

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания

С.Н. Гурбатов, А.И. Саичев, С.Ф. Шандарин

Рассмотрена полуаналитическая модель образования крупномасштабной структуры Вселенной в масштабах от нескольких мегапарсек до нескольких сотен мегапарсек. Модель служит естественным обобщением приближения Зельдовича, предложенного в 1970 г. Математической основой модели является уравнение Бюргерса при малом или даже исчезающе малом коэффициенте вязкости. Модель даёт естественное объяснение наблюдаемого распределения галактик в масштабах от нескольких мегапарсек до нескольких сотен мегапарсек, напоминающего трёхмерную мозаику или гигантскую космическую паутину. Многие предсказания модели подтверждены современными наблюдениями. Обсуждаются новые теоретические и математические результаты, связанные с моделью Бюргерса, и их приложения к космологии.

PACS numbers: 95.35. + d, 95.36. + x, 98.65. – r

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201203a.0233

Содержание

1. Введение (233).
 2. Основные закономерности формирования крупномасштабной структуры Вселенной (235).
 3. Уравнения газа гравитационно взаимодействующих частиц (238).
 4. Приближение Зельдовича (239).
 - 4.1. Основные уравнения. 4.2. Модифицированное приближение Зельдовича. 4.3. Лагранжева и эйлерова статистики вещества. 4.4. Статистика потоков и распределение плотности вещества. 4.5. Спектр флуктуаций плотности.
 5. Модель слипания (246).
 - 5.1. От приближения Зельдовича — к модели слипания. 5.2. Вычисление плотности в модели слипания, конечная вязкость. 5.3. Общее и асимптотическое решения векторного уравнения Бюргерса. 5.4. Потоки локально взаимодействующих частиц и сингулярное поле плотности. 5.5. Ячеистая структура распределения вещества в модели слипания. 5.6. Динамика частиц внутри разрывов поля скоростей в уравнении Гамильтона – Якоби.
 6. О статистических свойствах потенциальной турбулентности — векторной турбулентности Бюргерса (257).
 7. Заключение (259).
- Список литературы (260).

С.Н. Гурбатов, А.И. Саичев. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, радиофизический факультет, просп. Гагарина 23, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: gurb@rf.unn.ru, saichev@hotmail.com
С.Ф. Шандарин. Department of Physics and Astronomy, University of Kansas, 1082 Malott, 1251 Wescoe Hall Dr. Lawrence, KS 66045-7582, USA
E-mail: sergei@ku.edu

Статья поступила 29 апреля 2011 г.,
после доработки 26 сентября 2011 г.

1. Введение

Сорок лет назад Яков Борисович Зельдович опубликовал две близкие по содержанию статьи, посвящённые проблеме образования структуры Вселенной: одну на русском языке в журнале *Астрофизика* [1], а другую — на английском в европейском журнале *Astronomy and Astrophysics* [2]. Судьба обеих статей сложилась нелегко: на русский вариант (вместе с его английским переводом) было всего 33 ссылки за первые 20 лет после опубликования, а на английский — около 200. В последующие 20 лет картина значительно улучшилась для обеих версий, хотя и неодинаково: на русский вариант сослались 74 раза, а на английский — 950 раз, что вывело английскую статью в число наиболее цитируемых публикаций за 40 лет существования *Astronomy and Astrophysics* [3]. Кроме того, несчётное число авторов просто ссылались на приближение Зельдовича без указания публикации.

В работах [1, 2] Я.Б. Зельдович со свойственной ему непосредственностью и образностью ввёл в космологию кулинарный термин "блины", который приобрёл широкую популярность в космологической литературе. Темой настоящего обзора является развитие идеи блинов и её роль в современном представлении о крупномасштабной структуре Вселенной.

Крупномасштабная структура Вселенной ранее неоднократно обсуждалась в *УФН*, в частности, были опубликованы обзоры с близкими названиями: [4] в 1983 г. и [5] в 1995 г. За прошедшие со времени опубликования обзора [5] более полутора десятилетий положение в космологии в очередной раз существенно изменилось, хотя и не так радикально, как с 1983 г. С точки зрения обсуждаемой темы наиболее значительные изменения состоят в следующем.

• Начиная с 1998 г. наблюдательные данные далёких сверхновых (SN) звёзд с возрастающей достоверностью свидетельствуют об ускорении темпа расширения Вселенной [6, 7].

• Большинство космологов считает, что существование тёмной энергии, которая составляет примерно три четверти общей плотности энергии во Вселенной, способно объяснить эти наблюдения (см., например, [8, 9]).

• Анализ многолетних наблюдений анизотропии реликтового излучения (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, WMAP) [10] совместно с результатами двух завершившихся больших программ по измерению красных смещений галактик — обзора "Красное смещение галактик" на системе 2dF (Two-degree-Field Galaxy Redshift Survey) [11] и Слоуновского цифрового обзора неба (Sloan Digital Sky Survey, SDSS) [12] — позволил значительно повысить точность измерения основных космологических параметров Вселенной.

• Самым надёжным определением постоянной Хаббла, которая характеризует современный темп расширения Вселенной, считается результат анализа данных, полученных с помощью космического телескопа "Хаббл" (Hubble Space Telescope Key Project) [13].

Основные, с точки зрения авторов данного обзора, космологические параметры получены в результате анализа всего многообразия данных, т.е. результатов космической миссии WMAP 5, а также данных наблюдения барионных акустических осцилляций (Baryon Acoustic Oscillations, BAO) и сверхновых [14]. Для удобства читателя космологические параметры приведены в таблице. Мы лишь кратко поясним физический смысл каждого из них. Для более глубокого ознакомления с ролью этих параметров в космологии мы рекомендуем монографию Д.С. Горбунова и В.А. Рубакова [8], две недавние статьи УФН [15, 16], а также статью [14].

Постоянная Хаббла H_0 , определяющая современный темп расширения Вселенной, приведена в виде безразмерного параметра $h = H_0/[100 \text{ км (с Мпк)}^{-1}]$ в соответствии с общепринятой традицией в астрономии и космологии. Параметры Ω_A , Ω_{CDM} , Ω_b , Ω_m — соответственно плотность тёмной энергии, средние плотности тёмного, обычного барионного компонентов и суммы всех нерелятивистских компонентов массы в единицах критической плотности $\rho_c \equiv 3H_0^2/(8\pi G) \approx 1,88 \times 10^{-29} h^2 \text{ г см}^{-3}$, где G — гравитационная постоянная. Параметр n характеризует вид начального спектра возмущений, а σ_8 — его нормировку.

Физическая роль приведённых параметров более подробно будет объяснена ниже. Тем не менее сейчас мы хотим подчеркнуть возросшую точность измерения

космологических параметров, достигшую уровня одного-нескольких процентов. Космологическая модель в целом сейчас установлена значительно точнее, чем пятнадцать лет назад. Следовательно, параметры крупномасштабной структуры и важнейшие аспекты процесса её образования, которые непосредственно зависят от космологической модели, могут быть описаны теорией гораздо точнее.

Масштаб исследования структуры Вселенной также сильно возрос за последние два десятилетия как с наблюдательной, так и с теоретической точек зрения, особенно если численное моделирование отнести к теории, согласно мнению большинства астрономов-наблюдателей. Однако мы полагаем, что численное моделирование ближе по духу к работе физика-экспериментатора. Так же как и в физическом эксперименте, в численных моделях создаются условия более простые, чем в природе, и поэтому поддающиеся более детальному аналитическому исследованию.

Основная задача данного обзора состоит в рассмотрении аналитических моделей, предложенных для описания крупномасштабной структуры Вселенной в масштабах, превышающих 1 Мпк. В частности, большое внимание уделяется сложной геометрии и топологии структуры, первые указания на которую следовали из приближения Зельдовича (ПЗ), но отрицались большинством ведущих теоретиков США и других западных стран на протяжении 15–20 лет [3] после опубликования его работ [1, 2].

Главное отличие настоящего обзора от обзоров [4, 5] состоит в том, что мы рассматриваем так называемую стандартную космологическую модель, или Λ CDM-модель (Lambda-Cold Dark Matter), отличающуюся как от модели HDM (Hot Dark Matter), принятой в [4], так и от модели CDM (Cold Dark Matter), рассмотренной в [5]. Кроме того, обзор [5] основное внимание уделяет центральной структуре вириализованных гало, для профиля плотности которых его авторы предлагают аналитическое решение, тогда как мы сосредоточиваем внимание главным образом на глобальной картине крупномасштабной структуры, т.е. на образовании филаментов и их роли в интеграции гало в единую связную структуру, называемую космической паутиной или космической сетью. Это отнюдь не означает, что свойства гало, состоящих из тёмной материи, менее интересны. Ни в коей мере — существенное различие современных результатов численного моделирования гало, рассматривающего рекордно большое число частиц (4,4 млрд) [17], и предсказаний теории [5] само по себе заслуживает внимательного анализа, однако этот вопрос выходит за рамки нашего обзора и требует обсуждения в отдельной статье.

Сравнительно простой и в то же время эффективной аналитической моделью, описывающей формирование и эволюцию крупномасштабной структуры распределения вещества во Вселенной, является так называемая модель слипания (МС). Основанная на ПЗ модель слипания адекватно, не только качественно, но и количественно, воспроизводит основные геометрические особенности наблюдаемой в космологии структуры распределения галактик на масштабах от 1 Мпк до нескольких сотен мегапарсек.

Модель слипания опирается на уравнение нелинейной диффузии — многомерное уравнение Бюргерса (УБ).

Таблица. Основные космологические параметры

Параметры	Значения
h	$0,705 \pm 0,013$
Ω_A	$0,726 \pm 0,015$
$\Omega_{\text{CDM}} h^2$	$0,113 \pm 0,003$
$\Omega_b h^2$	$0,0227 \pm 0,0006$
$\Omega_m h^2$	$0,136 \pm 0,004$
n	$0,960 \pm 0,013$
σ_8	$0,81 \pm 0,03$

Хорошо известное общее решение УБ позволяет детально изучать поведение крупномасштабной структуры Вселенной в рамках МС. Предельная форма МС, соответствующая исчезающе малому коэффициенту вязкости в УБ, приводит к возникновению нерегулярной мозаичной структуры, которую можно трактовать как геометрический скелет распределения вещества во Вселенной.

Типичные элементы мозаичной структуры — вершины, рёбра, грани и внутренности отдельных ячеек — могут быть ассоциированы с различными типами астрономических объектов, такими как скопления, сверхскопления галактик и расположенные между ними огромные тёмные области, плотность галактик в которых очень низка [18]. В настоящее время вершины мозаичной крупномасштабной структуры соответствуют скоплениям галактик. Квазиодномерные филаменты галактик, отвечающие рёбрам мозаичных структур, — другой типичный элемент крупномасштабной структуры — содержат наибольшую долю массы Вселенной. В то же время грани ячеек являются маломассивными и, кроме того, обладают низким контрастом плотности, поэтому их наиболее трудно обнаружить. Идентификация элементов структуры — непростая и пока не решённая до конца проблема космологии, отсюда — неоднозначность в определении их геометрии и массы. Например, недавний численный расчёт структуры в стандартной модели Вселенной показал, что большая доля массы приходится на рёбра (филаменты) — около 39 %, в вершинах (скоплениях) содержится примерно 28 % массы, внутри ячеек — немногим более 27 % и меньше всего тёмного вещества в гранях — менее 6 % [19]. Следует подчеркнуть, что результаты подобных расчётов, полученные разными группами, существенно зависят от принятого алгоритма распознавания элементов структуры, а также от пространственного разрешения модели и поэтому могут заметно различаться.

Сама эволюция крупномасштабной структуры Вселенной может трактоваться как непрерывный процесс транспорта вещества преимущественно от объектов с большой размерностью к объектам с мозаичной структурой, обладающим меньшей размерностью. Например, вещество из внутренних ячеек мозаичной структуры (трёхмерных объектов) перетекает в её грани (квазидвумерные объекты), а из них — в рёбра и вершины мозаичной структуры. В то же время происходит непрерывное движение самих ячеек, их деформация и поглощение одних ячеек другими [20]. Недавно к аналогичным выводам пришла группа исследователей Принстонского университета США, изучавшая распределение галактик посредством SDSS [21, 22].

Все указанные особенности формирования крупномасштабной структуры Вселенной рассматриваются в настоящем обзоре с помощью разных, общепринятых сейчас подходов: ПЗ, численного моделирования движения N гравитационно взаимодействующих частиц и МС. Результаты указанных подходов анализируются и сравниваются между собой. Показано, что приближение слипания — наиболее удобный аналитический метод исследования крупномасштабной структуры, хорошо согласующийся как с результатами других подходов, так и с космологическими наблюдениями.

Структура обзора следующая. В разделе 2 приводятся основные известные из космологических наблюде-

ний и физических принципов сведения о крупномасштабной структуре распределения вещества во Вселенной. Особое внимание уделяется роли тёмного вещества в формировании крупномасштабной структуры. В разделе 3 формулируются уравнения, описывающие эволюцию неоднородностей плотности вещества во Вселенной. В разделах 4 и 5 описывается в рамках ПЗ и МС, как возникает и эволюционирует структура, в частности, рассматривается, в чём состоит сходство этих подходов и чем они различаются. В разделе 6 кратко обсуждаются статистические характеристики потенциальной турбулентности — векторной турбулентности Бюргерса.

2. Основные закономерности формирования крупномасштабной структуры Вселенной

Мы живём в расширяющейся Вселенной, теоретически предсказанной в 1922 г. российским математиком Фридманом [23]. Американский астроном Хаббл [24] в 1929 г. независимо обнаружил явление расширения Вселенной.

Поясним суть концепции расширяющейся Вселенной на примере идеализированной, всюду однородной, Вселенной. Расширение Вселенной означает, что любые две частицы, находящиеся на расстоянии r друг от друга, разбегаются вдоль прямой, их соединяющей, с относительной скоростью u , подчиняющейся закону Хаббла,

$$u = H(t)r. \quad (1)$$

В реальной, неоднородной, Вселенной закон (1) приближённо справедлив только на больших расстояниях между частицами. Положительный множитель $H(t)$ называют параметром Хаббла, а его значение в настоящую эпоху — постоянной Хаббла. Параметр Хаббла количественно характеризует темп расширения Вселенной. В настоящее время Вселенная расширяется с темпом $H_0 = H(t_0) = 100h \approx 70,5 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$ ($1 \text{ Мпк} = 10^6 \text{ пк} \approx 3260000 \text{ световых лет}$) (см. таблицу).

Вплоть до конца XX в. большинство космологов было уверено, что в прошлом расширение Вселенной являлось более быстрым и монотонно замедлялось с течением времени (т.е. $\dot{H} < 0$ для любых $t > 0$) под действием гравитации. Тем не менее изучение движения очень удалённых сверхновых показало, что недавно (по космологическим меркам) расширение Вселенной стало ускоряться [6, 7].

Ускорение расширения Вселенной может быть довольно просто объяснено, если предположить, что большую часть её вещества образует тёмная энергия — гипотетическая форма энергии, равномерно распределённая во всём пространстве. Хотя физическая природа тёмной энергии остаётся неизвестной, наиболее популярное на данный момент объяснение ускорения расширения Вселенной опирается именно на существование в ней тёмной энергии. Согласно гипотезе, тёмная энергия обладает необычным для известных видов материи уравнением состояния $p = -\varepsilon$, где p — давление, ε — плотность энергии. Именно отрицательность давления вызывает ускоренное расширение Вселенной. Приведённое выше уравнение состояния соответствует простейшей модели тёмной энергии и наличию космологического члена в уравнении Эйнштейна (см., например, [8, 9]).

Несмотря на то что частицы тёмной материи не обнаружены в физических экспериментах, сама гипотеза

тёмной материи достаточно убедительно обоснована. Гравитационное взаимодействие частиц тёмной материи аналогично гравитационному взаимодействию обычной материи. При этом тёмная материя играет определяющую роль в зарождении и эволюции крупномасштабной структуры Вселенной вследствие её доминирования над обычным веществом при формировании сил гравитационного притяжения.

Как известно, Вселенная пронизывается космическим фоновым микроволновым излучением, или реликтовым излучением (РИ), несущим уникальную информацию как о свойствах Вселенной в целом (характеризуемых значениями космологических параметров), так и о малых начальных отклонениях плотности вещества Вселенной от однородной, послуживших "затравкой" наблюдаемой в наше время структуры Вселенной. Из анализа РИ мы знаем, что затравочное поле флуктуаций плотности представляло собой реализацию с большой точностью гауссова случайного поля, спектр мощности которого надёжно выводится из измеренного спектра мощности РИ.

В настоящее время Вселенная, как это видно из рис. 1, неоднородна на масштабах, простирающихся до нескольких сотен мегапарсек.

Заметим, однако, что рис. 1 не вполне передаёт истинное распределение галактик в физическом пространстве, поскольку положения точек, символизирующих галактики, получены пересчётом скоростей галактик в их координаты с помощью закона Хаббла (1). В неоднородной Вселенной истинное соотношение между расстоянием r и наблюдаемой скоростью u_{obs} вдоль луча зрения выражается равенством

$$u_{\text{obs}} = H_0 r + u_p, \quad (2)$$

включающим в себя дополнительное слагаемое u_p , называемое пекулярной скоростью. Последняя связана с неоднородностями плотности распределения вещества во Вселенной, вызванными дополнительным перемещением частиц по сравнению с таковым при однородном

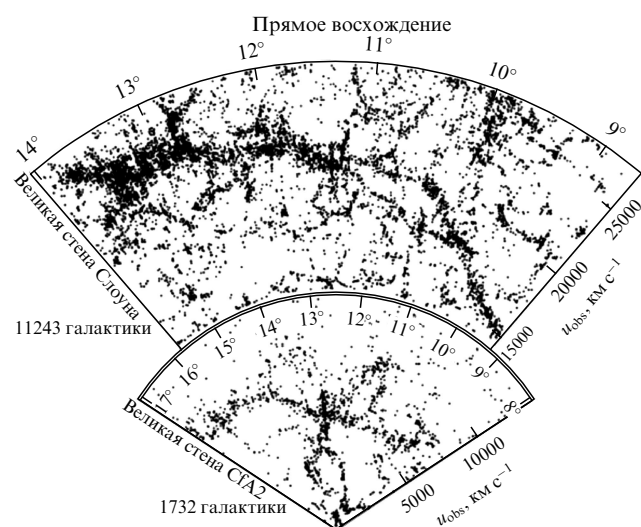


Рис. 1. Два примера распределения галактик во Вселенной. Масштабы, указанные в единицах скорости (км с^{-1}), можно пересчитать в мегапарсеки, пользуясь законом Хаббла (1). Каждая точка соответствует галактике [25, 26].

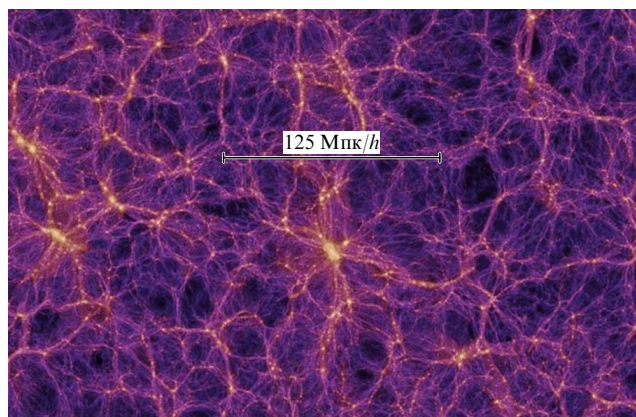


Рис. 2. Поле плотности тёмной материи Вселенной, полученное численным моделированием формирования крупномасштабной структуры Вселенной. Тёмные области на рисунке соответствуют областям с низкой плотностью материи, а светлые — крупномасштабным структурам с высокой плотностью [27].

расширении. Полная радиальная компонента скорости u_{obs} может быть измерена с помощью эффекта Доплера, в то время как вектор пекулярной скорости u_p измерить невозможно. Можно лишь довольно грубо оценить его радиальную компоненту u_r , причём только на пространственных масштабах, не превышающих расстояния до нескольких тысяч ближайших ярких галактик, что слишком мало для изучения геометрии крупномасштабной структуры Вселенной. Поэтому расстояния до галактик, полученные из их наблюдаемых скоростей,

$$r_{\text{est}} = \frac{u_{\text{obs}}}{H_0} = r + \frac{u_p}{H_0},$$

дают только грубую оценку их истинных величин, что вносит серьёзные искажения в геометрию и масштабы реальной физической структуры.

Распределение плотности вещества во Вселенной нагляднее всего иллюстрируется (в некотором статистическом смысле) с помощью численного моделирования в рамках стандартной модели взаимного движения N гравитационно взаимодействующих частиц. Итог такого моделирования представлен на рис. 2 [27].

В космологии понятие крупномасштабной структуры относится к распределению галактик и массы тёмного вещества на масштабах от 1 Мпк до нескольких сотен мегапарсек. На меньших масштабах сильно сказывается дискретность, присущая распределению галактик, в то время как на больших масштабах распределение вещества при увеличении масштаба монотонно стремится к однородному. Наблюдения красного смещения обнаруживают многообразие структур, обычно характеризующихся как нитевидные или мозаичные структуры [21, 22, 25, 26], которые ясно видны на рис. 1 и 2.

Ещё раз подчеркнём, что проблема возникновения крупномасштабной структуры — одна из наиболее важных проблем современной космологии. Многие фундаментальные вопросы физики, космологии и астрономии, такие как объяснение физической природы тёмной материи, измерение угловой анизотропии РИ и определение эпохи формирования галактик, тесно связаны с проблемой возникновения и формирования крупномасштабной структуры Вселенной (см., например, [28–31]).

Современная теория объясняет формирование крупномасштабной структуры Вселенной как следствие возрастания исходно слабых флуктуаций плотности вещества, обусловленных гравитационной неустойчивостью [32, 33]. Предполагается, что исходные флуктуации плотности возникают как флуктуации вакуума на очень ранней стадии эволюции Вселенной, когда Вселенная расширялась экспоненциально, — в эпоху так называемой инфляционной Вселенной (см., например, [9]). Указанные начальные флуктуационные возмущения плотности вещества проходят долгую эволюцию, прежде чем сформируют галактики, скопления и сверхскопления галактик и пустоты между ними. Сама по себе проблема формирования галактик чрезвычайно сложна. Множество сложнейших физических процессов, в частности формирование звёзд и взрывы сверхновых, принципиально важны для понимания формирования галактик. Ниже мы оставим в стороне эти сложные процессы и будем обсуждать распределение вещества во Вселенной в грубом крупномасштабном приближении, согласно которому галактики можно интерпретировать как "элементарные" частицы (материальные точки), что оправдано малостью размеров галактик по сравнению с размерами скоплений и сверхскоплений галактик, не говоря о размерах гигантских тёмных областей.

