальная составляющая скорости u зависит от горизонтальной координаты x , то вследствие неразрывности в жидкости должны возникать вертикальные движения. В стратифицированной среде последние переносят тепло и примесь, так что возникают возмущения температуры и концентрации примеси. Обозначим через H глубину (пока неизвестную) проникновения стационарных возмущений в устойчиво стратифицированную среду. Используя краевое условие (37), можно оценить амплитуду скоро-

сти возникающих горизонтальных течений:

$$\frac{\rho_0 \nu u}{H} \sim E, \quad u \sim \frac{EH}{\rho_0 \nu} \quad (39)$$

(для простоты амплитуду возмущения скорости тоже обозначаем как u). Из неразрывности следует

$$ku \sim \frac{w}{H}, \quad w \sim Hku \sim \frac{EH^2 k}{\rho_0 \nu}. \quad (40)$$

Из уравнения переноса тепла можно оценить амплитуду возникающего температурного возмущения:

$$\gamma_T w \sim \frac{\kappa T}{H^2}, \quad T \sim \frac{\gamma_T w H^2}{\kappa} \sim \frac{\gamma_T k E H^4}{\rho_0 \kappa \nu}. \quad (41)$$

Здесь учтена только "вертикальная" часть лапласиана в уравнении переноса тепла. Это оправдано, поскольку, как нетрудно будет убедиться, вертикальный масштаб рассматриваемых возмущений H не может превышать по порядку величины их горизонтального масштаба $L = 2\pi/k$. По той же причине для ориентировочных оценок можно воспользоваться приближением гидростатики:

$$p' \sim g \rho' H \sim g \rho_0 |\alpha T - \beta S| H. \quad (42)$$

Здесь штрихами обозначены амплитуды возмущений давления и плотности. Кроме того, в горизонтальной проекции уравнения движения можно приравнять по порядку величины основные слагаемые: $\nu \partial^2 u / \partial z^2 \sim \nu u / H^2$ и $(1/\rho_0)(\partial p' / \partial x) \sim g |\alpha T - \beta S| k H$. Отсюда

$$|\alpha T - \beta S| \sim \frac{E}{\rho_0 g k H^2}. \quad (43)$$

В случае однокомпонентной среды (пренебрегая S) из (41) и (43) получаем оценки для глубины проникновения возмущений в среду H и амплитуды T :

$$H \sim \left(\frac{\nu \kappa}{\alpha g \gamma_T k^2} \right)^{1/6}, \quad T \sim \frac{E}{\rho_0 \alpha g k H^2} \sim \frac{E}{\rho_0} \left(\frac{\gamma_T}{\nu \kappa k (\alpha g)^2} \right)^{1/3}. \quad (44)$$

Решение для обычной однокомпонентной среды, стратифицированной только по температуре, действительно приводит к этому результату [40], полученному выше из простых физических соображений (масштабного анализа). Выражаемый соотношением (44) вертикальный масштаб H давно известен (в западной литературе его иногда называют масштабом Линейкина в честь известного российского океанолога [44]). Это глубина, на которую в устойчиво стратифицированную среду проникают линейные стационарные возмущения различной природы [44, 40]. Масштаб H зависит от частоты плавучести (частоты Брента) $N_T = (\alpha g \gamma_T)^{1/2}$. При переходе к двухкомпонентной среде (при учёте вклада примеси в стратификацию плотности) частота плавучести, вообще говоря, изменяется. На первый взгляд, требуется лишь внести соответствующую поправку в эту частоту (или, что то же самое, в стратификацию плотности). Поскольку зависимость (44) от стратификации является слабой ($H \sim N_T^{-1/3}$), то, казалось бы, дополнительный учёт стратификации примеси должен приводить лишь к небольшим количественным поправкам. Однако решение [39] показывает, что в действительности учёт двухкомпонентного характера среды, вообще

говоря, меняет результаты гораздо более радикально. Температурный отклик на механическое воздействие может принципиально отличаться от того, к которому приводит, казалось бы, очевидный масштабный анализ.

5.2. Решение и его анализ

Решение поставленной линейной задачи не представляет принципиальной трудности, но является несколько громоздким. Имеет смысл остановиться на этом решении, поскольку оно приводит к нетривиальным результатам и, кроме того, по аналогичной схеме решается ряд других содержательных задач, рассмотренных ниже.

Для возмущений отыскиваются стационарные решения, гармонически зависящие от горизонтальной координаты x :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= U(z) \sin(kx), & w(x, z) &= W(z) \cos(kx), \\ T(x, z) &= \theta(z) \cos(kx), & S(x, z) &= \vartheta(z) \cos(kx) \end{aligned}$$

и т.д. Исключая из (36) все неизвестные, кроме w , нетрудно получить уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 W = k^6 R W, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{k^4 \nu} \left(\frac{N_T^2}{\kappa} + \frac{N_S^2}{\chi} \right) = \frac{N_T^2}{k^4 \kappa \nu} \left(1 + \frac{\kappa N_S^2}{\chi N_T^2} \right) = \\ &= R_T (1 - \xi) = R_T + \frac{R_S}{\delta}, \end{aligned} \quad (46)$$

$N_T^2 = \alpha g \gamma_T$, $N_S^2 = -\beta g \gamma_S$ — термическая и солёностная составляющие квадрата частоты плавучести $N^2 = N_T^2 + N_S^2$; введённые здесь безразмерные параметры $R_T = N_T^2 / (\nu \kappa k^4)$, $R_S = N_S^2 / (\nu \chi k^4)$ представляют собой аналоги чисел Рэлея;

$$\xi \equiv \frac{\kappa \beta \gamma_S}{\chi \alpha \gamma_T} = -\frac{\kappa}{\chi} \frac{N_S^2}{N_T^2} = -\frac{1}{\delta} \frac{N_S^2}{N_T^2}, \quad \delta \equiv \frac{\chi}{\kappa}. \quad (47)$$

Безразмерный параметр R имеет смысл некоторого обобщённого числа Рэлея. Вместо толщины слоя жидкости (которая в рассматриваемой задаче бесконечна) в нём фигурирует горизонтальный масштаб возмущения k^{-1} . Для рассматриваемой области допустимых значений γ_T и γ_S (область конвективной устойчивости) параметр R неотрицателен.

Ищем решение уравнения (45) в виде линейной комбинации экспонент $\exp(q_i k z)$, где q_i — корни характеристического уравнения

$$(q^2 - 1)^3 = R. \quad (48)$$

Из этих шести экспонент лишь три затухают при $z \rightarrow -\infty$; коэффициенты при остальных следует положить равными нулю. Поэтому решение для вертикальной скорости можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{i=1}^3 C_i \exp(q_i k z), \quad (49)$$

$$q_1 = (1 + R^{1/3})^{1/2}, \quad q_{2,3} = \left[1 + R^{1/3} \exp\left(\pm \frac{2}{3} \pi i\right) \right]^{1/2}. \quad (50)$$

Здесь C_i — постоянные интегрирования, $\operatorname{Re} q_i > 0$. Ниже ограничимся анализом решения в случае $R \gg 1$ (точнее, предполагается выполнение более сильного неравенства $R^{1/6} \gg 1$). Это соответствует ситуациям, в которых устойчивая стратификация плотности является достаточно существенной и в значительной степени определяет структуру возникающих в среде возмущений. В таких случаях можно пренебречь единицей как малой величиной по сравнению с другими слагаемыми в (48), (50):

$$q_1 \approx R^{1/6}, \quad q_{2,3} \approx R^{1/6} \exp\left(\pm \frac{1}{3} \pi i\right), \quad (51)$$

и решение заметно упрощается. В показателях экспонент в (49) (а также в выражениях для u и возмущений давления и плавучести) присутствует большой множитель $R^{1/6}$, так что возмущения упомянутых величин быстро затухают с увеличением глубины (на вертикальных масштабах, много меньших характерного горизонтального масштаба возмущений $L = 2\pi/k$). Иными словами, аспектное отношение (отношение характерного горизонтального масштаба к вертикальному) у этих возмущений много больше единицы. Поэтому в лапласиане скорости в первом уравнении (36) производные по горизонтальной координате x пренебрежимо малы по сравнению с производными по z . Поскольку возмущения вытянуты по горизонтали, характерная вертикальная скорость много меньше горизонтальной. Поэтому в вертикальной проекции упомянутого уравнения динамики лапласианом скорости, как показывает масштабный анализ, можно вообще пренебречь (т.е. ограничиться приближением гидростатики, которое применимо для возмущений, вытянутых по горизонтали). Таким образом, в рассматриваемом приближении две проекции уравнения динамики имеют вид

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g(\alpha T - \beta S)$$

(эти упрощения уже фактически использовались в приведённых выше предварительных оценках).

Сравнивая выражения для возмущений температуры и концентрации примеси с (49), легко увидеть, что в них, вообще говоря, имеется и четвёртая экспонента, $\exp(kz)$. Из уравнений переноса тепла и примеси в (36) нетрудно получить

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma_T}{\kappa k^2} \left[C_T \exp(kz) + \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{q_i^2 - 1} \exp(k q_i z) \right] \cos(kx), \\ S &= \frac{\gamma_S}{\chi k^2} \left[C_S \exp(kz) + \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{q_i^2 - 1} \exp(k q_i z) \right] \cos(kx). \end{aligned}$$

Здесь постоянные интегрирования C_T и C_S , с учётом других уравнений системы (36), связаны между собой:

$$C_S = -\frac{\chi N_T^2}{\kappa N_S^2} C_T. \quad (52)$$

Необходимость выполнения равенства (52) видна, например, из следующих соображений. Только при его выполнении в выражении для плавучести $g(\alpha T - \beta S)$ отсутствует экспонента $\exp(kz)$. Отсутствие этой экспоненты необходимо, поскольку при её наличии в источнике (последнем слагаемом) уравнения динамики (36) она должна присутствовать и в поле скорости v , что про-

тиворечит (49). Указанное различие в структуре решений для полей температуры и солёности, с одной стороны, и плотности, скорости и давления, с другой, принципиально отличает их от решения для обычной однокомпонентной жидкости, приведённого, например, в [40].

Постоянные интегрирования находятся из краевых условий. Не дублируя здесь довольно громоздкого решения, приведённого в [39], остановимся на анализе его свойств.

Решение зависит от ряда безразмерных параметров, в частности, R , ξ , $b_T \equiv kh_T$, $b_S \equiv kh_S$ (два последних обратны соответствующим аналогам числа Био [45]). Особые гидротермодинамические свойства двухкомпонентных сред традиционно связывают с различием значений коэффициентов обмена χ и κ (как это описано в разделе 2). Но в рассматриваемой задаче, а также в ряде других результатов последних лет возможность нетривиальных эффектов обнаружена и при $\delta = 1$. Это отвечает, например, многим геофизическим моделям, в которых используются эффективные коэффициенты турбулентного обмена, примерно одинаковые для всех субстанций, включая температуру и соль.

Зависимость от глубины решения для составляющих скорости (а также возмущений давления и плотности среды) представляет собой линейную комбинацию трёх функций:

$$\exp(2Kz), \exp(Kz) \cos(\sqrt{3}Kz), \exp(Kz) \sin(\sqrt{3}Kz), \quad (53)$$

где $K = kR^{1/6}/2 \sim R^{1/6}/L \gg L^{-1}$. Экспоненты в них убывают с увеличением глубины на масштабах H порядка $L/R^{1/6}$, что в рассматриваемом приближении $R \gg 1$ много меньше характерного горизонтального масштаба возмущений $L \equiv 2\pi/k$. Длина волны синусоид в упомянутых функциях имеет тот же порядок H . Этот результат аналогичен известным решениям для обычных однокомпонентных сред [40, 44], в которых возмущения представляют собой систему расположенных друг над другом циркуляционных ячеек с вертикальным и горизонтальным масштабами H и L соответственно, интенсивность которых экспоненциально затухает с возрастанием глубины с тем же характерным масштабом порядка H .

Итак, возникающие у поверхности циркуляционные ячейки, поля возмущений скорости, давления и плотности вытянуты по горизонтали, что оправдывает использованные выше упрощения, связанные с малостью отношения H/L . Но в выражениях для возмущений температуры и концентрации примеси в случае двухкомпонентных сред, помимо упомянутых слагаемых, вообще говоря, присутствует ещё одно слагаемое, пропорциональное отношению медленно убывающей экспоненте $\exp(kz)$. Это не имеет аналогов в случае однокомпонентной среды и принципиально меняет свойства решений для возникающих температурных возмущений.

Как упоминалось выше, на первый взгляд, основной эффект стратификации примеси должен состоять в изменении стратификации плотности и эффективного числа Рэлея (если не рассматривать специфические эффекты двойной диффузии, связанные с различием коэффициентов обмена для разных субстанций). Поэтому подобные задачи традиционно пытаются упрощать следующим образом [40]. Линейной комбинацией уравнений переноса тепла и примеси в случае одинаковых

значений коэффициентов обмена получают уравнение для плотности (плавучести), в которое входит полная фоновая стратификация плотности. Часто считается, что тем самым задачу удаётся свести к известному случаю однокомпонентной среды. Но дело в том, что для такой переменной, как возмущение плотности, вообще говоря, невозможно корректно поставить краевое условие на поверхности $z = 0$: граничные условия для двух составляющих возмущения плотности (температуры и концентрации примеси) в общем случае различны.

Полученное в [39] решение демонстрирует, что отказ от упомянутого необоснованного упрощения качественно меняет свойства решений. В выражениях для температуры и концентрации примеси дополнительно появляются медленно убывающие с возрастанием глубины экспоненты $\exp(kz)$. Иными словами, возмущения этих субстанций при прочих равных условиях могут проникать в двухкомпонентные среды (сколь угодно гидростатически устойчивые!) гораздо глубже, чем в однокомпонентные, — до глубин порядка горизонтальных масштабов неоднородных напряжений L . В случае однокомпонентной среды ($\gamma_S = 0$) коэффициент при упомянутой медленно убывающей экспоненте в полученном решении обращается в нуль, так же как и в случае одинаковых краевых условий для двух субстанций ($h_T = h_S$). На глубинах, больших H , возмущения температуры и концентрации примеси в значительной степени компенсируют друг друга в поле плотности. Поэтому возмущения плавучести, давления и скорости проникают и в двухкомпонентные среды лишь до глубин порядка H — как и в случае однокомпонентных сред.

