

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О структуре уравнений Максвелла в области линейного взаимодействия электромагнитных волн в плавнонеоднородных анизотропных и гиротропных средах

А.Г. Шалашов, Е.Д. Господчиков

Линейное взаимодействие электромагнитных волн в плавнонеоднородных неомномерных средах рассматривается как проявление поляризационного вырождения решений уравнений Максвелла. Выяснено, что само наличие поляризационного вырождения двух нормальных волн накладывает сильные ограничения на компоненты диэлектрического тензора среды в области эффективного взаимодействия. Это позволило дать универсальную классификацию возможных типов взаимодействия волн и соответствующих волновых уравнений, не зависящую от конкретной модели линейной среды.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 52.35.Hr

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201202d.0157

Содержание

1. Введение (157).
 2. Тензор диэлектрической проницаемости в точке поляризационного вырождения (158).
 - 2.1. Представление в базисе собственных поляризаций среды.
 - 2.2. Представление в базисе главных оптических осей.
 - 2.3. Сравнение двух представлений.
 3. Эталонные уравнения, описывающие линейное взаимодействие волн в окрестности точек поляризационного вырождения (164).
 - 3.1. Поляризационное вырождение в условиях частичного вырождения анизотропии (случай 2.1.1).
 - 3.2. Поляризационное вырождение в окрестности резонанса среды (случай 2.1.2).
 - 3.3. Полное поляризационное вырождение (случай 2.1.3).
 - 3.4. Полное вырождение анизотропии среды (случай 2.1.4).
 - 3.5. Волновой вектор ортогонален вектору собственной поляризации среды (случай 2.1.5).
 4. Заключение (170).
- Список литературы (171).

1. Введение

Линейное взаимодействие электромагнитных волн в плавнонеоднородных средах является одним из важнейших фундаментальных процессов в физике плазмы, кристаллооптике, электродинамике метаматериалов и т.п. В каждой из этих областей проблема линейного взаимодействия, как правило, рассматривается независимо, исходя из конкретных свойств диэлектрического

отклика среды и зачастую из геометрии задачи [1–8]. В данной работе предпринята попытка взглянуть на проблему с другой стороны — рассматривая линейную недиссипативную среду с неизвестным заранее тензором диэлектрической проницаемости общего вида, мы выясняем, каким условиям должен отвечать диэлектрический отклик, чтобы в неограниченной плавнонеоднородной среде существовали эффективно взаимодействующие моды. При этом мы исходим из предположения, что линейное взаимодействие двух векторных электромагнитных волн может происходить только в окрестности точек поляризационного вырождения, в которых для одного волнового вектора $\mathbf{k}(\omega)$ существуют два линейно независимых решения уравнений Максвелла. Оказывается, что одного этого условия, которое, по существу, может рассматриваться как определение линейного взаимодействия, достаточно, чтобы наложить весьма сильные ограничения на компоненты тензора диэлектрической проницаемости и дать универсальную классификацию возможных типов линейного взаимодействия волн, не зависящую от конкретной модели среды. Кроме того, подобный подход позволяет разрешить ряд трудностей, возникающих в теории линейного взаимодействия электромагнитных волн в случае многомерных сред с выраженной анизотропией и гиротропией.

В настоящее время в теории взаимодействия широко используется приближение двух взаимодействующих волн [1, 4, 6, 8–12]:

$$\hat{D}_1 E_1 = \eta E_2, \quad \hat{D}_2 E_2 = \eta^* E_1. \quad (1)$$

Здесь \hat{D}_1 и \hat{D}_2 — операторы, описывающие распространение геометро-оптических мод с комплексными амплитудами E_1 и E_2 в плавнонеоднородной среде, свойства которой мало меняются на расстояниях порядка длины волны, а η — константа связи мод в области взаимодей-

А.Г. Шалашов, Е.Д. Господчиков. Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
Тел. (831) 416-06-23. Факс (831) 416-06-16
E-mail: ags@appl.sci-nnov.ru, eggos@mail.ru

Статья поступила 28 декабря 2010 г., после доработки 4 июля 2011 г.

