Февраль 2012 г. **Том 182, № 2**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Фазы рассеяния частиц с ненулевыми орбитальными моментами и резонансные ситуации в приближении Пайса

Ю.М. Брук, А.Н. Волощук

Функциональное уравнение Пайса для фаз рассеяния с ненулевыми моментами решается для частиц с малыми энергиями. Показано, что для короткодействующих потенциалов с экранированием (в частности, потенциалов типа Юкавы или Томаса – Ферми) уравнение Пайса сводится к трансцендентным уравнениям. Для потенциалов $\sim 1/r^n$, $n > 0$, для отыскания фаз δ_l при орбитальном моменте $l \neq 0$ получаются простые алгебраические уравнения. Обсуждается возможность использования приближения Пайса для отыскания резонансных ситуаций при рассеянии медленных частиц с ненулевыми моментами.

PACS numbers: 03.65.Nk, 21.45.Bc, 34.50.Cx DOI: 10.3367/UFNr.0182.201202e.0173

Содержание

1. Введение

Задача о вычислении фаз рассеяния медленных частиц на некотором (например, атомном) потенциале принадлежит к числу основных квантово-механических задач. Стандартные методы её решения изложены в учебниках квантовой механики (см., например, [1]). Существует достаточно большое число вычислительных процедур, позволяющих численно определять зависимость фаз δ_l от энергии частицы k^2 (далее мы выбираем единицы таким образом, что $\hbar = 2m = 1$, m — масса частицы). Сама задача вычисления фаз δ_l с моментом $l \neq 0$ имеет разумный физический смысл тогда, когда эти фазы не малы по сравнению с фазой δ_0. Такая ситуация возникает в тех случаях, когда имеются резонансы в парциальных амплитудах с $l \neq 0$.

С другой стороны, существуют и такие задачи, в которых хорошие приближения для фаз δ_l нужны и безотносительно к резонансным ситуациям. Укажем, например, на то, что фазы δ_l входят в правило сумм Фриделя для сплавов, определяющее разность валентностей или избыточный заряд примесного иона по отношению к ионам матрицы. Эти же фазы используются при расчётах остаточного сопротивления и найтовского сдвига. Напомним также, что изменение плотности состояний на поверхности Ферми, вызванное примесными атомами в металлической матрице, изменяет вклад в удельную теплоёмкость металлов. Это непосредственно связано с производными фаз рассеяния на возмущающем (примесном) потенциале по энергии на уровне Ферми. Известно, что локализованные примесные атомы приводят в металле к осцилляциям плотности заряда (так называемым осцилляциям Фриделя) на больших расстояниях. Амплитуды и фазы таких осцилляций тоже являются функциями фаз рассеяния с разными l [2].

Наконец, важно отметить, что фазы δ_l вовсе не являются всегда малыми и в задачах ядерного рассеяния. Во всех подобных расчётах нужны именно парциальные характеристики рассеяния с разными l. Поэтому представляет интерес задача нахождения пригодных в окрестности возможных резонансов соотношений, описывающих зависимость фаз рассеяния от энергии и момента частицы, а также от параметров потенциала. Эффективные методы вычисления фаз δ_l ($l \neq 0$) для медленных частиц, а также отыскания возможных резонансных ситуаций обсуждаются далее в этой статье, существенно обобщающей и дополняющей работу [3].

Ю.М. Брук, А.Н. Волощук.
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 132-61-72
Тел./Факс (499) 135-85-33
E-mail: bruk@lpi.ru, alexander.voloschuk@gmail.com

Статья поступила 18марта 2011 г.,
после доработки 16 мая 2011 г.

Мы будем исходить из функционального (относительно фазы δ_l) уравнения, полученного вариационным методом Пайсом [4]:

$$\frac{2l+1-2\delta_l/\pi}{2l+1-4\delta_l/\pi}\,\delta_l = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} U(r)\,J^2_{l+1/2-2\delta_l/\pi}(kr)\,r\,\mathrm{d}r\,. \quad (1)$$

Здесь $U(r)$ — потенциал, $k^2 = E > 0$ — энергия частицы. Пайс рассматривал вариационную задачу для уравнения Шрёдингера на классе функций $J_{l+1/2+\lambda}$, J_μ — функция Бесселя с индексом μ, параметр λ оказывается связанным с фазой δ_l простым соотношением: $\delta_l = -(\pi/2)\,\lambda$.

Кратко опишем идею получения интегро-функционального уравнения (1), следуя оригинальной работе Пайса. Заметим, что процедура получения этого уравнения довольно ясно воспроизведена в работе [5]. Сводится она к следующему. Запишем радиальное уравнение Шрёдингера для парциальной волны с моментом $l \neq 0$:

$$(H_l - k^2)\,\Phi_l(r) = 0\,. \quad (2)$$

Гамильтониан H_l определяется, как обычно:

$$H_l = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + U(r)\,. \quad (3)$$

Если $U(r) = 0$, то можно написать точное решение:

$$\Phi_l(r) = r^{1/2} J_{l+1/2}(kr)\,. \quad (4)$$

Здесь $J_{l+1/2}$ — функция Бесселя с полуцелым индексом.

Если потенциал $U(r)$ мал по сравнению с $l(l+1)/r^2$ при $r \to \infty$, то можно попытаться при $l \neq 0$ построить приближённое решение, взяв в качестве пробной функции

$$\Phi_l^{\mathrm{P}}(r) = r^{1/2} J_{l+1/2+\lambda}(kr)\,. \quad (5)$$

Параметр λ определяется вариационным методом, а асимптотика при $r \to \infty$

$$\Phi_l^{\mathrm{P}}(r) \approx \sin\left[kr - \frac{\pi}{2}\,(l+\lambda)\right]. \quad (6)$$

Отсюда и следует указанная выше связь $\delta_l = -(\pi/2)\,\lambda$.