Если к устойчивой температурной стратификации добавить устойчивую стратификацию концентрации примеси, то кажется очевидным, что вследствие увеличения устойчивости стратификации плотности возмущения от поверхности при прочих равных условиях должны в меньшей степени проникать в среду. Тем более нетривиален полученный результат: вопреки интуитивным представлениям, указанное усиление устойчивой стратификации, согласно найденному решению, приводит не к убыванию, а к возрастанию глубины проникновения термических возмущений от значений порядка H до L .

С усилением устойчивой стратификации плотности увеличивается значение безразмерного параметра R (эффективного числа Рэлея). При этом несколько возрастают по абсолютной величине показатели входящих в решение экспонент $\exp(Kz)$. Поэтому соответствующие слагаемые в найденном решении быстрее убывают с возрастанием глубины. Это соответствует более быстрому убыванию с возрастанием глубины возмущений скорости, плотности, давления и почти всех слагаемых в выражениях для возмущений температуры и концентрации примеси. И тем не менее появление в решении для T и S дополнительной экспоненты $\exp(kz)$, медленно убывающей с увеличением глубины, может влиять на температурные профили более существенно. Поэтому, несмотря на перечисленные выше очевидные обстоятельства, глубина проникновения температурных возмущений в двухкомпонентную среду увеличивается.

На заимствованном из [39] рис. 8 приводятся примеры безразмерных вертикальных профилей температуры для одно- и двухкомпонентной сред. Во втором случае стратификация плотности более устойчива (число Рэлея R вдвое больше). Однако возмущение в более

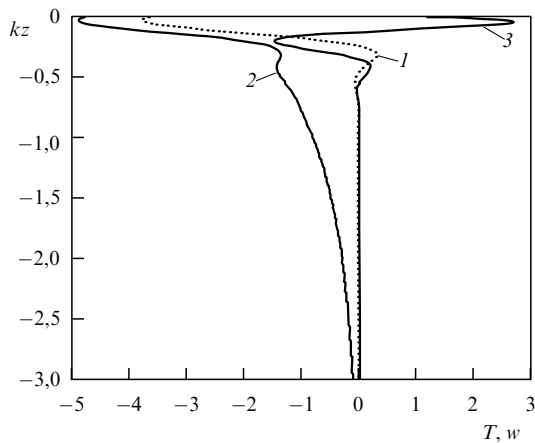


Рис. 8. Примеры безразмерных профилей температурных возмущений на вертикали $x = 0$ при $\chi\gamma_T/\kappa\beta\gamma_S = -1$, $kh_T = 1$, $kh_S = 0,05$ [39]. Кривые 1 и 2 относятся к одно- и двухкомпонентной средам соответственно; кривая 3 — нормированный профиль вертикальной скорости w в случае двухкомпонентной среды.

устойчиво стратифицированной двухкомпонентной среде больше по амплитуде и оно значительно глубже проникает в среду.

Существенное отличие кривой 2 от кривой 1 на рис. 8 обусловлено незначительным, на первый взгляд, изменением фоновой стратификации плотности. Если отношение коэффициентов обмена $\chi/\kappa = 10^{-2}$ (случай солёной морской воды), то в рассмотренном численном примере речь идёт об усилении фоновой устойчивой стратификации плотности всего на 1% за счёт добавления к устойчивой температурной стратификации слабой устойчивой стратификации примеси. Казалось бы, естественно ожидать, что при этом температурный отклик на механическое воздействие, во-первых, уменьшится по амплитуде и глубине проникновения в среду, а во-вторых, эти изменения будут незначительными по абсолютной величине. Результат оказался совершенно иным. В частности, глубина проникновения в среду термических возмущений в рассмотренном примере возросла примерно на порядок.

Для определённости остановимся на ситуации в области положительной дивергенции касательных напряжений (вблизи вертикали $x = 0$), которой соответствуют рис. 7, 8. В указанной области у поверхности возникают расходящиеся горизонтальные течения. Это означает (из соображений неразрывности) возникновение у поверхности восходящих движений (последнее видно как из схематического рис. 7, так и из полученного решения (кривая 3 на рис. 8)). Восходящие движения приносят снизу более холодные и плотные объёмы среды, так что температура в поверхностном слое понижается (см. кривые 1, 2 на рис. 8). В однокомпонентной среде масштабы этого охлаждения (амплитуда и глубина проникновения термического эффекта) выражаются соотношениями (44). Последние определяются балансом между внешним механическим воздействием, приводящим к подъёму среды в рассматриваемой области, и отрицательной плавучестью, приобретаемой поднимающимися (относительно холодными и плотными) объёмами среды.

В двухкомпонентной среде ситуация усложняется: понижение температуры объёма среды, вообще говоря,

не означает уменьшения его плавучести. Последняя зависит также от концентрации примеси. Возмущения этих двух субстанций, вообще говоря, могут взаимно компенсироваться в поле плавучести, что означает возможность их меньшего влияния на динамику. Так в данном случае и происходит: в полученном решении "аномально холодное пятно" у поверхности оказывается и "аномально пресным", так что баланс внешнего механического воздействия и отклонений плавучести не нарушается и в бинарной смеси, несмотря на невыполнение соотношений (44). Вследствие различия краевых условий для двух субстанций (при $h_S \neq h_T$) в данной системе при рассматриваемом механическом воздействии может происходить достаточно эффективное разделение этих субстанций, что и приводит к возникновению термических эффектов аномальной интенсивности.

Силы плавучести в среде, находящейся в поле силы тяжести, обеспечивают горизонтальную ориентацию изопикн (поверхностей равной плотности), за исключением тонкого верхнего слоя толщиной H , в котором этого не происходит из-за внешнего механического воздействия. В обычной однокомпонентной жидкости, где плотность однозначно определяется температурой, это означает и эффективное выравнивание изотерм — отсутствие термических возмущений за пределами упомянутого тонкого слоя. В бинарной смеси, в которой возможно разделение субстанций, выравнивание изопикн не исключает возможности возникновения интенсивных возмущений в поле каждой из этих субстанций, что и происходит в рассмотренном примере.

Выше рассмотрен пример, в котором обе субстанции стратифицированы устойчиво ($\gamma_T > 0$, $\gamma_S < 0$, $\gamma_T/\gamma_S < 0$). Однако если допустить, что одна из них стратифицирована неустойчиво ($\gamma_T/\gamma_S > 0$), то при определённых соотношениях параметров амплитуда возмущений может стремиться к бесконечности. Это соответствует новому механизму конвективной неустойчивости, который анализируется в разделе 6.1.

5.3. Отклики на термические воздействия

По аналогии с механическими напряжениями могут быть рассмотрены и термические неоднородности на верхней границе [27, 46, 47]. Постановка задачи в этом случае отличается от постановки задачи, приведённой в разделе 5.1, лишь верхними граничными условиями (соответственно изменяются и постоянные интегрирования). Один из нетривиальных результатов заключается в том, что в области притока тепла температура может понижаться ("отрицательная теплоёмкость"). Объясняется это тем, что возникающие при нагреве восходящие движения в случае устойчивой температурной стратификации приносят снизу более холодные объёмы среды. В однокомпонентных средах такая отрицательная обратная связь может лишь частично компенсировать нагрев. В двухкомпонентных средах упомянутая обратная связь в принципе может быть настолько сильной, что вопреки интуитивным представлениям приток тепла в итоге приведёт к понижению температуры среды (следует иметь в виду, что речь идёт о "дважды неравновесной" среде — стратифицированной как по температуре, так и по концентрации примеси).

Как и в случае механических воздействий, добавление устойчивой солёностной стратификации к устойчивой температурной может приводить, вопреки интуитив-

ным представлениям, к существенному возрастанию амплитуды и глубины проникновения в воду термических возмущений, связанных с горизонтальными неоднородностями потоков тепла на поверхности воды. Как и в разделе 5.2, это объясняется возможностью взаимной компенсации возмущений двух субстанций в поле плавучести.

6. Новые механизмы конвективной неустойчивости

6.1. Новый тип неустойчивости, обусловленной двойной (дифференциальной) диффузией

П. Веландером была высказана [48] идея о возможности существования неисследованного типа конвективной неустойчивости в двухкомпонентной среде, в частности в морской воде, стратифицированной как по температуре, так и по концентрации примеси (соли). Согласно этой гипотезе, устойчиво стратифицированная по плотности среда может тем не менее терять устойчивость не вследствие различия коэффициентов переноса для тепла и примеси (известный механизм, раздел 2), а из-за различия краевых условий на горизонтальной границе для двух субстанций. Возможность такой неустойчивости представляла бы значительный интерес, поскольку, в отличие от известного механизма ("двойной, дифференциальной диффузии"), эта неустойчивость могла бы реализоваться и при турбулентном обмене, когда эффективные коэффициенты переноса для тепла и соли практически равны, что в гораздо большей степени отвечает, например, реальным условиям в верхнем слое океана. Но упомянутая гипотеза в [48] не доказана. В работе [48] была рассмотрена весьма упрощённая теоретическая схема (невязкая жидкость, сильно идеализированные и жёстко фиксированные краевые условия и др.). Достаточно строгий анализ линейной устойчивости для полуограниченной задачи проведён в [49]. Показано, что, действительно, возможно возникновение неустойчивости, хотя и существенно отличающейся от той, которую предполагал П. Веландер [48]. В частности, обнаружена не колебательная, как ожидалось, а монотонная неустойчивость, причём при нагреве сверху, а не снизу.

Как и в разделе 5, рассматривается полуограниченный слой среды, $z \leq 0$ (ось z направлена вертикально вверх), стратифицированный по температуре и концентрации примеси (для определённости будем говорить о солёной воде) таким образом, что гидростатическое равновесие устойчиво (при этом по отдельности температурная и солёностная стратификации могут быть и неустойчивыми, но суммарная стратификация плотности является устойчивой).

Физическая идея заключается в следующем. Пусть, например, при устойчивой температурной стратификации и неустойчивой стратификации солёности некоторый объём среды вблизи поверхности немного сместился вверх. Поскольку стратификация плотности устойчива, этот объём, казалось бы, должен приобрести отрицательную плавучесть (будучи холоднее окружающей среды) и подвергнуться воздействию возвращающей силы. Но его плавучесть зависит также и от процессов обмена с окружающей средой. Если температура горизонтальной поверхности среды ($z = 0$) фиксирована более жёстко, чем солёность (краевые условия для двух

субстанций различаются), то отклонение температуры в рассматриваемом смещённом объёме среды при прочих равных условиях релаксирует быстрее, чем возмущение солёности. Поскольку последнее возмущение в данном случае вносит положительный вклад в плавучесть рассматриваемого объёма среды и сохраняется лучше, чем отрицательное температурное возмущение, то отсюда следует принципиальная возможность положительной обратной связи. Такой механизм в некоторых отношениях аналогичен неустойчивости, обусловленной двойной диффузией [1, 2], но он связан не с различием коэффициентов обмена, а с различием граничных условий.

По-прежнему рассматривается линеаризованная система уравнений (36). Исследуя возможность возникновения неустойчивости вследствие поверхностных эффектов, будем рассматривать двумерные возмущения, затухающие вдали от поверхности при $z \rightarrow -\infty$. Пренебрегаем деформациями поверхности жидкости, так что вертикальная составляющая скорости w на поверхности $z = 0$ обращается в нуль. Помимо краевых условий (38), предполагается также выполнение условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (54)$$

Поставленная задача устойчивости исследуется по отношению к монотонным возмущениям стандартным методом нормальных мод. Решение ищется в виде

$$w(x, z, t) = W(z) \cos(kx) \exp(\omega t) \quad (55)$$

(для других неизвестных — аналогично). Исключая из исходной системы уравнений все неизвестные, кроме w , при $\omega = 0$ (имея в виду расчёт нейтральных кривых) приходим к уравнению (45). Как упоминалось, рассматриваются ситуации, в которых без учёта поверхностных эффектов система устойчива. Например, неустойчивая солёностная стратификация с избытком компенсируется устойчивой температурной: $\gamma_T > 0$, $\gamma_S > 0$, $N_T^2 > 0$, $N_S^2 < 0$, $N_S^2 + N_T^2 > 0$, $N_T^2/\kappa + N_S^2/\chi > 0$. Последнее неравенство — одно из условий устойчивости по отношению к известным эффектам двойной (дифференциальной) диффузии, способным дестабилизировать среду даже при устойчивой плотностной стратификации [1, 2]. В соответствии с последним условием рассматриваем только положительные значения параметра R .