ствия; вне этой области распространение мод описывается уравнениями $\hat{D}_1 E_1 = 0$ и $\hat{D}_2 E_2 = 0$. С физической точки зрения приведённые уравнения описывают распространение двух мод, разделённых в \mathbf{r} - или \mathbf{k} -пространстве слоем непрозрачности с толщиной, пропорциональной $|\eta|$. В плавнонеоднородной среде волновым операторам можно сопоставить их фурье-образы $D_1(\omega, \mathbf{k})$ и $D_2(\omega, \mathbf{k})$, при этом исходной системе связанных волн соответствует дисперсионное уравнение

$$D_1(\omega, \mathbf{k}) D_2(\omega, \mathbf{k}) = |\eta|^2. \quad (2)$$

Это дисперсионное уравнение определяет две моды, которые в рамках приближения геометрической оптики распространяются независимо друг от друга. Вдали от области взаимодействия эти моды непрерывно переходят в "независимые" моды, удовлетворяющие дисперсионным уравнениям $D_1(\omega, \mathbf{k}) = 0$ и $D_2(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Приближение геометрической оптики нарушается в ограниченных областях пространства, в которых волновые числа двух мод сближаются так, что среда перестаёт быть плавной на масштабах длины волны биений, т.е.

$$|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| L \ll 2\pi,$$

где L — масштаб неоднородности среды. Данное условие реализуется только в окрестности определённых выше точек поляризационного вырождения векторных волновых уравнений¹. Внутри этой области поле должно находиться из исходных волновых уравнений (1) без применения приближения геометрической оптики. Вдали от рассматриваемой области эти точные решения асимптотически представляются в виде линейных комбинаций геометро-оптических мод (2) с определёнными линейными связями между их амплитудами. Это означает, что падающее в виде одной моды излучение проходит через область взаимодействия и/или отражается от неё в виде двух когерентных мод, распространяющихся вдали от области взаимодействия независимо, но имеющих фиксированное отношение амплитуд, которое зависит от условий прохождения волной области нарушения геометрической оптики. Именно этот процесс обычно и подразумевают под линейным взаимодействием волн. Наглядным представлением этого процесса является "туннелирование" излучения через область непрозрачности, эквивалентное просачиванию квантово-механической частицы через одномерный потенциальный барьер [16].

Нам известны три случая, допускающие строгое обоснование модели связанных волн: одномерно неоднородные среды [1, 2, 4], среды со слабой анизотропией

¹ Для качественного понимания такие точки удобно представить как результат пересечения двух "независимых" дисперсионных соотношений $D_1(\omega, \mathbf{k}^0) = 0$ и $D_2(\omega, \mathbf{k}^0) = 0$. Действительно, нетрудно убедиться, что если параметр взаимодействия достаточно мал, $|\eta|L \ll 2\pi |\partial D(\omega, \mathbf{k}^0)/\partial \mathbf{k}|$, то область нарушения геометрической оптики локализуется в окрестности общего корня \mathbf{k}^0 "независимых" дисперсионных соотношений. В некоторых классических работах точка трансформации определяется как точка ветвления решения дисперсионного соотношения [4, 7], однако это представление зависит от параметризации дисперсионного соотношения и потому не является универсальным. Например, в хорошо известном случае взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волны в неоднородной вдоль x холодной плазме точка ветвления $n_x^2(x)$ при постоянном волновом векторе поперёк неоднородности соответствует развороту необыкновенной волны, а не трансформации, которая происходит в окрестности плазменного резонанса [13–15].

[5, 6, 8] и случай конверсии электромагнитных мод в квазиелектростатические моды, например в плазменные волны [4, 7, 17]. Нетрудно убедиться, что уравнения (1) в неоднородных средах описывают тот же процесс туннелирования излучения через область непрозрачности, что и в одномерном случае. Учёт дополнительных размерностей в волновых операторах лишь уточняет значение константы связи (эффективной ширины области непрозрачности), которая, по сути, вычисляется в рамках геометрической оптики. Между тем в плавнонеоднородных средах с выраженной анизотропией и гиротропией уравнения Максвелла не всегда приводят к уравнениям вида (1) для взаимодействующих волн. Формальная причина заключается в том, что для достаточно широкого круга задач геометро-оптическая константа взаимодействия $\eta \rightarrow 0$. В этом случае константа связи должна быть заменена на дифференциальный оператор, что приводит к принципиально неоднородному характеру линейного взаимодействия волн в свободном пространстве [18–21]. Отметим, что само условие взаимодействия волн при этом не изменяется — эффективное взаимодействие возможно лишь в окрестности точек поляризационного вырождения. Метод, изложенный в настоящей работе, позволяет детально исследовать условия применимости широко используемого приближения (1) к уравнениям Максвелла в плавнонеоднородных средах и показать ограниченность этой модели во многих важных для приложений случаях.