Для определения λ должно быть решено уравнение

$$\int_0^{\infty} \Phi_l^{\mathrm{P}}(H_l - k^2)\,\Phi_l^{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}r = 0\,. \quad (7)$$

Отметим, что мы используем при такой процедуре малость $U(r)$ по сравнению с $l(l+1)/r^2$, но не накладываем ограничений на величину отношения k^2/U, поэтому уравнение Пайса должно быть справедливым для заданных потенциалов и при больших, и при малых энергиях.

Другой вывод (1), похожий на вывод обычной борновской формулы, предложен Титцем [6, 7]. Уравнение (1) имеет место при $l \neq 0$. Из вывода Титца явно следует, что фазу следует нормировать так, чтобы выполнялось неравенство $\delta_l < (\pi/2)(l+1)$. Титц показал, что уравнение (1) хорошо описывает рассеяние нейтрона на протоне при энергиях, бóльших глубины эквивалентной потенциальной ямы. В то же время уравнение (1) должно гораздо лучше "работать" в обратном предельном случае, $E < |\,U\,|$ (см. [8]). Пример, явно иллюстрирующий справедливость этого утверждения, приводится в разделе 3. Существенная особенность (1) — это наличие фазы δ_l в индексе функции Бесселя под интегралом. Поэтому решение функционального уравнения (1) в аналитическом виде можно получить только в частных случаях. В известной степени этим объясняется тот факт, что приближение Пайса практически оставалось забытым в течение долгого времени даже для тех задач, для которых оно рассматривалось самим Пайсом (рассеяние ядерных частиц).

Ситуация меняется, если рассматривать рассеяние медленных частиц. Уравнение (1) тогда удаётся решить для довольно широкого класса потенциалов: экранированного кулоновского, степенны́х потенциалов, а также потенциалов, включающих в себя различные комбинации степени и экспоненты. Корректность вариационной процедуры, применявшейся при выводе уравнения (1), требует, чтобы при $r \to \infty$ потенциал $U(r)$ стремился к нулю не медленнее, чем центробежный потенциал $l(l+1)/r^2$. В этом, по существу, и состоит условие применимости уравнения (1). На реальные короткодействующие потенциалы, с которыми приходится иметь дело в теории элементарных процессов или в теории псевдопотенциалов в твёрдых телах, это не накладывает, разумеется, никаких жёстких ограничений. Записывая какое-либо аналитическое приближение для томас-фермиевского потенциала, можно получить соответствующие формулы и для этого случая.

В интересной и содержательной работе [5] рассмотрена возможность решения уравнения Пайса не только для медленных частиц. Нетрудно проверить, что полученные нами результаты для соответствующих потенциалов (в том числе в работе [3]) могут быть получены и предельным переходом (при малых энергиях частиц) из формул работы [5]. Тем не менее именно случай рассеяния частиц с малыми энергиями нам кажется более важным, потому что именно в этой области могут возникать резонансные ситуации.

Качественная картина возникновения резонансов может быть, в частности, интерпретирована так. Представим себе, что мы эффективно увеличиваем глубину какой-то потенциальной ямы. Тогда в ней могут появляться новые уровни с некоторым l. Эти уровни имеют почти "нулевую" энергию, и именно при этом могут возникать резонансы в рассеянии частиц.

Такая ситуация, которая характерна при построении теории электронных оболочек в атомах (при увеличении заряда ядра Z), хорошо описывается, например, моделью Томаса – Ферми (см. [1]). В ядерной физике часто используется потенциал Вудса – Саксона (см. раздел 4); изменение его параметров также может быть связано с появлением новых уровней и соответственно с резонансами в рассеянии (оболочечная и оптическая модели ядра). Приближение Пайса позволяет вполне аккуратно вычислять характеристики рассеяния медленных частиц, тем самым возникает возможность оценки энергии вновь появляющихся неглубоких уровней. Систематического (и тем более аналитического) сравнения энергий таких уровней и параметров резонансов при $l \neq 0$ для разных потенциалов пока, по-видимому, не проведено.

По существу, пайсовское приближение позволяет решить и обратную задачу — найти связь параметров потенциала и энергии рассеивающейся частицы, предполагая существование резонанса с конкретным значением l. Этот вопрос обсуждается в разделе 6, там же указан метод построения "резонансных" кривых.

2. Методика вычисления фаз рассеяния медленных частиц с ненулевыми моментами в приближении Пайса

Рассмотренные ниже примеры позволяют утверждать, что во многих случаях приближение Пайса эффективно работает лучше борновского. Кроме того, оно позволяет анализировать ситуации, которые в принципе не могут быть изучены в приближении Борна. Возможность построения аналитических формул для фаз или сведения сложного интегро-функционального уравнения (1) к простым трансцендентным или алгебраическим уравнениям представляет поэтому и практический, и методический интерес.

2.1. Потенциал прямоугольной ямы

Первый пример — потенциал

$$U(r) = \begin{cases} -U_0\,, & r < a\,, \\ 0\,, & r > a\,. \end{cases} \tag{8}$$

Квадрат функции Бесселя, стоящей под интегралом в (1), можно разложить в ряд [9]:

$$J_\mu^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\Gamma(2\mu+2n+1)(z/2)^{2\mu+2n}}{n!\big[\Gamma(\mu+n+1)\big]^2\,\Gamma(2\mu+n+1)}\,, \tag{9}$$

$z = kr$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\mu = l + 1/2 - 2\delta_l/\pi$. Учитывая ограниченность потенциала (8), при достаточно малых энергиях k^2 можно ограничиться первым членом разложения (9), после чего вычисление интеграла в (1) и элементарные преобразования приводят к формуле

$$\Phi_1(l,s) = (U_0 a^2)(ka)^{2s-1}\,, \tag{10}$$

где

$$\Phi_1(l,s) = \frac{2^{2s-1}(l+s)(l-s+1)(2s+1)\big(\Gamma(s+1/2)\big)^2}{2s-1}\,, \tag{11}$$

$$s = \mu + \frac{1}{2} = l + 1 - \frac{2\delta_l}{\pi}\,. \tag{12}$$

Уравнение (10) определяет при заданных l, k^2 и параметрах потенциала U_0 и a линейно зависящую от фазы δ_l величину s. Разложение (9) хорошо помогает и в других случаях, когда приходится учитывать следующие его члены.