Ищем решение уравнения (45) в виде линейной комбинации экспонент. С учётом затухания при $z \rightarrow -\infty$ решение для вертикальной скорости представляет собой линейную комбинацию трёх экспонент. В общем случае выражения для корней характеристического уравнения и соответствующий анализ устойчивости несколько громоздки. Однако для того чтобы продемонстрировать основной новый физический результат (возможность возникновения неустойчивости даже при сколь угодно сильной гидростатической устойчивости среды), достаточно рассмотреть асимптотику при $R \gg 1$. В этом случае корни характеристического уравнения выражаются приближённо (см. (51)) и решение для вертикальной скорости можно представить в виде

$$w \approx C_1 \exp(Kz) \times \\ \times [\exp(Kz) - \cos(\sqrt{3}Kz) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}Kz)] \cos(kx), \\ K = \frac{kR^{1/6}}{2}.$$

Здесь C_1 — одна из постоянных интегрирования (две другие выражены с использованием краевых условий для w и u). Зависимость от глубины решения для составляющих скорости (а также возмущений давления и плотности среды), как и в разделе 5.2, представляет собой линейную комбинацию трёх функций (53). Входящие в них экспоненты убывают с возрастанием глубины на масштабах H порядка $K^{-1} \sim L/R^{1/6}$. В рассматриваемом приближении $R \gg 1$ это много меньше характерного горизонтального масштаба возмущений $L \equiv 2\pi/k$. Длина волны синусоид в двух последних упомянутых функциях того же порядка H . В решениях для возмущений температуры и солёности к трём указанным функциям добавляется экспонента $\exp(kz)$, убывающая с возрастанием глубины гораздо медленнее (на масштабах порядка L):

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma_T}{\kappa k^2 R^{1/3}} \left\{ C_2 \exp(kz) + \right. \\ &\quad \left. + C_1 \exp(Kz) [\exp(Kz) + 2 \cos(\sqrt{3}Kz)] \right\} \cos(kx), \\ S &= \frac{\gamma_S}{\chi k^2 R^{1/3}} \left\{ \frac{\chi \gamma_T}{\kappa \beta \gamma_S} C_2 \exp(kz) + \right. \\ &\quad \left. + C_1 \exp(Kz) [\exp(Kz) + 2 \cos(\sqrt{3}Kz)] \right\} \cos(kx), \end{aligned} \quad (56)$$

где C_2 — ещё одна постоянная интегрирования. Используя граничные условия (38), получаем для C_1 и C_2 линейную однородную систему. Обращение в нуль её определителя соответствует порогу монотонной неустойчивости. Приведём результат: области неустойчивости соответствует неравенство

$$\frac{\alpha \gamma_T / \kappa}{\beta \gamma_S / \chi} < \frac{(1 + kh_T)(\varepsilon + kh_S)}{(1 + kh_S)(\varepsilon + kh_T)} = \frac{1 + kh_T}{\varepsilon + kh_T} \frac{\varepsilon + kh_S}{1 + kh_S}, \quad (57)$$

где $\varepsilon = 3/2R^{1/6}$ — безразмерный параметр (малый в рассматриваемой асимптотике). Безразмерные параметры kh_T , kh_S , как упоминалось в разделе 5.2, обратны соответствующим аналогам числа Био. Амплитуды C_1 и C_2 быстро и медленно убывающих с возрастанием глубины слагаемых в выражении для температурного возмущения (56) связаны соотношением

$$C_2 = -2R^{1/6} \frac{\varepsilon + kh_T}{1 + kh_T} C_1 = -\frac{3}{\varepsilon} \frac{\varepsilon + kh_T}{1 + kh_T} C_1, \quad (58)$$

В частности, при $h_T = 0$ (обращении в нуль температурных возмущений на границе) $C_2 = -3C_1$. Это соотношение сильно зависит от краевых условий: дробь в правой части (58) при увеличении h_T начинает существенно возрастать, когда параметр kh_T превышает малую величину ε .

При одинаковых краевых условиях для двух субстанций ($h_T = h_S$) правая часть (57) равна единице. Это соответствует известному критерию неустойчивости, обусловленной двойной диффузией в бинарной смеси [1]. Но если граничные условия для тепла и примеси различаются, то условие (57) может быть гораздо мягче — область неустойчивости может существенно расширяться, так что становится возможным возникновение неустойчивости при сколь угодно устойчивой стратификации плотности (при $R \rightarrow \infty$) даже при одинаковых значениях коэффициентов обмена для тепла и соли.

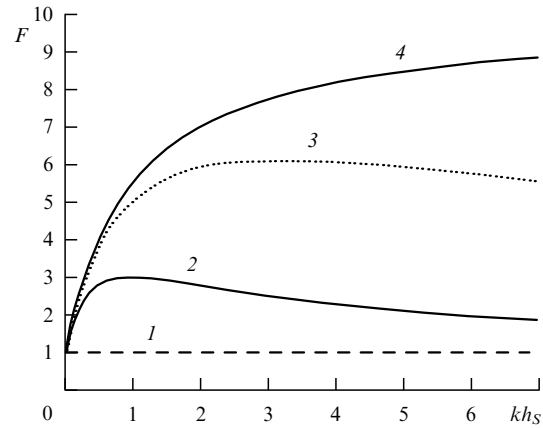


Рис. 9. Правая часть неравенства (57) $F = [(1 + kh_T)/(\varepsilon + kh_T)] \times [(\varepsilon + kh_S)/(1 + kh_S)]$ в зависимости от безразмерного параметра kh_S при $\varepsilon = 0,1$ и различных значениях отношения $\delta \equiv h_T/h_S$. Штриховая прямая 1 соответствует одинаковым краевым условиям для двух субстанций ($\delta = 1$), кривая 2 — $\delta = 0,1$, кривая 3 — $\delta = 0,01$, кривая 4 — $\delta = 0$. Области неустойчивости лежат ниже соответствующих кривых.

Рассмотрим зависимость полученного критерия от масштабов длины h_T и h_S . Первая дробь в правой части (57), которая зависит только от h_T , максимальна (равна ε^{-1}) при $h_T = 0$. Вторая — зависит только от h_S и монотонно возрастает с увеличением этого параметра (стремится к единице). Таким образом, правая часть (57) максимальна (стремится к большой величине ε^{-1}) при $h_T = 0$, $h_S \rightarrow \infty$. Иными словами, наиболее благоприятен для развития неустойчивости предельный случай, в котором для возмущений одной из субстанций выполняются краевые условия 1-го рода (температура на поверхности $z = 0$ жёстко фиксирована), а для другой — 2-го рода. Подобная ситуация и обсуждается в работе [48], где не рассматривается более общий случай краевых условий 3-го рода (38). Как видно из рис. 9, решение в упомянутом предельном случае очень чувствительно к малым изменениям краевых условий (изменениям параметра $\delta \equiv h_T/h_S$).

Наиболее "опасной" моде соответствует значение $k = k_* = (\varepsilon/h_T h_S)^{1/2}$, при котором правая часть (57) достигает максимального значения $[(1 + \sqrt{\varepsilon\delta})/(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\delta})]^2$. Горизонтальный масштаб этой моды несколько превышает среднее геометрическое масштабов h_T и h_S : $k_*^{-1} = R^{1/12} \sqrt{(2/3)h_T h_S}$. Рисунок 9 демонстрирует расширение области неустойчивости при увеличении различия между краевыми условиями для двух субстанций (при уменьшении безразмерного отношения $\delta \equiv h_T/h_S$ от единицы до нуля). По оси абсцисс отложена безразмерная величина kh_S . Область, лежащая ниже прямой 1, соответствует известному механизму неустойчивости, обусловленной двойной диффузией. При $kh_S \rightarrow \infty$ кривая 4 асимптотически приближается к указанному выше значению ε^{-1} .

На рисунке 10 приведён пример вертикальных профилей нейтральных возмущений при весьма устойчивой фоновой стратификации плотности (аналог числа Рэлея $R = 3 \times 10^7$). Рассматривается случай, когда солёность вносит лишь небольшой дестабилизирующий вклад в фоновую устойчивую плотностную стратификацию (порядка $\varepsilon \approx 0,1$), а коэффициенты обмена для двух субстанций одинаковы (например, это могут быть эффективные

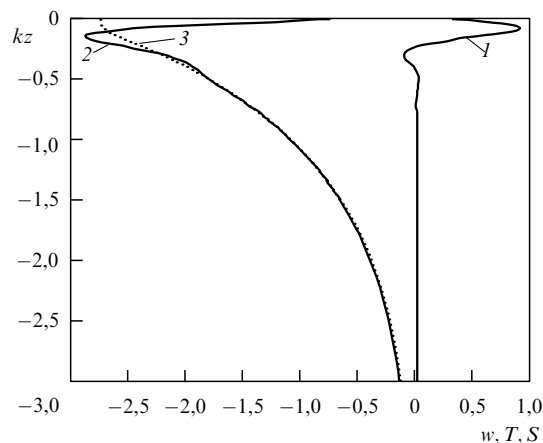


Рис. 10. Пример безразмерных вертикальных профилей нейтральных возмущений при $R = 3 \times 10^7$, $kh_T \ll \varepsilon$, $kh_S \gg 1$, $x = 0$. Вертикальная скорость (кривая 1) нормирована на C_1 ; возмущения температуры и солёности (кривые 2, 3) нормированы на $\gamma_T C_1 / \kappa k^2 R^{1/3}$ и $\alpha \gamma_T C_1 / \beta \kappa k^2 R^{1/3}$ соответственно.

коэффициенты турбулентного обмена). Такой ситуации соответствуют, например, значения параметров: $\alpha = 2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $\beta = 0,76 \times 10^{-3} (\%)^{-1}$ ($1\% = 1000 \text{ ppm}$ (parts per million — частей на миллион)), $\gamma_T = 1,5 \text{ K m}^{-1}$, $\gamma_S = 0,04 (\%) \text{ m}^{-1}$, $\nu = \kappa = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $k = 0,1 \text{ m}^{-1}$. Ранее известные механизмы неустойчивости в этом случае не действуют.

Профили возмущений температуры и солёности на рис. 10 нормированы таким образом, что они соотносятся пропорционально вкладам этих субстанций в возмущения плавучести. Как видно из рисунка, за счёт различия краевых условий для возмущений двух субстанций ($h_T \ll \varepsilon k^{-1}$, $h_S \gg k^{-1}$) отклонение плавучести у поверхности среды оказывается положительным, в соответствии с описанным выше физическим механизмом. Поэтому у поверхности должны возникать восходящие движения (кривая 1). Ниже слоя толщиной порядка $H \sim K^{-1} \sim (kR^{1/6})^{-1} \ll L$ знаки возмущений плавучести и скорости меняются. Нейтральные возмущения в поле скорости представляют собой вертикальную последовательность циркуляционных ячеек, быстро затухающих с глубиной. Так же быстро (на масштабах порядка H) затухают и возмущения плавучести и давления. Но возмущения температуры и солёности по отдельности затухают с увеличением глубины гораздо медленнее (на масштабах порядка горизонтальной длины волны L). Таким образом, хотя обнаруженная неустойчивость связана с краевыми эффектами, возмущения, вообще говоря, могут проникать в среду достаточно глубоко.

Известные ранее механизмы двойной диффузии, как упоминалось в разделе 2, могут приводить к возникновению, помимо монотонной, колебательной неустойчивости (в зависимости прежде всего от соотношения фоновых стратификаций двух субстанций). Не исключено, что аналог подобной области колебательной неустойчивости существует и для рассмотренного здесь механизма. Гипотеза П. Веландера [48] в большей степени относится именно к такому варианту, пока строго не исследованному.

Таким образом, в последние годы обнаружено существование неисследованного ранее типа конвективной неустойчивости гидростатически устойчивых бинарных

смесей. Ранее неустойчивость таких сред считалась возможной только при существенном различии коэффициентов переноса ($\chi \ll \kappa$). Но в [49] вместо известного условия $\chi \gamma_T / (\kappa \beta \gamma_S) < 1$ получено условие (57), которое, вообще говоря, может быть гораздо более мягким. Это означает, что и при равенстве коэффициентов переноса даже весьма слабая неустойчивая стратификация одной из субстанций ($|N_S| \ll |N_T|$) в принципе может дестабилизировать устойчиво стратифицированную по плотности среду.

Рассмотренная выше неустойчивость обусловлена различием краевых условий для двух субстанций на поверхности (горизонтальной границе). Но горизонтальное положение границы не играет принципиальной роли. В [50] проанализирована близкая по характеру неустойчивость у вертикальной границы бинарной смеси. Показано, что даже при сколь угодно сильной гидростатической устойчивости двухкомпонентной среды состояние её механического равновесия в поле силы тяжести тем не менее может быть неустойчивым из-за различия краевых условий для температуры и концентрации примеси на вертикальной границе. В аналитическом виде найдены критерии неустойчивости длинноволновых возмущений у вертикальной поверхности и в вертикальном слое.

6.2. Аномальная термокапиллярная неустойчивость в двухкомпонентных средах

Конвективная неустойчивость, связанная с термокапиллярным эффектом (конвекция Бенара–Марангони), обычно рассматривается только в достаточно тонких слоях жидкости (в воде — до нескольких миллиметров). Принято считать, что в более толстых слоях такая неустойчивость обычно должна быть незаметной на фоне проявлений конвективной неустойчивости Рэлея–Тейлора [1, 3, 42, 51, 52]. Но в двухкомпонентной среде (например, в солёной морской воде) возможны ситуации, в которых при неустойчивой температурной стратификации (нагрев снизу) плотностная стратификация тем не менее гидростатически устойчива благодаря устойчивой стратификации концентрации примеси (соли). Неустойчивость Рэлея–Тейлора при этом подавлена, как и конвекция, обусловленная двойной (дифференциальной) диффузией [1, 2], а термокапиллярная неустойчивость оказывается не только возможной, но и свободной от "конкуренции". В этом случае приобретает смысл исследование такого механизма неустойчивости и в сколь угодно толстых слоях жидкости.

На это было обращено внимание в работе [43], где рассмотрен пример анализа устойчивости полуграниченного объёма воды, стратифицированного как по температуре, так и по солёности. Показано, что, несмотря на устойчивую стратификацию плотности, благодаря термокапиллярному эффекту может существовать неизвестная ранее достаточно обширная область неустойчивости.

Как стало понятно позднее, набор краевых условий для возмущений температуры и концентрации примеси, рассмотренный в задаче [43], оказался (в известной мере случайно) относящимся к весьма специальному, вырожденному, случаю. К такому выводу приводит анализ результатов работы [39], выполненной спустя несколько лет. В [39], как описано в разделе 5, теоретически изучался отклик стратифицированных двухкомпонентных сред на действие горизонтально неоднородных касательных

напряжений на верхней границе. Обнаружена возможность возникновения температурных возмущений, аномально интенсивных по амплитуде и глубине проникновения в гидростатически устойчивую среду; данный эффект связан с двухкомпонентным характером среды. Это даёт основания предполагать возможность аномально интенсивных термокапиллярных эффектов в таких средах даже при устойчивых стратификациях плотности. Но, согласно [39], в обнаруженных в этой работе эффектах принципиальную роль играет различие краевых условий для возмущений температуры и концентрации примеси. В [43] рассмотрение как раз было ограничено случаем одинаковых краевых условий (2-го рода). Тем самым из рассмотрения выпал важный класс явлений, обусловленных различием граничных условий. В [53] проанализирован более общий случай различных краевых условий для разных субстанций и показано, что это действительно может существенно расширять область неустойчивости и приводить к качественному разнообразию структуры возрастающих возмущений.