До тех пор пока флуктуации плотности вещества во Вселенной малы, их эволюция достаточно хорошо описывается линейной теорией гравитационной неустойчивости (см., например, [28–31]). Линейная теория гравитационной неустойчивости довольно проста, и она допускает наглядную интерпретацию. В частности, эта теория предсказывает темп роста возмущений плотности $D(t)$:

$$D(t) \propto \delta, \quad (3)$$

где $\delta \equiv \delta\rho/\bar{\rho}$, $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$ — флуктуации плотности вещества. В линейной теории нормировка функции $D(t)$ является произвольной и поэтому может выбираться из соображений удобства. Напомним, что линейное приближение справедливо до тех пор, пока выполняется неравенство $\sqrt{\langle\delta^2\rangle} \ll 1$.

На нелинейной стадии, $\sqrt{\langle\delta^2\rangle} \gtrsim 1$, развития гравитационной неустойчивости, когда возмущения плотности становятся большими и начинает формироваться крупномасштабная структура (поверхности, нити — филаменты, а также кластеры — компактные скопления галактик), описание эволюции флуктуаций плотности в эйлеровой системе координат значительно усложняется.

Наиболее очевидный способ преодолеть сложность учёта воздействия нелинейной гравитационной неустойчивости на поведение поля плотности вещества состоит в использовании численного моделирования трёхмерного движения N гравитационно взаимодействующих частиц (см., например, [34, 35], а также рис. 2). Целесообразность подобного моделирования согласуется с гипотезой о том, что тёмная материя состоит из частиц, взаимодействующих лишь гравитационно. При моделировании траектория каждой частицы находится численным интегрированием уравнения движения в гравитационном поле остальных частиц. Для имитации безграничности Вселенной начальные условия полагаются периодическими.

Ниже мы обсудим другие подходы к проблеме описания крупномасштабной структуры Вселенной: а

именно, достаточно детально рассмотрим два приближённых аналитических решения некоторых уравнений в частных производных, адекватно описывающих возрастание флуктуаций неоднородной плотности вещества в расширяющейся Вселенной. Первый из этих подходов, предложенный Зельдовичем [1, 2] в 1970 г., известен как приближение Зельдовича. Второй аналитический подход к проблеме описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной [20, 36, 37] основан на векторном УБ, которое является естественным обобщением одномерного УБ [38, 39]. В этом подходе многопотокное движение гравитационно взаимодействующих частиц в областях повышенной плотности, приводящее к локализации вещества, моделируется "вязким" слагаемым в УБ. В предельном случае исчезающе малой вязкости это эквивалентно слипанию частиц, поэтому данный подход часто называют моделью слипания (adhesion model) (см., например, [30, 40–45]).

Предельная версия МС естественным образом описывает характерную мозаичную структуру распределения вещества во Вселенной. Основные элементы "мозаики" в трёхмерном пространстве (вершины, рёбра, грани и внутренности ячеек) могут быть ассоциированы с наблюдаемыми структурами трёхмерного распределения галактик (компактные скопления галактик, филаменты — цепочки галактик, поверхности со сравнительно высокой плотностью галактик и бедные галактиками тёмные области между ними).

Как численное моделирование гравитационного взаимодействия, так и упомянутые выше аналитические подходы требуют задания начальных условий. На линейной стадии развития гравитационной неустойчивости флуктуации плотности предполагаются гауссовыми случайными полями, что с хорошей точностью согласуется с результатами анализа РИ [10]. Статистические свойства подобных полей полностью определяются характерной амплитудой и пространственной спектральной плотностью флуктуаций. В космологии принято нормировать начальный спектр посредством параметра σ_8 (см. таблицу), который соответствует среднеквадратичным флуктуациям поля плотности, сглаженного с помощью топ-хэт-фильтра (top-hat filter) с радиусом $8h^{-1}$ Мпк, согласно допущению, что эволюция описывается линейной теорией. Как амплитуда, так и спектральная плотность начальных возмущений определяются из наблюдений РИ с точностью в несколько процентов. Значения амплитуды температурных флуктуаций позволяют полагать, что характерные пространственные масштабы флуктуаций плотности, достигающих к настоящему времени нелинейной стадии, составляют $\sim 2-6$ Мпк, в зависимости от метода оценки. Эти значения масштабов ($2-6$ Мпк) находятся в хорошем согласии с наблюдениями крупномасштабного распределения галактик. Показатели степенных спектров начальных (линейных) флуктуаций плотности полностью определяются параметрами космологической модели. На больших масштабах (при малых волновых числах k) пространственный спектр плотности ведёт себя как

$$P(k) \propto k^n,$$

где $n \approx 1$ (см. таблицу), — так называемый спектр Зельдовича. С уменьшением масштабов (увеличением волнового числа) пространственный спектр плавно

трансформируется в квазистепенной спектр,

$$P(k) \propto k^{-3} \ln k. \quad (4)$$

Переход спектра возмущений от одного предельного вида к другому полностью определяется космологическими параметрами, и он может быть рассчитан, например, с помощью известного пакета программ для вычисления анизотропии РИ CMBFAST [46]. Как следует из результатов расчётов и наблюдений, в настоящую эпоху в окрестности масштаба нелинейности (формально определяемого уравнением (17) (см. раздел 4.2)) $P(k) \propto k^{-1.5}$.

В этом обзоре мы обсуждаем эволюцию возрастающего решения гравитационной неустойчивости для плотности тёмной материи. Светящиеся объекты Вселенной состоят из барионов, поэтому важно также учитывать динамику барионной составляющей вещества во Вселенной. Однако эта проблема гораздо более сложна, и она не рассматривается в данном обзоре. Мы отсылаем интересующегося читателя к статье [47], в которой предлагается интересное обобщение описываемых здесь моделей в случае учёта динамики барионов.

3. Уравнения газа гравитационно взаимодействующих частиц

Эволюция неоднородных флуктуаций плотности вещества во Вселенной адекватно описывается тремя уравнениями в частных производных: уравнением непрерывности, уравнением Эйлера и уравнением Пуассона (см., например, [28–31]). При этом, для того чтобы исключить однородную составляющую расширяющейся Вселенной, обычно используют сопутствующую (движущуюся вместе с однородным расширением Вселенной) систему координат $\mathbf{x}$ и соответствующую пекулярную скорость $\mathbf{u}_p$:

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{r}} = H(t)\mathbf{r} + \mathbf{u}_p. \quad (5)$$

Монотонно возрастающую функцию $a(t)$, которая учитывает однородное расширение Вселенной, называют масштабным фактором. Если нормировать масштабный фактор на единицу в настоящую эпоху, то $a(t)$ просто выражается через красное смещение z : $a(t) = (1+z)^{-1}$. Соответственно постоянная Хаббла, определённая соотношением (1), выражается как

$$H(t) = \frac{d \ln a(t)}{dt}.$$

Масштабный фактор однозначно определяется параметрами космологической модели. Например, в рамках модели Эйнштейна–де Ситтера в случае $\Lambda = 0$ и $\Omega = 1$ имеем $a(t) \propto t^{2/3}$. В более реалистичной Λ CDM-модели масштабный фактор — несколько более сложная, но известная функция времени [48].

Известно, что в процессе эволюции Вселенной ни пекулярная скорость, ни гравитационный потенциал не достигают релятивистских значений. По этой причине при исследовании эволюции неоднородностей плотности вещества во Вселенной вполне обосновано использование классической механики и ньютоновской гравитации. В указанной выше системе движущихся координат, на языке пекулярных скоростей $\mathbf{u}_p$, уравнение непрерывности и уравнения Эйлера и Пуассона, описывающие

гравитационную неустойчивость в расширяющейся Вселенной, приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla(\rho \mathbf{u}_p) &= -3H\rho, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + \frac{1}{a} (\mathbf{u}_p \nabla) \mathbf{u}_p &= -\frac{1}{a} \nabla \phi - H\mathbf{u}_p, \\ \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi &= 4\pi G(\rho - \bar{\rho}), \end{aligned} \quad (6)$$

где ρ и $\bar{\rho}$ — плотность и средняя плотность вещества, ϕ — гравитационный потенциал, возникающий вследствие неоднородности распределения вещества.

В уравнениях (6) не учитываются силы давления, поскольку мы изучаем среду из частиц, взаимодействующих только гравитационно. В первых двух уравнениях системы (6) — уравнении непрерывности и уравнении Эйлера — слагаемые в правых частях, соответственно $-3H\rho$ и $-H\mathbf{u}_p$, учитывают расширение Вселенной; множитель $1/a$ возникает в результате дифференцирования в сопутствующей системе координат $\mathbf{x}$:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv a(t) \frac{\partial}{\partial r_i}.$$

Систему уравнений (6) следует решать, задавая малые начальные флуктуации плотности и плавное начальное поле скоростей.

Эволюция возмущений плотности, до тех пор пока их амплитуда остаётся малой, описывается в линейном приближении уравнениями, полученными линеаризацией уравнений (6). Точное решение линеаризованных уравнений имеет возрастающую моду, которая и является главным объектом нашего анализа, а также две затухающие моды, которыми в дальнейшем анализе можно пренебречь. Поле скорости возрастающей моды представляет собой потенциальное векторное поле, пропорциональное градиенту линейного гравитационного потенциала:

$$\mathbf{u}_{p, \text{lin}} \propto -\nabla \phi_{\text{lin}}.$$

В линейном режиме пространственная структура возмущений плотности (в сопутствующей системе координат) остаётся неизменной, в то время как амплитуда возмущений плотности пропорциональна возрастающему решению: $\delta \propto D(t)$ (3), определяемому параметрами космологической модели [48]. Например, в модели Эйнштейна–де Ситтера $D(t)$ — монотонно возрастающая функция времени:

$$D(t) \propto a(t) \propto t^{2/3}.$$

Уравнения (6), описывающие эволюцию неоднородностей во Вселенной, становятся более удобными для последующего анализа, если сделать следующую замену переменных, предложенную в [49]:

$$\rho = a^{-3} \eta, \quad \mathbf{u}_p = a \dot{D} \mathbf{v}, \quad \phi = \left(\frac{3}{2} \Omega_0 \dot{a}^2 D \right) \varphi. \quad (7)$$

Кроме того, мы будем использовать переменную D — монотонно возрастающую функцию t — вместо времени t . В итоге результирующая система уравнений прини-

мает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial D} + \nabla(\eta \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial D} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{3}{2} \frac{\Omega_0}{D f^2} (\nabla \varphi + \mathbf{v}), \\ \nabla^2 \varphi &= \frac{\delta}{D}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\Omega_0 = \bar{\rho}_m / \rho_c$ — отношение средней плотности вещества в настоящий момент к её критическому значению $\rho_c = 3H_0^2 / 8\pi G$, $f = d \ln D / d \ln a$, $\delta = (\eta - \bar{\eta}) / \bar{\eta}$, где $\bar{\eta} = \Omega_0 \rho_c = \text{const}$. Смысл перехода к уравнениям (8) состоит в том, что их левые части имеют вид левых частей стандартных уравнений гидродинамики. Как мы увидим, правая часть уравнения Эйлера обнуляется как в ПЗ, так и в МС, а уравнение Пуассона в линейном приближении может быть опущено. Таким образом, открывается возможность распространения многих результатов, полученных в рамках модели турбулентности Бюргерса, на космологическую проблему образования структуры во Вселенной.

Второе уравнение системы (8) становится ещё проще после введения полной производной

$$\frac{d}{dD} \equiv \frac{\partial}{\partial D} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Тогда второе уравнение системы (8) преобразуется в следующее:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dD} = -\frac{3}{2} \frac{\Omega_0}{D f^2} (\nabla \varphi + \mathbf{v}). \quad (9)$$

Легко проверить, что в линейном режиме (справедливом, если $\sqrt{\langle \delta^2 \rangle} \ll 1$) возрастающее решение линеаризованной системы (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{q}, D) &= D \nabla_{\mathbf{q}}^2 \Phi_0(\mathbf{q}), \\ \mathbf{v}(\mathbf{q}, D) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{q}) = -\nabla_{\mathbf{q}} \Phi_0(\mathbf{q}), \\ \varphi(\mathbf{q}, D) &= \Phi_0(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{q}$ — лагранжевы координаты жидкой частицы, $\Phi_0(\mathbf{q})$ — начальное значение гравитационного потенциала. Решение (10) описывает неоднородности плотности, скорости и потенциала в лагранжевой системе координат. Подчеркнём, что в линейном приближении гравитационный потенциал и потенциал плотности имеют одинаковую пространственную структуру, а в принятых безразмерных переменных они просто совпадают. Для того чтобы найти эти поля в эйлеровой системе координат, необходимо решить уравнения для траекторий частиц

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, D) = \mathbf{q} + D \mathbf{v}_0(\mathbf{q}) \quad (11)$$

относительно $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, D)$ и подставить полученное решение в (10). Напомним, что начальное поле потенциала $\Phi_0(\mathbf{q})$ определяется начальными возмущениями плотности в линейном режиме, которые полагаются гауссовым случайным полем. Степенной спектр (см. рис. 5 в разделе 4.2), единственным образом определяющий статистические свойства этого гауссова поля, находят

из наблюдений микроволнового фонового излучения (см., например, [9]).

Хотя в линейном режиме скорость $\mathbf{v}$ остаётся постоянной для каждой частицы вещества, физическая пекулярная скорость $\mathbf{u}_p$ изменяется с течением времени (см. (7)). В возрастающей моде (10) гравитационные силы, пропорциональные $\partial \varphi / \partial x_i$, уравниваются силами сопротивления, возникающими вследствие расширения Вселенной, $H \mathbf{u}_p \propto \mathbf{v}$. Соответственно в линейном приближении правая часть уравнения (9) обращается в нуль, а само уравнение движения в эйлеровом представлении принимает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dD} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial D} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0. \quad (12)$$

Следует отметить, что сведение уравнения Эйлера к уравнению (12), из которого следует решение (11), вызывало в течение многих лет серьёзные недоумения среди ряда космологов и многих наблюдателей. Отсутствие правой части в уравнении Эйлера интерпретировалось как полное пренебрежение гравитацией. И вывод Зельдовича об образовании блинов на нелинейной стадии считался неоправданным распространением результата, справедливого лишь в среде невзаимодействующих частиц, на гравитирующую среду.

4. Приближение Зельдовича

Зельдович нашёл (1970 г.) решения уравнений гравитационной неустойчивости на линейной стадии эволюции и распространил эти решения на начальную нелинейную стадию гравитационной неустойчивости [1, 2] (см. также [30]). Такое распространение предполагает, что начальные возмущения являются достаточно плавными в том смысле, что начальный степенной спектр при $k \rightarrow \infty$ должен спадать быстрее, чем k^{-3} . В реалистичных космологических моделях, например в модели Λ CDM, спектр подчиняется закону $P(k) \propto \ln(k) k^{-3}$ при волновых числах вплоть до очень больших, при которых космологические закономерности уже несправедливы. Следовательно, ПЗ должно быть модифицировано, чтобы быть применимым на масштабах формирования скоплений и суперскоплений галактик. Возможности такой модификации обсуждаются в разделе 4.2.

4.1. Основные уравнения

Приближение Зельдовича может быть наглядно интерпретировано как отображение, определённое соотношениями (11), из лагранжева пространства $L\{\mathbf{q}\}$ в эйлерово пространство $E\{\mathbf{x}\}$. Иллюстрация указанного отображения для четырёх стадий эволюции поля плотности дана на рис. 3. Стадии помечены значением параметра $\sigma = \langle \delta_{\text{lin}}^2 \rangle^{1/2}$, где δ_{lin} — нормированные флуктуации плотности (так называемый контраст плотности),

$$\delta_{\text{lin}} \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} = \frac{\eta(\mathbf{x}, D) - \bar{\eta}}{\bar{\eta}}. \quad (13)$$

Для удобства параметр σ вычисляется в рамках линейной теории, где $\sigma \propto D(t)$.

В двумерном случае уравнения ПЗ для скорости эквивалентны уравнениям для углов наклона волнового фронта и интенсивности оптической волны за фазовым экраном. При этом переменная $D(t)$ играет роль расстоя-

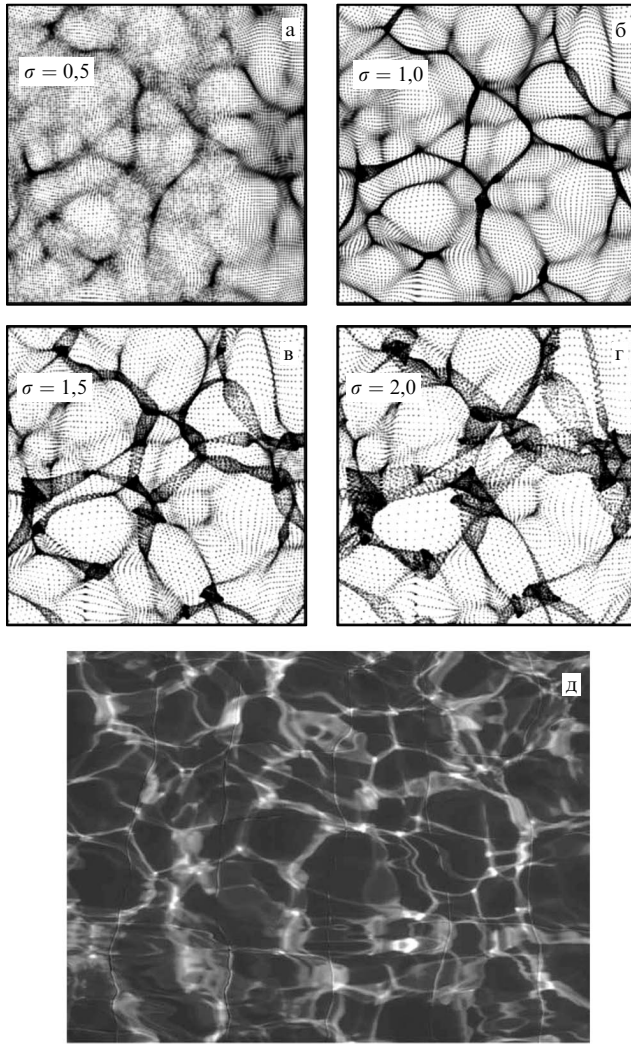


Рис. 3. (а–г) Приближение Зельдовича в двумерном пространстве при различных значениях параметра $\sigma = \langle \delta_{\text{lin}}^2 \rangle^{1/2}$, где δ_{lin} задаётся равенством (13). (д) Каустики на дне бассейна.

ния от фазового экрана. Яркие структуры каустик на дне бассейна со взволнованной поверхностью в солнечный день (рис. 3д) адекватно отражают распределение плотности вещества в двумерном случае [50].

Привлекая закон сохранения масс

$$\eta d^3x = \bar{\eta} d^3q,$$

где $\mathbf{q}$ — начальные координаты частиц, которые будем называть лагранжевыми координатами, $\mathbf{x}$ — сопутствующая система координат, которую назовём эйлеровой, Зельдович вывел выражение для текущей плотности как функции от $D(t)$ и лагранжевых координат $\mathbf{q}$:

$$\eta(\mathbf{q}, D) = \frac{\bar{\eta}}{(1 - D\lambda_1(\mathbf{q}))(1 - D\lambda_2(\mathbf{q}))(1 - D\lambda_3(\mathbf{q}))}, \quad (14)$$

где $\lambda_1(\mathbf{q})$, $\lambda_2(\mathbf{q})$ и $\lambda_3(\mathbf{q})$ — собственные значения тензора деформаций $d_{ij} = \partial^2 \Phi_0 / \partial q_i \partial q_j$.

Функция распределения собственных значений тензора деформаций для гауссовых случайных полей, которая играет большую роль во многих космологических задачах, связанных с образованием структуры (см., на-

пример, [51–53]), была получена Дорошкевичем [54]:

$$P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{675\sqrt{5}}{8\pi\sigma_\delta^6} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) \times \exp \frac{-6I_1^2 + 15I_2}{2\sigma_\delta^2}. \quad (15)$$

Здесь и ниже полагается, что собственные значения упорядочены:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3,$$

а показатель экспоненты зависит от инвариантов тензора деформации

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3. \quad (16)$$

Из (15) следует, что вероятность равенства двух или трёх собственных значений равна нулю. Тем не менее точки, в которых $\lambda_1 = \lambda_2$ или $\lambda_2 = \lambda_3$, существуют, а точки, в которых все три собственных числа одинаковы, — не существуют. Множество точек, в которых равны два собственных значения, образуют одномерные линии, а значит, его мощность равна нулю. Соответственно равна нулю и вероятность равенства двух собственных чисел. С точки зрения динамики, сказанное выше означает, что точно трёхмерный сферический коллапс невозможен, а коллапс в линию разрешён, хотя он и отличается от такового в цилиндрически симметричном случае даже локально [55].

В космологии начальные условия обычно характеризуются начальным спектром $P_\delta(k)$ (см. также рис. 5 в разделе 4.2), который связан со спектром гравитационного потенциала очевидным равенством: $P_\delta = k^4 P_{\Phi_0}$. Аналогично тому, как это делалось на линейной стадии, можно найти поле плотности в эйлеровом представлении, решив уравнение (11) относительно $\mathbf{q}$ и подставив полученное решение в соотношение (14). Для реалистичных начальных условий описанная процедура требует привлечения численных методов.

Как следует из соотношения (14), при гладких начальных условиях вначале формируются сгустки плотности вокруг пиковых значений наибольшего собственного числа λ_1 (напомним, мы нумеруем собственные числа при любом $\mathbf{q}$ в порядке убывания: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$). Эти сгустки имеют сплюснутую форму, поскольку значения остальных собственных чисел меньше λ_1 . Подобные объекты носят в космологии название "блинов Зельдовича". Последние качественно отличаются по форме от сгустков плотности, предсказываемых линейной теорией гравитационной неустойчивости, согласно которой вначале возникают сгустки в окрестности пиков суммы $\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. В действительности отличие местоположения блинов Зельдовича от положения сгустков, предсказанных линейной теорией, не столь велико, вследствие значительной корреляции между δ и величиной наибольшего собственного числа λ_1 : $\langle \lambda_1 \delta \rangle / (\sigma_{\lambda_1} \sigma_\delta) \approx 0,49$.