2.2. Потенциалы Юкавы и Томаса – Ферми

В качестве второго примера рассмотрим потенциал Юкавы

$$U(r) = -\exp(-\lambda r)\,\frac{Z}{r}\,. \tag{13}$$

Возникающий в (1) интеграл $I = Z\int_0^\infty \exp(-\lambda r)\,J_\mu^2(kr)\,\mathrm{d}r$ выражается через функцию Лежандра второго рода:

$$I = \frac{Z}{\pi k}\,Q_{l-(2\delta_l/\pi)}\left(\frac{\lambda^2+2k^2}{2k^2}\right). \tag{14}$$

В интересующем нас случае малых энергий $\lambda^2/k^2 \gg 1$. Вычисляя соответствующую асимптотику функции Лежандра $Q_\nu(\xi)$,

$$\xi = 1 + \frac{\lambda^2}{2k^2} \gg 1\,, \quad \nu = l - \frac{2\delta_l}{\pi} = \mu - \frac{1}{2}\,,$$

мы воспользуемся интегральным представлением Лапласа этой функции в комплексной области [10]:

$$Q_\nu(\xi) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\psi}{\big[\xi + (\xi^2-1)^{1/2}\cosh\psi\big]^{\nu+1}}$$

(для нецелого ν разрез по вещественной оси проходит от $\xi = -\infty$ до $\xi = +1$, если $\nu = n > 0$ — целое число, то разрез по той же оси — от $\xi = -1$ до $\xi = +1$). Для вещественного $\xi \gg 1$

$$Q_\nu(\xi) = \frac{2}{(2\xi)^{\nu+1}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\psi}{(\cosh\psi)^\rho}\,, \quad \rho = 2(\nu+1)\,.$$

Последний интеграл выражается через бета-функцию. После некоторых стандартных преобразований интересующая нас асимптотика (14) принимает вид

$$I = \frac{Z}{\sqrt{\pi}k}\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right)^s \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)}\,. \tag{15}$$

Параметр s определяется, как и выше, формулой (12). Уравнение, определяющее s, а следовательно, и фазу δ_l, записывается теперь так:

$$\frac{(l+s)(l+1-s)}{2s-1} = \frac{Z}{\sqrt{\pi}k}\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right)^s \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)}\,. \tag{16}$$

Постоянную λ можно подобрать так, чтобы потенциалы Юкавы и Томаса – Ферми имели одинаковые асимптотики:

$$\frac{Z}{r}\,\chi\left(\frac{rZ^{1/3}}{b}\right) \sim \frac{Z}{r}\exp(-\lambda r) \text{ при } r \to 0\,,$$

где χ — функция Томаса – Ферми, $\lambda = \lambda_0 Z^{1/3}$, $b = 0{,}885$, $\lambda_0 \approx 1{,}8$. Перенося множители, зависящие только от s, в левую часть формулы (16), получим соотношение (ср. с (10))

$$\Phi_2(l,s) = Z^{2/3}\left(\frac{k}{Z^{1/3}}\right)^{2s-1}. \tag{17}$$

Существует простая процедура, позволяющая свести вычисление s из уравнений (10) или (17) к работе с номограммой. Продемонстрируем эту процедуру на последней формуле. После логарифмирования (17) в левой части равенства будет стоять функция $y_1(s) = f(l,s)$, а в правой — выражение вида $A(Z) + B(k,Z)(2s-1) = y_2(s)$. Для каждого l можно затабулировать $y_1(s)$ и изобразить серию соответствующих кривых на плоскости (s, y). Далее, фиксируя параметры Z и k и строя прямые $y_2(s)$ на этой же плоскости, мы легко найдём точки пересечения $y_1(s)$ и $y_2(s)$. Если такая точка $s = s_0$, то $\delta_l = (\pi/2)(l+1-s_0)$ для заданных (l, k, Z). Малость фаз δ_l при этом не предполагается. Если же $\delta_l \ll 1$, то

$$\delta_l \sim D_l Z^{2/3}\left(\frac{k}{Z^{1/3}}\right)^{2l+1},$$

как и должно быть по общим правилам квантовой механики (D_l — константа, зависящая от l).

Совершенно аналогична только что изложенной процедура вычисления фаз для модельного потенциала

$$U(r) = -(1 + \beta r^{3/2}) \exp(-\alpha r) \frac{Z}{r} \tag{18}$$

с параметрами $\beta = 4/3Z^{1/2}b^{-3/2}$, $\alpha = 1{,}59Z^{1/3}/b$, $b = 0{,}885$. При $r \to 0$ этот потенциал также переходит в потенциал Томаса – Ферми. Результат вычислений при условиях $(k^2/Z^{2/3}) \ll 1$ и $\delta_l < (\pi/2)(l+1)$ (последнее неравенство — это, по существу, следствие граничного условия для волновой функции при $r = 0$) имеет вид [3]

$$I = \int_0^\infty (1 + \beta r^{3/2}) \exp(-\alpha r) J_\mu^2(kr)\, \mathrm{d}r =$$
$$= \frac{1}{\lambda_0^{2s}} k^{2s-1} Z^{1-(2/3)s} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)} \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\beta_0}{\lambda_0^{3/2} 2^{2s}} \frac{\Gamma(2s+3/2)}{\Gamma(s)\,\Gamma(s+1/2)} \right\}.$$

Здесь $\lambda_0 = 1{,}59/b$, $\beta_0 = 4/3b^{-3/2}$. Аналогично (17) может быть получена формула

$$\Phi_3(l,s) = Z^{2/3} \left(\frac{k}{Z^{1/3}} \right)^{2s-1}. \tag{19}$$

Конкретный вид функций $\Phi_i(l,s)$ определяется, конечно, самим потенциалом, но для каждого класса потенциалов $\Phi_i(l,s)$ — универсальная функция аргумента s, что и позволяет свести вычисление фаз δ_l к элементарным операциям на плоскости $s - y$.