Исследуется устойчивость состояния покоя полуграниченного объёма двухкомпонентной среды (для определённости речь идёт о воде, стратифицированной по температуре и солёности) с учётом термокапиллярного эффекта на верхней горизонтальной границе. Постановка задачи отличается от таковой в разделе 6.1 одним краевым условием: вместо (54) принимается условие, обычно используемое для описания термокапиллярных явлений [3, 42]:

$$\rho_0 v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\sigma_T \nabla_h T, \quad z = 0. \quad (59)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор горизонтальной скорости, ∇_h — горизонтальный оператор Гамильтона, σ_T — абсолютная величина температурной производной коэффициента поверхностного натяжения. В настоящем разделе рассмотрение не ограничивается двумерными возмущениями.

Задача устойчивости неограниченного слоя двухкомпонентной среды ранее была детально исследована (см., например, [1, 9]). Предполагая значения параметров γ_T , γ_S , соответствующие устойчивому состоянию неограниченного слоя [9], будем исследовать возможность возникновения неустойчивости в связи с поверхностными эффектами. Следовательно, рассматриваем возмущения, затухающие вдаль от поверхности, при $z \rightarrow -\infty$. Как и выше, пренебрегаем деформациями поверхности жидкости. Это соответствует условию $w|_{z=0} = 0$, где w — вертикальная составляющая скорости.

Поставленная задача устойчивости исследуется по отношению к монотонным возмущениям стандартным методом нормальных мод. Ищется решение вида

$$w(x, y, z, t) = W(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \omega t]$$

(для других неизвестных — аналогично). Исключая из исходной системы уравнений все неизвестные, кроме w , при $\omega = 0$ (имея в виду расчёт нейтральных кривых) приходим к уравнению (45), в котором $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Отметим, что, поскольку коэффициент переноса соли χ в воде на два порядка меньше коэффициента температуропроводности κ , положительный параметр R при прочих равных условиях зависит от солёностной стратификации гораздо сильнее, чем от температурной.

Выражение (46) можно переписать в виде

$$R = \frac{N_S^2}{\chi v k^4} \left(1 + \frac{\chi N_T^2}{\kappa N_S^2} \right) = \frac{N_S^2}{\chi v k^4} \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \approx \frac{N_S^2}{\chi v k^4},$$

$$\xi \equiv \frac{\kappa}{\chi} \frac{\beta \gamma_S}{\alpha \gamma_T} = -\frac{\kappa}{\chi} \frac{N_S^2}{N_T^2}.$$

Поскольку устойчивая фоновая стратификация солёности должна, по меньшей мере, компенсировать неустойчивую температурную стратификацию, $\beta \gamma_S \geq \alpha \gamma_T$. Если при этом, как упоминалось, $\kappa \gg \chi$, то $\xi \gg 1$ (в случае солёной воды $\xi \gtrsim 100$).

Стандартным образом отыскивается решение уравнения (45) в виде линейной комбинации трёх экспонент:

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{i=1}^3 C_i \exp(q_i k z), \quad q_1 = (1 + R^{1/3})^{1/2}, \\ q_{2,3} &= \left[1 + R^{1/3} \exp\left(\pm \frac{2}{3} \pi i\right) \right]^{1/2} = q \exp(\pm i \varphi), \\ q &= (1 - R^{1/3} + R^{2/3})^{1/4}, \quad \varphi = \begin{cases} \eta, & 0 \leq R \leq 8, \\ \frac{\pi}{2} + \eta, & R > 8, \end{cases} \\ \eta &= \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{3} R^{1/3}/2}{1 - R^{1/3}/2}, \quad \operatorname{Re} q_i > 0. \end{aligned} \quad (60)$$

В выражениях для амплитуд возмущений температуры и солёности, вообще говоря, присутствует и четвёртая экспонента, $\exp(kz)$. В работе [43] эта экспонента была несущественна, поскольку для рассмотренного там класса краевых условий коэффициенты при ней обращаются в нуль. В рассматриваемом здесь более общем случае слагаемые с этой экспонентой играют важную роль. Дело в том, что при достаточно устойчивых стратификациях плотности, когда параметр R велик, все другие экспоненты в решении быстро затухают с увеличением глубины (на масштабах, много меньших $L = 2\pi/k$). Поэтому наличие в решении упомянутой четвёртой экспоненты качественно меняет структуру возмущений — это означает принципиальную возможность глубокого ($|z| \sim L$) проникновения нейтральных возмущений термокапиллярного происхождения в устойчиво стратифицированную среду.

Из краевых условий вытекает однородная система уравнений для четырёх коэффициентов при экспонентах:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 C_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 \left(q_i^2 - \frac{M}{q_i^2 - 1} \right) C_i - \frac{\kappa k^2 M}{\gamma_T} C_T = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \frac{b_T q_i + 1}{q_i^2 - 1} C_i + \frac{\kappa k^2 (b_T + 1)}{\gamma_T} C_T &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \frac{b_S q_i + 1}{q_i^2 - 1} C_i + \frac{\chi k^2 \alpha (b_S + 1)}{\gamma_S \beta} C_T &= 0, \end{aligned} \quad (61)$$

где M — аналог числа Марангони,

$$M = -\frac{\sigma_T \gamma_T}{\rho_0 \kappa v k^2}.$$

Границе устойчивости соответствует обращение в нуль определителя D системы (61). В [43] аналитически исследован относительно простой предельный слу-

чай, соответствующий краевым условиям 2-го рода $b_T = b_S = \infty$ ($b_T \equiv kh_T$, $b_S \equiv kh_S$). В более общем исследовании [53] результаты [43] используются как тестовый пример.

Использование интегрированной системы компьютерной математики Mathematica (см., например, [54]) позволяет получить общее явное аналитическое выражение определителя системы (61) и в какой-то степени упростить его. Это выражение, зависящее от ряда безразмерных параметров (R , M , ξ , b_T , b_S), в общем случае является весьма громоздким. Приведём пример этого выражения для важного частного случая, в котором на поверхности $z = 0$ для температуры заданы краевые условия 2-го, а для солёности — 1-го рода ($b_T = \infty$, $b_S = 0$):

$$D = \frac{2iq(q^2 + q_1^2 - 2qq_1 \cos \varphi) \sin \varphi}{(q_1^2 - 1)(1 + q^4 - 2q^2 \cos 2\varphi)} \times \\ \times \left\{ M(\xi - 1) + q^2 - 1 + q_1(q_1 + q_1 q^2 - 2q^2 \xi) + \right. \\ \left. + 2q[q_1(1 + q^2) - \xi(q^2 + q_1^2)] \cos \varphi + q(1 - \xi q_1) \cos 2\varphi \right\}. \quad (62)$$

Границе устойчивой области здесь отвечает обращение в нуль выражения в фигурных скобках (другие случаи обращения (62) в нуль или бесконечность тривиальны). В качестве безразмерного критерия неустойчивости удобно рассматривать, например, положительный параметр

$$J = \frac{M}{\sqrt{R}} = -\left(\frac{\chi}{v}\right)^{1/2} \frac{\sigma_T N_T^2}{\rho_0 \alpha g \kappa (N_S^2 + (\chi/\kappa) N_T^2)^{1/2}} = \\ = -\left(\frac{\chi}{v}\right)^{1/2} \frac{\sigma_T N_T^2}{\rho_0 \alpha g \kappa N_S (1 - 1/\xi)^{1/2}}. \quad (63)$$

При $\xi \gg 1$ (случай солёной морской воды)

$$J \approx -\left(\frac{\chi}{v}\right)^{1/2} \frac{\sigma_T N_T^2}{\rho_0 \alpha g \kappa N_S}. \quad (64)$$

Если представить условие неустойчивости в виде

$$J > J_*,$$

где J_* — некоторое критическое значение параметра J , то в сочетании с (63) это условие указывает область неустойчивости на плоскости стратификаций (γ_S, γ_T) или (N_S, N_T),

$$N_S < \left[-\frac{\chi}{\kappa} N_T^2 + \frac{\chi}{v} \left(\frac{\sigma_T}{\rho_0 \alpha g \kappa J_*} \right)^2 N_T^4 \right]^{1/2} \approx -\left(\frac{\chi}{v}\right)^{1/2} \frac{\sigma_T N_T^2}{\rho_0 \alpha g \kappa J_*}$$

(последнее приближённое равенство относится к пределу $\xi \gg 1$). Для случая краевых условий второго рода ($b_T = b_S = \infty$) в [43] получено значение $J_* \approx 5,828$; наиболее "опасной" моде соответствует $R \approx 34$. На рисунке 11 приведены зависимости $J(R)$, которые получаются приравнянием к нулю упомянутого определителя D при различных значениях параметров ξ , b_T , b_S (области неустойчивости находятся над нейтральными кривыми). Кривые 1, 2 близки к соответствующей кривой [43], поскольку отвечают большим значениям b_T , b_S . Их

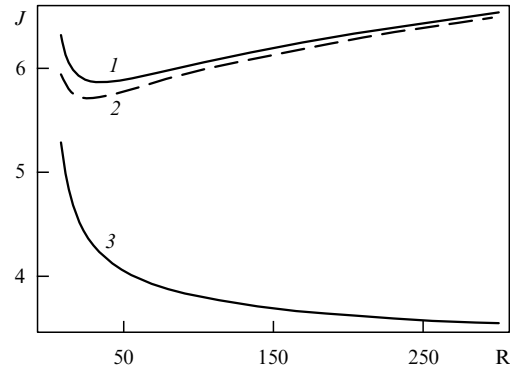


Рис. 11. Нейтральные кривые на плоскости (R, J) при различных краевых условиях и значениях параметра ξ : кривые 1, 2 — $\xi = 80, 150$, $b_T = b_S = 100$; кривая 3 — $\xi = 80$, $b_T = 100$, $b_S = 0,015$.

близость подтверждает слабую зависимость решений от ξ при рассматриваемых здесь значениях этого безразмерного параметра.

При достаточно больших значениях R величины q и q_1 стремятся к $R^{1/6}$, а $\varphi \rightarrow \pi/3$. При $1 \ll R^{1/6} \ll \xi$ выражение в фигурных скобках в (62) обращается в нуль, если

$$M(\xi - 1) \approx -2R^{1/2}(R^{1/6} - 2\xi) - R^{1/2}\xi = R^{1/2}(3\xi - 2R^{1/6}) \quad (65)$$

(сохранены слагаемые с наиболее высокими степенями R). Отсюда следует, что для возмущений соответствующего диапазона длин волн

$$M\xi \approx 3R^{1/2}\xi,$$

так что критическое значение параметра $J \equiv M/\sqrt{R}$ близко к трём. Это согласуется с кривой 3 на рис. 11 (последняя медленно убывает с возрастанием R и, как показывают результаты численного расчёта, переходит через значение 3 при $R \sim 10^5$). Сравнение кривой 3 с кривыми 1, 2 показывает, что в представленном на рис. 11 диапазоне длин волн рассмотренное изменение краевых условий для солёности (переход от условия 2-го рода к условию 1-го рода) приводит к существенному расширению области неустойчивости, как и можно было ожидать, согласно результатам [39].

Этот результат ещё более усиливается, если рассмотреть возмущения больших длин волн (т.е. случай больших, чем рассмотренные выше, значений R). При переходе R через значение $(3\xi/2)^6$ правая часть (65) меняет знак. Иными словами, возмущения таких масштабов,

$$k < \left[\left(\frac{2}{3\xi} \right)^6 \frac{N_S^2}{\chi v} \right]^{1/4}, \quad (66)$$

неустойчивы даже при отсутствии термокапиллярного эффекта. С этим согласуются результаты расчётов, представленные на рис. 12: кривая 1 пересекает ось абсцисс в точке, соответствующей приведённой выше оценке. Отметим возможность сильной зависимости нейтральных кривых от краевых условий. Например, кривые 1 и 2 на рис. 12 относятся к близким, на первый взгляд, значениям b_S , но решения принципиально различаются (кривая 2 возрастает и не пересекает ось абсцисс — неустойчивость при таком граничном усло-

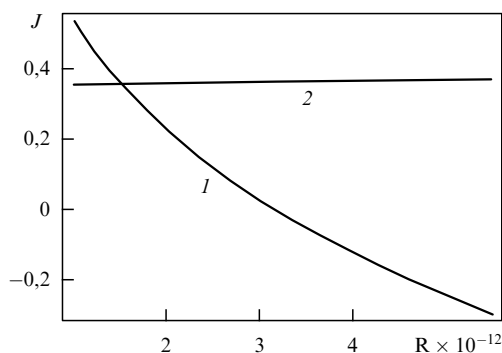


Рис. 12. Нейтральные кривые при больших значениях R , $\xi = 80$, $b_T = 100$ для $b_S = 0$ (кривая 1) и $b_S = 0,015$ (кривая 2); кривая 2 нормирована на 10.

вии возможна только при наличии термокапиллярного эффекта).

Упомянутая выше возможность возникновения неустойчивости при отсутствии термокапиллярного эффекта отвечает ситуации, рассмотренной в разделе 6.1, где показано, что неустойчивость может возникать вследствие различия краевых условий для температуры и примеси. Этот механизм в данном случае усиливает действие термокапиллярного эффекта, расширяет область неустойчивости (а в длинноволновом диапазоне делает принципиально возможной неустойчивость и в отсутствие термокапиллярного эффекта), в то время как более известные механизмы обратной связи (рэлеевский и связанный с дифференциальной диффузией) в рассматриваемом случае, напротив, стабилизируют систему.

Примем характерные для морской воды значения: $\rho_* = 10^3 \text{ кг м}^{-3}$, $\sigma_T = 1,4 \times 10^{-4} \text{ Н м}^{-1} \text{ К}^{-1}$, $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $\kappa = 1,4 \times 10^{-7} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $\chi = 1,5 \times 10^{-9} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, $\alpha = 2 \times 10^{-4} \text{ К}^{-1}$, $\beta = 0,76 \times 10^{-3} (\%)^{-1}$. При $\gamma_S = 0,33 \text{ \% см}^{-1}$ следует $N_S \approx 0,5 \text{ с}^{-1}$; для возникновения неустойчивости при однородных краевых условиях 2-го рода для обеих субстанций необходим неустойчивый фоновый вертикальный градиент температуры порядка 1 К см^{-1} . Этому соответствует $\xi \sim 100$, горизонтальный масштаб нейтральных возмущений и глубина их проникновения в среду при этом порядка нескольких миллиметров. В этом случае в решении несущественны слагаемые с $\exp(kz)$.