Заметим, что результаты численного моделирования движения N гравитационно взаимодействующих частиц находятся в хорошем согласии с предсказаниями, полученными в ПЗ [56]. Блины Зельдовича возникают в бесстолкновительной модели поведения тёмной материи как области трёхпоточковых движений частиц, ограниченных каустиками — поверхностями, формально

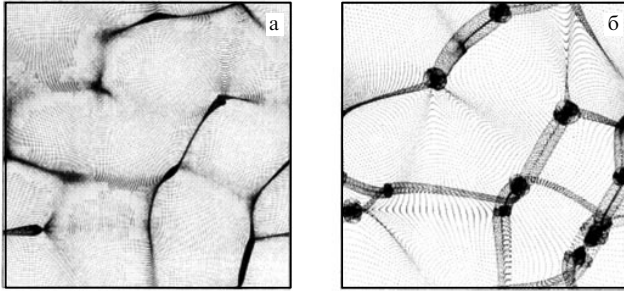


Рис. 4. Найденное численным моделированием распределение гравитационно взаимодействующих частиц на двух стадиях: (а) $\sigma_\delta = 1$, (б) $\sigma_\delta = 2$.

обладающими бесконечной плотностью. Форма и другие характеристики блинов Зельдовича, так же как и другие основные особенности характерной пространственной структуры поля плотности, изображённые на рис. 3, определяются теорией катастроф [55]. Хотя на протяжении нескольких десятков лет различие между областями высокой плотности и многопоточковыми областями не подчёркивалось, недавно оно было явно продемонстрировано [57, 58].

Впоследствии было обнаружено, что ПЗ адекватно описывает поведение флуктуаций плотности лишь до тех пор, пока не возникают каустики, т.е. на стадии, соответствующей $\sigma_\delta \lesssim 1$ (см., например, обзор [30] и ссылки в нём). При $\sigma_\delta > 1$ соотношение (11) предсказывает гораздо более быстрое уширение многопоточковых областей, чем это следует из результатов численного моделирования движения N гравитационно взаимодействующих частиц [34, 35, 59]. Это ясно видно из сравнения рис. 3б,г с рис. 4. Из рисунков 3б,г и 4, несмотря на различие соответствующих им начальных условий, хорошо видно, что корректный учёт гравитационного взаимодействия приводит к формированию блинов, гораздо более тонких, чем предсказывается ПЗ. Указанное расхождение результатов численного моделирования поведения гравитационно взаимодействующих частиц и ПЗ стимулировало развитие МС, которой посвящён раздел 5. В разделе 4.2 мы кратко обсудим модификации ПЗ, позволяющие обобщить ПЗ для случая, в котором нельзя игнорировать степенное поведение спектра на малых масштабах [60, 61].

4.2. Модифицированное приближение Зельдовича

Заметим, что результаты численного моделирования поведения N гравитационно взаимодействующих частиц в дву- и трёхмерном пространствах очень слабо зависят от поведения начальных неоднородностей на малых масштабах [62–64]. Подчеркнём, что аналогичный эффект характерен и для модели турбулентности Бюргерса [65, 66], в которой поведение крупномасштабных структур слабо зависит от мелкомасштабных компонентов. Для гравитационно взаимодействующих частиц наиболее сильное влияние на формирование крупномасштабной структуры оказывают начальные возмущения плотности, достигающие в текущий момент нелинейной стадии гравитационной неустойчивости [63]. Это обстоятельство позволяет использовать вспомогательную модель, приводящую к крупномасштабной структуре, аналогичной той, которая возни-

кает в рамках исходной модели, но не учитывающей тонкие детали структуры на малых масштабах [60, 61]. Промежуточным масштабом, отделяющим крупномасштабную структуру от мелкомасштабной в момент t , служит масштаб нелинейности l_{nl} , определяемый решением уравнения

$$\delta_{rms}^2(l_{nl}) \equiv 4\pi D^2 \int_0^\infty P_{lin}(k) W(k, l_{nl}) k^2 dk = 1, \quad (17)$$

где $W(k, l_{nl})$ — функция, задающая форму фильтра. Для примера начальный степенной спектр в популярной сегодня модели Λ CDM изображён на рис. 5 сплошной кривой, а соответствующий спектр с отфильтрованными на малых масштабах компонентами — пунктирной кривой.

Если амплитуды и фазы начальных возмущений в обеих моделях одинаковы, то вспомогательная модель с отфильтрованным степенным спектром даёт крупномасштабную структуру, очень похожую на структуру, соответствующую неотфильтрованному спектру. Пунктирная кривая на рис. 5 соответствует фильтрации с помощью гауссова окна. Более простой способ фильтрации, при котором спектр полагается равным нулю при $k > k_{nl} \simeq 1/l_{nl}$, где k_{nl} находится из уравнения

$$4\pi D^2 \int_0^{k_{nl}} P_{lin}(k) k^2 dk = 1, \quad (18)$$

даёт схожую картину крупномасштабной структуры. Вспомогательная модель с отфильтрованным начальным спектром позволяет использовать ПЗ, требующее плавных начальных возмущений, и лучше понять сложные нелинейные процессы, влияющие на формирование крупномасштабной структуры. Цена такого упрощения состоит в потере деталей структуры на малых масштабах, учитываемых в исходной модели с неотфильтрованным спектром. Обсуждаемая в разделе 5 модель слипания призвана исправить указанный недостаток ПЗ.

В заключение полезно отметить, что и ПЗ (рис. 3б,г), и численное моделирование движения N гравитационно взаимодействующих частиц (см. рис. 4) приводят к

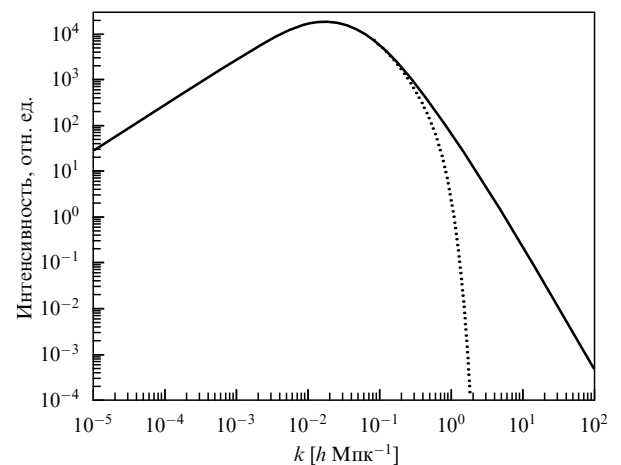


Рис. 5. Начальный степенной спектр в рамках космологической модели Λ CDM (сплошная кривая) и соответствующий начальный спектр, отфильтрованный на текущем нелинейном масштабе (пунктирная кривая).

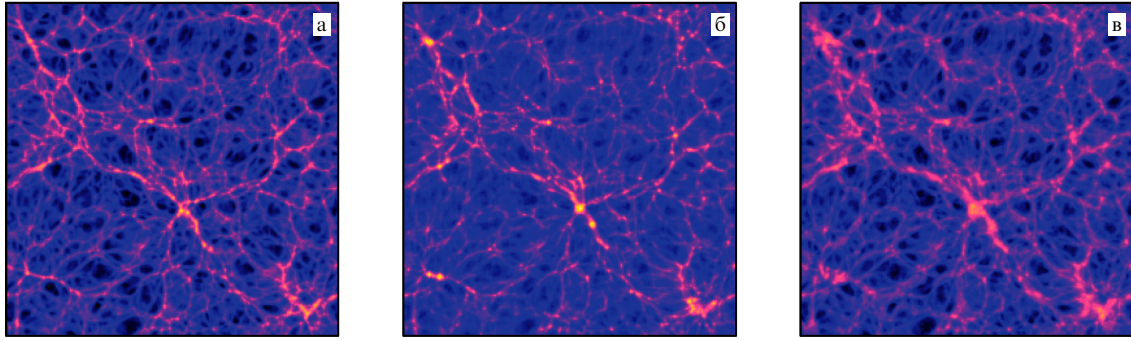


Рис. 6. Три тонких среза трёхмерного распределения плотности, полученной в стандартной космологической модели: (а) МС, (б) трёхмерная численная модель, (в) ПЗ, при одинаковых начальных условиях во всех этих моделях [70, 71].

нерегулярной мозаичной крупномасштабной структуре Вселенной, в которой сравнительно тонкие блины с высокой концентрацией галактик обрамляют "тёмные области" с низкой плотностью галактик, соответствующие однопотоковым областям.

Однако результаты прямого численного моделирования показывают, что после возникновения особенностей их ширина возрастает гораздо медленнее, чем следует из теории Зельдовича [30]. Это связано с тем, что на частицы, прошедшие через особенность, из-за повышенной плотности вещества в ней действует возвращающая сила, так что частицы начинают осциллировать в окрестности особенности. Для полукачественного описания эффекта перехода крупномасштабного движения вещества в мелкомасштабные осцилляции в окрестности особенностей было предложено ввести в уравнение движения диффузионное слагаемое $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ [20, 36, 37], которое должно усреднённо описывать эффект гравитационного "слипания" частиц в окрестностях особенностей. Именно поэтому в космологии данную модель принято называть моделью слипания.

Приближение Зельдовича было подвергнуто всесторонней проверке путём сравнения с результатами численных расчётов [60, 61, 67–69]. Поскольку эти результаты изложены в ряде обзоров [4, 30, 31], мы не станем их повторять. Отметим только, что в работе [67] (см. также [4, 30]) получена аналитическая оценка точности ПЗ, впоследствии независимо выведенная В. Мухановым [9], однако в [9] она приведена с ошибкой. Оценка основана на определении уровня самосогласованности ПЗ, который количественно может быть выражен отношением разности между плотностью ρ_{ZA} (14), предсказанной ПЗ, и плотностью ρ , вычисленной с помощью уравнения Пуассона, к ρ_{ZA} :

$$\Delta \equiv \frac{\rho - \rho_{ZA}}{\rho_{ZA}} \equiv \frac{\eta - \eta_{ZA}}{\eta_{ZA}} = -D^2 I_2 + 2D^3 I_3,$$

где I_2 определяется уравнением (16), $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Эта оценка показывает, в частности, что одномерное возмущение произвольного вида точно описывается ПЗ вплоть до момента возникновения многопотоковых областей, а также то, что в момент достижения сингулярности ($D = 1$) ошибка в плотности остаётся конечной.

В заключение этого раздела приведём рис. 6, который позволяет наглядно сравнить результаты ПЗ и МС с результатами трёхмерного численного расчёта в стандартной космологической модели [70, 71]. На рисунке показаны тонкие срезы трёхмерного распределения

плотности, полученные в МС (рис. 6а), в трёхмерном численном моделировании эволюции структуры (рис. 6б) и в ПЗ (рис. 6в). Начальные условия во всех моделях были одинаковыми и соответствовали начальным условиям стандартной космологической модели со спектром, показанным на рис. 5 сплошной кривой.

4.3. Лагранжева и эйлерова статистики вещества

Напомним, что в разделе 4.2 обсуждалась модель Зельдовича формирования крупномасштабной структуры Вселенной на начальной нелинейной стадии. Причём особенностью анализа Зельдовича являлось то, что решения соответствующих модельных уравнений были получены в лагранжевой системе координат, в то время как наибольший интерес представляет распределение частиц в эйлеровом пространстве. Кроме того, хотя основные соотношения модели Зельдовича носят динамический характер, как, например, соотношение (11), связывающее лагранжевы и эйлеровы координаты движущихся частиц, сами поля изначально носят хаотический характер вследствие принципиальной случайности флуктуаций плотности вещества Вселенной на ранней стадии.

Таким образом, анализ свойств распределения вещества Вселенной в рамках модели Зельдовича подразумевает статистический анализ случайных полей плотности вещества, опирающийся на связи статистических характеристик полей в лагранжевом и эйлеровом представлениях. Ниже мы укажем некоторые связи лагранжевой и эйлеровой статистик, а затем используем их для анализа статистических свойств крупномасштабной структуры Вселенной в рамках модели Зельдовича.

Начнём с общего соотношения между лагранжевыми и эйлеровыми координатами гидродинамического движения частиц $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$. Заметим, что последнее равенство для частного случая векторной функции $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ переходит в соотношение Зельдовича (11) после замены $D \rightarrow t$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + t \mathbf{v}_0(\mathbf{q}), \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{q}) = -\nabla_{\mathbf{q}} \Phi_0(\mathbf{q}). \quad (19)$$

Назовём поле $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ лагранжевым полем эйлеровых координат частиц вещества. Кроме того, введём лагранжево поле плотности частиц $R(\mathbf{q}, t)$. Последнее, как известно, имеет вид

$$R(\mathbf{q}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{q})}{J(\mathbf{q}, t)}, \quad (20)$$

где $\rho_0(\mathbf{q})$ — начальное поле плотности вещества, $J(\mathbf{q}, t)$ — якобиан преобразования эйлеровых координат в лагранжевы,

$$J(\mathbf{q}, t) = \left| \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right|, \quad J(\mathbf{q}, t=0) = 1. \quad (21)$$

Полагая все перечисленные поля случайными, введём распределение лагранжевых полей координат и плотности

$$f_L(\mathbf{x}, \rho; \mathbf{q}, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{x}) \delta(R(\mathbf{q}, t) - \rho) \rangle. \quad (22)$$

Далее мы будем называть подобные распределения лагранжевыми, а аналогичные распределения полей в эйлеровой системе координат — эйлеровыми. Ниже выяснится, что распределение (22) тесно связано с более удобной для последующих выкладок лагранжевой плотностью вероятностей полей координат и якобиана:

$$f_L(\mathbf{x}, j; \mathbf{q}, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{x}) \delta(j(\mathbf{q}, t) - j) \rangle.$$

Укажем формулы связи упомянутых выше распределений лагранжевых полей с распределениями соответствующих эйлеровых полей. Первое из них — эйлерово поле лагранжевых координат частиц $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, обратное лагранжеву полю эйлеровых координат $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$. Кроме того, эйлеровы поля плотности и якобиана выражаются как

$$\rho(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t), \quad j(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), t).$$

Рассмотрим вначале эйлерову плотность вероятностей

$$f_E(\mathbf{q}, j; \mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{q}) \delta(j(\mathbf{x}, t) - j) \rangle.$$

Пока для простоты будем считать, что функции $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ и $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ взаимно однозначно отображают лагранжевы координаты $\mathbf{q}$ в эйлеровы координаты $\mathbf{x}$ и наоборот. Тогда справедливо соотношение, связывающее дельта-функции нелинейного аргумента (см., например, [72]),

$$j(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{q}).$$

Пользуясь этим соотношением, а также выкалывающим свойством дельта-функций (см. подробнее в [72], а также в [42]), нетрудно установить следующую формулу связи эйлерова и лагранжева распределений:

$$f_E(j; \mathbf{x}, t) = j \int f_L(\mathbf{x}, j; \mathbf{q}, t) d\mathbf{q}. \quad (23)$$

Опираясь на равенства (20) и (23), нетрудно получить аналогичное соотношение для более "физичных" эйлерова и лагранжева распределений, описывающих статистику плотности вещества:

$$\rho f_E(\rho; \mathbf{x}, t) = \int \rho_0(\mathbf{q}) f_L(\mathbf{x}, \rho; \mathbf{q}, t) d\mathbf{q}. \quad (24)$$

Более подробные выкладки, приводящие к различным формулам связи эйлеровых и лагранжевых распределений, можно найти в работах [42, 72–74]. Поскольку нас, в первую очередь, интересует эволюция распределения плотности вещества, укажем вытекающую из (24) в случае статистически однородного поля плотности и

малости его флуктуаций на ранней стадии эволюции Вселенной ($\rho \simeq \rho_0 = \text{const}$) формулу связи эйлерова и лагранжева распределений плотности:

$$f_E^p(\rho; t) = \frac{\rho_0}{\rho} f_L^R(\rho; t). \quad (25)$$

Верхний индекс здесь указывает случайную величину, соответствующую данному распределению; например, $f_L^J(j; t)$ — лагранжево распределение якобиана. Учитывая, что плотность и якобиан связаны равенством $R = \rho_0/J$, находим

$$f_L^R(\rho; t) = \frac{\rho_0}{\rho^2} f_L^J\left(\frac{\rho_0}{\rho}; t\right).$$

Подставив последнее выражение в (25), получим полезную для дальнейшего формулу, выражающую эйлерово распределение плотности через лагранжево распределение якобиана:

$$f_E^p(\rho; t) = \frac{\rho_0^2}{\rho^3} f_L^J\left(\frac{\rho_0}{\rho}; t\right). \quad (26)$$

До сих пор мы обсуждали связи лагранжевых и эйлеровых случайных полей, полагая эйлерово поле плотности однопотокowym. Однако, как отмечалось, модель гравитационной неустойчивости Зельдовича приводит к многопотокowym полям; например, блины Зельдовича занимают области многопотокowego движения вещества. Поэтому дадим несколько формул связи лагранжевой и эйлеровой статистик, учитывающих многопотоковость. Одна из них имеет вид

$$\int \rho_0(\mathbf{q}) f_L(\mathbf{x}, \rho; \mathbf{q}, t) d\mathbf{q} = \rho \sum_{N=1}^{\infty} P(N; \mathbf{x}, t) \sum_{n=1}^N f_E^n(\rho; \mathbf{x}, t|N). \quad (27)$$

Здесь $P(N; \mathbf{x}, t)$ — вероятность того, что в момент t в точке $\mathbf{x}$ имеется N потоков, $f_E^n(\rho; \mathbf{x}, t|N)$ — эйлерово распределение плотности n -го потока, $n = 1, \dots, N$. Аналогичная формула для распределений якобиана в случае статистически однородного поля плотности вещества такова (см. [42]):

$$|j| f_L(\mathbf{x}, j, t) = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; t) \sum_{n=1}^N f_E^n(j; t|N). \quad (28)$$

Здесь вероятность $P(N; t)$ имеет наглядный геометрический смысл: она равна доле пространства, занимаемого N -потокowymi движениями.

Одной из важных характеристик модели Зельдовича является среднее число потоков в произвольной точке пространства $\mathbf{x}$:

$$\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_{N=1}^{\infty} N P(N; \mathbf{x}, t).$$

В статистически однородном случае, как видно из (28), справедлива формула, выражающая $\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle$ через среднее модуля якобиана:

$$\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle |J(\mathbf{q}, t)| \rangle. \quad (29)$$

Заметим также, что в любой точке пространства, за исключением областей меры нуль, число потоков — нечётное. Поэтому на ранней стадии, где $\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle$ близко

к единице, справедливы приближённые равенства

$$\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle \simeq P(1; t) + 3 P(3; t), \quad P(1; t) + P(3; t) \simeq 1. \quad (30)$$

Последнее соотношение в (30) — приближённое условие нормировки. Решая уравнения (30) относительно вероятностей, находим

$$P(1; t) \simeq \frac{3 - \langle N \rangle}{2}, \quad P(3; t) \simeq \frac{\langle N \rangle - 1}{2}. \quad (31)$$

Эти результаты были использованы при расчёте космологической функции распределения плотности массы на нелинейной стадии [75].

4.4. Статистика потоков и распределение плотности вещества

Приведённые в разделе 4.3 формулы связи лагранжевых и эйлеровых распределений позволяют исследовать некоторые характерные особенности полей плотности вещества в рамках модели Зельдовича. Ради простоты рассмотрим двумерную модель. Заметим, однако, что аналогичные расчёты можно провести и в трёхмерном случае.

Найдём вначале лагранжево поле якобиана преобразования эйлеровых координат в лагранжевы. Как видно из (19), (21), это поле равно якобиану

$$J(\mathbf{q}, t) = \left(1 - t \frac{\partial^2 \Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_1^2}\right) \left(1 - t \frac{\partial^2 \Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_2^2}\right) - t^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2. \quad (32)$$

Ниже будем считать начальный потенциал $\Phi_0(\mathbf{q})$ статистически изотропным гауссовым полем, обладающим корреляционной функцией,

$$\langle \Phi_0(\mathbf{q}) \Phi_0(\mathbf{q} + \mathbf{s}) \rangle = A(s), \quad s = |\mathbf{s}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2},$$

первые слагаемые разложения которой в ряд Тейлора таковы:

$$\begin{aligned} A(s) &= A - \frac{\mu^2}{2} s^2 + \frac{\nu^2}{8} s^4 + \dots = \\ &= A - \frac{\mu^2}{2} (s_1^2 + s_2^2) + \frac{\nu^2}{8} (s_1^4 + 2s_1^2 s_2^2 + s_2^4) + \dots \end{aligned}$$

Опираясь на указанные свойства гауссова поля $\Phi_0(\mathbf{q})$, представим его в более удобном для анализа виде. Заметим, что компоненты тензора деформаций в выражении для якобиана (32) можно заменить статистически эквивалентными величинами:

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_1^2} = \sqrt{2} \alpha + \beta, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_2^2} = \sqrt{2} \alpha - \beta, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0(\mathbf{q})}{\partial q_1 \partial q_2} = \gamma,$$

где $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — независимые гауссовы величины с нулевым средним и дисперсией ν^2 . При этом якобиан (32) примет вид

$$J = (1 - \sqrt{2} \alpha t)^2 - t^2 \delta^2, \quad \delta = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}. \quad (33)$$

Другая, геометрически более наглядная, форма записи якобиана — через собственные числа тензора деформаций:

$$J = (1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t),$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \alpha + \delta, \quad \lambda_2 = \sqrt{2} \alpha - \delta. \quad (34)$$

Очевидно, что совместное распределение $g(a, d)$ независимых случайных величин α и δ имеет вид

$$g(a, d) = \frac{d}{\sqrt{2\pi} \nu^3} \exp\left(-\frac{a^2 + d^2}{2\nu^2}\right). \quad (35)$$

Здесь a и d — аргументы совместного распределения случайных величин α и δ , аргумент a соответствует случайной величине α , а аргумент d — случайной величине δ . Соответственно, распределение собственных чисел (34) выражается как

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{8\sqrt{\pi} \nu^3} \exp\left(-\frac{3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 2\lambda_1 \lambda_2}{16\nu^2}\right). \quad (36)$$

Подобно распределению (15) собственных чисел трёхмерного тензора деформаций, распределение (36) запрещает совпадение разных собственных чисел. Иными словами, цилиндрический коллапс запрещён, но возможен коллапс в линии — двумерные аналоги блинов Зельдовича.

Используя выражение (33) для якобиана и распределение (35), нетрудно найти лагранжево распределение якобиана:

$$\begin{aligned} f_L^J(j; t) &= \frac{1}{4\sqrt{3} \tau^2} \exp\left(\frac{3j-1}{6\tau^2}\right) \times \\ &\times \begin{cases} 2, & j < 0, \\ \operatorname{erfc}\left(\frac{3\sqrt{j}-1}{2\sqrt{3}\tau}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{3\sqrt{j}+1}{2\sqrt{3}\tau}\right), & j > 0. \end{cases} \quad (37) \end{aligned}$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = \nu t$. В свою очередь распределение якобиана позволяет вычислить среднее число (29) потоков вещества:

$$\langle N \rangle = 1 + \frac{4\tau^2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{6\tau^2}\right). \quad (38)$$

Зависимости от τ среднего числа потоков, а также приближённых значений (31) вероятностей $P(1; t)$ и $P(3; t)$, характеризующих область пространства (двумерного), занятого однопотоковым и трёхпотоковыми движениями вещества, показаны на рис. 7а. На рисунке 7б приведены аналогичные кривые для трёхмерной модели Зельдовича, полученные численным интегрированием на основе распределения Дорошкевича (15) собственных чисел тензора деформаций.