Формулы типа полученных выше позволяют в принципе решить и другую задачу — найти те потенциалы (в данном классе!), для которых при заданной энергии частицы с моментом l имеется резонансный уровень. Для рассмотренных модельных потенциалов эта задача сводится к отысканию таких Z, при которых для заданной энергии k^2 фаза δ_l становится равной (или приблизительно равной) $(\pi/2) \bmod \pi$. Учитывая, что рассеяние при $l \neq 0$ отличается от рассеяния при $l = 0$ наличием центробежного барьера, легко понять, что резонансный уровень в принципе может быть и квазидискретным, т.е. положительным.

3. Степенные потенциалы и сравнение с квазиклассическим приближением

Особый интерес представляет рассеяние на потенциалах $U(r) = -\alpha/r^n$. Мы проиллюстрируем это на примере важного случая так называемого поляризационного потенциала: $n = 4$. Как мы увидим ниже, вычисления для медленных частиц методом Пайса приводят в этом случае к известным из точного решения значениям фаз δ_l (для потенциала $\sim r^{-4}$ решение уравнения Шрёдингера выражается через функции Матье [11]).

Стоящий в правой части (1) интеграл можно рассматривать как преобразование Меллина от соответствующей подынтегральной функции. Условие, при котором проводится преобразование Меллина, несколько жёстче, чем в рассмотренных выше примерах. Оно имеет вид $\delta_l < (\pi/2)(l - 1/2)$, но при $\delta_l \ll 1$ это всегда справедливо ($l \neq 0$), а при $l > 1$ написанное неравенство выполняется и при $\delta_l \sim 1$ (напомним, что фазы вычисляются по модулю π). Вычисляя преобразование Меллина в случае потенциала $U(r) = -\alpha/r^4$, мы получим при малых энергиях ($\alpha k^2 \ll 1$) вместо (1) уравнение

$$\left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \mu^2 \right] (\mu^2 - 1) = \frac{\alpha k^2}{2}. \tag{20}$$

Здесь, как и выше, $\mu = l + 1/2 - 2\delta_l/\pi$. Уравнение (20) представляет собой просто квадратное уравнение относительно μ^2. Фазы для $l = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots$ соответственно имеют вид

$$\delta_1 = \frac{\pi\alpha k^2}{1\cdot 3\cdot 5}, \quad \delta_2 = \frac{\pi\alpha k^2}{3\cdot 5\cdot 7}, \quad \delta_3 = \frac{\pi\alpha k^2}{5\cdot 7\cdot 9},$$
$$\delta_4 = \frac{\pi\alpha k^2}{7\cdot 9\cdot 11}, \quad \delta_5 = \frac{\pi\alpha k^2}{9\cdot 11\cdot 13}, \ldots$$

Точно такой же результат следует из точной (при малых αk^2) формулы [11]:

$$\delta_l = \frac{\pi\alpha k^2}{8(l+3/2)(l+1/2)(l-1/2)}. \tag{21}$$

Укажем также, что аналогичные результаты получаются и для степеней $n \neq 4$. Например, при $n = 6$ и $\tilde{\alpha}k^4 \ll 1$ (потенциал $U(r) = -\tilde{\alpha}/r^6$) формулы для фаз имеют такую структуру:

$$\delta_l = \frac{3\tilde{\alpha}\pi k^4}{16(2l+1)(l^2+l-15/4)(l^2+l-3/4)}. \tag{22}$$

Уравнение, из которого получается (22), имеет вид (результат преобразования Меллина)

$$\left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \mu^2 \right] (\mu^2 - 4)(\mu^2 - 1) = \frac{3}{8} \tilde{\alpha} k^4. \tag{23}$$

Асимптотика (22) при $l \gg 1$ такова:

$$\delta_l \approx \frac{3}{32} \frac{\pi\tilde{\alpha}k^4}{l^5}. \tag{24}$$

Сравнивая (24) с известной квазиклассической формулой, мы убеждаемся в их тождественности. Формула (22) в известном смысле может рассматриваться как уточнение квазиклассического результата (так же как и формула (21)).

Интересно отметить, что формальное сравнение формул типа (22) для некоторых потенциалов с борновским приближением позволяет надеяться на построение методом Пайса "интерполяционных" формул для фаз δ_l, т.е. формул, справедливых и при не очень малых энергиях. Дополнительным аргументом служит то, что формула (1) может рассматриваться как "обобщение" борновской формулы. Задача "интерполяции" фаз между областями применимости квазиклассического приближения, с одной стороны, и борновского, с другой, весьма заманчива. Однако соответствующие строгие заключения аналитически получить затруднительно — здесь требуется численный анализ конкретных задач.

4. Рассеяние на ядерном потенциале Вудса – Саксона

Потенциал Вудса – Саксона более точно описывает рассеяние на атомных ядрах, чем потенциалы типа простой прямоугольной ямы или гармонического осциллятора. Именно эти три потенциала чаще всего обсуждаются в ядерной физике. Отметим, что для лёгких ядер (с массовыми числами $A \approx 10$) потенциал Вудса – Саксона ближе к осцилляторному, а для тяжёлых ($A \approx 200$) — ближе к прямоугольной яме [12].

Обсудим рассеяние на потенциале Вудса – Саксона в пайсовском приближении. Этот потенциал похож на потенциал прямоугольной ямы, но его правый край "размыт". Изменим обозначения, введённые в разделе 2.1: пусть теперь a — величина "размытия" правого края, а R — эффективный радиус потенциала. Тогда можно записать

$$U(r) = -\frac{U_0}{1 + \exp\left[(r - R)/a\right]} \,. \tag{25}$$

Заметим, что варьирование параметров потенциала может быть связано с возникновением новых ядерных уровней. Для отыскания резонансных ситуаций можно было бы варьировать не только сам потенциал, но и энергию рассеивающейся частицы.

Применение формулы Пайса (1) и использование, как и ранее, разложения (9) при учёте фактической ограниченности $U(r)$ сводят вычисление правой части (1) к вычислению интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{2\mu+1}\,\mathrm{d}z}{1 + \exp\left[(z - z_0)/t\right]} \,, \tag{26}$$

здесь $z = kr$, $z_0 = kR$, $t = ka$ и мы опять ограничиваемся в (9) первым членом разложения.