Ситуация принципиально меняется, если граничные условия для двух субстанций различны. Например, при $b_T = \infty$, $b_S = 0$ (для возмущений солёности заданы однородные краевые условия первого рода, а для температуры — второго) в решении для длинноволновых возмущений может доминировать слагаемое с $\exp(kz)$. Это означает, что такие возмущения могут иметь аномально большую амплитуду (по сравнению с таковой в случае однокомпонентной среды) и глубоко проникать в среду, несмотря на её сильную устойчивую стратификацию. В таких возмущениях весьма эффективно реализуются положительные обратные связи, описанные в [39, 49], что и приводит к возрастанию амплитуды и существенному расширению областей неустойчивости.

Следует иметь в виду, что длинноволновые возмущения, глубоко проникающие в среду, могут развиваться лишь весьма медленно. Например, условие (66) при приведённых выше значениях параметров отвечает возмущениям с длинами волн и глубинами проникновения в среду, превышающими 1 м. Для развития таких возму-

щений необходимы интервалы времени, достаточные для диффузионного переноса всех субстанций на больших пространственных масштабах, порядка k^{-1} . В тех или иных конкретных задачах такое медленное развитие возмущений практически может быть равносильно отсутствию неустойчивости. Но формально области неустойчивости могут быть очень широкими.

Таким образом, с учётом поверхностных эффектов значительная часть области физических параметров верхнего слоя двухкомпонентной среды, традиционно считающейся устойчивой, строго говоря, является областью неустойчивости. Двухкомпонентный характер среды делает возможным развитие интенсивных возмущений, глубоко проникающих в среду, устойчивую по всем известным критериям.

6.3. Конвективная неустойчивость, обусловленная фоновым течением

Неустойчивость, обусловленная двойной диффузией, описанная в разделе 2, возникает в ситуациях, в которых термическая стратификация среды устойчива, а слабо диффундирующая примесь (например, морская соль) вносит в стратификацию плотности дестабилизирующий вклад. Хотя этот вклад может быть относительно малым, ввиду различия коэффициентов переноса он может быть достаточным для дестабилизации устойчиво стратифицированной (по плотности) системы. В работе [55] обращено внимание на возможность возникновения неустойчивости при качественно иных ситуациях, в частности таких, в которых слабо диффундирующая примесь, напротив, вносит стабилизирующий вклад в стратификацию плотности, причём этот вклад может сильно превышать по абсолютной величине "термическую" неустойчивость. На первый взгляд, такая возможность выглядит ещё более парадоксальной, чем описанный в разделе 2 известный механизм, поскольку вследствие эффектов двойной диффузии медленно диффундирующая примесь при прочих равных условиях обычно гораздо сильнее влияет на конвективную неустойчивость, чем более быстро переносимое тепло (коэффициенты переноса входят в знаменатели соответствующих аналогов числа Рэлея).

В работе [55] рассматриваются ситуации, когда в среде имеет место медленное фоновое движение в направлении силы тяжести. Задачи о конвекции в поле медленных фоновых вертикальных движений представляют интерес, в частности, в связи с известными геофизическими приложениями (см., например, [56, 57]). Конвекция в атмосфере и океане нередко происходит на фоне процессов с существенно более крупными горизонтальными масштабами (например, атмосферных циклонов, антициклонов), для которых характерны средние вертикальные движения, на несколько порядков более медленные, чем те, которые возникают при развитии конвективной неустойчивости. Нетривиально то, что, согласно натурным данным, даже медленное фоновое оседание среды эффективно подавляет конвекцию. Природа подобных эффектов мало исследована.

В [55] рассмотрена следующая модификация классической задачи Рэлея – Бенара о конвективной устойчивости жидкости между двумя горизонтальными пластинами [1, 51]. Предполагается, что в фоновом состоянии задано медленное нисходящее движение. Для простоты принимается, что скорость этого движения, $-W < 0$

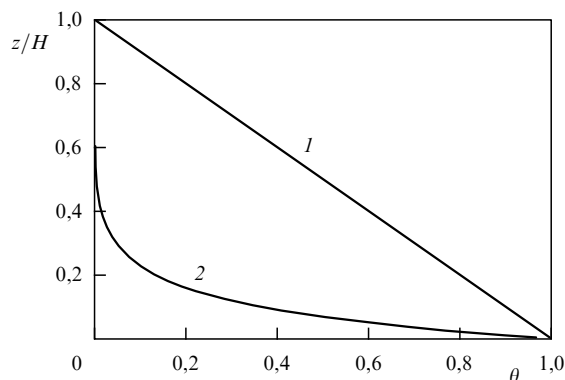


Рис. 13. Пример деформации фонового вертикального профиля температуры нисходящими движениями среды. Кривая 1 — случай отсутствия фонового вертикального движения, кривая 2 — профиль при $\varpi = H/h = 10$.

(W — абсолютная величина скорости), не зависит от вертикальной координаты¹ z , отсчитываемой вверх от нижней границы $z = 0$.

Рассматривается сначала однокомпонентная среда, плотность которой зависит только от температуры T (пренебрегаем эффектами стратификации примеси). На нижней границе считается заданной температура T_d , на верхней — температура T_u , их разность $T_d - T_u$ обозначим через ΔT . В фоновом состоянии уравнение переноса тепла имеет вид

$$-W \frac{dT}{dz} = \kappa \frac{d^2T}{dz^2}. \quad (67)$$

Решение для указанных выше краевых условий можно записать в виде

$$\theta(z) = \frac{\exp(-\zeta) - \exp(-\varpi)}{1 - \exp(-\varpi)}. \quad (68)$$

Здесь $\theta(z) = (T(z) - T_u)/\Delta T$ — безразмерное отклонение температуры, $\zeta = z/h$ — безразмерная высота; $h = \kappa/W$ — масштаб высоты, связанный с фоновым вертикальным движением (при отсутствии которого h обращается в бесконечность); $\varpi = H/h = W(H/\kappa)$ — важнейший безразмерный параметр задачи, H — толщина рассматриваемого горизонтального слоя среды. При отсутствии фонового вертикального движения (в пределе $W \rightarrow 0$, $h \rightarrow \infty$, $\varpi \rightarrow 0$) получаем, как и следовало ожидать, линейный профиль $\theta = 1 - z/H$ — состояние, исследуемое на устойчивость в стандартной задаче Рэлея.

На рисунке 13 представлены вертикальные профили $\theta(z)$ при значениях безразмерного параметра ϖ , равных 0 и 10. Видно, что фоновое оседание среды "прижимает" практически весь вертикальный перепад температур ΔT к нижней границе — он сосредоточен в слое толщиной порядка $h = \kappa/W$. Строгое исследование на устойчивость стационарного состояния с криволинейным профилем

температуры и фоновым оседанием — достаточно трудная и громоздкая задача. Но физические соображения позволяют сделать простую и весьма правдоподобную оценку. Представляется достаточно очевидным, что устойчивость состояния 2 на рис. 13 определяется конвективной устойчивостью нижнего "подслоя" толщиной порядка $h = \kappa/W$, в котором сосредоточен практически весь вертикальный перепад температур ΔT . Эффективное число Рэлея для такого подслоя

$$Ra \sim \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\kappa \nu} \sim \frac{\alpha g \Delta T \kappa^2}{\nu W^3}, \quad (69)$$

где α — термический коэффициент расширения среды.

Из (69) видно, что эффективное число Рэлея сильно зависит от фоновых вертикальных движений. Это и понятно, поскольку от них зависит толщина подслоя, содержащего практически весь перепад температур. Отметим также, что выражение (69) быстро возрастает с увеличением коэффициента температуропроводности κ (классический критерий Рэлея, напротив, убывает при увеличении κ). Обозначим через Ra_{cr} значение эффективного числа Рэлея, соответствующее потере устойчивости. Тогда скорость оседания, достаточная для того, чтобы предотвратить возникновение конвективной неустойчивости, выражается как

$$W_{cr} \sim \left(\frac{\alpha g \Delta T \kappa^2}{\nu Ra_{cr}} \right)^{1/3}. \quad (70)$$

Пусть, например, $\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ (эффективные значения коэффициентов турбулентного обмена, характерные для пограничного слоя атмосферы), $\alpha = 4 \times 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\Delta T = 0,1 \text{ К}$, $Ra_{cr} = 10^3$, тогда $W_{cr} \sim 10^{-2} \text{ м с}^{-1}$. Такое оседание на два-три порядка медленнее характерной скорости конвективных движений в атмосфере. Тем не менее, согласно натурным данным и результатам численного моделирования, такое оседание действительно эффективно подавляет конвекцию.

Если помимо стратификации температуры имеется стратификация медленно диффундирующей примеси (соли), то эта примесь "сдувается" фоновыми движениями более эффективно, чем тепло. Пусть, например, при отсутствии фоновых нисходящих движений среды устойчивая стратификация солёности стабилизирует систему, неустойчиво стратифицированную по температуре. Тогда наличие даже медленных нисходящих движений может приводить к тому, что примесь (в отличие от тепла) "сдувается" и указанный стабилизирующий фактор не действует — система становится неустойчивой. В [55] содержится детальный анализ подобных ситуаций.

Таким образом, фоновые вертикальные движения в некоторых ситуациях могут предотвращать возникновение конвективной неустойчивости, а в двухкомпонентных средах, напротив, приводить к дестабилизации слоя среды. Это происходит вследствие более эффективного "сдувания" фоновыми движениями медленно диффундирующей субстанции. Существенно, что упомянутые эффекты, вообще говоря, возможны даже при очень малых скоростях вертикальных движений.

6.4. Неустойчивость, обусловленная

более быстрым распространением одной из субстанций

В работе [58] было обращено внимание на ещё один механизм конвективной неустойчивости в двухкомпо-

¹ Предположение о постоянстве вертикальной скорости означает отказ от условия непротекания на горизонтальных границах $z = 0$ и $z = H$ для фонового движения. Подобные ситуации можно практически реализовать, прокачивая жидкость в вертикальном направлении через пористые горизонтальные границы. Упомянутое предположение существенно упрощает расчёты.

нентных средах. Пусть на верхней границе такой среды (например, солёной воды) одновременно начали действовать стоки соли и тепла, такие, что суммарный источник плавучести на верхней границе положителен (т.е. источник плавучести, обусловленный распреснением воды, интенсивнее, чем сток плавучести, связанный с её охлаждением). На первый взгляд, такой приток положительной плавучести сверху может только стабилизировать среду. Но в результате того, что тепло диффундирует намного быстрее соли, температурное возмущение распространяется сверху вниз быстрее, чем солёностное, так что механическое воздействие этих возмущений пространственно "разделяется" — оказывается приложенным к различным областям. Как показывают оценки, даже слабое, но распространившееся дальше от границы температурное возмущение может приводить к возникновению конвективной неустойчивости среды, несмотря на движущееся за ним сильное стабилизирующее возмущение солёности. Нетривиально то, что указанный эффект возможен даже тогда, когда стабилизирующий (суммарно) поток плавучести сверху действует на фоне устойчивого состояния среды.

Через несколько лет подобный эффект был экспериментально обнаружен в работе [59], автор которой, по всей видимости, не знал о статье [58]. Как отмечается в [59], под плавающим куском льда "вследствие большого различия коэффициентов молекулярной диффузии толщина теплового пограничного слоя нарастает значительно быстрее толщины концентрационного слоя. В результате часть раствора охлаждается, сохраняя первоначальную солёность, становится более тяжёлой, погружается на большую глубину...". Практически одновременно с [59] вышла работа [60], в которой сообщается о похожих нисходящих движениях, наблюдавшихся под айсбергом в Баренцевом море. Описанный выше физический механизм авторам [60], по-видимому, неизвестен (им приходится предполагать наличие во льду значительного количества твёрдых включений горных пород, создающих эффекты отрицательной плавучести).

6.5. Конвективно-радиационная неустойчивость влажного воздуха

Специфическим примером бинарной смеси является ненасыщенный влажный воздух, плотность которого зависит как от температуры, так и от концентрации водяного пара. Плотность воздуха убывает с повышением как концентрации водяного пара, так и температуры². Для нижних слоёв атмосферы характерны ситуации, в которых температурная стратификация устойчива, а влажность вносит дестабилизирующий вклад в стратификацию плотности. Иными словами, фоновые вертикальные градиенты плотности, обусловленные двумя субстанциями, направлены навстречу друг другу. Согласно материалу, изложенному, например, в разделах 2 и 6.1, именно в таких ситуациях возможны наиболее интересные новые эффекты (потеря устойчивости, "отрицательная теплоёмкость" и др.). В работе [63]

обращено внимание на принципиальную возможность возникновения конвективной неустойчивости (вопреки устойчивой стратификации плотности) и в данном случае. Дело в том, что возмущения температуры и концентрации водяного пара релаксируют, вообще говоря, с разными скоростями. Обмен теплом происходит за счёт как диффузии, так и радиационных эффектов, в то время как обмен влагой — только за счёт диффузии. Таким образом, имеется механизм, качественно напоминающий описанную в разделе 2 двойную диффузию в солёной воде. В [63] приведены оценки, демонстрирующие принципиальную возможность реализации такого механизма неустойчивости.