Подставив лагранжево распределение якобиана (37) в многопотоковый аналог соотношения (26), получим эйлерово распределение плотности вещества. Характерной особенностью данного распределения является степенной хвост (рис. 8):

$$f_E^p(\rho; t) \simeq C(t) \rho^{-3}, \quad \rho \gg \rho_0, \quad (39)$$

где

$$C(t) = \frac{\rho_0^2}{\sqrt{3} \tau^2} \exp\left(-\frac{1}{6\tau^2}\right).$$

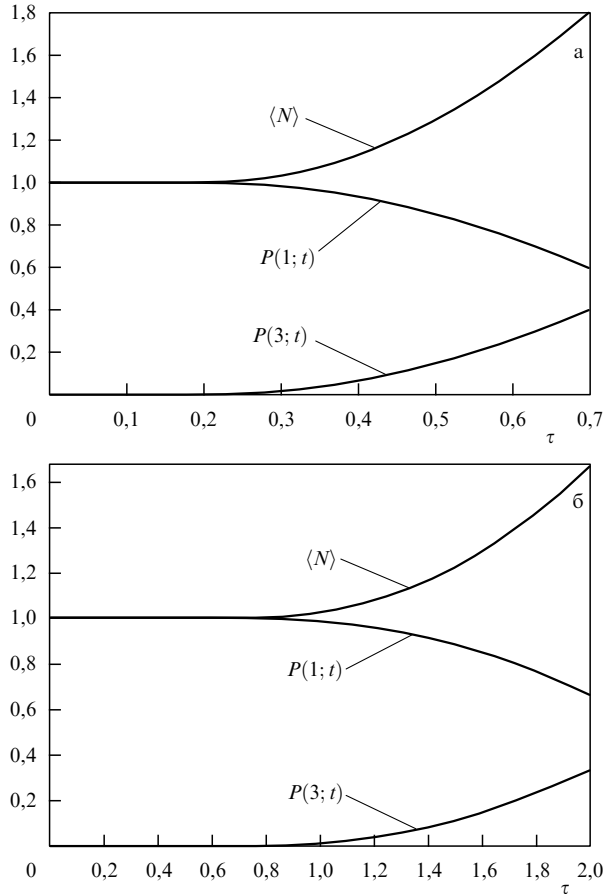


Рис. 7. Среднее число потоков $\langle N \rangle$ (38) и вероятности одного и трёх потоков в зависимости (а) от безразмерного времени $\tau = vt$ в двумерной модели Зельдовича и (б) от параметра $\tau = \sigma_\delta D(t)$ в трёхмерной версии модели Зельдовича.

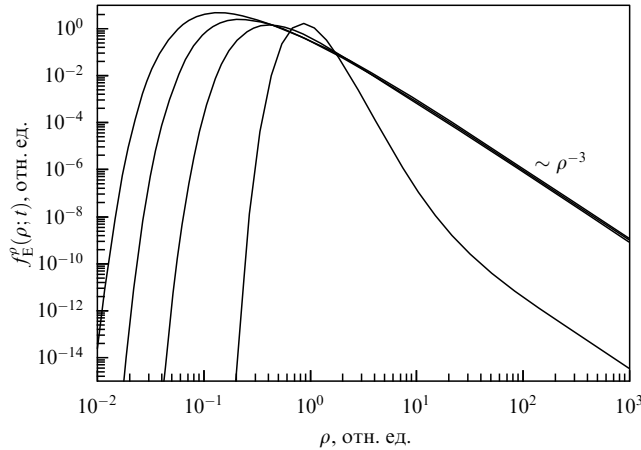


Рис. 8. Распределение плотности вещества в двумерной модели Зельдовича для $\tau = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$. Ясно виден степенной хвост распределения $f_E^\rho \propto \rho^{-3}$.

Отметим, что степенной закон (39) служит ещё одним свидетельством преимущественно одномерной фокусировки вещества (см., например, [42]) и образования блинов Зельдовича, ясно различимых на рис. 3 и 4.

4.5. Спектр флуктуаций плотности

Как отмечено в разделах 4.1, 4.2, сравнительно быстрый степенной закон спада начального пространствен-

ного спектра плотности (4) или даже отфильтрованный экспоненциальный закон спада начального спектра, изображённый на рис. 5, трансформируются вследствие гравитационной неустойчивости в спектр с тяжёлым степенным хвостом при больших значениях волнового числа. Ниже мы продемонстрируем этот важный факт в рамках модели Зельдовича, сводящейся к равенствам (19).

Будем считать флуктуации плотности статистически изотропными, так что корреляционная функция флуктуаций плотности

$$B(s, t) = \langle \delta\rho(\mathbf{x}, t) \delta\rho(\mathbf{x} + \mathbf{s}, t) \rangle$$

зависит лишь от модуля вектора $\mathbf{s}$, соединяющего точки наблюдения. Можно показать (см. [42]), что в гидродинамическом приближении корреляционная функция плотности $B(s, t)$ выражается через начальную корреляционную функцию $B_0(\mathbf{s})$ как

$$B(\mathbf{s}, t) = \int B_0(\mathbf{s}_0) f_L(\mathbf{s}; \mathbf{s}_0, t) d\mathbf{s}_0, \quad (40)$$

где $f_L(\mathbf{s}; \mathbf{s}_0, t)$ — лагранжево распределение вектора относительных смещений частиц вещества,

$$f_L(\mathbf{s}; \mathbf{s}_0, t) = \langle \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0 + t \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q}, \mathbf{s}_0)) \rangle. \quad (41)$$

Здесь $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{s}_0) = \Phi_0(\mathbf{q} + \mathbf{s}_0) - \Phi_0(\mathbf{q})$.

Прежде чем исследовать пространственный спектр плотности, отвечающий корреляционной функции (40), напомним, что имеется несколько видов пространственных спектров. Первый из них — одномерный спектр $P(k, t)$, отражающий спектральные свойства флуктуаций плотности $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$ как функции одного аргумента — координаты вдоль некоторой прямой (например, оси x декартовой системы координат). При этом корреляционная функция и одномерный спектр связаны равенством

$$P(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(s, t) \cos(ks) ds. \quad (42)$$

В случае неизотропных случайных полей часто рассматривают трёхмерный спектр

$$G(\mathbf{k}; t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint B(\mathbf{s}, t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (43)$$

Если поле плотности изотропно, то (43) сводится к

$$G(k, t) = \frac{1}{2\pi^2 k} \int_0^\infty B(s, t) \sin(ks) ds. \quad (44)$$

Сопоставляя равенства (42) и (44), найдём связь между одномерным и трёхмерным спектрами:

$$G(k, t) = -\frac{1}{2\pi k} \frac{dP(k, t)}{dk} \Leftrightarrow P(k, t) = 2\pi \int_k^\infty G(k', t) k' dk'. \quad (45)$$

Вычислим сначала трёхмерный спектр флуктуаций плотности. Подставив в (43) $B(\mathbf{s}, t)$ из (40) с учётом (41) и воспользовавшись выкалывающим свойством дельта-функции, получим

$$G(\mathbf{k}; t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \iiint B_0(\mathbf{s}_0) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{s}_0) \times \exp\left(-\frac{t^2}{2} \left\langle \left(\mathbf{k} \nabla_{\mathbf{q}} [\Phi_0(\mathbf{q} + \mathbf{s}) - \Phi_0(\mathbf{q})] \right)^2 \right\rangle\right) d\mathbf{s}_0. \quad (46)$$

Здесь мы учли гауссовость начального потенциала $\Phi_0(\mathbf{q})$.

Если $\Phi_0(\mathbf{q})$ — изотропное случайное поле, то после несложных выкладок получим

$$\left\langle \left(\mathbf{k} \nabla_{\mathbf{q}} [\Phi_0(\mathbf{q} + \mathbf{s}) - \Phi_0(\mathbf{q})] \right)^2 \right\rangle = 2k^2 C(s) + 2(\mathbf{s}\mathbf{k})^2 E(s), \quad (47)$$

где

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{dA(s)}{ds} - \frac{1}{s} \frac{dA(s)}{ds} \Big|_{s=0}, \quad E(s) = \frac{1}{s} \frac{dC(s)}{ds}. \quad (48)$$

Подставляя (47) и (48) в (46), переходя в подынтегральном выражении к полярной системе координат и вычисляя интегралы по угловым переменным, получим

$$G(k; t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^\infty B_0(r) \exp(-t^2 k^2 C(r)) \psi(k, r, t) r^2 dr, \quad (49)$$

где

$$\psi(k, r, t) = \sqrt{\frac{\pi}{E(r)t^2 k^2 r^2}} \exp\left(-\frac{1}{4E(r)t^2}\right) \times \\ \times \operatorname{Re} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{i + 2krt^2 E(r)}{2\sqrt{E(r)t^2}} \right) \right]. \quad (50)$$

Найдём асимптотику трёхмерного спектра (50) при $v \rightarrow \infty$. Заметим, что, как следует из структуры правых частей равенств (49) и (50), при $k \rightarrow \infty$ $B_0(r)$, $C(r)$ и $E(r)$ можно заменить их асимптотиками при $r \rightarrow 0$:

$$B_0(0) = \sigma^2, \quad C(r) \simeq \frac{v^2}{4} r^2, \quad E(0) = \frac{v^2}{2}.$$

В итоге получим

$$G(k, t) \simeq \sigma^2 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2} v^2 t^2\right) \times \\ \times \frac{1}{k} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{4} t^2 k^2 v^2 r^2\right) r dr, \quad k \rightarrow \infty.$$

Вычисляя интеграл, окончательно находим

$$G(k, t) \simeq \frac{\sigma^2}{v^2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2} v^2 t^2\right) \frac{1}{(kt)^3} \sim k^{-3}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Подставив данную асимптотику во второе из соотношений (45), определим асимптотику одномерного спектра в рамках модели Зельдовича

$$P(k, t) \sim k^{-1}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Можно показать, что эта асимптотика формируется характерным поведением плотности на границах трёхмерных областей, образующих блины Зельдовича.

5. Модель слипания

Основная идея МС сводится к стремлению использовать ПЗ, заданное выражениями (10), (11), всюду, кроме областей многопоточности. Это удаётся сделать, добавив в уравнение Эйлера диффузионный (вязкий) член, который предотвращает пересечение траекторий частиц,

препятствуя тем самым появлению многопоточности. Преимущество такого модифицированного уравнения Эйлера состоит в том, что сильно замедляется рост толщины блинов и тем самым нейтрализуется главный недостаток ПЗ, хотя это и достигается ценой существенного изменения поведения траекторий частиц внутри блинов. Ещё одно преимущество УБ состоит в том, что малость коэффициента вязкости гарантирует практически полное согласие МС с приближением Зельдовича до тех пор, пока траектории частиц не пересекаются.

5.1. От приближения Зельдовича — к модели слипания

Кратко обрисует вывод основного уравнения МС. Поскольку возрастающая мода гравитационной неустойчивости потенциальна на линейной стадии, естественно ввести потенциал скорости Φ , связанный со скоростью частиц как

$$\mathbf{v} = -\nabla \Phi.$$

Учитывая, что потенциал скорости приблизительно равен гравитационному потенциалу в линейном режиме, $\varphi \simeq \Phi$, и добавляя описывающий влияние вязкости член $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ в правую часть второго уравнения (8), придём к уравнению нелинейной диффузии [20, 37]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (51)$$

называемому также многомерным (трёхмерным) уравнением Бюргера. Отметим, что интересная попытка объяснить величину коэффициента вязкости исходя из динамики движений частиц в многопоточных областях была предпринята в работе [76].

В отличие от уравнения Навье–Стокса, УБ не включает в себя плотность. Следовательно, это уравнение в общем случае не удовлетворяет закону сохранения импульса. Только в случае одномерных возмущений и постоянной начальной плотности УБ с исчезающе малой вязкостью даёт описание газа слипающихся частиц, удовлетворяющее закону сохранения импульса. При этом положения особенностей плотности (тяжёлых частиц), образовавшихся в результате слипания лёгких частиц, совпадают с разрывами скорости в МС. Положения особенностей плотности слипшихся частиц при неоднородной начальной плотности ведут себя уже по другим законам, чем разрывы поля скорости УБ [77]. В многомерном УБ образование особенностей также не зависит от поведения плотности и даже при постоянной начальной плотности поля скорости и плотности не удовлетворяют закону сохранения импульса. Последнее связано с тем, что, с точки зрения сохранения импульса, слипание частиц с неплоской геометрией соответствует среде с переменной плотностью. Более того, для сферически симметричного случая из формального определения координат слипшихся частиц согласно уравнению Бюргера следует, что в трёхмерном случае энергия системы в результате слипания частиц возрастает [78].

Таким образом, относительно хорошее согласие движения гравитационно взаимодействующих частиц и решений многомерного УБ является весьма нетривиальным фактом, а объяснение ему кроется, скорее всего, в случайном характере начальных возмущений. В самом деле, условия применимости модели Зельдовича выполняются точно лишь для возрастающей моды и одномерных возмущений. При этом положения особеннос-

тей, соответствующих слипшимся частицам, правильно предсказываются на основе уравнения Бюргера также лишь для одномерных возмущений. Именно такие квазиодномерные возмущения преимущественно реализуются при случайном характере начальных условий.

Вообще говоря, член, учитывающий вязкость среды, может быть иным, чем в уравнении (51) [79], однако его выбор, как в уравнении (51), сводит уравнение Эйлера в среде без давления к уравнению Бюргера, имеющему общее аналитическое решение. Как и в одномерном случае, многомерное нелинейное УБ заменой Хопфа–Коула [80, 81] сводится к линейному уравнению диффузии.

5.2. Вычисление плотности в модели слипания, конечная вязкость

В космологии модель слипания используется в двух вариантах. В одном полагают, что коэффициент вязкости ν мал, но не равен нулю, а в другом этот коэффициент считают бесконечно малым ($\nu \rightarrow 0_+$). В случае не равного нулю коэффициента вязкости можно найти траектории частиц численным интегрированием уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{q}, D)}{dD} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{q}, D), D), \quad \mathbf{x}(\mathbf{q}, D=0) = \mathbf{q}, \quad (52)$$

а затем определить плотность частиц из уравнения непрерывности [40–42, 59, 69]. Пример крупномасштабной структуры, полученной указанным способом, приведён на рис. 9, где представлен результат численного моделирования распределения галактик в тонком слое трёхмерной области [40]. Заметим, что рис. 9 качественно подобен рис. 1, полученному из каталога красных смещений галактик.

В работе [82] аналитически рассчитана плотность вещества в одномерных "блинах Зельдовича" и показана

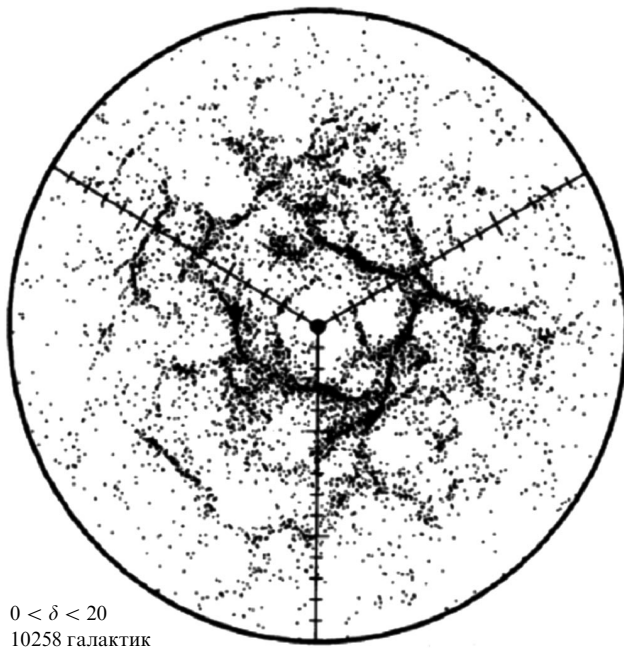


Рис. 9. Результат моделирования распределения галактик в пространстве красных смещений с помощью МС в случае малого, но не равного нулю коэффициента вязкости ν [40].

но, что тонкая структура распределения вещества отличается от предсказаний МС с конечной вязкостью. Для исследования динамики использовалась дискретная модель распределения вещества — так называемая Q-модель [83, 84]; полное описание численной схемы можно найти в [85].

Предполагалось, что в некотором интервале L по оси x вся материя сконцентрирована в N плоскостях, которые удобно назвать частицами. Плотность частиц при этом имеет вид

$$\rho(x_i, t) = \sum_j m_j \delta(x_i - x_j), \quad (53)$$

где x_i — координата i -й частицы вдоль прямой, в направлении которой изменяется плотность и скорость частиц. Переход к непрерывной модели осуществляется увеличением числа частиц и уменьшением расстояния между ними.

Уравнение движения любой частицы имеет вид [85]

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dx_i}{dt} - 4\pi G \rho_b(t) x_i = a^{-3} E_{\text{grav}}(x_i, t), \quad (54)$$

где $\rho_b(t)$ — средняя плотность массы в момент времени t ,

$$E_{\text{grav}}(x_i, t) = -2\pi G \sum_j m_j \text{sign}(x_i - x_j). \quad (55)$$

Заметим, что эффект расширения ведёт к изменению динамики частицы и появлению в уравнении членов, эквивалентных трению. В случае модели Вселенной Эйнштейна–де Ситтера можно сделать замену времени $\tau = t_0 \log(t/t_0)$, при которой (54) приобретёт вид (Q-модель)

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} + \frac{1}{3t_0} \frac{dx_i}{d\tau} - \frac{2}{3t_0^2} x_i = E_{\text{grav}}(x_i, \tau), \quad (56)$$

где $t_0^{-2} = 6\pi G \rho(t_0)$. В классических стационарных самогравитационных одномерных системах E_{grav} — инвариант функции Лагранжа, пропорциональный разности массы справа и слева от данной частицы в данный момент. Следовательно, в периоды времени между касаниями (пересечениями траекторий частиц в многомерном случае) уравнение (56) имеет точное решение [85]:

$$X_i(\tau) = c_1^i \exp\left[\frac{2(\tau - \tau^{(n)})}{3t_0}\right] + c_2^i \exp\left(-\frac{\tau - \tau^{(n)}}{t_0}\right) + K_i^n, \quad (57)$$

где величина $K_i^n = -(3t_0^2/2)E_{\text{grav}}(x_i, \tau)$ постоянна между касаниями. Коэффициенты c_1^i и c_2^i определяются положением и скоростью частицы в момент последнего касания. Первый член в (57) соответствует возрастающей моде, а второй — убывающей. Для нахождения момента совпадения координат двух соседних частиц необходимо решить уравнение пятой (quintic) степени, отсюда и название — Q-модель — данного описания.

Если в интервале L все частицы имеют равную массу $m_j = L\rho_0/N$, то сила тяготения в (56) трансформируется в $E_{\text{grav}}(x_i, \tau) = N_i L / 3N t_0^2$, где $N_i = N_{i, \text{right}} - N_{i, \text{left}}$ — разность между числом частиц справа и слева от данной частицы.

Обсудим, как из Q-модели можно получить приближение Зельдовича и модель слипания. В ПЗ затухающей модой пренебрегают, т.е. считают c_2^i в (57) равным нулю.

При этом эволюция начального возмущения (положений частиц) описывается как

$$X_i(\tau) = \frac{3}{2} w_i^0 t_0 \exp\left(\frac{2\tau}{3t_0}\right) + K_i^n, \quad (58)$$

где w_i^0 — начальная скорость i -й частицы. При замене времени $D = (3/2)t_0 \exp(2\tau/3t_0)$ решение (58) сводится к выражению, описывающему свободное движение частиц:

$$X_i(D) = w_i^0 D + X_i(0). \quad (59)$$

Напомним, что в модели Зельдовича подобные соотношения полагаются справедливыми в течение всего времени, даже когда частицы пересекаются, а движение становится многопоточным. Напротив, в модели слипания в момент касания частицы слипаются, образуя более тяжёлые частицы, масса которых равна сумме масс слипшихся частиц, а их скорость определяется законом сохранения импульса. В этой модели также пренебрегают затухающей модой, считая $c_2^i = 0$ и до и после слияния частиц.

Эволюция реальной динамической системы, т.е. Q-модели, представляет собой нечто среднее между эволюциями указанных двух моделей. Но есть специфические условия, при которых все три модели равноценны. Возьмём начальные условия, при которых все коэффициенты c^i в (57) равны нулю. Тогда начальные скорости и плотности коррелированы так, что возбуждается лишь линейно возрастающая мода, а выражение (57) становится до первого касания частиц точным решением для всех трёх моделей.

Прежде чем приступить к описанию эволюции непрерывного кластера, обсудим поведение двух частиц с равной массой m , расположенных на отрезке длиной L . На этом простом примере мы сравним поведение частиц, взаимодействующих в рамках Q-динамики, с поведением частиц в ПЗ и в модели слипания с исчезающе малой и конечной вязкостью. Положим массы всех частиц равными между собой, $m = 1/2$, и $L = 1$ и введём безразмерные переменные: $\theta = \tau/t_0$, $Q_i(\theta) = x_i/L$, $\beta_i(\theta) = 6\dot{x}_i/t_0 L$. До момента первого касания частиц уравнение (57) имеет вид

$$Q_i(\theta) = c_1^i \exp\left(\frac{2\theta}{3}\right) + c_2^i \exp(-\theta) \mp \frac{1}{4}. \quad (60)$$

Рассмотрим специальный класс начальных условий, в которых начальные скорости и позиции частиц выбраны так, чтобы обнулить c_2^i в (60). При этом начальные скорости $w_1^0 = -w_2^0 > 0$, а частицы расположены симметрично относительно центра координат. В данном случае возбуждена лишь возрастающая мода и до пересечения траекторий частиц ПЗ будет точным решением. Поэтому можно точно решить уравнения движения каждой частицы до момента первого касания траекторий частиц. Время первого касания θ_{cross} находится из уравнения (60): $\theta_{\text{cross}} = -(3/2) \ln \beta(0)$. Скорость частицы в данный момент $\beta_{\text{cross},0} = \beta(\theta_{\text{cross}}) = 1$. Заметим, что время θ_{cross} зависит от начальной скорости частицы. После касания частиц установившийся начальный баланс между позициями и скоростями нарушается, а условие $c_2^i = 0$ больше не выполняется. Поэтому начиная с момента касания траекторий при анализе (60) надо учитывать и затухающую, и возрастающую моды.