Заметим, что интеграл такого типа встречается, например, в статистической физике при вычислении теплоёмкости вырожденного электронного газа (см. [13]). Используя приведённые в [13] формулы с соответствующими переобозначениями для нашей задачи, получим разложение в асимптотический ряд:

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{2\mu+1}\,\mathrm{d}z}{1 + \exp\left[(z - z_0)/t\right]} = \frac{1}{2\mu + 2}\, z_0^{2\mu+2} + \frac{\pi}{6}\, t^2 (2\mu + 1)\, z_0^{2\mu} + \frac{7\pi^4}{360}\, t^4 (2\mu + 1)\, 2\mu(2\mu - 1)\, z_0^{2\mu-2} + \ldots \tag{27}$$

Всеми последующими членами в (27) можно пренебречь.

В результате правая часть исходного уравнения (1) приобретает вид

$$\frac{\pi}{2}\, \frac{U_0 a^2}{\left(\Gamma(\mu + 1)\right)^2} \left(\frac{z_0}{2}\right)^{2\mu} \left[\frac{1}{2\mu + 2}\left(\frac{R}{a}\right)^2 + \frac{\pi^2}{6}\,(2\mu + 1) + \frac{7\pi^4}{360}\,(2\mu + 1)(2\mu)(2\mu - 1)\left(\frac{a}{R}\right)^2\right].$$

Переходя снова к выражениям через l и $s = l + 1 - 2\delta_l/\pi$ (напомним, что $\mu = l + 1/2 - 2\delta_l/\pi$), получим

$$\frac{(l + s)(l - s + 1)\left(\Gamma(s + 1/2)\right)^2}{2s - 1} = U_0 a^2 \left(\frac{z_0}{2}\right)^{2s-1} \times \left[\frac{(R/a)^2}{2s + 1} + \frac{\pi^2}{6}\, 2s + \frac{7\pi^4}{360}\, 2s(2s - 1)(2s - 2)\left(\frac{a}{R}\right)^2\right]. \tag{28}$$

При $a/R \ll 1$ формула (28) переходит в аналогичную формулу для потенциала прямоугольной ямы:

$$\frac{(l+s)(l-s+1)(2s+1)\left(\Gamma(s+1/2)\right)^2}{(2s-1)\, U_0 R^2} = \left(\frac{kR}{2}\right)^{2s-1}. \tag{29}$$

В формуле (28) можно также сделать замену: $z_0 \to kR$, $U_0 a^2 \to U_0 R^2 (a/R)^2$, после чего предельный переход от (28) к (29) при $a/R \ll 1$ становится совсем прозрачным. Теперь совершенно ясно, что (28) отличается от (29) поправками, связанными с конечностью отношения a/R. Однако по структуре эти формулы схожи, и к (28) можно применить описанную выше процедуру логарифмирования и нахождения фаз δ_l для фиксированных параметров (l, k, U_0, a, R).

5. Количественные оценки и некоторые другие возможности пайсовского приближения

Сравнение фаз рассеяния, вычисленных в пайсовском приближении, с "точными" фазами, полученными численным решением уравнения Шрёдингера для парциальных волн, для нескольких потенциалов проводится в работе [5].

Например, для потенциала Юкавы

$$U(r) = \lambda\left(\frac{R}{r}\right) \exp\left(-\frac{R}{r}\right)$$

с параметрами $\lambda = -10{,}6$ кэВ, $R = 0{,}109 \times 10^{-8}$ см, $k = 151{,}36 \times 10^{8}$ см$^{-1}$ (k^2 — энергия частицы) расхождение "точной" и пайсовской фаз не превышает 2,3 % при $l = 4$, 6, 8, но при $l = 2$ оно составляет 12,6 %. Энергия здесь не очень мала, поэтому разумно сравнить "точные" фазы с борновским приближением. Здесь расхождение при $l = 4, 6, 8$ изменяется от 2,5 % до 3,9 %, а при $l = 2$ оно равно 3,5 %.

Рассмотрение табличных и графических результатов, приведённых в [5], для потенциалов Томаса – Ферми, Гаусса и Вудса – Саксона позволяет сделать заключение о том, что пайсовское приближение вполне удовлетворительно описывает рассеяние, при этом чем больше l, тем ближе пайсовские фазы к "точным".

Другой пример приведён в разделе 3. Для поляризационного потенциала $U(r) = -\alpha/r^4$, $\alpha > 0$, уже для малых фаз и всех $l = 1, 2, \ldots$ пайсовские фазы совпадают с точными (при малых αk^2) фазами, выражаемыми формулой (21). Для потенциала $U(r) = -\tilde{\alpha}/r^6$ фазы δ_l дают правильную асимптотику при $l \gg 1$ (формулы (22) и (24), $\tilde{\alpha} k^4$ и соответствующие фазы малы).

Дополнительная содержательная и полезная информация может быть получена при вычислении производных от пайсовских фаз по параметрам l, k, R и s (или μ) (определение s и μ даётся формулой (12)).

В [5] приведены результаты таких вычислений для некоторых потенциалов. К сожалению, эти результаты получаются довольно громоздкими, тем не менее они записываются через специальные (или гипергеометрические) функции в конечном виде и являются пригодными для численных вычислений в широком диапазоне параметров (например, по энергиям). Производные от фаз входят в некоторые правила сумм в задачах, перечисленных во введении, и уже потому они важны.

В некоторых случаях оказывается удобным использовать рекуррентные соотношения для специальных функций, через которые выражены производные фаз.

Дальнейшее развитие пайсовское приближение и некоторые его модификации получили в работе [14], где рассмотрен важный случай, в котором потенциал является комбинацией короткодействующего и кулоновского.

Оказывается, что модифицированное приближение Пайса вполне годится и в этом случае.