6.6. Неустойчивость, связанная с фазовыми переходами на границе

В [64, 65] обнаружен и теоретически исследован неизвестный ранее механизм конвективной неустойчивости ненасыщенного влажного воздуха над увлажнённой поверхностью. Физическая идея заключается в следующем. Рассматривается среда (в простейшем случае полубесконечная), стратифицированная так же, как в разделе 6.5: температура с увеличением высоты возрастает, а концентрация водяного пара — убывает; в целом стратификация плотности гидростатически устойчива. Пусть у нижней границы $z = 0$ возникло возмущение в виде медленного нисходящего движения над некоторым участком поверхности. Это движение приносит к поверхности более сухой воздух. В случае влажной поверхности поступление более сухого воздуха означает усиление испарения с поверхности, т.е. некоторое дополнительное охлаждение как соответствующего участка поверхности, так и прилегающего к нему воздуха. В области нисходящих движений, таким образом, образуется "холодное пятно". Обусловленная этим отрицательная плавучесть воздуха у охлаждающегося участка усиливает нисходящие движения — можно говорить о наличии положительной обратной связи. Конечно, в рассматриваемом процессе имеются и отрицательные обратные связи. Например, оседание устойчиво стратифицированной по температуре среды ведёт к возрастанию температуры и плавучести, что в свою очередь препятствует оседанию. Тем не менее подробный анализ задачи устойчивости, проведённый в [64, 65], показывает наличие достаточно широкой и важной для приложений области неустойчивости.

Дополнительная положительная обратная связь появляется, если в смежной по вертикали области ($z < 0$) находится устойчиво стратифицированный слой воды (температура воды убывает с увеличением глубины). Действительно, упоминавшиеся выше нисходящие движения воздуха означают его горизонтальное растекание у поверхности воды $z = 0$. Вследствие наличия касательных напряжений на поверхности в это движение в какой-то мере вовлекается и верхний слой воды. Из неразрывности следует, что на место растекающейся по горизонтали воды снизу должны поступать её соответствующие объёмы. Поступающая снизу вода (более холодная) дополнительно усиливает упоминавшееся выше охлаждение поверхности. Эта положительная обратная связь может быть существенной даже в отсутствие испарения [41] и тем более эффективна вместе с ним. Соответствующая комбинированная задача устойчивости подробно проанализирована в [41, 66, 67].

² В случае воздуха точнее говорить не о температуре, а о потенциальной температуре [61, 62] — более удобной в данном случае переменной, автоматически учитывающей влияние сжимаемости среды. Ниже по умолчанию это подразумевается.

7. Эффекты вращения

В вышеизложенном важнейшую роль играли эффекты стратификации плотности и каждой из субстанций. В геофизической гидродинамике очень существенны, помимо стратификации, эффекты вращения [61, 62]. Для стационарных движений в атмосфере и океане характерно состояние так называемого геострофического баланса, при котором во вращающейся системе отсчёта горизонтальный градиент давления уравновешивается кориолисовой силой — отклоняющей силой вращения Земли. При нарушении этого баланса происходит волновой процесс геострофической адаптации (приспособления), при котором поля давления и скорости эволюционируют и постепенно приходят к некоторому новому состоянию геострофического баланса. Упомянутый процесс играет весьма важную роль в динамике атмосферы и океана, в частности, он является важным источником волновых возмущений. Исследованию этого процесса посвящена обширная литература [61, 62], но его специфика в двухкомпонентных средах (например, при одновременном учёте стратификаций температуры и солёности) до недавнего времени оставалась практически неисследованной. Этот пробел восполнен в недавних работах [68–70].

Учёт вращения заметно расширяет классы нетривиальных эффектов в гидродинамике двухкомпонентных сред. Подробное описание выходит за рамки настоящего обзора. Помимо уже упоминавшихся эффектов "отрицательной теплоёмкости", усиления термических возмущений в среде, устойчивой по всем ранее известным критериям, гидродинамической "памяти" бинарных смесей, следует отдельно упомянуть возможность формирования разрывов (скачков) в распределениях обеих субстанций.

Ранее один из авторов настоящего обзора показал [70] возможность формирования разрывов в процессе нелинейного геострофического приспособления в обычных однокомпонентных средах при достаточно больших амплитудах начальных возмущений. Этот эффект лежит в основе предложенной им теории формирования атмосферных и океанических фронтов [28, 70]. Учёт двухкомпонентного характера среды делает качественные свойства поверхностей разрывов особенно разнообразными. Например, фронтальная поверхность может быть ярко выражена в поле одной из термодинамических компонент (температуры) и слабо — в другой (солёности). Подобные особенности проявляются в наблюдаемых распределениях термогидродинамических полей в океане.

Остановимся подробнее на особенностях динамики крупномасштабных (квазигеострофических) движений стратифицированных вращающихся двухкомпонентных сред [71]. Под такими движениями в геофизической гидродинамике понимают движения с малым числом Россби $Ro = U_0/fL$, где U_0 , L — соответственно характерные значения скорости и горизонтального масштаба, f — параметр Кориолиса (проекция удвоенного вектора угловой скорости вращения на местную вертикаль). В геофизических приложениях для крупномасштабных движений нередко существенна зависимость параметра Кориолиса от широты (от меридиональной координаты y). Эффективно используется так называемое приближение бета-плоскости, в котором $f \approx f_0 + \beta_* y$, где f_0 , β_* —

постоянные. Для квазигеострофических движений горизонтальная скорость $\mathbf{v} = (u, v)$ и возмущение плавучести σ находятся из соотношений геострофического и гидростатического баланса [61, 62]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times \nabla_h \psi, \quad \sigma = \frac{f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (71)$$

где $\psi = p/f_0\rho_*$ — геострофическая функция тока (пропорциональная возмущению давления), ∇_h — оператор горизонтального градиента. Эволюция функции тока при этом описывается уравнением переноса потенциальной завихренности (уравнением Чарни–Обухова)

$$\frac{Dq}{Dt} = 0, \quad q = f_0 + \beta_* y + \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (72)$$

где N^2 — квадрат частоты плавучести, D/Dt — оператор геострофической производной,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_g, \nabla_h) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Стандартный вывод уравнения (72), основанный на асимптотическом разложении решения в ряд по степеням Ro , представлен в монографиях и учебниках [61, 62]. Уравнение (72) лежит в основе так называемой квазигеострофической модели, традиционно привлекаемой для исследования динамики крупномасштабных волн Россби (обусловленных "бета-эффектом" — зависимостью параметра Кориолиса от меридиональной координаты), синоптических вихрей в атмосфере и океане.

Из решения уравнения (72) определяется геострофическая функция тока (возмущение давления) и затем из геострофических соотношений (71) находятся поля скорости и плотности (плавучести). Вопрос об определении полей температуры и солёности остаётся за рамками стандартной квазигеострофической модели, т.е. для полного описания крупномасштабной динамики двухкомпонентной среды одного уравнения (72) недостаточно. Для получения недостающего уравнения запишем уравнения переноса тепла и примеси (3) в квазигеострофическом приближении, пренебрегая нелинейной вертикальной адвекцией и аппроксимируя оператор переноса оператором D/Dt ,

$$\frac{DT}{Dt} + \gamma_T w = 0, \quad \frac{DS}{Dt} + \gamma_S w = 0. \quad (73)$$

Здесь T , S — отклонения от фоновых распределений (штрихи опускаем). Исключение из (73) вертикальной скорости приводит к закону сохранения инварианта

$$\frac{Dr}{Dt} = 0, \quad r = \gamma_S T - \gamma_T S. \quad (74)$$

Как и потенциальная завихренность q , инвариант r сохраняется при нелинейных квазигеострофических движениях, т.е. является лагранжевым инвариантом. В отличие от потенциальной завихренности, этот инвариант играет роль пассивного скаляра (трассера), переносимого геострофическим полем скорости. Уравнение (9), очевидно, представляет собой локальную форму (74).

По известным распределениям плавучести σ и инварианта r , определяемым из уравнений (72), (74), однозначно находятся распределения температуры и солёности (см. раздел 3). Соответствующие распределения делятся на плотностную и скомпенсированную части и находятся по ранее полученным формулам (12), (13).

Полная система квазигеострофических уравнений, включающая распределения температуры и солёности в число определяемых полевых переменных, таким образом, состоит из двух уравнений (72), (74) и простых алгебраических соотношений (12). Эти уравнения образуют замкнутую модель квазигеострофической динамики двухкомпонентной среды.

В рамках сформулированной модели описываются некоторые нетривиальные особенности крупномасштабной динамики двухкомпонентной среды. Рассмотрим сначала некоторые точные решения системы уравнений (72), (74). Функция тока $\psi = \bar{\psi}(y, z)$ — это простейшее стационарное решение уравнения (72), описывающее зональное течение со скоростью $\bar{U}(y, z) = -\partial\bar{\psi}/\partial y$ и распределением плавучести $\bar{\sigma} = (f_0/g) \partial\bar{\psi}/\partial z$. Для этой функции тока уравнение (74) сводится к линейному уравнению переноса $\partial r/\partial t + \bar{U}(y, z) \partial r/\partial x = 0$, решение которого при начальном условии $r|_{t=0} = r_0(x, y, z)$ имеет вид

$$r = r_0(x - \bar{U}(y, z)t, y, z).$$

Важная особенность решения состоит в неограниченном во времени линейном возрастании пространственных производных

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial r_0}{\partial y} - t \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial r_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r_0}{\partial z} - t \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial r_0}{\partial x}.$$

В силу соотношений (12) такое возрастание имеет место и для производных распределений T_r, S_r . Эволюция скомпенсированных распределений температуры и солёности в сдвиговых течениях, таким образом, неизбежно сопровождается обострением пространственных градиентов. С этой особенностью также может быть связана одна из причин формирования скомпенсированных термохалинных фронтов в океане. Подобные фронты выражаются лишь в скачках на профилях распределений температуры и солёности [62].

Интересные особенности двухкомпонентных сред проявляются в задаче о волнах Россби на течении, инициируемых начальным температурным возмущением. В этой задаче исследуется поведение малых возмущений зонального потока с постоянной скоростью $\bar{U} = -\partial\bar{\psi}/\partial y$. Полагая $\psi = \bar{\psi} + \psi'$, $r = r'$, запишем уравнения (72), (74) в линеаризованном виде (штрихи опускаем)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \beta_* \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \quad (76)$$

К уравнению (75) присоединяются граничные условия

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, H,$$

следующие из условия непротекания на твёрдых границах $z = 0, H$ [61, 62]. Для уравнений (75), (76) рассматривается задача с начальными условиями при $t = 0$:

$$\psi = -\varepsilon_\psi A(x) \cos(kx) \cos(\lambda_n z), \quad r = \frac{\gamma_S}{\alpha} \sigma = \frac{\gamma_S f_0}{\alpha g} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

где ε_ψ — малый амплитудный параметр, $\lambda_n = \pi n/H$. С учётом (12) эти условия отвечают ситуации, при которой в начальный момент имеется возмущение температуры в

виде модулированного волнового пакета, а возмущение солёности отсутствует: $S = 0$, $T = \varepsilon_T A(x) \cos(kx) \sin(\lambda_n z)$ при $t = 0$. Здесь $\varepsilon_T = (f_0 \lambda_n / \alpha g) \varepsilon_\psi$, $A(x)$ — огибающая, медленно изменяющаяся на длине волны.

Асимптотическое решение уравнения (75), описывающее распространение пакета волн Россби, можно записать в виде

$$\psi = -\varepsilon_\psi A(x - c_g t) \cos[k(x - ct)] \cos(\lambda_n z),$$

где $c_g = \partial\omega/\partial k$, $c = \omega/k$ — соответственно групповая и фазовая скорости,

$$c_g = \bar{U} + \frac{\beta_*(k^2 - l^2 - L_R^{-2})}{(k^2 + l^2 + L_R^{-2})^2}, \quad c = \bar{U} - \frac{\beta_*}{k^2 + l^2 + L_R^{-2}},$$

$L_R = N/f_0 \lambda_n$ — так называемый бароклиный радиус деформации Россби [61, 62], ω — частота с учётом доплеровской поправки, l — компонента волнового вектора вдоль оси y (для двумерных возмущений $l = 0$). Решение уравнения (76) имеет вид

$$r = \varepsilon_T \gamma_S A(x - \bar{U}t) \cos[k(x - \bar{U}t)] \sin(\lambda_n z).$$

Определяя из (71) плавучесть и используя соотношения (12), для распределений температуры и солёности на уровне $z = H/2$ получим (первая бароклиная мода):

$$\begin{aligned} T &= \frac{\varepsilon_T}{1 - \eta} \left\{ A(x - c_g t) \cos[k(x - ct)] - \right. \\ &\quad \left. - \eta A(x - \bar{U}t) \cos[k(x - \bar{U}t)] \right\}, \\ S &= \varepsilon_T \frac{\alpha}{\beta} \frac{\eta}{1 - \eta} \left\{ A(x - c_g t) \cos[k(x - ct)] - \right. \\ &\quad \left. - A(x - \bar{U}t) \cos[k(x - \bar{U}t)] \right\}, \end{aligned} \quad (77)$$

где параметр η определён выражением (5).

Первое слагаемое в фигурных скобках (77) отвечает плотностной компоненте термохалинного возмущения, второе — скомпенсированной. Важная особенность решения состоит в том, что огибающая плотностной компоненты распространяется с групповой скоростью волн Россби, а скомпенсированной — со скоростью фонового потока. Вследствие специфики дисперсионного соотношения для волн Россби могут различаться не только абсолютные значения, но и знаки этих скоростей. Так, для западного потока, $\bar{U} > 0$ (в геофизической гидродинамике ось абсцисс обычно принимается направленной на восток), групповая скорость направлена на запад, если $k < k_*$, где $k_* \approx L_R^{-1}(1 - 4\bar{U}/U_R)^{1/2}$ при $\bar{U} \ll U_R = \beta_* L_R^2$.