Отметим, что было опубликовано большое число работ, в которых уравнения связанных волн (1) рассматривались в качестве отправной точки для исследования влияния трёхмерной неоднородности на процессы линейного взаимодействия электромагнитных волн в средах, в которых эти уравнения, строго говоря, могут быть неприменимы [10, 22–29]. Во всех этих работах используется подход, в котором сначала получается дисперсионное уравнение, описывающее геометро-оптические моды, а затем по нему восстанавливаются волновые уравнения, описывающие связь мод. Несмотря на то что этот путь часто приводит к верным результатам, методически он не безупречен, поскольку одно и то же дисперсионное уравнение может соответствовать разным дифференциальным задачам. Особенно много возможностей для ошибок появляется в неоднородно-неоднородных задачах. Именно поэтому в настоящей работе анализ построен на поиске точек вырождения исходных векторных уравнений Максвелла, а не более простого скалярного дисперсионного уравнения.

2. Тензор диэлектрической проницаемости в точке поляризационного вырождения

В этом разделе мы рассмотрим однородную среду, заданную тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega)$ в некоторой декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 . Для распространяющихся в этой среде плоских электромагнитных волн вида

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$$

уравнения Максвелла можно представить как систему линейных алгебраических уравнений относительно декартовых компонент электрического поля E_j :

$$(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - k_0^2 \varepsilon_{ij}) E_j = 0, \quad (3)$$

где $k_0 = \omega/c$ — вакуумное значение волнового вектора, соответствующее заданной частоте излучения, $k = |\mathbf{k}|$, δ_{ij} — символ Кронекера, индексы i и j пробегает значения от 1 до 3 и обозначают проекции векторных величин на соответствующие координатные оси, по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование. Условие существования нетривиального решения системы (3) определяет дисперсионное уравнение

$$\det(k^2\delta_{ij} - k_i k_j - k_0^2 \varepsilon_{ij}) = 0,$$

связывающее \mathbf{k} и ω для собственных мод среды. Допустим, что имеет место поляризационное вырождение, т.е. для некоторого $\mathbf{k}(\omega)$, удовлетворяющего дисперсионному уравнению, существуют два линейно независимых вектора \mathbf{E} , являющихся решениями системы волновых уравнений (3). Покажем, что это условие накладывает достаточно сильные ограничения на компоненты тензора диэлектрической проницаемости и на возможные поляризацию и направление распространения электромагнитных мод.

2.1. Представление в базисе собственных поляризаций среды

Предположим для определённости, что в среде отсутствует диссипация. Тогда тензор диэлектрической проницаемости является эрмитовым, поэтому он может быть "диагонализирован" с помощью некоторой унитарной матрицы перехода:

$$\varepsilon_{ij}^d = U_{im}^{-1} \varepsilon_{mn} U_{nj} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь U_{nj} — матрица перехода, составленная из собственных векторов диэлектрического тензора, U_{im}^{-1} — матрица, обратная к матрице перехода, а ε_i — собственные значения диэлектрического тензора. Столбцы матрицы перехода могут быть интерпретированы как компоненты трёх в общем случае комплексных собственных векторов, определяемых в исходной декартовой системе координат как

$$\mathbf{e}_i = (U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}),$$

где $i = 1, 2, 3$. В силу унитарности матрицы перехода комплексное скалярное произведение этих векторов отвечает условию ортонормированности $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \equiv U_{ki} U_{kj}^* = U_{ki} U_{jk}^{-1} = \delta_{ij}$. Таким образом, матрица перехода, диагонализующая тензор диэлектрической проницаемости недиссипативной среды, определяет ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Заметим, что отсутствие диссипации в среде является достаточным, но не необходимым условием приведённого далее анализа. Наши выкладки останутся верными и для диссипативной среды, если её диэлектрический тензор можно привести к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе, поскольку мы нигде не используем выделяющее эрмитовы среды свойство действительности ε_{ij}^d . Примером такой диссипативной среды является магнитоактивная плазма со столкновениями (см. пример в конце раздела 2.1).