Далее частицы начинают разбегаться, и вследствие гравитационного взаимодействия их скорости монотонно уменьшаются. При $\theta = \theta_{\text{turn}}$ удаление частиц максимально, а скорости равны нулю, $\dot{q}(\theta_{\text{turn}}) = 0$. Для θ_{turn} мы имеем $\theta_{\text{turn}} = \theta_{\text{cross}} + \bar{\theta}$, $\bar{\theta} = (3/5) \ln 6$. Поворот частицы происходит до достижения ею первоначальной позиции ($|q_i(0)| = (1 - \beta(0))/4$). Соответствующая амплитуда максимального удаления $q_{\text{max},0} = q(\theta_{\text{turn}})$ равняется

$$Q_{\text{max},0} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} 6^{-3/5} - \frac{1}{20} 6^{2/5} = \alpha \simeq 0,08$$

и не зависит от начальной скорости. Уменьшение этой амплитуды происходит из-за наличия своеобразного трения в уравнении (56), физическая причина которого — расширение Вселенной. Нетрудно заметить, что таким образом система стремится к устойчивому равновесию: локализации частиц в неподвижном центре масс. Аналогично ведёт себя и скорость в момент первого совпадения положения частиц, она также уменьшается и становится равной $\beta_{\text{ret}} = \beta_{\text{cross},1} = -0,83$.

Таким образом, очевидно, что на больших временах частицы совершают затухающие колебания, колеблясь относительно друг друга с уменьшением амплитуды колебаний и времён между пересечениями. Динамика колебаний сводится при этом к простой итерационной схеме [82]. После замены конечных разностей дифференциалами получаем

$$\beta_{\text{cross}}(\theta) = \beta_{\text{cross},0} \exp\left[-\frac{1}{9}(\theta - \theta_{\text{cross}})\right], \quad \beta_{\text{cross},0} = 1, \quad (61)$$

$$\Delta q_{\text{max}}(\theta) = 2q_{\text{max},0} \exp\left[-\frac{2}{9}(\theta - \theta_{\text{turn}})\right], \quad q_{\text{max},0} = \alpha. \quad (62)$$

Здесь $\beta_{\text{cross}}(\theta)$ — безразмерная скорость частиц в момент касания, $\Delta q_{\text{max}}(\theta)$ — максимальное расстояние между частицами в момент θ .

Таким образом, и скорость частиц, и расстояние между ними, и время между касаниями, $\theta_n(\theta) \sim |\beta_{\text{cross}}(\theta)|$, экспоненциально убывают в переменных времени θ . В терминах космологического времени t или новой переменной D убывание происходит по степенному закону $\beta_{\text{cross}}(t) \sim t^{-1/9} \sim D^{-1/6}$ и $\Delta q_{\text{max}}(t) \sim t^{-2/9} \sim D^{-1/3}$.

На рисунке 10 проведено сравнение результатов прямого численного моделирования и аналитического расчёта. Приведена зависимость модуля скорости частицы β_{cross} от времени θ . Сплошная кривая соответствует результатам расчёта по аналитической формуле (61). Начальные условия показаны на вставке рисунка; здесь $c_2 = 0$, таким образом, до момента первого касания учитывается лишь вклад возрастающей моды.

Обсудим теперь следствия аналитических моделей. В ПЗ закон движения частиц не меняется после пресечения траекторий, а расстояние между частицами возрастает пропорционально D . В приближении слипания с исчезающе малой вязкостью частицы при столкновении слипаются, образуя неподвижную частицу с массой, равной сумме масс слипшихся частиц. Для описания движения частиц в МС с конечной вязкостью рассмотрим стационарное решение одномерного УБ (51):

$$V(x, D) = v_{\text{st}}(x) = -U \tanh \frac{x}{\delta}, \quad (63)$$

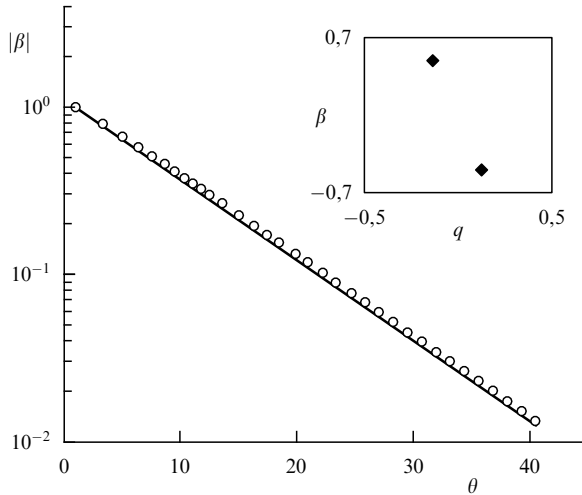


Рис. 10. Зависимость модуля скорости частицы β_{cross} от времени θ в линейно-логарифмической шкале (кружки). Сплошная кривая относится к аналитической формуле (61). Начальные условия показаны на вставке.

где $\delta = U/2v$ — ширина разрыва фронта. Это решение также является асимптотическим решением УБ для начальной ступенчатой функции профиля скорости, рассмотренной нами ранее. Траектории одиночных частиц $x(t)$ удовлетворяют уравнению (52), и мы имеем следующее выражение для координат частиц:

$$x(D, q) = \delta \operatorname{arsinh} \left[\sinh \left(\frac{q}{\delta} \right) \exp \left(-\frac{UD}{\delta} \right) \right], \quad (64)$$

где q — лагранжева координата. Из решения (64) следует, что после того как частица "попадает в кластер" ($x(D, q) \ll \delta$), её координата уменьшается существенно быстрее ($x(D, q) \sim \exp[(q - UD)/\delta]$), чем в Q-модели.

В работе [82] проведено сравнение эволюции профиля плотности в модели Зельдовича, Q-модели и МС в случае ступенчатого начального распределения скорости:

$$\beta(q) = -\beta_0 \operatorname{sign}(q), \quad (65)$$

где β_0 — постоянный коэффициент.

В ПЗ частицы с первоначально отрицательной (так же как и с положительной) координатой движутся к сгустку, не меняя расстояния между собой. Таким образом, до тех пор пока последняя частица не достигнет сгустка, будет существовать двухпоточковый режим, занимающий конечную область $2q_{w, \text{Zeld}}$, где $q_{w, \text{Zeld}} = \beta_0 \exp(2\theta/3)/4 = \beta_0 D$ — ширина сгустка в ПЗ. Обратим внимание, что плотность в каждом из потоков равна начальной плотности ρ_0 , т.е. внутри сгустка ($|q| < q_{w, \text{Zeld}}$) плотность равна $2\rho_0$.

В реальной динамике внутри сгустка формируется многопоточковый режим, поэтому плотность в точке с координатой q внутри сгустка может быть получена суммированием вкладов всех потоков. Переходя в Q-динамике к непрерывному пределу, удаётся также получить замкнутое выражение для усреднённой плотности вещества в кластере:

$$\rho(q, \theta) \Big|_{|q| < q_w} = \rho_0 \frac{3}{2q_p} \left[\left(\frac{q_p}{q} \right)^{1/4} - \left(\frac{1}{2\gamma'_{\text{max}}} \right)^{1/3} \right], \quad (66)$$

где γ_{max} — решение уравнения

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{\beta(\gamma_{\text{max}})}{4} \exp \left(\frac{2}{3} \theta \right), \quad (67)$$

$q_p(\theta)$ — наименьший пространственный масштаб внутренней структуры кластера,

$$q_p = \frac{\chi}{2^{4/3} \beta_0^{1/3}} \exp \left(-\frac{2}{9} \theta \right). \quad (68)$$

Пространственное распределение плотности внутри сгустка характеризуется двумя масштабами: характерным размером внутренней структуры $q_p(\theta)$, спадающим по экспоненте, $q_p \sim \exp(-2\theta/9)$, и шириной кластера q_w , которая на начальной стадии формирования сгустка возрастает со временем медленнее, чем предсказывается моделью Зельдовича. Масса кластера также увеличивается, в согласии с моделью слипания.

На завершающей стадии эволюции изолированного кластера, когда все частицы достигают его внутренней части, распределение масс (массовая функция) $M(q, \theta)$ имеет автомодельный вид:

$$M(q, \theta) = \int_0^q \rho(\xi, \theta) d\xi = \bar{M} \left(\frac{q}{q_p(\theta)} \right). \quad (69)$$

Таким образом, на данной стадии эволюции и плотность, и массовая функция характеризуются исключительно внутренним масштабом сгустка $q_w = q_p(\theta)$. Функцию $\bar{M}(q/q_p(\theta))$ на отрезке $x = [0, 1]$ можно представить в простом виде:

$$\bar{M}(x) = 2x^{3/4} - \frac{3}{2}x, \quad (70)$$

причём $\bar{M}(1)$ равна $1/2$. Из выражения (70) следует, что основная часть материи сконцентрирована в центре сгустка. Так, например, половина всей массы (т.е. $2\bar{M}(x_{0.5}) = 1/2$) занимает интервал, равный лишь $x_{0.5} = 0.14$, а 90 % всего вещества распределено на сегменте, лишь ненамного превышающем половину полного размера кластера ($x_{0.9} = 0.54$).

Результаты прямого численного моделирования [82] поздней стадии эволюции начального возмущения, заданного (65), достаточно хорошо подтверждают аналитические расчёты. На рисунке 11 приведены профиль нормированной плотности на последней стадии эволюции (тонкая кривая) и теоретическое предсказание (66) (жирная кривая). Те же зависимости представлены в логарифмической шкале на вставке в левой части рисунка: здесь кружками показаны результаты численного моделирования. Соответствующий портрет фазового пространства, иллюстрирующий характерное спиральное поведение, представлен на вставке в правой части рис. 11.

В завершение сравним теоретическое выражение (66) с профилем плотности, полученным в приближении МС с конечной вязкостью [86]. Учитывая закон сохранения массы, из (64) находим следующее выражение для плотности:

$$\rho(x, D) = \frac{\rho_0 \cosh(x/\delta)}{\sqrt{\sinh^2(x/\delta) + \exp(-2UD/\delta)}}. \quad (71)$$

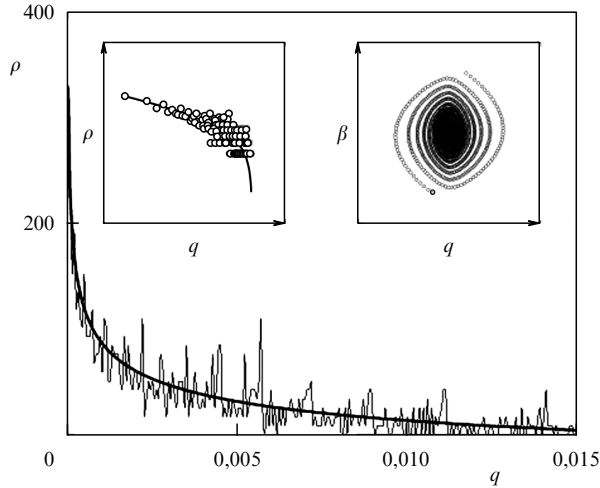


Рис. 11. Зависимость нормированной плотности ρ от координаты q на поздней стадии развития для ступенчатого распределения скоростей. Светлой кривой показаны результаты моделирования, а жирная кривая представляет теоретическую зависимость. На вставке в левой части рисунка — нормированная плотность ρ в зависимости от q в линейно-логарифмической шкале. Кружки отвечают результатам численного эксперимента. На вставке в правой части — фазовая плоскость при $\theta = 23,27$.

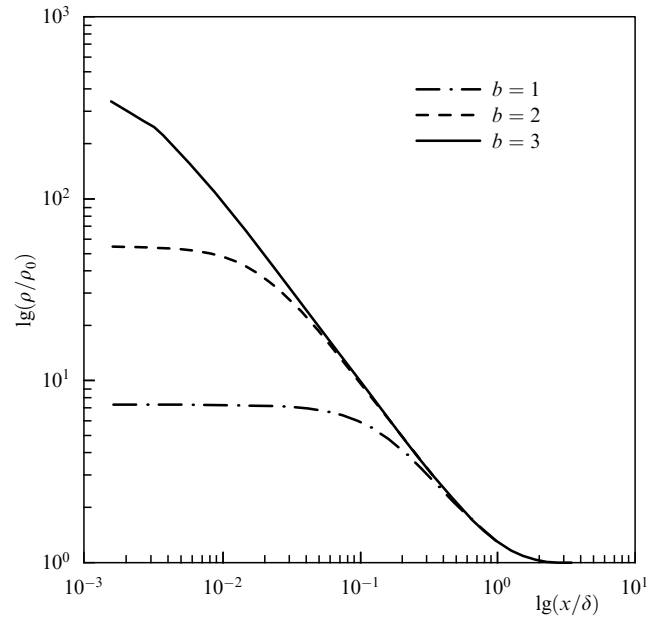


Рис. 12. Зависимость нормированной плотности ρ/ρ_0 от x/δ в логарифмических шкалах при различных значениях времени b . Начальное условие для скорости — ступенчатая функция с параметрами $\delta = 5$, $U = 10$, $\rho_0 = 1$.

Сосредоточимся на асимптотическом поведении для времён $D \gg \delta/U$ и рассмотрим области $y > \delta$, $x > \delta_p$, где $\delta_p = \delta \exp(-UD\delta)$ — внутренний масштаб сгустка. Видно, что в приближении слипания коллапс наступает быстрее, чем в Q-модели, а для убывания пространственных размеров сгустка в эффективном "времени" УБ справедлив степенной закон $q_p \sim D^{-1/3}$. Анализируя профиль плотности для $|x| < \delta_p$, найдём, что максимальное значение плотности экспоненциально возрастает с увеличением времени: $\rho_{\max}(0, D) = \rho_0 \exp(UD/\delta)$. В интервале $\delta_p \ll x \ll \delta$ функция распределения плотности преобразуется в независящий от времени степенной закон $\rho(x, D) = \rho_0 \delta/x$, как это можно увидеть из рис. 12, где показано изменение пространственного распределения плотности в зависимости от времени $D = b$.

Итак, МС в случае начальной ступенчатой функции скорости на поздней стадии эволюции свойственны локализация в области $|x| < \delta = \text{const}$ и наличие неинтегрируемых во времени степенных хвостов с характерным размером $\delta_s = \delta \exp(-Ub/\delta)$. Отметим, что в Q-модели на периферии мы имеем вместо этого интегрируемое распределение степенного закона (см. (66)).

Таким образом, МС в одномерном случае адекватно описывает возрастание массы в особенностях, но не их внутреннюю структуру. Это замечание согласуется с заключением в [85], где предложены численные поправки к коэффициенту диффузии и введено новое динамическое уравнение.

5.3. Общее и асимптотическое решения векторного уравнения Бюргерса

В дальнейшем мы по-прежнему будем рассматривать УБ в его классическом виде, используя в уравнении вместо эффективного времени D переменную t :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (72)$$

Напомним способ решения УБ (51). Укажем, в первую очередь, что в случае потенциального поля скоростей УБ эквивалентно однородному уравнению Кардара–Паризи–Чжана (Kardar–Parisi–Zhang, KPZ) для потенциала скорости

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \nu \nabla^2 \Phi. \quad (73)$$

Как и в одномерном случае, используя замену Хопфа–Коула [80, 81]

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -2\nu \ln U(\mathbf{x}, t),$$

придём к линейному уравнению диффузии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \nabla^2 U. \quad (74)$$

Подставив его решение в выражение для поля скорости

$$\mathbf{v} = -2\nu \nabla \ln U = -\frac{2\nu}{U} \nabla U,$$

получим окончательно

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\int d^3 \mathbf{q} [(\mathbf{x} - \mathbf{q})/t] \exp[S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q})/2\nu]}{\int d^3 \mathbf{q} \exp[S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q})/2\nu]}, \quad (75)$$

где $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q})$ — функция действия,

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) = \Phi_0(\mathbf{q}) - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{q})^2}{2t}. \quad (76)$$

Обсудим более детально некоторые следствия предположения о бесконечной малости коэффициента вязкости, $\nu \rightarrow 0_+$, поскольку этот случай непосредственно связан с возникновением упомянутой в разделе 1 мозаичной крупномасштабной структуры Вселенной.

Интегралы в (75) могут быть вычислены методом наискорейшего спуска [20, 37, 87, 88]. При этом поле

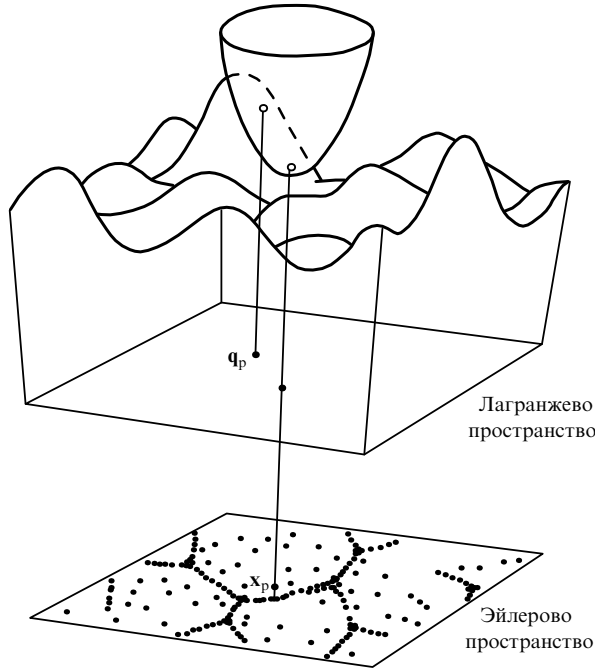


Рис. 13. Иллюстрация связи лагранжевых и эйлеровых координат частиц в МС [87].

скорости определяется равенством

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{t}, \quad (77)$$

где $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ — координата абсолютного максимума действия $S(\mathbf{x}, D; \mathbf{q})$ при заданных значениях $\mathbf{x}$ и t . Здесь $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ — лагранжева координата частицы, которая в момент t попала в точку $\mathbf{x}$ [42].

Результат интегрирования имеет наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 13) в двумерном случае. Связь начальных лагранжевых координат $\mathbf{q}_p$ и текущих эйлеровых координат $\mathbf{x}_p$ некоторой фиксированной частицы в момент t может быть определена опусканием параболоида

$$P(q; \mathbf{x}_p, t) = \frac{(\mathbf{x}_p - \mathbf{q})^2}{2t} + P_0 \quad (78)$$

на поверхность начального потенциала. А именно, будем уменьшать значение постоянной P_0 от бесконечности до тех пор, пока параболоид не коснется в первый раз в некоторой точке с координатами $\mathbf{q}_p$ поверхности начального потенциала $\Phi_0(q)$. При этом координаты $\mathbf{q}_p$ первой точки касания равны лагранжевым координатам выбранной частицы.

Заметим также, что на начальной стадии время t мало и кривизна параболоида существенно превышает характерную кривизну поверхности Φ_0 . На этой стадии указанное отображение лагранжевых координат в эйлеровы практически всюду эквивалентно приближению Зельдовича.

С течением времени кривизна параболоида уменьшается. Соответственно, возникают области в лагранжевой системе координат, не отображающиеся на эйлерову плоскость. Это хорошо видно из рис. 14, иллюстрирую-

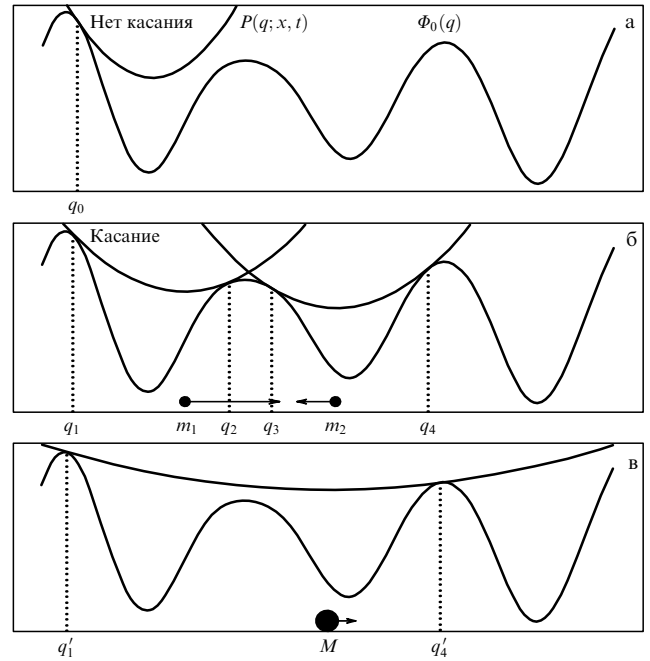


Рис. 14. Одномерная иллюстрация отыскания связи лагранжевой и эйлеровой координат частиц опусканием параболы на график потенциала скорости. (а) Частица с лагранжевой координатой q_0 имеет эйлерову координату x , равную координате вершины параболы. (б) На более поздней стадии движения частиц все частицы с лагранжевыми координатами в интервалах (q_1, q_2) и (q_3, q_4) между точками двойного касания парабол сливаются в макрочастицы (два темных кружка в нижней части рисунка) с массами $m_1 = \bar{\eta}(q_2 - q_1)$ и $m_2 = \bar{\eta}(q_4 - q_3)$ и движутся со скоростями, изображёнными стрелками. (в) Макрочастица (тёмный кружок), образованная слипанием макрочастиц, показанных на рис. б (см. [42, 89]).

щего описанную выше процедуру опускания параболоида. Параболы на рис. 14б не могут быть опущены ниже без пересечения графика функции Φ_0 . Это означает, что частицы с лагранжевыми координатами, расположенными между координатами двух точек касания параболы начального профиля Φ_0 , т.е. между точками с координатами q_1 и q_2 , а также между точками с координатами q_3 и q_4 , сливаются в дискретные макрочастицы с массами $m_1 = \bar{\eta}(q_2 - q_1)$ и $m_2 = \bar{\eta}(q_4 - q_3)$. На более поздней стадии макрочастицы становятся более массивными в результате слипания ранее образовавшихся макрочастиц. На рисунке 14в показана подобная массивная макрочастица, возникшая за счёт слипания макрочастиц, изображённых на рис. 14б. Нетрудно увидеть, что для перехода от стадии, изображённой на рис. 14б, к стадии слипания макрочастиц, показанной на рис. 14в, необходимо, чтобы в некоторый промежуточный момент (промежуточное значение параметра D) парабола имела три точки касания с графиком начального потенциала. В следующий момент парабола становится немного шире и теряет контакт с профилем начального потенциала в средней точке касания, что геометрически означает слипание столкнувшихся частиц.