Обсуждение других примеров возможных приложений схемы Пайса можно найти также в [14]. Отметим среди них проблемы рассеяния частиц в задачах химической физики (сложные модельные потенциалы), рассеяния на отталкивающих потенциалах и вопрос об использовании пайсовского приближения при изучении рассеяния в гравитационных полях шварцшильдовской и керровской чёрных дыр.

Анализ показывает, что пайсовские фазы ближе к "точным" для потенциалов отталкивания, чем потенциалов притяжения. Это связано с тем, что эффективный потенциал при отталкивании, с учётом центробежного вклада, всегда неотрицателен.

Особой заслугой авторов [14] следует считать построение ими достаточно сложного аппарата функций Пайса – Кулона, позволяющих решить ряд новых задач, в том числе при наличии резонансных ситуаций.

В разделе 6 мы, однако, снова вернёмся к более элементарным вопросам и обсудим резонансные ситуации на примере потенциальной ямы.

6. Резонансные ситуации и резонансные кривые в пайсовском приближении

В этом разделе мы обсудим некоторую формальную схему возможного появления резонансов при рассеянии частиц с ненулевыми моментами на сферически симметричной прямоугольной яме с конечной, но достаточно большой глубиной. Будем снова, как и в разделе 2.1, обозначать радиус ямы буквой a.

В уравнении (1) для потенциала (8) верхний предел в интеграле равен a, $U(r) = -U_0 = \mathrm{const}$ и интеграл может быть вычислен с использованием известной формулы [10]:

$$\int_0^a J_\mu^2(kr)\, r\, \mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}\left(J_\mu^2(ka) - J_{\mu-1}(ka)\, J_{\mu+1}(ka)\right). \qquad (30)$$

В нашем случае $\mu = l + 1/2 - 2\delta_l/\pi$ и уже не предполагается какая-либо малость энергии частицы k^2.

Резонансной мы считаем формально ситуацию, в которой фаза δ_l принимает значение $\pi/2 + \pi n$, $n \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Тут учтено условие неотрицательности фазы рассеяния для потенциала притяжения.

Известно, что полное сечение рассеяния частицы с энергией k^2

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,\sin^2\delta_l\,, \qquad (31)$$

а $\sigma_l = (4\pi/k^2)(2l+1)\,\sin^2\delta_l$ — парциальное сечение для рассеяния частиц с заданным орбитальным моментом l. Мы не рассматриваем случай s-рассеяния (с $l = 0$). Поэтому, если говорить о максимально возможном значении парциального сечения (резонансе) с $l \neq 0$, то при $\sigma_l = \sigma_{l\,\max}$ $\sin^2\delta_l = 1$ и $\delta_l = \pi/2 + \pi n$, $n \in N_0$.

Для того чтобы интеграл в правой части формулы (1) сходился, индекс функции Бесселя должен быть неотрицательным, поэтому

$$\delta_l < \frac{\pi}{2}\left(l + \frac{1}{2}\right). \qquad (32)$$

Возможные в принципе резонансные фазы можно записать как последовательность

$$\left\{(2m-1)\,\frac{\pi}{2}\,,\ m = 1, 2, 3, \ldots\right\} = \left\{\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\pi}{2}\,,\ \frac{5\pi}{2}\,,\ \ldots\right\}.$$

Номер m члена такой последовательности назовём "типом" резонанса. Для каждой "парциальной волны", которая нумеруется значением момента l, можно из неравенства (32) определить допустимые "типы" резонансов. Для $l = 1$ и $l = 2$ из (32) следует возможность появления резонансов типа 1 (т.е. $\delta_l = \pi/2$), для $l = 3$ и $l = 4$ возможны резонансы типов 1 и 2 ($\pi/2$ и $3\pi/2$), для $l = 5$ и $l = 6$ — резонансы типов 1, 2 и 3 ($\pi/2$, $3\pi/2$ и $5\pi/2$) и т.д.

Число "типов" возможных резонансов увеличивается с возрастанием l, но для каждого конечного набора $m = 1,\ 2, \ldots,\ m_0$ существуют ровно две "парциальные волны" с максимально допустимым одинаковым m_0.

В определённом смысле далее мы рассмотрим некоторую обратную задачу: подставляя в уравнение Пайса при каждом l допустимые значения резонансных фаз, мы находим связь параметров $U_0 a^2$ и ka при этих резонансах.

Естественным образом могут быть построены графики зависимости параметра семейства ям $U_0 a^2$ от величины ka при разных значениях l и для разных "типов" резонансов. Назовём эти графики резонансными кривыми.

Приведём простые примеры вычислений подобного рода.

1. Пусть $l = 1$. В этом случае возможен только первый тип резонанса: $\delta_l = \pi/2$.

В приводимых ниже вычислениях мы используем формулу (30) и рекуррентную формулу [10]

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\, J_\nu(z)\,. \qquad (33)$$

Уравнение Пайса принимает вид

$$1 = \frac{U_0}{2}\int_0^a J_\nu^2(kr)\, r\, \mathrm{d}r\,, \quad \nu = \frac{1}{2}\,,$$

и в силу (30)

$$\frac{4}{U_0 a^2} = J_{1/2}^2(ka) - J_{-1/2}(ka)\, J_{3/2}(ka)\,. \qquad (34)$$

Учтём, что

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\sin z\,, \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\cos z\,.$$

Формула (33) позволяет вычислить

$$J_{3/2}(z) = \frac{1}{z}\,\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\sin z - \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\cos z\,.$$

После подстановки в (34) получим уравнение ($z = ka$)

$$\frac{4}{U_0 a^2} = \frac{1}{\pi ka}\left(2 - \frac{\sin 2ka}{ka}\right). \qquad (35)$$

Легко проанализировать асимптотическое поведение графика зависимости $U_0 a^2$ от ka:

$$U_0 a^2 = \frac{3\pi}{ka} \quad \text{при} \quad ka \ll 1\,,$$

$$U_0 a^2 = 2\pi ka \quad \text{при} \quad ka \gg 1\,.$$

Понятно, что на кривой имеется минимум и если фиксировать величину U_0a^2 и провести выше минимума графика горизонтальную прямую $U_0a^2 = \text{const}$, то по точкам пересечения определяются резонансные параметры ka для этого фиксированного класса ям.