Анализ системы волновых уравнений существенно упрощается после перехода к представлению поля через проекции на новые базисные векторы: $\mathbf{E} = \mathcal{E}_j \mathbf{e}_j$ или

$$E_i = U_{ij} \mathcal{E}_j, \quad \mathcal{E}_j = U_{ij}^* E_i.$$

В дальнейшем собственные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ тензора диэлектрической проницаемости мы будем называть *собственными поляризациями среды*, а вектор

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$$

— представлением электрического поля в базисе собственных поляризаций среды. Нетрудно убедиться, что комплексный вектор собственной поляризации путём умножения на сохраняющую нормировку константу $\exp(i\varphi)$ может быть приведён к виду $\mathbf{e}_i = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, где \mathbf{a} и \mathbf{b} — два ортогональных действительных вектора, удовлетворяющих условию $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = 1$. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} определяют эллиптическую поляризацию электрического поля с амплитудой \mathcal{E}_i . Действительному вектору \mathbf{e}_i (или приводимому к действительному путём умножения на комплексную константу $\exp(i\varphi)$) отвечает линейная поляризация поля, т.е. $\mathbf{b} = 0$.

Волновое уравнение (3) в базисе собственных поляризаций среды примет вид

$$D_{ij} \mathcal{E}_j = 0, \quad D_{ij} = U_{im}^{-1} (k^2 \delta_{mn} - k_m k_n - k_0^2 \varepsilon_{mn}) U_{nj}. \quad (5)$$

Заметим, что поляризации нормальных мод, определяемые как собственные векторы матрицы D_{ij} , в общем случае не совпадают с собственными поляризациями среды, определяемыми как собственные векторы матрицы ε_{ij} . Волновой оператор можно представить в виде, инвариантном относительно выбора исходной декартовой системы координат:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} (1 - |\kappa_1|^2)n^2 - \varepsilon_1 & -n^2 \kappa_1^* \kappa_2 & -n^2 \kappa_1^* \kappa_3 \\ -n^2 \kappa_2^* \kappa_1 & (1 - |\kappa_2|^2)n^2 - \varepsilon_2 & -n^2 \kappa_2^* \kappa_3 \\ -n^2 \kappa_3^* \kappa_1 & -n^2 \kappa_3^* \kappa_2 & (1 - |\kappa_3|^2)n^2 - \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Здесь $n = ck/\omega$ — показатель преломления среды, $\kappa_j = \mathbf{e}_j \mathbf{k}/k = U_{ij} k_i/k$ — коэффициенты разложения единичного орта вдоль направления волнового вектора по векторам собственных поляризаций среды (т.е. координаты \mathbf{k}/k в новом базисе). Коэффициенты κ_i могут принимать комплексные значения, связанные условием нормировки,

$$|\kappa_1|^2 + |\kappa_2|^2 + |\kappa_3|^2 = 1. \quad (7)$$

Из (6), в частности, следует, что дисперсионное уравнение $\det D_{ij} = 0$ может быть представлено в следующем симметризованном инвариантном виде:

$$(\varepsilon_2 - n^2)(\varepsilon_3 - n^2) \varepsilon_1 |\kappa_1|^2 + (\varepsilon_1 - n^2)(\varepsilon_3 - n^2) \varepsilon_2 |\kappa_2|^2 + (\varepsilon_1 - n^2)(\varepsilon_2 - n^2) \varepsilon_3 |\kappa_3|^2 = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что решение этого уравнения отвечает конечным показателям преломления n^2 . Таким образом, мы исключим из рассмотрения электростатические волны, отвечающие $n^2 \rightarrow \infty$ (как правило, для таких волн становится существенной пространственная дисперсия среды [4, 7, 17]).