В двумерном случае параболоид (78) может касаться поверхности начального потенциала Φ_0 соответственно в одной, двух и трёх точках. Первый тип касания отвечает не слипавшимся к данному моменту частицам, обладающим конечной плотностью. Точки второго типа касания соответствуют частицам, слипшимся в линии — двумер-

ные аналоги блинов Зельдовича. Частицы на линиях слипания частиц изображены на рис. 14 тёмными кружками со стрелками, показывающими скорость частиц. Эти линии образуют границы областей, состоящих из точек первого типа, и представляют собой геометрическое место центров параболоидов, касающихся поверхности начального потенциала сразу в двух точках. Наконец, когда параболоид касается поверхности начального потенциала сразу в трёх точках, координаты центров таких параболоидов соответствуют узловым точкам, соединяющим несколько указанных выше линий. Линии и узлы образуют хаотическую мозаичную структуру, состоящую из ячеек и ограничивающих их линий и узлов, в которых смыкаются разные линии. С течением времени одни ячейки расширяются, а другие сжимаются и исчезают. В момент поглощения ячеек параболоид касается начального потенциала сразу в четырёх точках. Классификация особенностей и их метаморфоз приведена в [90].

5.4. Поток локально взаимодействующих частиц и сингулярное поле плотности

Имеется альтернативный способ вычисления плотности вещества — с помощью якобиана преобразования эйлеровых координат в лагранжевы координаты [42, 43, 45, 91–94]. До столкновения частиц плотность, вычисленная таким способом, совпадает с таковой в приближении Зельдовича. Однако после слияния частиц функция $q(\mathbf{x}, t)$ терпит разрывы на особенностях с разной размерностью. В трёхмерном случае — это плоскости, линии и точки. Соответственно в распределении плотности появляются особенности типа дельта-функций разной размерности [45, 91].

Ниже будем интерпретировать уравнение (12) как уравнение для поля скорости некоторого потока частиц. До тех пор пока решение этого уравнения однозначно, поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ имеет очевидный физический смысл — это скорость гидродинамического потока равномерно движущихся частиц. Начиная с некоторого момента t_n одни частицы начинают обгонять другие, и если частицы не взаимодействуют между собой, то возникает многопоточковый режим. Если, напротив, при обгоне частицы взаимодействуют, препятствуя развитию многопоточковости, то вместо многопоточковых полей могут возникнуть разрывные однопоточковые поля $\mathbf{v}_w(\mathbf{x}, t)$, которые мы называем слабыми решениями уравнения (77).

Тогда как для одномерного потока механический смысл формирования слабых решений вследствие неупругого слияния частиц предельно ясен, в многомерном случае трудно предложить физический механизм взаимодействия, приводящий к сравнительно простому математическому алгоритму выбора слабого решения. Поэтому подойдём к проблеме взаимодействия частиц чисто формально, постулируя, что локальное взаимодействие в момент столкновений порождает разрывное отображение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_w(\mathbf{x}, t)$ эйлеровых координат в лагранжевы и соответственно вытекающее из принципа абсолютного максимума слабое решение для поля скорости частиц, которое следует из предельного решения УБ при исчезающе малой вязкости.

Проиллюстрируем указанный модельный подход посредством анализа обобщённого поля плотности $\rho_w(\mathbf{x}, t)$ двумерного потока локально взаимодействующих при обгоне частиц. Плотность потока можно

записать в виде

$$\rho_w(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}) d^2 y, \quad (79)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t)$ — отображение, обратное отображению $\mathbf{y} = \mathbf{y}_w(\mathbf{x}, t)$, в данном случае вытекающему из принципа абсолютного максимума. Кроме того, мы приняли для простоты, что начальная плотность газа, взаимодействующего по закону абсолютного максимума, одинакова во всех точках плоскости $\mathbf{x}$: $\rho_0(\mathbf{x}) = \rho_0 = \text{const}$. До тех пор пока $\mathbf{y} = \mathbf{y}_w(\mathbf{x}, t)$ является непрерывной функцией, данная плотность совпадает с таковой в приближении Зельдовича.

В общем случае $\rho_w(\mathbf{x}, t)$ — сингулярная обобщённая функция. Выясним алгоритм её действия на пробную функцию $\phi(\mathbf{x})$. После несложных математических преобразований получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}) \rho_w(\mathbf{x}, t) d^2 x = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)) d^2 y. \quad (80)$$

Для того чтобы воспользоваться выражением (80), осталось найти способ построения функции $\mathbf{x} = \mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t)$. Нетрудно показать, что отображение лагранжевых координат в эйлеровы определяется равенством [43, 45, 91]

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t) = -\nabla \bar{\varphi}(\mathbf{y}, t), \quad (81)$$

где $\bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ — выпуклая оболочка функции

$$\varphi(\mathbf{y}, t) = h_0(\mathbf{y}) t - \frac{y^2}{2}.$$

В данном случае, для того чтобы получить выпуклую оболочку функции $\varphi(\mathbf{y}, t)$, надо, образно говоря, натянуть сверху на значения функции $\varphi(\mathbf{y}, t)$ эластичную плёнку. Поверхность этой плёнки и будет представлять собой выпуклую оболочку функции $\varphi(\mathbf{y}, t)$.

Геометрически построение отображения (81) сводится к отысканию плоскости, касающейся выпуклой оболочки $z = \bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ в точке с координатами $\mathbf{y}$. Обсудим эту процедуру подробнее. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в трёхмерном пространстве $(\mathbf{y}, z)$. Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{a} = \{\mathbf{y}, \bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)\}.$$

Здесь $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к выпуклой оболочке $z = \bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ (если внутренностью выпуклой оболочки считать лежащую под ней область). Выберем z -компоненту нормали всюду единичной, $\mathbf{n}_z = 1$. Тогда проекция нормали на плоскость $\mathbf{y}$ равна искомому вектору $\mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t)$. Другими словами, мы найдём отображение $\mathbf{x} = \mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t)$, если укажем нормаль $\mathbf{n}$ к каждой точке поверхности $z = \bar{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ и спроектируем её на плоскость $\mathbf{y}$.

Существует три грубых (не пропадающих при малом шевелении поверхности) типа касания плоскости и выпуклой оболочки, определяющих качественно различные участки отображения (81). Соответственно лагранжева $\mathbf{y}$ и эйлерова $\mathbf{x}$ плоскости разбиваются на три типа областей.

Перечислим типы касания и укажем их механический смысл применительно к полю плотности (79) взаимодействующего при обгоне вещества.

1. Плоскость касается выпуклой оболочки в одной точке. Все такие точки принадлежат как выпуклой оболочке $\bar{\phi}(\mathbf{y}, t)$, так и исходной поверхности $\phi(\mathbf{y}, t)$. Проекция данных точек на плоскость $\mathbf{y}$ — это лагранжевы координаты частиц потока, ещё не участвовавших во взаимодействии, а их эйлеровы координаты $\mathbf{x} = \mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t)$ задаются отображением

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{y} + t\mathbf{v}_0(\mathbf{y}) \quad (82)$$

для невзаимодействующих частиц.

2. Плоскость касается исходной поверхности $\phi(\mathbf{y}, t)$ сразу в двух точках. Тогда весь отрезок l , соединяющий эти точки, принадлежит выпуклой оболочке $\bar{\phi}(\mathbf{y}, t)$. Следовательно, во всех точках отрезка вектор нормали к выпуклой оболочке одинаков. Это означает, что все точки проекции l_y отрезка l на лагранжеву плоскость $\mathbf{y}$ отображаются в одну точку с одинаковыми эйлеровыми координатами $\mathbf{x} = \mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t)$. Скользя покрытой мелом касательной плоскостью по выпуклой оболочке и стараясь, чтобы плоскость касалась оболочки сразу в двух точках, очертим на последней замкнутую область $\mathbb{G}$. Все точки её проекции $\mathbb{G}_y$ на плоскость $\mathbf{y}$ проектируются на кривую

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{x} = \mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in \mathbb{G}_y\},$$

в эйлеровой плоскости $\mathbf{x}$, где сосредотачивается в момент t всё вещество, первоначально находившееся в области $\mathbf{y} \in \mathbb{G}$.

3. Плоскость касается поверхности в трёх точках. Соединив их отрезками, получим треугольник $\mathbb{T}$, все точки проекции которого $\mathbb{T}_y$ на лагранжеву плоскость $\mathbf{y}$ отображаются в одну точку:

$$x^* = \{\mathbf{x} = \mathbf{X}_w(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in \mathbb{T}_y\}.$$

Разбиение лагранжевой плоскости $\mathbf{y}$ на три типа областей и особенности их отображения на эйлерову плоскость $\mathbf{x}$ поясняет рис. 15. В приложении к английскому изданию книги [42] (авторы приложения В.И. Арнольд, Ю.М. Барышников, И.А. Богаевский) дана классификация особенностей и их бифуркаций для дву- и трёхмерных потенциальных течений. Именно таким течениям и соответствует рассмотренное выше отображение.

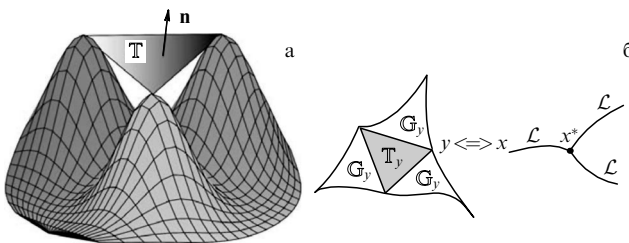


Рис. 15. (а) Характерный фрагмент поверхности $z = \phi(\mathbf{y}, t)$ с тремя пиками. Вершинами треугольника $\mathbb{T}$ служат точки касания поверхности касательной плоскостью. Внутренность проекции $\mathbb{T}_y$ треугольника на лагранжеву плоскость $\mathbf{y}$ отображается в одну точку x^* эйлеровой плоскости. От сторон треугольника отходят желоба, ограниченные линиями двойного касания поверхности и касательной плоскости, которые проектируются в линии $\mathcal{L}$ на эйлеровой плоскости. (б) Геометрия указанных областей в лагранжевой и эйлеровой плоскостях.

Отмеченные три типа отображений определяют структуру обобщённого поля плотности:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \hat{\rho}(\mathbf{x}, t) + \sum_i \varrho_i \delta_{\mathcal{L}_i} + \sum_j m_j^* \delta(\mathbf{x}_j^* - \mathbf{x}). \quad (83)$$

Первое слагаемое в правой части (83),

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}, t) = \left\{ \frac{\rho_0}{J(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t)} \right\},$$

описывает регулярную плотность равномерно двигающихся до текущего момента t частиц. В это слагаемое входят якобиан $J(\mathbf{y}, t)$ преобразования лагранжевых координат в эйлеровы (21), а также обратное ему отображение $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$. Фигурные скобки означают, что выражение справедливо лишь в областях первого типа. В областях второго и третьего типов, имеющих в эйлеровой плоскости меру нуль, следует доопределить выражение в фигурных скобках любыми ограниченными функциями.

Последнее слагаемое в правой части (83) даёт сингулярную составляющую плотности с носителями в точках третьего типа x^* , где собирается вещество из треугольных областей $\mathbb{T}_y$ лагранжевой плоскости. Коэффициенты при дельта-функциях равны массе вещества, изначально находившегося в треугольниках $\mathbb{T}_y$. Если, как мы полагаем, начальная плотность рассматриваемого двумерного потока всюду одинакова и равна ρ_0 , то

$$m^* = \rho_0 S_{\mathbb{T}},$$

где $S_{\mathbb{T}}$ — площадь соответствующего треугольника $\mathbb{T}_y$.

Отдельно остановимся на втором слагаемом в правой части (83), равном сумме линейных дельта-функций, отвечающих областям второго типа $\mathbb{G}_y$. Линейная дельта-функция действует на пробную функцию $\phi(\mathbf{y})$ следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}) \varrho \delta_{\mathcal{L}} d^2x = \int_{\mathcal{L}} \varrho(\sigma, t) \phi(\mathbf{x}(\sigma)) d\sigma. \quad (84)$$

Иначе говоря, линейная дельта-функция $\delta_{\mathcal{L}}$ "выкалывает" из двойного интеграла криволинейный интеграл первого типа вдоль кривой $\mathcal{L}$. Интеграл берётся от произведения линейной плотности ϱ материальной линии $\mathcal{L}$ и пробной функции $\phi(\mathbf{x})$. При записи интеграла использовано параметрическое уравнение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$ кривой $\mathcal{L}$, где σ — естественный параметр, равный длине кривой, отсчитываемой от некоторой её начальной точки.

Для того чтобы найти линейную плотность $\varrho(\sigma, t)$, возьмём на кривой $\mathcal{L}$ бесконечно малый отрезок $[\sigma, \sigma + d\sigma]$. На него отображается подобласть $d\mathbb{G}_y$ области $\mathbb{G}_y$, стягивающейся в кривую $\mathcal{L}$ эйлеровой плоскости. Подобласть $d\mathbb{G}_y$ ограничена отрезками $l_y(\sigma, t)$ и $l_y(\sigma + d\sigma, t)$, отображающимися в концы отрезка $[\sigma, \sigma + d\sigma]$. При этом искомая линейная плотность

$$\varrho(\sigma, t) = \lim_{d\sigma \rightarrow 0} \frac{dm(\sigma)}{d\sigma},$$

где $dm(\sigma)$ — масса вещества, первоначально сосредоточенная в подобласти $d\mathbb{G}_y$.

5.5. Ячеистая структура распределения вещества в модели слипания

В этом разделе проводится сравнение результатов МС с результатами прямого численного моделирования движения гравитационно взаимодействующих частиц.

Рисунок 16 демонстрирует хорошее согласие между мозаичной структурой, полученной в рамках МС, и результатом численного моделирования движения гравитационно взаимодействующих частиц в двумерном пространстве. Рисунок 17 иллюстрирует влияние степенного закона спектра начальных возмущений на малых масштабах. Начальные возмущения на рис. 17 сгенерированы с одинаковыми амплитудами и фазами, но на рис. 17а амплитуды гармоник с волновыми числами $k > k_{cr}$ взяты равными нулю. Соответственно, начальный потенциал для рис. 17а представляет собой сглаженную версию начального потенциала для рис. 17б. Оба рисунка, 17а и б, отвечают одинаковой стадии развития крупномасштабной структуры Вселенной (одинаковому значению D). Как видно, хотя общий характер мозаичной структуры на рис. 17а и б примерно одинаков, мозаика на рис. 17б имеет более богатую структуру на малых масштабах.

Опираясь на рассмотренные в разделах 5.3, 5.4 двумерные геометрические построения, нетрудно представить основные особенности мозаичной структуры крупномасштабного распределения вещества в трёхмер-

ном пространстве. А именно, начальный потенциал Φ_0 представляет собой трёхмерную гиперповерхность в четырёхмерном пространстве. Соответственно, аналогично тому, как это было подробно описано в одномерном и двумерном случаях, трёхмерный параболоид (78) опускается на гиперповерхность начального потенциала. Правила нахождения связи между лагранжевыми и эйлеровыми координатами остаются прежними: это координаты точек первого касания параболоидом начального потенциала и координаты центра параболоида. Существуют четыре способа касания параболоидом начального потенциала.

Если параболоид касается начального потенциала лишь в одной точке, то тогда соответствующая частица до текущего момента (значения параметра D) не испытывала столкновений с другими частицами. В остальных трёх случаях касания параболоидом сразу двух, трёх и четырёх точек начального потенциала центр параболоида соответствует частицам, слившимся в гранях, рёбрах и вершинах трёхмерной мозаичной структуры. Кроме того, подобно тому, что мы наблюдали в одномерном и двумерном случаях, в критические моменты, соответствующие исчезновению тех или иных ячеек трёхмерной мозаичной структуры, число точек касания параболоида и начального потенциала становится больше четырёх [90]. Набор поверхностей (блинов), массивных линий и компактных сгустков определяет мозаичную структуру распределения вещества в трёхмерном пространстве, в которой вещество сосредоточено в основном на границах мозаики — массивных блинах, линиях и вершинах, разделяющих расположенные внутри мозаичной структуры ячейки — тёмные области с низкой плотностью вещества. Такая трёхмерная мозаичная структура служит геометрическим скелетом реального распределения вещества во Вселенной.

Модель слипания обнаруживает нетривиальную структуру квазидвумерных стенок, которые окружают ячейки. Частицы, попавшие в стенки, продолжают двигаться внутри них, что в свою очередь приводит к образованию двумерной ячеистой структуры в самих стенках. Этот процесс иллюстрируется рис. 18, на котором показана такая стенка в трёх ортогональных проекциях [71]. На рисунке 18а, где стенка показана "анфас", отчётливо видны двумерные ячейки разного размера.

Упомянутые выше две разновидности МС были протестированы посредством сравнения с результатами численного моделирования гравитационного взаимодействия N частиц в двумерном и трёхмерном пространствах [59, 69–71, 79, 88]. Были использованы одинаковые начальные условия, а сравнение производилось на разных стадиях развития гравитационной неустойчивости. Кроме того, геометрическая версия ($v \rightarrow 0_+$) МС сравнивалась с результатами двумерного моделирования движения гравитационно взаимодействующих частиц в случае степенного начального спектра $P_\delta(k) \propto k^n$ с разными показателями степени, $n = 2, 0, -2$, и разными значениями критического волнового числа, при превышении которого спектр P полагался равным нулю [88].

Оказалось, что МС при малом, но не равном нулю коэффициенте вязкости $v > 0$ не только качественно, но и количественно хорошо согласуется с результатами численного моделирования на сильнонелинейной стадии развития гравитационной неустойчивости [69]. В целом,

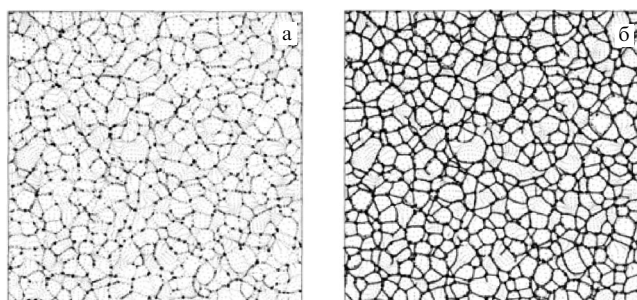


Рис. 16. (а) Распределение гравитационно взаимодействующих в двумерном пространстве частиц, полученное численным моделированием их движения. (б) Полученная в рамках двумерной версии МС хаотическая мозаичная структура, наложенная на распределение частиц, показанное на рис. а [88].

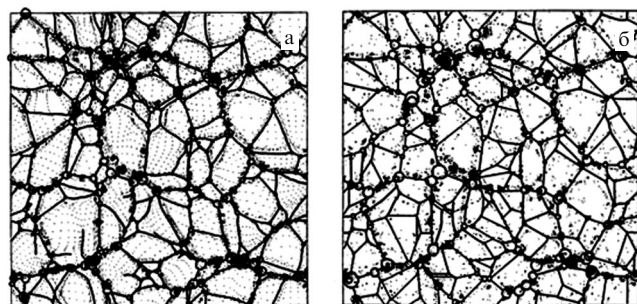


Рис. 17. Полученные в рамках МС плоские мозаичные структуры, наложенные на распределение частиц, найденное численным моделированием движения гравитационно взаимодействующих частиц в двумерном пространстве. Начальный потенциал Φ_0 имеет для рис. а и б одинаковую крупномасштабную структуру, но в случае рис. а Φ_0 сглажен за счёт удаления его мелкомасштабных компонент, учитываемых на рис. б [88].

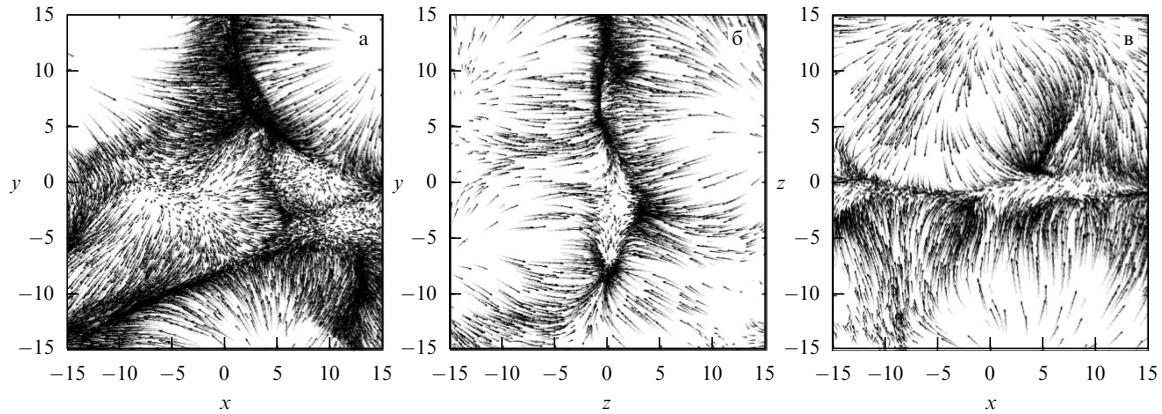


Рис. 18. Трёхмерная динамика МС. Падение вещества на блин в трёх ортогональных проекциях; xy -проекция (а) демонстрирует движение в плоскости блина [71].

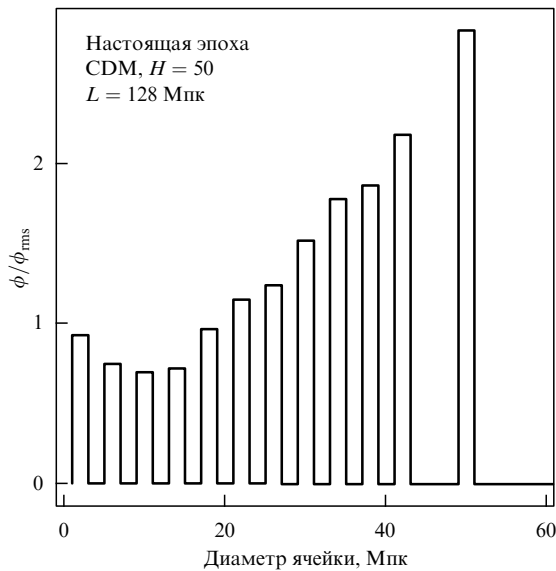


Рис. 19. Нормированный начальный гравитационный потенциал в центрах мозаичных ячеек (тёмных областей) в зависимости от диаметра ячеек [89].

сравнение результатов численного моделирования и моделей слипания демонстрирует довольно хорошее согласие распределений вещества, улучшающееся с возрастанием крутизны спада начального спектра на больших масштабах, характерном для модели Λ CDM (см. рис. 5). Наглядное подтверждение этому даёт рис. 6.