2. Пусть $l = 2$. Как и при $l = 1$, возможен только первый тип резонанса: $\delta_l = \pi/2$.

Уравнение Пайса в этом случае

$$\frac{4}{3} = U_0 \int_0^a J_{3/2}^2(kr)\, r\, \mathrm{d}r\,.$$

Вычисление интеграла даёт

$$\int_0^a J_{3/2}^2(kr)\, r\, \mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}\left[J_{3/2}^2(ka) - J_{1/2}(ka)\, J_{5/2}(ka)\right].$$

Выпишем входящие сюда бесселевы функции. Они опять выражаются через $\sin z$, $\cos z$ и степени z:

$$J_{3/2}(z) = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z - \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\,,$$

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,,$$

$$J_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\sin z - \frac{3}{z}\cos z\right\}.$$

Для вычисления $J_{n+1/2}(z)$ при целых n можно последовательно пользоваться формулой (33) или общей формулой из теории бесселевых функций:

$$J_{n+1/2}(z) = (-1)^n z^{n+1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\left(\frac{\sin z}{z}\right).$$

После элементарных преобразований уравнение Пайса запишется в окончательном виде так:

$$\frac{4}{3U_0a^2} = \frac{1}{\pi ka}\left[1 + \frac{\sin ka \cos ka}{ka} - \frac{2\sin^2 ka}{(ka)^2}\right]. \tag{36}$$

Асимптотики (36) следующие:

$$U_0a^2 = \frac{30\pi}{(ka)^3} \quad \text{при} \quad ka \ll 1\,,$$

$$U_0a^2 = \frac{4}{3}\pi ka \quad \text{при} \quad ka \gg 1\,.$$

Резонансные параметры ka отыскиваются в классе потенциалов с фиксированным U_0a^2, так же как и в случае $l = 1$.

Работая в пространстве резонансных точек, мы должны принять во внимание, что возможному пересечению резонансных кривых в точке (U_0a^2, ka) могут отвечать не только разные пары чисел (l, m), но и реальные резонансы в разных потенциальных ямах. Это связано с тем, что условию $U_0a^2 = \text{const}$ соответствуют не отдельные потенциальные ямы, а целый класс сферических прямоугольных ям с достаточно большой глубиной.

Ниже мы приведём общие формулы для асимптотик резонансных кривых при $ka \ll 1$ и $ka \gg 1$ для любых пар (l, m). Будет приведено также простое правило нахождения точек пересечения резонансных кривых на плоскости (U_0a^2, ka).

Асимптотики резонансных кривых для $ka \ll 1$ и $ka \gg 1$ для потенциала прямоугольной ямы получаются непосредственно из формул (1) и (30). Поскольку речь идёт о резонансной ситуации, положим $\delta_l = (2m-1)\,\pi/2$, $l + 1/2 - 2\delta_l/\pi = \mu = l + 3/2 - 2m > 0$, $\quad z = ka$. После этого вычислим левую часть (1). Для вычисления интеграла в (1), содержащего квадрат бесселевой функции, воспользуемся формулой (30), подставив в неё асимптотические значения при $z \to 0$:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,,$$

$\nu = \mu - 1$, μ, $\mu + 1$. Эти асимптотики непосредственно следуют из определения функции Бесселя [10]:

$$J_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\mu}}{k!\,\Gamma(k+\mu+1)}\,.$$

После элементарных преобразований несложного выражения, содержащего гамма-функции, получится соотношение

$$U_0a^2(ka)^{2\mu} = \varphi(l, m)\,, \tag{37}$$

$\mu = l + 3/2 - 2m$. Функция $\varphi(l, m)$ просто и точно вычисляется. Мы не выписываем её здесь ввиду некоторой громоздкости этого выражения. Уравнение (37) определяет, таким образом, асимптотику резонансной кривой при $ka \ll 1$. Аналогично можно получить асимптотику резонансной кривой при $ka \gg 1$.

После вычисления интеграла (30) в него можно подставить асимптотики

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

при $z \to \infty$. Как и выше, $\nu = \mu - 1$, μ, $\mu + 1$.

Уравнение Пайса в этом случае записывается совсем просто:

$$\frac{2l + 1 - 2\delta_l/\pi}{2l + 1 - 4\delta_l/\pi}\,\delta_l = \frac{\pi}{2}\,\frac{U_0a^2}{\pi ka}\,.$$

Делая замену $\delta_l \to (2m-1)\,\pi/2$, окончательно получим:

$$U_0a^2 = \pi ka\,\frac{2(l+1-m)(2m-1)}{2l+3-4m}\,. \tag{38}$$

Это и есть искомая асимптотика резонансной кривой при $ka \gg 1$.

Последний вопрос здесь — отыскание возможных точек пересечения резонансных кривых. Компьютерный анализ показывает, что такие точки пересечения вовсе не являются экзотикой. Предположим, что разные резонансные кривые пересекаются на плоскости (U_0a^2, ka). Проведём через точку пересечения горизонтальную прямую, соответствующую классу потенциалов с фиксированным параметром U_0a^2. Запишем затем уравнения Пайса для этих кривых, предполагая, что они задаются парами чисел (l, m) и $(\tilde{l}, \tilde{m})$ соответственно. В правой части (1) интегралы опять вычисляются с помощью (30). Тогда получится система уравнений, первое из которых

$$\frac{2(l+1-m)(2m-1)}{2l+3-4m} = \frac{U_0a^2}{2}\left\{J_\mu^2(ka) - J_{\mu-1}(ka)\, J_{\mu+1}(ka)\right\}.$$

Второе уравнение имеет точно такой же вид с учётом замены $l \to \tilde{l}$, $m \to \tilde{m}$, $\mu \to \tilde{\mu}$.

Разделив эти уравнения друг на друга, мы получим уравнение для определения параметра ka в точке пересечения резонансных кривых. После вычисления соответствующего ka можно подставить это значение в любое из двух исходных уравнений для определения величины $U_0 a^2$ в точке пересечения. Эта процедура, элементарная по сути, требует численных вычислений, но однозначно даёт ответ на вопрос о возможности пересечения разных резонансных кривых. Конечно, возможны и ситуации, в которых резонансные кривые не пересекаются.