Графики распределения температуры (77) для трёх моментов времени представлены на рис. 14. Форма огибающей задавалась уравнением $A(x) = \exp[-(x/\Delta)^2]$, расчёты проводились при значениях параметров: $\beta_* = 2 \times 10^{-8} \text{ км}^{-1} \text{ с}^{-1}$, $L_R = 50 \text{ км}$ (первая бароклиная мода), $\bar{U} = 1 \text{ см с}^{-1}$, $U_R = 5 \text{ см с}^{-1}$, $kL_R = 0,5$, $\eta = 2$, $\Delta \gg k^{-1}$. Фазовая и групповая скорости волн Россби при этом были направлены на запад: $c = -3 \text{ см с}^{-1}$, $c_g = -1,4 \text{ см с}^{-1}$. Графики наглядно иллюстрируют распад начального пакета на плотностную и скомпенсированную части возмущения, распространяющиеся в противоположных направлениях. Амплитуда скомпенсированной части может значительно превосходить начальную амплитуду ε_T . Подчеркнём, что полученная картина радикально отличается от таковой для одно-

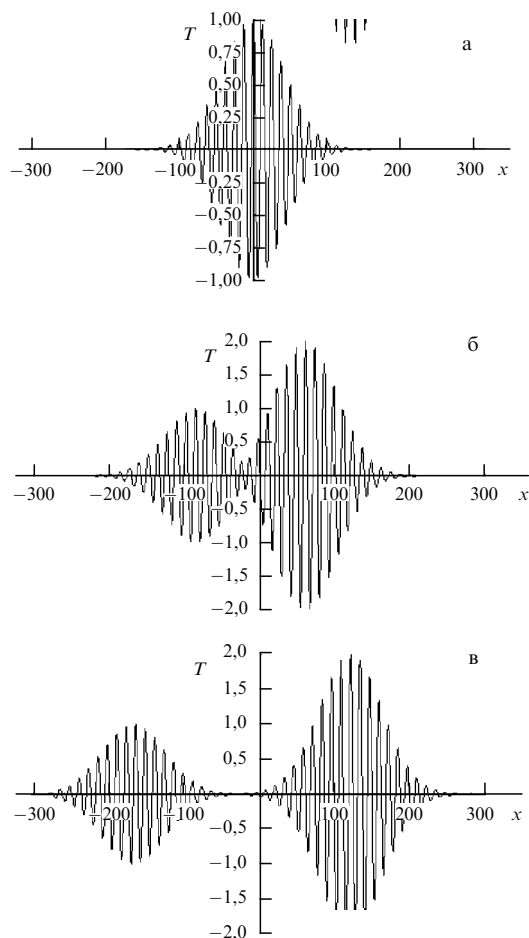


Рис. 14. Распределение температуры (T) для моментов времени $t = 0$ (а), $t = 60$ (б) и $t = 120$ (в). Значения x , t , T нормированы соответственно на L_R , L_R/\bar{U} , ε_T .

компонентных сред, в которых существует только плотностная часть возмущения, перемещающаяся на запад вместе с волной Россби.

8. Плотностные течения, обусловленные двойной диффузией

При наличии в жидкости в поле силы тяжести горизонтальных градиентов плотности в ней возникают течения, называемые гравитационными [1, 18]. Природа таких течений очевидна: различие веса двух соседних вертикальных столбов жидкости означает различие гидростатического давления под этими столбами, т.е. наличие горизонтальных градиентов давления, которые и приводят к возникновению горизонтальных течений. Диссипативные факторы обычно играют негативную роль в развитии этих течений: эти факторы (даже если не учитывать вязкое трение) обычно приводят к выравниванию неоднородностей поля плотности, т.е. к уменьшению основной движущей силы гравитационных течений.

В [72] обращено внимание на возможность возникновения ситуаций, в которых именно диссипативные процессы, напротив, приводят к появлению гравитационных течений в гидростатически равновесной среде, устойчивой по всем известным критериям. Такие ситуации возможны в бинарных смесях, плотность которых зависит как от температуры, так и от концентрации примеси.

При этом существенно различие значений коэффициентов обмена для двух упомянутых субстанций.

В разделе 3 описан эффект "памяти" двухкомпонентных идеальных сред. Внесённые в такую среду термические неоднородности (а также неоднородности концентрации примеси) могут не исчезать в процессе гидростатического приспособления, формируя долгоживущий "след", в котором распределения температуры и примеси компенсируют друг друга в поле плотности. В обычной однокомпонентной жидкости существование такой "памяти", конечно, невозможно: горизонтальное положение изотерм в поле силы тяжести в процессе гидростатического приспособления всегда восстанавливается, даже без учёта диссипативных факторов. Возникновение долгоживущих термохалинных "следов" ранее отмечалось в лабораторных экспериментах (см., например, [21, с. 221]) и по натурным данным в верхнем слое океана [34–36].

Таким образом, имеются простые механизмы, обеспечивающие генерацию и продолжительное существование в морской воде горизонтальных термических неоднородностей, не нарушающих горизонтально однородное распределение плотности, т.е. гидростатически стабильных. С учётом тепло- и массообмена подобные термохалинные "следы" должны постепенно диссипировать. Изучение таких процессов начато в [73]. Но в работе [73] рассмотрены весьма специальные классы возмущений в неограниченной среде, независимые от вертикальной координаты z . В задаче с такой степенью симметрии удаётся выйти за рамки анализа малых возмущений, но "теряются" горизонтальные движения (поскольку $\partial/\partial z \equiv 0$, то из уравнения неразрывности следует отсутствие горизонтальной скорости).

В работе [72] в линейном приближении рассмотрена задача с более общей геометрией. Поскольку тепло и примесь диффундируют с разными скоростями, их взаимная компенсация в поле плотности постепенно становится неполной. Поэтому появляются возмущения плавучести и давления (из гидростатики), следовательно, возникают плотностные течения, обычно медленные по отношению ко времени гидростатического приспособления. Некоторые свойства этих плотностных течений, важных как механизм диссипации распространённых в природе "скомпенсированных" неоднородностей, теоретически исследованы в [72, 73].

9. Аномальное гидродинамическое сопротивление

В работе [74] обращено внимание ещё на один эффект, ранее, видимо, не обсуждавшийся, — возможность существенного влияния двойной диффузии на гидродинамическое сопротивление даже в однородной по плотности среде.

Физическая идея состоит в следующем. Пусть двухкомпонентная жидкость (например, солёная вода) вертикально стратифицирована в поле силы тяжести по обеим субстанциям (температуре и солёности). Стратификация плотности при этом может отсутствовать или быть статически устойчивой. Приложенная к такой жидкости локализованная вертикальная сила (источник количества движения) приводит к возникновению вертикального течения и, следовательно, возмущений обеих упомянутых субстанций вблизи области приложения силы. Из-за различия коэффициентов обмена скорость релаксации отклонений разных субстанций (температуры и солёности) будет различной. Это влияет на соотношение

вкладов упомянутых субстанций в возмущение плотности среды, т.е. на возникающие возмущения плавучести. Последние в свою очередь влияют на вертикальное движение среды относительно области приложения упомянутой силы, что означает изменение эффективного гидродинамического сопротивления среды.

В работе [74] это проиллюстрировано на конкретном примере, для которого благодаря высокой степени симметрии задачи удастся получить точное аналитическое решение системы уравнений гидротермодинамики и переноса примеси (соли) в приближении Буссинеска.

Рассматривается эффект стационарного однородного по вертикали источника вертикального импульса в безграничной среде, стратифицированной как по температуре, так и по концентрации примеси (соли). В других терминах можно говорить о направленной вверх однородно распределённой силе, приложенной вдоль вертикальной оси z . Фоновая стратификация плотности среды предполагается нейтральной или устойчивой, так что ситуации с конвективной неустойчивостью фонового состояния не рассматриваются. Для описания возмущений, вызываемых действием такого вытянутого по вертикали источника, используется цилиндрическая система координат с направленной вертикально вверх осью z , совпадающей с источником. Отыскивается стационарное решение, которое, как и приложенная к жидкости сила, не зависит от координаты z . В рассматриваемом приближении возникающие вблизи источника стационарные возмущения зависят только от радиальной координаты r . Тогда, как следует из уравнения неразрывности (используется приближение Буссинеска), горизонтальные движения отсутствуют. Подробно проанализирована задача, в которой действующая на жидкость направленная вверх сила сосредоточена и однородно распределена непосредственно на оси z . Тогда в рассматриваемом приближении система уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси принимает вид [74]

$$v \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + g(\alpha\theta - \beta S) = -P \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad (78)$$

$$\kappa \left(\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \right) - \gamma_T w = 0, \quad (79)$$

$$\chi \left(\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} \right) - \gamma_S w = 0. \quad (80)$$

Здесь $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака. Постоянная P [$\text{м}^3 \text{с}^{-2}$] представляет собой действующую на среду силу (на единицу длины вдоль вертикальной оси z), отнесённую к средней плотности среды (т.е. нормированную на плотность силу, приходящуюся на единицу длины источника импульса).

Подчеркнём, что полная система уравнений гидротермодинамики и переноса примеси свелась к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (78)–(80) только благодаря симметрии задачи, без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений (но следует оговориться, что от амплитуды, вероятно, зависит устойчивость найденного ниже решения).

Вдали от источника (оси z) все возмущения, очевидно, должны затухать. При $r \rightarrow 0$ существует горизонтальный поток количества движения, определяемый источником в уравнении (78) (т.е. приложенной силой):

$$2\pi r v \frac{dw}{dr} = -P \text{ при } r \rightarrow 0, \quad (81)$$

откуда видно, что w логарифмически расходится вблизи оси. Горизонтальные потоки тепла и примеси при $r = 0$, очевидно, должны обращаться в нуль.

Уравнение (78) связывает вертикальную скорость w с безразмерной плавучестью $b \equiv \alpha\theta - \beta S$. Другое уравнение, связывающее эти величины, можно получить, если взять линейную комбинацию уравнений (79) и (80) с коэффициентами α/κ и $-\beta/\chi$ соответственно:

$$\frac{d^2 b}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{db}{dr} - \frac{N^2}{g\kappa} w = 0. \quad (82)$$

Здесь $N^2 = N_T^2 + N_S^2/\tau$, $\tau = \chi/\kappa$; $N_T^2 = \alpha g \gamma_T$, $N_S^2 = -\beta g \gamma_S$ — квадраты "термической" и "солёностной" частот плавучести (Брента–Вайсяля). Умножив уравнение (78) на $N/g\sqrt{\kappa v}$, а (82) — на мнимую единицу и сложив эти уравнения, сведём систему к одному комплексному уравнению относительно переменной $\eta = (N/g)\sqrt{v/\kappa} w + ib$:

$$\frac{d^2 \eta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} - i \frac{\eta}{L^2} = -\frac{P}{g L^2} \frac{\delta(r)}{2\pi r} = -\frac{\sigma}{L^2} \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad (83)$$

где масштаб длины $L = (v\kappa/N^2)^{1/4}$. Решение уравнения (83) может быть выражено через цилиндрические функции. Приведём результат:

$$w = \frac{P}{2\pi v} \text{ker} \frac{r}{L}, \quad b \equiv \alpha\theta - \beta S = \frac{\sigma}{2\pi L^2} \text{kei} \frac{r}{L},$$

$$\theta = \frac{\gamma_T P}{2\pi N \sqrt{\kappa v}} \text{kei} \frac{r}{L}, \quad S = \frac{\gamma_S P}{2\pi N \tau \sqrt{\kappa v}} \text{kei} \frac{r}{L},$$

где ker , kei — обозначения функций Кельвина [75].

На рисунке 15 представлены нормированные радиальные зависимости вертикальной скорости для различных условий стратификации среды при одинаковой заданной силе. Вдоль источника вертикального импульса формируется восходящая струя с характерной скоростью $P/2\pi v$ (на периферии струи имеет место компенсирующее оседание). Нетривиальная зависимость характерной ширины этой струи L от стратификации субстанций. Кривая 1 соответствует однокомпонентной среде, устойчиво стратифицированной по температуре: $N_S^2 = 0$, $N_T^2 = \Omega^2 > 0$, где Ω — положительная константа с соответствующей размерностью. Кривая 2 относится к случаю нейтрально стратифицированной по плотности среды, в которой устойчивая стратификация соли полностью компенсирует неустойчивую температурную стратификацию: $N_S^2 = -N_T^2 = \Omega^2 > 0$. Радиус r на рисунке нормирован на значение L для этого случая (коэффициент диффузии соли принимается в 100 раз меньшим коэффициента температуропроводности [1] ($\tau = 10^{-2}$)). Кривая 3 также соответствует случаю однородной по плотности среды, но значения γ_T и γ_S приняты в 10 раз большими, чем в предыдущем случае.

При переходе от устойчиво стратифицированной среды к однородной среде, на первый взгляд, можно было бы ожидать, что последняя должна легче вовлекаться в вертикальное движение. Но сравнение кривых 1 и 2 на рис. 15 показывает, что в данном случае дело обстоит наоборот. Нейтрально стратифицированная по плотности среда оказывает большее сопротивление вертикальной силе и меньше вовлекается в вертикальное движение. Это проявление эффекта двойной (дифференциальной) диффузии, о котором идёт речь. Температурные возмущения, вызываемые вертикальными движениями среды,

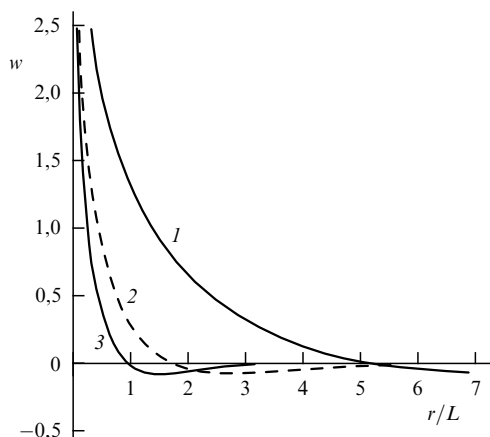


Рис. 15. Радиальные зависимости вертикальной скорости (нормированной на $P/2\pi\nu$) для различных условий стратификации среды.

относительно быстро релаксируют, в то время как долгоживущие возмущения солёности препятствуют вертикальным движениям — это видно из сравнения кривых 2, 3 с кривой 1. При неустойчивой стратификации солёности, как нетрудно убедиться, возможен обратный эффект — аномально низкое гидродинамическое сопротивление (заданный источник количества движения может сильно влиять на вертикальное течение).