В работе [89] исследовался вопрос о корреляции пиков начального потенциала с размером ячеек структуры. В трёхмерной численной МС были идентифицированы ячейки, и внутри каждой из них были найдены пики начального потенциала. Рисунок 19 демонстрирует очевидную корреляцию между диаметром ячейки и высотой пика начального потенциала внутри её. Наглядное подтверждение этого результата можно увидеть на рис. 20, полученном в двумерном случае [95].

5.6. Динамика частиц внутри разрывов поля скоростей в уравнении Гамильтона–Якоби

В предельном случае исчезающе малой вязкости динамика трёхмерного движения (52) исследована в работах [96, 97], где показано, что в особенностях поля скорости

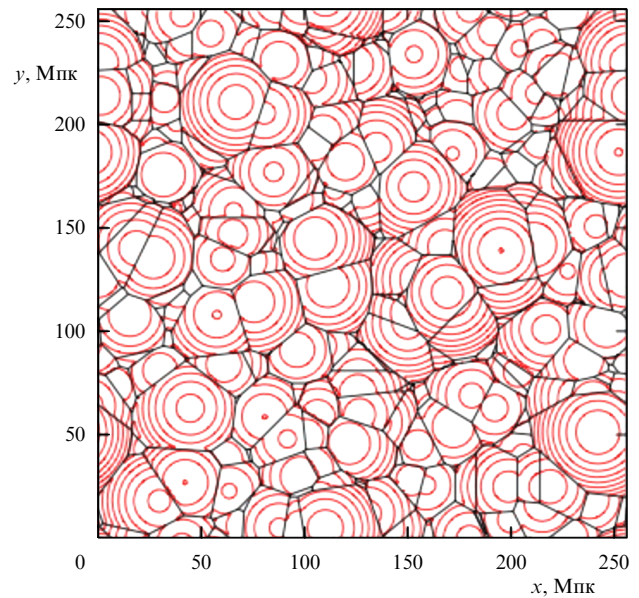


Рис. 20. Двумерная модель ячеистой структуры, полученной на основе потенциала, показанного светлыми (красными) кривыми, — так называемое квазиразбиение Вороного (quasi Voronoi tessellation) [95].

частицы ведут себя весьма нетривиальным образом. В частности, при определённых условиях густки могут покидать узлы структуры. Ниже излагаются основные результаты упомянутых и других работ в этом направлении. Материал данного раздела любезно предоставлен А.Н. Соболевским.

В многомерном случае УБ $\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0$ при условии, что поле скоростей $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ является безвихревым, т.е. $\mathbf{v} = \nabla \phi$, эквивалентно уравнению

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0. \quad (85)$$

Из механики известно, что функция действия ϕ общей гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, где $\mathbf{p}$ — вектор обобщённого импульса, удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\partial_t \phi + H(t, \mathbf{r}, \nabla \phi) = 0. \quad (86)$$

В частности, уравнению (85) соответствует гамильтониан $H(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2/2$.

В дальнейшем будем рассматривать общий гамильтониан $H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ при предположении, что как функция импульса $\mathbf{p}$ он нигде не обращается в бесконечность и является гладким и строго выпуклым. Это позволяет взаимно однозначно определить связь между импульсами и скоростями: $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, и ввести лагранжиан $L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{p}\mathbf{v} - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, где $\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Наша задача состоит в том, чтобы, опираясь на указанную связь с уравнением Бюргерса, придать уравнению Гамильтона–Якоби (86) гидродинамический смысл. Для этого поставим в соответствие решению ϕ этого уравнения поток, в котором частица, находящаяся в момент t в точке $\mathbf{r}$, движется со скоростью

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{r}, \nabla \phi(t, \mathbf{r})) . \quad (87)$$

Соотношение (87) представляет собой одно из канонических уравнений Гамильтона, в котором вместо импульса используется градиент ϕ .

Определение (87) скоростей частиц справедливо всюду, где решение ϕ уравнения (86) дифференцируемо. Однако из-за нелинейности уравнения Бюргерса в его решениях, вообще говоря, возникают разрывы, на которых скорость не определена. Аналогичные особенности (разрывы градиента ϕ) возникают и в решениях общего уравнения Гамильтона–Якоби вида (86). Таким образом, необходимо отдельно построить динамику частиц "в разрывах" решения.

В $(1+1)$ -мерном пространстве-времени такое построение не представляет трудностей. Как известно, скорость точки разрыва $x(t)$ в "корректном" решении УБ всегда удовлетворяет условиям $v(x(t) - 0, t) > \dot{x}(t) > v(x(t) + 0, t)$, т.е. по обе стороны от разрыва поток "наносит" частицы на разрыв, где они и остаются. Эти же условия выполнены и для общего уравнения Гамильтона–Якоби с выпуклым гамильтонианом. Таким образом, в одномерном случае попавшие в разрыв частицы не покидают его и продолжают двигаться вместе с разрывом.

В многомерном случае геометрия потока в окрестности разрыва тоже такова, что частицы "наносятся" на разрыв, однако само множество точек разрыва ("многообразие разрывов") является более сложным, чем в одномерном случае, и представляет собой объединение гладких кусков с разными размерностями: в двумерном пространстве разрывы происходят вдоль кривых, концы которых соединяются в точках тройной и более высокой кратности, а в трёхмерном пространстве выделяются поверхности разрыва, соединяющиеся между собой линиями, которые в свою очередь оканчиваются в точках кратностью четыре и выше.

Таким образом, частицы, попавшие в разрыв, сохраняют степени свободы внутри него, и определение их движения внутри многообразия разрывов остаётся нетривиальной задачей.

Для УБ (или, что то же самое, уравнения Гамильтона–Якоби с квадратичным гамильтонианом) эта задача впервые была решена И.А. Богаевским [96, 98]. Часть его результатов была предвосхищена в более ранних работах Х. Брезиса [99] (см. также [100, лемма 5.6.2]), но эти работы оставались неизвестными специалистам по нелинейной акустике и гидродинамике. Более того,

Богаевский впервые классифицировал куски многообразия разрывов по признаку того, удерживают ли они попавшие в них частицы или те могут переходить в куски с более высокими размерностями.

Методы работ [96, 98–100] существенно используют квадратичность гамильтониана. В настоящем обзоре принят другой подход: рассматривается общий выпуклый гамильтониан и изложение следует работам А.Н. Соболевского и К.М. Ханина [97, 101].

Напомним, что решение уравнения Гамильтона–Якоби (86), удовлетворяющее начальному условию $\phi(t=0, \mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r})$, может быть представлено в виде, выражающем принцип наименьшего действия:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \min \left[\phi_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(s, \gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right],$$

где выражение в квадратных скобках представляет собой лагранжево действие вдоль траектории γ с учётом его начального значения ϕ_0 , а минимум вычисляется по всем траекториям, удовлетворяющим условию $\gamma(t) = \mathbf{r}$.

В большинстве точек пространства-времени этот минимум достигается на единственной траектории, а решение ϕ дифференцируемо. Однако в некоторых точках одно и то же минимальное значение действия соответствует нескольким траекториям γ_i , выходящим из разных исходных пунктов и обладающих различными значениями скорости в момент t . Именно такие точки составляют множество разрывов поля скоростей, соответствующих решению ϕ по формуле (87).

В окрестности такой точки $(t, \mathbf{r})$ решение ϕ может быть представлено как минимум из нескольких гладких функций ϕ_i , каждая из которых определяется начальным условием ϕ_0 в окрестности соответствующего исходного пункта $\gamma_i(0)$:

$$\begin{aligned} \phi(t', \mathbf{r}') &= \min_i \phi_i(t', \mathbf{r}') = \\ &= \phi(t, \mathbf{r}) + \min_i [\nabla \phi_i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \partial_t \phi_i(t' - t)] + \dots, \end{aligned}$$

где выделен линейный порядок приближения.

В точке $(t, \mathbf{r})$ гладкие функции ϕ_i пересекаются, а значения производных $\partial_t \phi$, $\nabla \phi$ не определены. При свёртке со сглаживающим ядром размером ϵ или введении малой вязкости ϵ в уравнение (86) сглаженное решение ϕ^ϵ в небольшой окрестности этой точки обладает производными, значения которых находятся между предельными значениями $\partial_t \phi_i$, $\nabla \phi_i$, соответствующими гладким ветвям решения ϕ_i . Поэтому естественно считать, что для негладкой функции ϕ такая окрестность стянута в точку $(t, \mathbf{r})$, в которой вектор производных $(\partial_t \phi, \nabla \phi)$ принимает все значения из многогранника — выпуклой оболочки множества $\{(\partial_t \phi_i, \nabla \phi_i)\}$.

Для краткости обозначим $\mathbf{p}_i = \nabla \phi_i(t, \mathbf{r})$. Поскольку ϕ_i — гладкие функции, удовлетворяющие уравнению Гамильтона–Якоби в окрестности $(t, \mathbf{r})$, то $\partial_t \phi_i = -H(t, \mathbf{r}, \nabla \phi_i) = -H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}_i) = -H_i$, а линейное приближение для ϕ принимает вид

$$\phi(t', \mathbf{r}') - \phi(t, \mathbf{r}) = \min_i [\mathbf{p}_i(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - H_i(t' - t)] + \dots$$

Эти выкладки приводят к простому, но важному заключению: если в момент t траектория выходит из точки $\mathbf{r}$ со скоростью $\mathbf{v}$, то в бесконечно близкие моменты $t' > t$

решение в непосредственной окрестности траектории $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}(t' - t)$ будет определяться не всеми ветвями ϕ_i , а лишь теми, индексы которых принадлежат множеству

$$I_{t,\mathbf{r}}(\mathbf{v}) = \arg \min_i [\mathbf{p}_i \mathbf{v} - H_i].$$

"Репертуар" значений импульса вдоль такой траектории задаётся выпуклой оболочкой соответствующего множества импульсов $\text{conv} \{\mathbf{p}_i; i \in I_{t,\mathbf{r}}(\mathbf{v})\}$. В силу формулы (87) этим импульсам соответствуют скорости вида $\mathbf{v}' = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}')$, где

$$\mathbf{p}' = \nabla_{\mathbf{p}} L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}') \in \text{conv} \{\mathbf{p}_i; i \in I_{t,\mathbf{r}}(\mathbf{v})\}.$$

Назовём скорость $\mathbf{v}^*$ допустимой в точке $(t, \mathbf{r})$, если

$$\nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}^*) \in \text{conv} \{\mathbf{p}_i; i \in I_{t,\mathbf{r}}(\mathbf{v}^*)\}, \quad (88)$$

т.е. если $\mathbf{v}^*$ соответствует импульсу, входящему в "репертуар" импульсов вдоль траектории $\mathbf{r} + \mathbf{v}^*(t' - t)$.

Оказывается, что допустимая скорость определяется единственным образом [97]. Действительно, нетрудно показать, что при $\mathbf{v}$, удовлетворяющей условию (88), строго выпуклая функция

$$\hat{L}(\mathbf{v}) = L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) + \max_i [H_i - \mathbf{p}_i \mathbf{v}] \quad (89)$$

достигает своего единственного минимума. В частности, если функция ϕ дифференцируема в $(t, \mathbf{r})$, т.е. имеется всего одна ветвь, то (88) сводится к формуле $\nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \nabla \phi(t, \mathbf{r})$, которая эквивалентна (87). Поэтому не только в разрывах, но и всюду внутри потока, соответствующего негладкому решению ϕ уравнения Гамильтона – Якоби (86), динамика траекторий может быть определена с помощью следующего обобщения канонического уравнения (87):

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}^*(t, \mathbf{r}), \quad (90)$$

где $\mathbf{v}^*(t, \mathbf{r})$ находится по значениям $\nabla \phi_i(t, \mathbf{r}) = \mathbf{p}_i$, согласно условию (88).

В правой части обыкновенного дифференциального уравнения (90) фигурирует разрывное поле скоростей, поэтому ни существование, ни единственность его интегральных траекторий не очевидны. Рассмотрим сглаженное тем или иным способом решение ϕ^ϵ и соответствующий ему поток сглаженных траекторий, определяемых уравнением

$$\dot{\mathbf{r}}^\epsilon = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{r}^\epsilon, \nabla \phi^\epsilon(t, \mathbf{r}^\epsilon)).$$

Можно показать, что поток интегральных траекторий дифференциального уравнения (90) с разрывной правой частью может быть построен как предел сглаженных траекторий: если при стремлении параметра сглаживания ϵ к нулю ϕ^ϵ сходится к ϕ , а $\mathbf{r}^\epsilon$ стремится к $\mathbf{r}$, то односторонние производные $\dot{\mathbf{r}}^\epsilon(t+0)$ сглаженных траекторий сходятся к допустимой скорости $\mathbf{v}^*$ в точке $(t, \mathbf{r})$.

Заметим, что построенный поток необратим: в точках разрыва поля скоростей, характеризуемых набором импульсов $\mathbf{p}_i = \nabla \phi_i$, односторонняя производная $\dot{\mathbf{r}}(t-0)$ может принимать любое из значений $\nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}_i)$, но производная $\dot{\mathbf{r}}(t+0)$ определена однозначно. При $i' \notin I_{t,\mathbf{r}}(\mathbf{v}^*)$ полная производная ветви $\phi_{i'}$ вдоль направления, заданного скоростью $\mathbf{v}^*$, больше аналогичных

полных производных для ветвей с индексами $i \in I_{t,\mathbf{r}}(\mathbf{v}^*)$:

$$\dot{\phi}_{i'} = \partial_i \phi_{i'} + \mathbf{v}^* \nabla \phi_{i'} = \mathbf{p}_{i'} \mathbf{v}^* - H_{i'} > \min_i (\mathbf{p}_i \mathbf{v}^* - H_i).$$

Поэтому ветвь $\phi_{i'}$ не вносит вклада в поточечный минимум $\min_i \phi_i$ при $t' > t$, а траектория, проходящая через точку $(t, \mathbf{r})$ пересечения многих ветвей решения, не движется вместе с этим пересечением, а покидает его при $t' > t$ по участку многообразия разрывов, имеющему более высокую размерность. Это явление впервые было замечено И.А. Богаевским [96, 98].

Однако даже среди тех ветвей ϕ_i , индексы которых входят в $I_{t,\mathbf{r}}(\mathbf{v}^*)$, вообще говоря, могут иметься "лишние". Действительно, если известна допустимая скорость $\mathbf{v}^*$, то в линейном приближении можно определить, как будет деформироваться конфигурация импульсов $\{\mathbf{p}_i(t')\}$ при малых $t' - t > 0$. При некоторых дополнительных предположениях относительно L можно показать, что минимальный набор ветвей решения, определяющих исходящую из $(t, \mathbf{r})$ траекторию, составляют те, которые участвуют в образовании минимума по $\mathbf{v}$ функции

$$\hat{L}(t', \mathbf{v}) = L(t', \mathbf{r} + \mathbf{v}^*(t' - t), \mathbf{v}) + \max_i [H_i(t') - \mathbf{p}_i(t') \mathbf{v}]$$

при достаточно малых $t' > t$ (ср. (89)). Этот минимальный набор определяется единственным образом и в свою очередь сам определяет единственную интегральную траекторию уравнения (90), проходящую через точку $(t, \mathbf{r})$ в направлении "вперёд" во времени. Так завершается доказательство существования и единственности потока интегральных траекторий уравнения (90).

6. О статистических свойствах потенциальной турбулентности — векторной турбулентности Бюргерса

Как отмечено в разделе 5, векторное УБ (72) служит базовым уравнением МС. Совместно с уравнением для плотности его используют для описания формирования крупномасштабных структур Вселенной на нелинейной стадии гравитационной неустойчивости, когда силами давления можно пренебречь. Потому ниже мы кратко обсудим статистические свойства турбулентности Бюргерса — решений уравнения (72) со случайными начальными условиями. Рассмотрим лишь характерный для развития гравитационной неустойчивости случай потенциального поля скорости, трактуя последнее как поле потенциальной турбулентности.

Одномерное нелинейное уравнение диффузии

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (91)$$

первоначально было введено Бюргерсом [38] как модель гидродинамической турбулентности. Другие проблемы, приводящие к многомерному уравнению Бюргерса или его разновидностям — рост границы раздела сред в результате случайного осаждения вещества на поверхности, движение фронта пламени [102]. В этих случаях потенциал ψ соответствует профилю поверхности, а уравнение, описывающее его эволюцию, эквивалентно уравнению KPZ (73) [102–105]. В задачах о росте поверхности раздела двух сред коэффициент ν имеет смысл коэффициента поверхностного натяжения, а сла-

гаемое в правой части описывает линейные эффекты сглаживания поверхности. Изрезанность поверхности измеряется её среднеквадратичным градиентом

$$E(t) = \langle (\nabla \psi(\mathbf{x}, t))^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_i E_i(t), \quad (92)$$

$$E_i(t) = \left\langle \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \langle v_i^2 \rangle. \quad (93)$$

Угловые скобки здесь означают усреднение по ансамблю или интегрирование по пространственной координате (для локализованного возмущения).

До образования разрывов многомерное УБ в пределе исчезающе малой вязкости эквивалентно уравнению, описывающему свободное движение частиц. В лагранжевом представлении скорость частиц $\mathbf{V}(t; \mathbf{y})$ является постоянной и зависит лишь от начальной (лагранжевой) координаты частицы $\mathbf{y}$. В одномерном случае до образования разрывов увеличение длины одного элементарного интервала в эйлеровом представлении $\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{y} + t \Delta \mathbf{V}$ компенсируется уменьшением длины соседнего интервала $\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{y} - t \Delta \mathbf{V}$ и, следовательно, энергия волны сохраняется. После образования разрывов энергия начинает уменьшаться со временем. В многомерном случае изменение элементарного объёма в эйлеровом представлении зависит от начальной кривизны возмущения поверхности и подобной компенсации растягивающихся и сжимающихся объёмов не наблюдается. Следовательно, при $d > 1$ мера неровности поверхности $E(t)$ (92) может как возрастать, так и убывать со временем [106, 107], что является результатом отсутствия в данном случае какого-либо закона сохранения. Тем не менее мы будем называть $E(t)$ "энергией турбулентности", а $E_i(t)$ — энергией i -й компоненты скорости.

Анализу динамических и статистических свойств решений одномерного, а в последние годы и трёхмерного, УБ посвящено много работ (см., например, библиографию в монографиях [42, 45, 105, 108] и обзором [101, 109, 110]). Несмотря на то что УБ имеет точное решение — решение Хопфа–Коула, анализ детерминированных и особенно случайных полей представляет собой весьма сложную математическую задачу. Так, первые серьёзные результаты для броуновского начального потенциала были получены лишь спустя 30 лет [39] после появления самого уравнения [38], а точное статистическое описание этого специального случая было дано относительно недавно [111].

Уравнение Бюргерса описывает два основных эффекта, присущих любой турбулентности [112]: нелинейное перераспределение энергии по спектру и влияние вязкости в области малых пространственных масштабов. Именно поэтому УБ представляет большой интерес не только для прямых физических приложений, но и для проверки теории и различных моделей развитой турбулентности.

Отметим, что исследование турбулентности Бюргерса при исчезающе малой вязкости сводится к отысканию статистических характеристик координат абсолютных максимумов действия $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q})$. Использование предельных теорем теории выбросов случайных полей позволило дать практически исчерпывающее описание турбулентности Бюргерса как в одномерном, так и в многомерном случаях. Для турбулентности Бюргерса

удастся найти строго условия существования и типы автомодельных режимов вырождения турбулентности, спектры и корреляционные функции, одноточечные и многоточечные вероятностные распределения (см., например, [36, 42, 43, 45, 91, 101, 107, 109, 111, 113–116]).

Характерным для эволюции турбулентности является возникновение локальной и статистической автомодельности. Непрерывное первоначально поле трансформируется в ячеистую структуру, причём в каждой из ячеек на больших временах поле скорости имеет универсальную автомодельную структуру [36, 42]:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_k}{t}. \quad (94)$$

С течением времени происходит поглощение одних ячеек другими, а характерный масштаб поля возрастает. Вследствие многократного слияния ячеек статистические свойства турбулентности также становятся автомодельными.

При отсутствии дальних корреляций начального поля поведение турбулентности на больших временах определяется "хвостами" функции распределения начального потенциала. При этом, в зависимости от вида начального распределения потенциала, реализуется один из трёх универсальных автомодельных режимов затухания турбулентности [115]), а в трёхмерной турбулентности возможен случай возрастания её "энергии" (92).

Если начальный потенциал $\psi_0(\mathbf{x})$ — случайное гауссово поле, то асимптотическое поведение турбулентности определяется видом начального спектра в области малых волновых чисел, т.е. крупномасштабными компонентами поля. Если эти компоненты в достаточной степени представлены в начальном спектре, то реализуется автомодельный режим турбулентности, закон возрастания внешнего масштаба которого определяется видом спектра в области малых волновых чисел [42, 43].

Если в начальном поле отсутствуют крупномасштабные компоненты, то реализуется иной режим автомодельности [42, 115]. При этом возрастание внешнего масштаба $L(t) \sim t^{1/2}$ (с логарифмической поправкой) определяется интегральными свойствами начального спектра.

Спектральная плотность $E(k, t)$ также изотропна и самоподобна,

$$E(k, t) = \frac{L^3(t)}{t^2} \tilde{E}(kL(t)).$$

При больших волновых числах k образование разрывов (мелкомасштабных скачков) приводит к появлению степенной асимптотической зависимости $\tilde{E}(k) \sim k^{-2}$. В области малых волновых чисел в трёхмерном случае спектр также характеризуется универсальным поведением,

$$E(k, t) = k^{d+1} \frac{L^{4+d}(t)}{t^2} \sim k^{d+1} t^{d/2},$$

означающим нелинейную генерацию крупномасштабной компоненты, отвечающей области малых волновых чисел.

Так, в случае трёхмерной турбулентности Бюргерса $E(k, t) \sim k^4 t^{3/2}$. При больших, но конечных числах Рейнольдса разрывы имеют конечную ширину $\delta \sim \mu t / L(t)$ и возрастают со временем по отношению к интегральному масштабу как $\delta / L(t) \sim (\ln(\sigma_\psi t / I_{\text{eff}}^2))^{1/2}$. Вследствие этого

на очень больших временах наступает линейная стадия эволюции.

В трёхмерной турбулентности Бюргерса, как и в одномерном случае [114, 115], возможно нарушение глобальной статистической автомодельности: в области малых волновых чисел спектр сохраняется, но эволюция большей части спектра носит универсальный характер и определяется интегральными характеристиками начального спектра.