Как уже отмечалось, тройку чисел $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ формально можно рассматривать как компоненты некоторого вектора \mathcal{E} . В случае поляризационного вырождения существуют два линейно независимых вектора $\mathcal{E}^{(1)}$ и $\mathcal{E}^{(2)}$, удовлетворяющих линейным волновым уравнениям (5). Очевидно, что любая линейная комбинация

векторов $\mathcal{E}^{(1)}$ и $\mathcal{E}^{(2)}$ также будет решением системы волновых уравнений. Таким образом, в случае поляризационного вырождения существует выделенное направление

$$\boldsymbol{\tau} = [\mathcal{E}^{(1)} \mathcal{E}^{(2)}]$$

такое, что любой вектор, лежащий в ортогональной плоскости, $\mathcal{E} \perp \boldsymbol{\tau}$, является решением волнового уравнения. С точки зрения волновых уравнений (5) три собственных вектора среды равноправны, поэтому без ограничения общности можно задать одну проекцию вектора $\boldsymbol{\tau}$, например $\tau_3 = -1$. Тогда из условия ортогональности $\mathcal{E}\boldsymbol{\tau} = 0$ следует, что $\mathcal{E}_3 = \tau_1\mathcal{E}_1 + \tau_2\mathcal{E}_2$, где τ_1 и τ_2 — некоторые, в общем случае комплексные, константы. Подставляя это выражение в систему (5), получаем

$$\begin{cases} (D_{11} + \tau_1 D_{13}) \mathcal{E}_1 + (D_{12} + \tau_2 D_{13}) \mathcal{E}_2 = 0, \\ (D_{21} + \tau_1 D_{23}) \mathcal{E}_1 + (D_{22} + \tau_2 D_{23}) \mathcal{E}_2 = 0, \\ (D_{31} + \tau_1 D_{33}) \mathcal{E}_1 + (D_{32} + \tau_2 D_{33}) \mathcal{E}_2 = 0. \end{cases}$$

Эти соотношения должны выполняться для любых \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . Очевидно, что это возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты при \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} D_{11} + \tau_1 D_{13} = D_{12} + \tau_2 D_{13} = D_{21} + \tau_1 D_{23} = \\ = D_{22} + \tau_2 D_{23} = D_{31} + \tau_1 D_{33} = D_{32} + \tau_2 D_{33} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что эти равенства автоматически обеспечивают выполнение дисперсионного уравнения (8). Рассмотрим все ситуации, при которых возможно выполнение указанных равенств.

Пусть $n^2 = 0$. Тогда из определения (6) следует, что все недиагональные компоненты тензора D_{ij} зануляются, а из условий (9) следует, что и диагональные компоненты также равны нулю; кроме того $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Таким образом, этот случай соответствует полному поляризационному вырождению, при котором все компоненты $D_{ij} = 0$, поэтому любая поляризация поля удовлетворяет системе волновых уравнений. В дальнейшем будем полагать, что $n^2 > 0$.

Пусть τ_1 и τ_2 оба не равны нулю. Тогда из эрмитовости тензора D_{ij} и условий (9) следует, что

$$\begin{aligned} |\tau_2|^2 D_{11} = |\tau_1|^2 D_{22} = |\tau_1 \tau_2|^2 D_{33} = \tau_1 \tau_2^* D_{12} = \\ = -\tau_1 |\tau_2|^2 D_{13} = -\tau_2 |\tau_1|^2 D_{23}. \end{aligned}$$

Из соотношений для недиагональных членов, $D_{ij} = -n^2 \kappa_i^* \kappa_j$ ($i \neq j$), можно получить связь поляризационных коэффициентов κ_i в точке поляризационного вырождения,

$$\kappa_1 = -\tau_1 \kappa_3, \quad \kappa_2 = -\tau_2 \kappa_3.$$

С учётом этих соотношений находим, что для всех диагональных элементов выполняется соотношение

$$D_{ii} = -|\kappa_i|^2 n^2,$$

например, $D_{11} = -\tau_1 D_{13} = n^2 \kappa_1^* (\tau_1 \kappa_3) = -n^2 \kappa_1^* \kappa_1$. Отсюда следует, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = n^2$, т.е. рассматриваемый случай соответствует полной изотропии диэлектрического отклика среды. Компоненты поля при этом связаны с условием поляризационного вырождения $\mathcal{E} \perp \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$. Очевидно, что $\boldsymbol{\tau}$ есть просто волновой

вектор \mathbf{k} в базисе собственных поляризаций, поэтому в исходной декартовой системе координат приведённое условие эквивалентно естественному для изотропной среды условию поперечности поля, $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$.