7. Заключение

Может показаться удивительным, что в такой, уже "классической", области, как фазовая теория рассеяния в квантовой механике, до сих пор находятся задачи, которые можно и нужно решать. К числу таких задач относится и задача о нахождении фаз рассеяния частиц с ненулевыми моментами в окрестности возможных резонансов. Разумеется, речь идёт о методах вычислений, выходящих за рамки борновского приближения, не позволяющего вообще анализировать резонансные ситуации в высших парциальных волнах.

Приближение Пайса, его интегро-функциональное уравнение для вычисления фаз δ_l, в том числе в резонансных случаях, до сих пор, к сожалению, малоизвестно как специалистам, так и преподавателям квантовой механики. Именно поэтому нам казалось целесообразным написать эту статью и обратить внимание на новые возможности, которые здесь возникают.

Отметим ещё раз, что, на наш взгляд, до сих пор остаётся нерешённой очень важная задача о связи неглубоких связанных состояний с появлением резонансов при рассеянии частиц с малыми энергиями (при $l \neq 0$). Тем не менее идеи о существовании такой связи в серьёзных руководствах по теории рассеяния высказывались неоднократно (см., например, [15, гл. 13]). Численные вычисления для некоторых "популярных" потенциалов также указывают на явную корреляцию связанных уровней с резонансами.

Отдавая должное современным численным методам в квантовой механике, мы хотели бы, однако, подчеркнуть, что они часто основаны на теории возмущений. Это относится, конечно, и к расчётам в борновском приближении.

Приближение Пайса в предположении малости фаз рассеяния δ_l, $l \neq 0$, переходит в борновское. С другой стороны, оно позволяет (по крайней мере в некоторых случаях) получить и квазиклассические результаты. В значительной степени это связано с расширением класса функций, для которых ставятся и решаются вариационные задачи. Именно такая программа позволила получать новые результаты при переходе от стандартных в квантовой механике функций Бесселя с полуцелым индексом к функциям Бесселя с произвольным индексом. Разумеется, представляют интерес и другие возможности расширения класса вариационных функций.

Задача о вычислении фаз рассеяния для частиц с ненулевыми моментами, произвольными энергиями и потенциалами в общем случае, конечно, не может быть решена только численными методами. Использование качественных, аналитических или полуаналитических методов остаётся актуальным и полезным. Мы обсудили выше сравнительно небольшое число примеров, но сама методика их рассмотрения позволяет надеяться на значительное расширение круга подобных задач в атомной, ядерной и молекулярной физике, к которым можно применять приближения пайсовского типа.

Авторы статьи искренне благодарны неизвестному им рецензенту за конструктивные предложения о дополнениях к первоначальному тексту и за указание на работы [5, 7, 14].

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 1974) [Landau L D, Lifshits E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
2. Mrozan E, Lehmann G, in *Ergebnisse in der Elektronentheorie der Metalle* (Eds P Ziesche, G Lehmann) (Berlin: Akademie-Verlag, 1983) Ch. 11 [Мрозан Е, Леманн Г, в кн. *Достижения электронной теории металлов* Т. 2 (Под ред. П Цише, Г Леманна) (М.: Мир, 1984) Гл. 11]
3. Брук Ю М *ТМФ* **66** 392 (1986) [Bruk Yu M *Theor. Math. Phys.* **66** 260 (1986)]
4. Pais A *Proc. Camb. Philos. Soc.* **42** 45 (1946)
5. Romo W J, Valluri S R *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **23** 4223 (1990)
6. Титц Т *ЖЭТФ* **37** 294 (1959) [Tietz T *Sov. Phys. JETP* **9** 207 (1960)]
7. Tietz T *Acta Phys. Acad. Sci. Hung.* **16** 1 (1963)
8. Wu T, Ohmura T *Quantum Theory of Scattering* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1962) [Ву Т Ю, Омура Т *Квантовая теория рассеяния* (М.: Наука, 1969)]
9. Watson G N *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge: The Univ. Press, 1945) [Ватсон Г *Теория бесселевых функций* (М.: ИЛ, 1949)]
10. Кузнецов Д С *Специальные функции* (М.: Высшая школа, 1965)
11. Holzwarth N A W *J. Math. Phys.* **14** 191 (1973)
12. Ишханов Б С, Капитонов И М, Юдин Н П *Частицы и атомные ядра* (М.: ЛКИ, 2007)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* (М.: Наука, 1964) § 57 [Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* (Oxford: Pergamon Press, 1969)]
14. Romo W J, Valluri S R *Phys. Scripta* **71** 572 (2005)
15. Taylor J R *Scattering Theory. The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions* (New York: Wiley, 1972) [Тейлор Дж *Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений* (М.: Мир, 1975) Гл. 13]

Scattering phases for particles with nonzero orbital momentum and resonance regimes in the Pais approximation

Yu.M. Bruk, A.N. Voloshchuk
P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. +7 (499) 132 61 72. Tel./Fax +7 (499) 135 85 33. E-mail: bruk@lpi.ru, alexander.voloschuk@gmail.com

The functional Pais equation for scattering phases with nonzero orbital momentum is solved in the case of low energy particles. For short range screening potentials, in particular, those of the Yukawa or Thomas – Fermi type, the Pais equation is shown to reduce to transcendental equations. For the potentials $\sim r^{-n}$, $n > 0$, simple algebraic equations are obtained for determining the phases δ_l, $l \neq 0$. Possible applications of the Pais equation to the problem of finding resonance regimes in the scattering of low energy particles with nonzero orbital momentum are discussed.

PACS numbers: 03.65.Nk, 21.45.Bc, 34.50.Cx
Bibliography — 15 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (2) 173 – 180 (2012)
DOI: 10.3367/UFNr.0182.201202e.0173
Received 18 March 2011, revised 16 May 2011
Physics – Uspekhi **55** (2) (2012)