7. Заключение

Подводя итог обсуждению разных моделей формирования крупномасштабной структуры Вселенной, подчеркнём, что модель слипания, опирающаяся на трёхмерное УБ (51), даёт наглядную интерпретацию формирования основных свойств крупномасштабного распределения вещества и количественно (хотя лишь приближённо) согласуется с космологическими наблюдениями крупномасштабной структуры Вселенной. Предельная версия МС, соответствующая $v \rightarrow 0_+$, приводит к естественной геометрической конструкции "скелета" крупномасштабной структуры, которая может быть охарактеризована как "квазимозаика Вороного" [44, 117]. Сравнение следствий МС с результатами численного моделирования движения N гравитационно взаимодействующих частиц в одно-, дву- и трёхмерном пространствах демонстрирует хорошее согласие на всех стадиях, включая стадию развития сильнонелинейной гравитационной неустойчивости.

Таким образом, МС позволяет естественным образом объяснить появление когерентных крупномасштабных структур, таких как массивные поверхности (блины Зельдовича), нити и компактные сгустки вещества как следствие эволюции плотности вещества под действием слабых начальных флуктуаций гравитационного потенциала.

Подчеркнём, что значения начального гравитационного потенциала тесно связаны с деталями возникающей крупномасштабной структуры, как это видно из рис. 17: чем больше пик начального потенциала, тем большего размера достигает ячейка мозаичной структуры вокруг него (см. также рис. 6.2 в [95]). Формирование и последующая эволюция крупномасштабной структуры описывается в рамках МС как процесс, состоящий из двух стадий [89, 118].

В течение первой стадии материя концентрируется в блинах, затем движется внутри них к массивным линиям — рёбрам зарождающейся структуры, движение вдоль которых приводит к образованию вершин — массивных компактных сгустков в окрестности смыкания рёбер. В популярной сейчас Λ CDM-модели эта стадия характеризуется ничтожно малым по космологическим понятиям масштабом, определяемым типом тёмного вещества, предполагаемым в той или иной модели. Так, если тёмное вещество состоит из гипотетических нейтрально с массой порядка 100 ГэВ, то характерная масса первых структур всего лишь порядка массы Земли (см., например, [119]). К концу первой стадии полностью формируется мозаичная структура распределения вещества, в которой основная его часть сосредоточивается в рёбрах и вершинах структуры, и только малая часть вещества остаётся в блинах и тёмных областях — внутренностях отдельных мозаичных ячеек. Эта стадия до сих пор не исследована с помощью численного моделирования, так как она предъявляет пока невыпол-

нимые требования к необходимому числу частиц в модели.

Вторая стадия характеризуется деформацией мозаичной структуры из-за гравитационного взаимодействия вещества. На этой стадии одни ячейки становятся всё более массивными и крупными, в то время как другие сжимаются и исчезают, поглощаясь более крупными ячейками. В конечном итоге почти вся масса вещества в основном сосредоточивается в гравитационно связанных компактных скоплениях тёмного вещества, от самых маломассивных, возникших на первой стадии, до очень больших, естественно ассоциирующихся с самыми массивными скоплениями галактик. Такие компактные скопления тёмного вещества, наблюдаемые в численных моделях образования структуры, носят название тёмных гало (dark matter halos). Гало, соответствующие галактическим массам, гравитационно притягивают барионную компоненту массы, и в них образуются звёзды; таким образом гало становятся галактиками. Гало с большими массами могут образовывать группы галактик и скопления галактик.

В принятой модели Вселенной начальный спектр возмущений таков, что тёмные гало в свою очередь движутся когерентным образом, концентрируясь вдоль суперблинов и суперфиламентов, поэтому рёбра и грани структуры на этой стадии представляют собой области повышенной концентрации тёмных гало с разной массой. Подобный сценарий развития крупномасштабной структуры характерен для распределения вещества в настоящее время в рамках стандартной космологической модели. В этой модели начальный спектр возмущений плотности изображён на рис. 5, а спектр мощности начального гравитационного потенциала получается умножением спектра плотности на k^{-4} . Суперблины и суперфиламенты могут быть идентифицированы в рамках МС в случае сглаженного начального потенциала [88]. Поток массы из внутреннего объёма ячеек в грани, из граней в рёбра и из рёбер в вершины остаётся в целом таким же, как и на первой стадии, что подтверждается наблюдениями [21, 22].

В общепринятой сейчас модели Вселенной (Λ CDM) по мере ускорения темпа расширения при малых z линейное возрастание возмущений замедляется: так, при $z = 0,6$ линейная функция роста возмущений составляет около 90 %, а в настоящую эпоху — около 75 % от функции роста в модели Эйнштейна–де Ситтера в соответствующие эпохи. В скором по космологическим масштабам времени возрастание линейных возмущений практически прекратится и структуры, достигшие вириального равновесия, будут эволюционировать как независимые островные вселенные, разбегающиеся друг от друга с экспоненциально возрастающими скоростями. Таким образом, современная структура Вселенной практически достигла наибольшего масштаба и в дальнейшем расти не будет.

Численные эксперименты, моделирующие современную крупномасштабную структуру, как правило, имеют разрешение, соответствующее массам достаточно больших галактик, для которых можно измерять красные смещения в больших обзорах, подобных SDSS, и, следовательно, сравнивать результаты моделирования с наблюдениями. В итоге в таких численных моделях структура в малых масштабах неизбежно полностью "сглажена". В частности, поле плотности тёмного вещества в тёмных областях, лишённых галактик, оказывается нереалистично гладким либо в точности нуле-

вым после того, как все частицы поглотились тёмными гало.

Модель слипания предсказывает, что структура распределения плотности тёмного вещества в тёмных областях имеет вид иерархической ячеистой структуры, в которой большие ячейки содержат в себе ячейки меньшего размера, внутри которых находятся ячейки ещё меньшего размера и т.д. вплоть до самых малых, с которых началось образование структуры (см. [95]).

Непрояснённым остаётся важный вопрос о доле вещества в структурах иерархии. Современные численные модели определённо свидетельствуют, что доля массы довольно быстро убывает с уменьшением масштаба структуры, но количественного ответа на этот вопрос пока нет. Приведённые во введении величины долей массы в различных элементах ячеистой структуры [19] также не являются окончательными. Во-первых, определения элементов структуры в расчётах содержат несколько параметров, значения которых могут измениться в будущем. Во-вторых, сами определения не являются пока общепринятыми, и они также могут быть заменены другими. В-третьих, результаты зависят от масштаба сглаживания начального спектра, используемого в численной модели, а также от размера области, в которой проводилось численное моделирование.

Так, структура в работе [19] моделировалась в кубе размером $150 h^{-1}$ Мпк, что примерно равно 214 Мпк при выбранных параметрах космологической модели. Иначе говоря, область моделирования составляет около $1/50$ размера или 10^{-5} объёма наблюдаемой Вселенной. Это означает, что часть начального спектра с волнами длиннее 214 Мпк не присутствует в модели, что сильнее всего отражается на начальном потенциале, так как он значительно сильнее зависит от длинноволновой части спектра, чем начальные возмущения скорости или плотности. Модель слипания предсказывает, что структура существенно зависит от начального потенциала и, следовательно, приведённые величины могут заметно измениться в расчётах, охватывающих области, сравнимые с наблюдаемым размером Вселенной.

Модель слипания, которая была предложена около четверти века назад [20, 36, 37], тем не менее продолжает развиваться [43, 92–94, 97] и используется сейчас как полезная теоретическая модель, помогающая понять и предсказать конкретные особенности сложных процессов образования галактик [120–122], турбулентности межгалактической среды [123] и крупномасштабной структуры Вселенной [21, 22, 31, 40, 41, 124].

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ № 11-02-00774, грантом государственной поддержки ведущих научных школ НШ-3700.2010.2 и проектом Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (контракт № 02.740.11.0565). Авторы благодарны Й. Хиддингу и Р. Ван де Вейгарту, предоставившим несколько новых рисунков для данного обзора.

Список литературы

1. Зельдович Я Б *Астрофизика* **6** 319 (1970) [Zel'dovich Ya B *Astrophys.* **6** 164 (1970)]
2. Zel'dovich Ya B *Astron. Astrophys.* **5** 84 (1970)
3. Shandarin S F, Sunyaev R A *Astron. Astrophys.* **500** 19 (2009)
4. Шандарин С Ф, Дорошкевич А Г, Зельдович Я Б *УФН* **139** 83 (1983) [Shandarin S F, Doroshkevich A G, Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. Usp.* **26** 46 (1983)]
5. Гуревич А В, Зыбин К П *УФН* **165** 723 (1995) [Gurevich A V, Zybin K P *Sov. Phys. Usp.* **38** 687 (1995)]
6. Knop R A et al. (Supernova Cosmology Project) *Astrophys. J.* **598** 102 (2003)
7. Riess A G et al. (Supernova Search Team) *Astrophys. J.* **607** 665 (2004)
8. Горбунов Д С, Рубаков В А *Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва* (М.: ЛКИ, 2008) [Gorbu-nov D S, Rubakov V A *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory* (Singapore: World Scientific, 2011)]
9. Mukhanov V *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005)
10. Komatsu E et al. (WMAP Collab.) *Astrophys. J. Suppl.* **180** 330 (2009)
11. Percival W J et al. (The 2dFGRS Team) *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **337** 1068 (2002)
12. Dodelson S et al. (SDSS Collab.) *Astrophys. J.* **572** 140 (2002)
13. Freedman W L et al. (HST Collab.) *Astrophys. J.* **553** 47 (2001)
14. Lahav O, Liddle A R, The Review of Particle Physics 2010 (aka the Particle Data Book), <http://pdg.lbl.gov/>
15. Бурдюжа В В *УФН* **180** 439 (2010) [Burdzyuzha V V *Phys. Usp.* **53** 419 (2010)]
16. Рубаков В А *УФН* **181** 655 (2011) [Rubakov V A *Phys. Usp.* **54** 633 (2011)]
17. Navarro J F et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **402** 21 (2010)
18. Zeldovich Ya B, Einasto J, Shandarin S F *Nature* **300** 407 (1982)
19. Aragón-Calvo M A, van de Weygaert R, Jones B J T *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **408** 2163 (2010)
20. Gurbatov S N, Saichev A I, Shandarin S F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **236** 385 (1989)
21. Bond N A, Strauss M A, Cen R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **406** 1609 (2010)
22. Bond N A, Strauss M A, Cen R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **409** 156 (2010)
23. Friedman A Z. *Phys.* **10** 377 (1922)
24. Hubble E *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **15** 168 (1929)
25. Geller M J, Huchra J P *Science* **246** 897 (1989)
26. Gott J R (III) et al. *Astrophys. J.* **624** 463 (2005)
27. Jenkins A et al. (Virgo Consortium) *Astrophys. J.* **499** 20 (1998)
28. Зельдович Я Б, Новиков И Д *Строение и эволюция Вселенной* (М.: Наука, 1975)
29. Peebles P J E *The Large-scale Structure of the Universe* (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1980)
30. Shandarin S F, Zeldovich Ya B *Rev. Mod. Phys.* **61** 185 (1989)
31. Sahni V, Coles P *Phys. Rep.* **262** 1 (1995)
32. Jeans J H *Astronomy and Cosmogony* (Cambridge: The Univ. Press, 1928)
33. Лифшиц Е М *ЖЭТФ* **16** 587 (1946)
34. Doroshkevich A G et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **192** 321 (1980)
35. Klypin A A, Shandarin S F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **204** 891 (1983)
36. Гурбатов С Н, Саичев А И *Изв. вузов. Радиофизика* **27** 456 (1984) [Gurbatov S N, Saichev A I *Radiophys. Quantum Electron.* **27** 303 (1984)]
37. Гурбатов С Н, Саичев А И, Шандарин С Ф *ДАН СССР* **285** 323 (1985) [Gurbatov S N, Saichev A I, Shandarin S F *Sov. Phys. Dokl.* **20** 921 (1985)]
38. Burgers J M *Kon. Ned. Akad. Wet. Verh.* **17** 1 (1939)
39. Burgers J M *The Nonlinear Diffusion Equation* (Dordrecht: D. Reidel, 1974)
40. Weinberg D H, Gunn J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **247** 260 (1990)
41. Weinberg D H, Gunn J E *Astrophys. J. Lett.* **352** L25 (1990)
42. Гурбатов С Н, Малахов А Н, Саичев А И *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии* (М.: Наука, 1990) [Gurbatov S N, Malakhov A N, Saichev A I *Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays, Particles* (Manchester: Manchester Univ. Press, 1991)]
43. Vergassola M et al. *Astron. Astrophys.* **289** 325 (1994)
44. Molchanov S A, Surgailis D, Woyczynski W A *Ann. Appl. Probab.* **7** 200 (1997)
45. Гурбатов С Н, Руденко О В, Саичев А И *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложение к нелинейной акустике* (М.: Физматлит, 2008) [Gurbatov S N, Rudenko O V, Saichev A I *Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media: General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics* (Berlin: Springer-Verlag jointly with Higher Education Press, 2011)]
46. Seljak U, Zaldarriaga M, http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_cmbfast_ov.cfm
47. Jones B J T *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **307** 376 (1999)
48. Carroll S M, Press W H, Turner E L *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **30** 499 (1992)
49. Shandarin S F *Physica D* **77** 342 (1994)
50. Зельдович Я Б, Мамаев А В, Шандарин С Ф *УФН* **139** 153 (1983) [Zel'dovich Ya B, Mamaev A V, Shandarin S F *Sov. Phys. Usp.* **26** 77 (1983)]

51. Дорошкевич А Г, Шандарин С Ф *Астрон. журн.* **55** 1144 (1978) [Doroshkevich A G, Shandarin S F *Sov. Astron.* **22** 653 (1978)]
52. Bardeen J M et al. *Astrophys. J.* **304** 15 (1986)
53. Lee J, Shandarin S F *Astrophys. J.* **500** 14 (1998)
54. Дорошкевич А Г *Астрофизика* **6** 581 (1970) [Doroshkevich A G *Astrophys. J.* **6** 320 (1970)]
55. Arnold V I, Shandarin S F, Zel'dovich Ya B *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **20** 111 (1982)
56. Shandarin S F et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 7 (1995)
57. Shandarin S F *JCAP* (05) 015 (2011)
58. Shandarin S F, Habib S, Heitmann K (2011), in preparation
59. Nusser A, Dekel A *Astrophys. J.* **362** 14 (1990)
60. Coles P, Melott A L, Shandarin S F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **260** 765 (1993)
61. Melott A L, Pellman T F, Shandarin S F *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **269** 626 (1994)
62. Beacom J F et al. *Astrophys. J.* **372** 351 (1991)
63. Little B, Weinberg D H, Park C *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **253** 295 (1991)
64. Melott A L, Shandarin S F *Astrophys. J.* **410** 469 (1993)
65. Aurell E, Gurbatov S N, Wertgeim I I *Phys. Lett. A* **182** 109 (1993)
66. Гурбатов С Н, Пасманик Г В *ЖЭТФ* **115** 564 (1999) [Gurbatov S N, Pasmanik G V *JETP* **88** 309 (1999)]
67. Дорошкевич А Г, Рябенский В С, Шандарин С Ф *Астрофизика* **9** 257 (1973) [Doroshkevich A G, Ryaben'kii V S, Shandarin S F *Astrophys. J.* **9** 144 (1973)]
68. Munshi D, Sahni V, Starobinsky A A *Astrophys. J.* **436** 517 (1994)
69. Melott A L, Shandarin S F, Weinberg D H *Astrophys. J.* **428** 28 (1994)
70. Hidding J et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* (2011), to be published
71. Hidding J et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* (2012), to be published
72. Saichev A I, Woyczynski W A *Distributions in the Physical and Engineering Sciences* Vol. 1 (Boston: Birkhäuser, 1997)
73. Saichev A I, Woyczynski W A *IMA Vol. Math. Appl.* **77** 167 (1996)
74. Saichev A I, Woyczynski W A *IMA Vol. Math. Appl.* **85** 359 (1997)
75. Bernardeau F, Kofman L *Astrophys. J.* **443** 479 (1995)
76. Buchert T, Domínguez A *Astron. Astrophys.* **438** 443 (2005)
77. Weinan E, Rykov Yu G, Sinai Ya G *Commun. Math. Phys.* **177** 349 (1996)
78. Андриевский А А, Гурбатов С Н, Соболевский А Н *ЖЭТФ* **131** 1018 (2007) [Andrievsky A A, Gurbatov S N, Sobolevsky A N *JETP* **104** 887 (2007)]
79. Shandarin S F, Sathyaprakash B S *Astrophys. J.* **467** L25 (1996)
80. Hopf E *Commun. Pure Appl. Math.* **3** 201 (1950)
81. Cole J D *Quart. Appl. Math.* **9** 225 (1951)
82. Aurell E et al. *Physica D* **186** 171 (2003)
83. Noullez A, Fanelli D, Aurell E *J. Comput. Phys.* **186** 697 (2003); cond-mat/0101336
84. Fanelli D, Aurell E, Noullez A, in *Astrophysical Supercomputing using Particle Simulations* (IAU Symp., No. 208, Eds J Makino, P Hut) (San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2003) p. 389
85. Fanelli D, Aurell E *Astron. Astrophys.* **395** 399 (2002)
86. Gurbatov S N, in *Dark Matter in the Universe. Proc. of the Intern. School of Physics E. Fermi, Course CXXXII* (Eds S Bonometto, J R Primack, A Provenzale) (Oxford: IOS Press, 1996) p. 645
87. Kofman L, Pogossian D, Shandarin S *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **242** 200 (1990)
88. Kofman L et al. *Astrophys. J.* **393** 437 (1992)
89. Sahni V, Sathyaprakash B S, Shandarin S F *Astrophys. J.* **431** 20 (1994)
90. Arnold V I, Baryshnikov Yu M, Bogayevsky I A, in Gurbatov S N, Rudenko O V, Saichev A I *Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media: General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics* (Berlin: Springer-Verlag jointly with Higher Education Press, 2011) p. 290
91. Saichev A I, Woyczynski W A *SIAM J. Appl. Math.* **56** 1008 (1996)
92. Bernardeau F, Valageas P *Phys. Rev. D* **81** 043516 (2010)
93. Bernardeau F, Valageas P *Phys. Rev. E* **82** 016311 (2010)
94. Valageas P, Bernardeau F *Phys. Rev. D* **83** 043508 (2011)
95. Hidding J "Adhesion: a sticky way of understanding Large Scale Structure", MS Thesis (Groningen, The Netherlands: Univ. of Groningen, 2010); <http://www.astro.rug.nl/~hidding/go/report.pdf>
96. Bogaevsky I A, math-ph/0407073
97. Khanin K, Sobolevski A *Phil. Trans. R. Soc. London A* **368** 1579 (2010); arXiv:1001.0498
98. Бобаевский И А *Мат. сб.* **197** (12) 11 (2006) [Bogaevskii I A *Sb. Math.* **197** 1723 (2006)]
99. Brézis H, in *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert* (North-Holland Mathematical Studies, 5) (Amsterdam: North-Holland Publ., 1973)
100. Cannarsa P, Sinestrari C *Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control* (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 58) (Boston: Birkhäuser, 2004)
101. Бек J, Khanin K *Phys. Rep.* **447** 1 (2007)
102. Barabási A-L, Stanley H E *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)
103. Kardar M, Parisi G, Zhang Y-C *Phys. Rev. Lett.* **56** 889 (1986)
104. Bouchaud J P, Mézard M, Parisi G *Phys. Rev. E* **52** 3656 (1995)
105. Woyczynski W A *Burgers-KPZ Turbulence. Göttingen Lectures* (Berlin: Springer, 1998)
106. Alberverio S, Molchanov S A, Surgailis D *Probab. Theory Relat. Fields* **100** 457 (1994)
107. Gurbatov S N *Phys. Rev. E* **61** 2595 (2000)
108. Руденко О В, Солуян С И *Теоретические основы нелинейной акустики* (М.: Наука, 1975) [Rudenko O V, Soluyan S I *Theoretical Foundation of Nonlinear Acoustics* (New York: Consultants Bureau, 1977)]
109. Гурбатов С Н, Саичев А И, Якушкин И Г *УФН* **141** 221 (1983) [Gurbatov S N, Saichev A I, Yakushkin I G *Sov. Phys. Usp.* **26** 857 (1983)]
110. Руденко О В *УФН* **149** 413 (1986) [Rudenko O V *Sov. Phys. Usp.* **29** 620 (1986)]
111. Frachebourg L, Martin Ph A *J. Fluid Mech.* **417** 323 (2000)
112. Frisch U *Turbulence: the Legacy of A N Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Фриш У *Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова* (М.: ФАЗИС, 1998)]
113. Гурбатов С Н, Саичев А И *ЖЭТФ* **80** 689 (1981) [Gurbatov S N, Saichev A I *Sov. Phys. JETP* **53** 347 (1981)]
114. Gurbatov S et al. *J. Fluid Mech.* **344** 349 (1997)
115. Gurbatov S, Moshkov A Yu, Noullez A *Phys. Rev. E* **81** 046312 (2010)
116. Saichev A I, Woyczynski W A *J. Fluid Mech.* **331** 313 (1997)
117. Shandarin S F, arXiv:0912.4520
118. Kofman L A, Shandarin S F *Nature* **334** 129 (1988)
119. Diemand J, Moore B, Stadel J *Nature* **433** 389 (2005)
120. Domínguez-Tenreiro R et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **413** 3022 (2011)
121. Oñorbe J et al. *Astrophys. J.* **732** L32 (2011)
122. Pichon C et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **418** 2493 (2011); arXiv:1105.0210
123. Zhu W, Feng L-L, Fang L-Z *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **415** 1093 (2011)
124. Orban C, Weinberg D H *Phys. Rev. D* **84** 063501 (2011)

Large-scale structure of the Universe. The Zeldovich approximation and the adhesion model

S.N. Gurbatov, A.I. Saichev

Department of Radiophysics, Lobachevsky Nizhny Novgorod State University, prosp. Gagarina 23, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation. E-mail: gurb@rf.unn.ru, saichev@hotmail.com

S.F. Shandarin

Department of Physics and Astronomy, University of Kansas, 1082 Malott, 1251 Wescoe Hall Dr. Lawrence, KS 66045-7582, USA
E-mail: sergei@ku.edu

A semianalytical formation model for the large, Mpc to hundred Mpc, scale structure in the Universe is discussed. The model is a natural generalization of the Zeldovich 1970 approximation and has as its mathematical basis the Burgers equation for low or even vanishingly low viscosity. It explains in a natural way the galaxy distribution that is observed in the scale range mentioned above and is reminiscent in its shape of a 3D mosaic or a giant cosmic web. Many predictions of the model have been confirmed by modern observations. New theoretical results related to the Burgers model are discussed together with their applications to cosmology.

PACS numbers: **95.35.+d, 95.36.+x, 98.65.-r**
Bibliography — 124 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (3) 233–261 (2012)

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201203a.0233
Received 29 April 2011, revised 26 September 2011
Physics – Uspekhi **55** (3) (2012)