10. Конвекция: нелинейное взаимодействие полей двух субстанций

Некоторые классы интересных явлений связаны с конвекцией в двухкомпонентных средах [76–80]. Скорость возникающих конвективных течений зависит от возмущений плавучести, т.е. от линейной комбинации возмущений обеих субстанций (отклонений температуры и концентрации примеси). Возникающие течения в свою очередь переносят эти субстанции — оказывают обратное влияние на возмущения плавучести. При этом становится возможным нелинейное взаимодействие полей двух субстанций. Например, конвекция тепла переносит и примесь, плавучесть которой в свою очередь оказывает обратное влияние на скорость течений, т.е. на перенос тепла, на эволюцию распределения температуры. В ряде задач с достаточно симметричной геометрией это взаимодействие удаётся описать в замкнутом аналитическом виде [73, 76–79]. К таким задачам относятся, например, задачи о плавучих струях и изолированных термиках в бинарных смесях [76, 78].

Одна из разновидностей указанных задач — взаимодействие полей двух субстанций через посредство их влияния на турбулентность [79]. Пусть, например, имеет место турбулентная конвекция между двумя горизонтальными пластинами. Интенсивность турбулентности (её можно описывать в рамках полуэмпирической теории турбулентности, например в терминах эффективного коэффициента турбулентного обмена) зависит от вертикального градиента плотности среды. Этот градиент, как и градиенты обеих субстанций, в свою очередь зависит от турбулентности. Поэтому градиент температуры посредством турбулентного обмена воздействует на перенос примеси, и наоборот. В [79] найдены и проанализированы явные аналитические решения соответствующей нелинейной задачи для одной из относительно простых схем замыкания.

11. Заключение

Итак, относительно простое рассмотрение показывает, что весьма общие гидротермодинамические свойства двухкомпонентных сред могут существенно отличаться от свойств жидкостей, плотность которых зависит только от одной субстанции (температуры). В бинарных смесях возможны неисследованные ранее механизмы конвективной неустойчивости, явления гидродинамической "памяти" и "отрицательной теплоёмкости", формирование разрывов (скачков) температуры, аномальное гидродинамическое сопротивление, специфическое нелинейное взаимодействие полей двух субстанций при конвекции, аномально интенсивные термокапиллярные эффекты и др.

Подобные эффекты связаны, в частности, с возможностью сочетания в двухкомпонентных средах следующих условий:

- неустойчивая температурная стратификация при устойчивой стратификации плотности;

- сильная (как устойчивая, так и неустойчивая) температурная стратификация при слабой стратификации плотности;

- интенсивные вертикальные движения при сильной устойчивой температурной стратификации и связанный с этим интенсивный вертикальный перенос тепла.

В более краткой формулировке: гидростатическая устойчивость определяется вертикальным градиентом плотности, в то время как вертикальные потоки тепла определяются вертикальным градиентом температуры. В двухкомпонентной среде эти градиенты не связаны между собой однозначно, что и делает возможным ряд нетривиальных эффектов.

Авторы реализовали ряд полезных замечаний рецензента, которому они весьма признательны. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-05-01128-а).

Список литературы

1. Turner J S *Buoyancy Effects in Fluids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973) [Тернер Дж *Эффекты плавучести в жидкостях* (М.: Мир, 1977)]
2. Huppert, H E, Turner J S J. *Fluid Mech.* **106** 299 (1981) [Хамперт Г, Тернер Дж, в сб. *Современная гидродинамика. Успехи и проблемы* (Под ред. Дж Бэтчелора, Г Моффата) (М.: Мир, 1984) с. 413]
3. Гершуни Г З, Жуховицкий Е М *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости* (М.: Наука, 1972)
4. Gebhart B et al. *Buoyancy-induced Flows and Transport* (Washington, D.C.: Hemisphere Publ. Corp., 1988) [Гебхарт Б и др. *Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен* Т. 1 (М.: Мир, 1991)]
5. Turner J S *Annu. Rev. Fluid Mech.* **17** 11 (1985)
6. Schmitt R W *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26** 255 (1994)
7. Whitehead J A *Annu. Rev. Fluid Mech.* **27** 89 (1995)
8. Карлин Л Н, Клейков Е Ю, Кутько В П *Мелкомасштабная структура гидрофизических полей верхнего слоя океана* (М.: Гидрометеоиздат, 1988)
9. Walin G *Tellus* **16** 389 (1964)
10. Kaplan E, Kuznetsov E, Steinberg V *Europhys. Lett.* **28** 237 (1994)
11. Kaplan E, Kuznetsov E, Steinberg V *Phys. Rev. E* **50** 3712 (1994)
12. Kramer L et al. *Письма в ЖЭТФ* **61** 887 (1995) [*JETP Lett.* **61** 904 (1995)]
13. Popp S et al. *Physica D* **114** 81 (1998)
14. Козицкий С Б *Приклад. мех. тех. физ.* **41** 56 (2000) [Kozitskii S B *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **41** 429 (2000)]
15. Козицкий С Б *Вестн. Удмуртского ун-в. Мат. Мех. Компьют. науки* (4) 13 (2010)
16. Калашник М В, Ингель Л Х *ЖЭТФ* **130** 161 (2006) [Kalashnik M V, Ingel L Kh *JETP* **103** 141 (2006)]
17. Калашник М В, Ингель Л Х *Докл. РАН* **407** 673 (2006) [Kalashnik M V, Ingel L Kh *Dokl. Earth Sci.* **407** 478 (2006)]
18. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]

19. Монин А С, Федоров К Н, Шевцов В П *ДАН СССР* **208** 833 (1973)
20. Монин А С, Озмидов Р В, Пака В Т *ДАН СССР* **297** 1469 (1987)
21. Алексеев В В, Киселева С В, Лаппо С С *Лабораторные модели физических процессов в атмосфере и океане* (М.: Наука, 2005)
22. Каменкович В М, Монин А С (Отв. ред.) *Океанология. Физика океана Т. 1 Гидрофизика океана* (М.: Наука, 1978)
23. Федоров К Н *Тонкая термохалинная структура вод океана* (Л.: Гидрометеиздат, 1976) [Fedorov K N *The Thermohaline Fine-structure of the Ocean* (Oxford: Pergamon Press, 1978)]
24. Миropольский Ю З *Динамика внутренних гравитационных волн в океане* (Л.: Гидрометеиздат, 1981) [Miropolsky Yu Z *Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001)]
25. Габов С А, Свешников А Г *Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн* (М.: Наука, 1990)
26. Ингель Л Х *Письма в ЖЭТФ* **72** 753 (2000) [Ingel L Kh *JETP Lett.* **72** 527 (2000)]
27. Ингель Л Х *УФН* **172** 691 (2002) [Ingel' L Kh *Phys. Usp.* **45** 637 (2002)]
28. Kalashnik M V *Dyn. Atmos. Oceans* **38** (1) 1 (2004)
29. Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974) [Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)]
30. Монин А С *Теоретические основы геофизической гидродинамики* (М.: Гидрометеиздат, 1988) [Monin A S *Theoretical Geophysical Fluid Dynamics* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990)]
31. Гончаров В П, Павлов В И *Гамильтонова вихревая и волновая динамика* (М.: ГЕОС, 2008)
32. Курганский М В *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **21** 1315 (1985)
33. Bannon P R *J. Atmos. Sci.* **60** 2809 (2003)
34. Rudnick D L, Ferrari R *Science* **283** 526 (1999)
35. Ferrari R, Paparella F *J. Phys. Oceanogr.* **33** 2214 (2003)
36. Laurian A, Lazar A, Reverdin G *J. Phys. Oceanogr.* **39** 1003 (2009)
37. Калашник М В, Ингель Л Х *Океанология* (в печати)
38. Drazin P G *Introduction to Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002) [Дразин Ф *Введение в теорию гидродинамической устойчивости* (М.: Физматлит, 2005)]
39. Ингель Л Х *ЖЭТФ* **129** 213 (2006) [Ingel L Kh *JETP* **102** 188 (2006)]
40. Линейкин П С, Мадерич В С *Теория океанического термоклина* (Л.: Гидрометеиздат, 1982)
41. Ингель Л Х *УФН* **167** 779 (1997) [Ingel' L Kh *Phys. Usp.* **40** 741 (1997)]
42. Андреев В К, Захватаев В Е, Рябицкий Е А *Термокапиллярная неустойчивость* (Новосибирск: Наука, 2000)
43. Ингель Л Х *ЖТФ* **71** (1) 128 (2001) [Ingel' L Kh *Tech. Phys.* **46** 122 (2001)]
44. Stommel H, Veronis G *Tellus* **9** 401 (1957)
45. Карташов Э М *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел* (М.: Высшая школа, 1985)
46. Ингель Л Х *Докл. РАН* **379** 381 (2001) [Ingel' L Kh *Dokl. Earth Sci.* **379** 662 (2001)]
47. Ингель Л Х *Океанология* **41** 502 (2001) [Ingel' L Kh *Oceanology* **41** 478 (2001)]
48. Welander P *Tellus A* **41** 66 (1989)
49. Ингель Л Х *Докл. РАН* **408** 92 (2006) [Ingel L Kh *Dokl. Earth Sci.* **408** 555 (2006)]
50. Ингель Л Х *ЖТФ* **79** (2) 43 (2009) [Ingel L Kh *Tech. Phys.* **54** 204 (2009)]
51. Гетлинг А В *Конвекция Рэлея–Бенара: структуры и динамика* (М.: Эдиториал УРСС, 1999)
52. Монин А С, Красицкий В П *Явления на поверхности океана* (Л.: Гидрометеиздат, 1985)
53. Ингель Л Х *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (5) 33 (2011) [Ingel L Kh *Fluid Dyn.* **46** 699 (2011)]
54. Дьяконов В П *Mathematica* **5.1/5.2/6**. (М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008)
55. Ингель Л Х *ЖЭТФ* **128** 179 (2005) [Ingel L Kh *JETP* **101** 156 (2005)]
56. Somerville R C J, Chen T G J. *Atmos. Sci.* **36** 805 (1979)
57. Глуховская Т Б, Орданович А Е *Метеорол. и гидрол.* (3) 31 (1984)
58. Ингель Л Х *ЖЭТФ* **122** 1019 (2002) [Ingel L Kh *JETP* **95** 878 (2002)]
59. Букреев В И *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **43** 826 (2007) [Bukreev V I *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **43** 762 (2007)]
60. Писаревская Л Г, Волков В А *Проблемы Арктики и Антарктики* (3(77)) 56 (2007)
61. Pedlosky J *Geophysical Fluid Dynamics* (New York: Springer-Verlag, 1987) [Педлоски Дж *Геофизическая гидродинамика Т. 1* (М.: Мир, 1984)]
62. Gill A E *Atmosphere-Ocean Dynamics* (New York: Academic Press, 1982) [Гилл А *Динамика атмосферы и океана Т. 1* (М.: Мир, 1986)]
63. Ингель Л Х *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **39** 718 (2003) [Ingel' L Kh *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **39** 648 (2003)]
64. Перестенко О В, Ингель Л Х *Докл. РАН* **333** 92 (1993)
65. Perestenko O V, Ingel L Kh *Boundary-Layer Meteorol.* **78** 383 (1996)
66. Perestenko O V, Ingel L Kh *J. Fluid Mech.* **287** 1 (1995)
67. Perestenko O V, Ingel L Kh *Meteorol. Atmos. Phys.* **81** 139 (2002)
68. Ингель Л Х, Калашник М В *Океанология* **47** 657 (2007) [Ingel' L Kh, Kalashnik M V *Oceanology* **47** 610 (2007)]
69. Калашник М В, Ингель Л Х *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **42** 554 (2006) [Kalashnik M V, Ingel' L Kh *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **42** 511 (2006)]
70. Калашник М В, Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук (М.: МГУ, 2008)
71. Калашник М В *Океанология* **52** 5 (2012) [Kalashnik M V *Oceanology* **52** 1 (2012)]
72. Ингель Л Х *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **46** 48 (2010) [Ingel' L Kh *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **46** 41 (2010)]
73. Ингель Л Х, Калашник М В *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (6) 13 (2007) [Ingel' L Kh, Kalashnik M V *Fluid Dyn.* **42** 878 (2007)]
74. Ингель Л Х *ЖТФ* **80** (2) 152 (2010) [Ingel L Kh *Tech. Phys.* **55** 309 (2010)]
75. Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (New York: Dover Publ., 1972) [Абрамовиц М, Стилган И (Ред.) *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (М.: Наука, 1979)]
76. Ингель Л Х *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **37** 639 (2001) [Ingel' L Kh *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **37** 592 (2001)]
77. Ингель Л Х *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (3) 92 (2002) [Ingel' L Kh *Fluid Dyn.* **37** 434 (2002)]
78. Ингель Л Х *Инженерно-физический журн.* **75** (1) 82 (2002) [Ingel' L Kh *J. Eng. Phys. Thermophys.* **75** 108 (2002)]
79. Ингель Л Х *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **38** 496 (2002) [Ingel' L Kh *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **38** 440 (2002)]
80. Ингель Л Х *Электрон. журнал "Исследовано в России"* (057) 670 (2010); <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2010/057.pdf>

Nontrivial features in the hydrodynamics of seawater and other stratified solutions

L.Kh. Ingel

Federal State Budget Organization Research and Production Association "Taifun",
ul. Pobedy 4, 249038 Obninsk, Kaluga region, Russian Federation. Tel. +7 (48439) 7 18 21. E-mail: ingeli@obninsk.ru

M.V. Kalashnik

Federal State Budget Organization Research and Production Association "Taifun",
ul. Pobedy 4, 249038 Obninsk, Kaluga region, Russian Federation;
A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,
Pyzhevskii per. 3, 109017 Moscow, Russian Federation. E-mail: kalashnik-obn@mail.ru

The stratified two-component media (for example, salt seawater) can have their general hydrothermodynamic properties widely different from 'usual' fluids, whose density depends on the temperature only. For example, temperature perturbations in such media can build up despite the hydrostatically stable density stratification. In this review, a number of recently discovered physical mechanisms and phenomena are discussed, including, among others, the mechanisms of convective instability, the hydrodynamic 'memory' of two-component media, temperature and admixture concentration jumps formation, the anomalous response of binary mixtures to mechanical and thermal forcing, and the effective 'negative heat capacity'.

PACS numbers: **44.25**, +f, 47.20.Bp, 47.54.Bd, **47.55**, -t, **92.10**, -c

Bibliography — 80 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (4) 379–406 (2012)

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201204b.0379

Received 8 April 2011, revised 22 July 2011

Physics – Uspekhi **55** (4) (2012)