Пусть только одно число из τ_1 и τ_2 не равно нулю, например, для определённости, $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 \neq 0$. Тогда из условий (9) следует, что

$$D_{21} = D_{31} = D_{12} + \tau_2 D_{13} = 0, \quad (10)$$

$$D_{11} = D_{22} + \tau_2 D_{23} = D_{32} + \tau_2 D_{33} = 0. \quad (11)$$

Соотношения (10), эквивалентные условию $\kappa_2^* \kappa_1 = \kappa_3^* \kappa_1 = 0$, могут выполняться в двух случаях: $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$ или $\kappa_1 = 0$. Рассмотрим сначала первый случай. Из условия нормировки (7) следует, что $|\kappa_1| = 1$, т.е. в этом случае вектор собственной поляризации \mathbf{e}_1 должен быть параллелен волновому вектору \mathbf{k} . При этом из соотношений (11) получаем, что $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = n^2$. Отсюда следует, что $D_{ij} = 0$, т.е. данный случай соответствует *полному* поляризационному вырождению. Во втором случае, $\kappa_1 = 0$, соотношения (11) можно переписать как

$$\begin{aligned} n^2 - \varepsilon_1 = 0, \quad |\kappa_3|^2 n^2 - \varepsilon_2 = \tau_2 n^2 \kappa_2^* \kappa_3, \\ \tau_2 (|\kappa_2|^2 n^2 - \varepsilon_3) = n^2 \kappa_3^* \kappa_2. \end{aligned}$$

В двух последних соотношениях мы воспользовались связью $|\kappa_2|^2 + |\kappa_3|^2 = 1$. Исключая τ_2 , окончательно можно получить следующие условия:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_2 |\kappa_2|^2 + \varepsilon_3 |\kappa_3|^2} = n^2 \quad \text{при} \quad \kappa_1 = 0.$$

Заметим, что в этом случае вектор собственной поляризации \mathbf{e}_1 ортогонален волновому вектору \mathbf{k} . Определяя τ_2 , находим, что поляризация вырожденных нормальных мод ортогональна вектору $\mathcal{E} \perp \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau} = (0, \varepsilon_2 \kappa_2, \varepsilon_3 \kappa_3)$. Нетрудно убедиться, что в исходной декартовой системе координат это условие эквивалентно соотношению $\varepsilon_i \kappa_i E_j = 0$, которое следует непосредственно из уравнения Максвелла $\text{div} \mathbf{D} = 0$.

И, наконец, пусть $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$. Тогда D_{33} может принимать любое значение, а все остальные компоненты тензора D_{ij} равны нулю. Это эквивалентно условию $\kappa_2^* \kappa_1 = \kappa_3^* \kappa_1 = \kappa_3^* \kappa_2 = 0$, которое выполняется, если любые два из входящих в него коэффициентов равны нулю. Отсюда с учётом нормировки (7) следует, что один из векторов собственных поляризаций, \mathbf{e}_i , должен быть параллелен волновому вектору, при этом соответствующий коэффициент $|\kappa_i| = 1$. Можно найти, что

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = n^2 \quad \text{при} \quad |\kappa_1| = 1,$$

$$\varepsilon_1 = n^2, \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \text{при} \quad |\kappa_2| = 1,$$

$$\varepsilon_1 = n^2, \quad \varepsilon_2 = n^2 \quad \text{при} \quad |\kappa_3| = 1.$$

Заметим, что ε_3 может принимать любое значение, что снимает полное поляризационное вырождение, рассмотренное выше. Поляризация вырожденных мод ортогональна вектору собственной поляризации среды \mathbf{e}_3 .

С точностью до перестановок индексов мы перебрали все возможные комбинации параметров, при которых может реализоваться поляризационное вырождение. Подытожим полученные результаты. Можно выделить пять характерных случаев, в которых возникает поляризационное вырождение.

2.1.1. Поляризационное вырождение в условиях частичного вырождения анизотропии. Этот случай реализуется, когда один из векторов собственных поляризаций среды сонаправлен с волновым вектором, соответствующее ему собственное значение тензора диэлектрической проницаемости отлично от нуля, при этом два других собственных значения равны между собой:

$$\mathbf{e}_i \parallel \mathbf{k}, \quad \varepsilon_i \neq 0, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_k = n^2 \quad (j \neq k \neq i). \quad (12)$$

Равенство собственных значений диэлектрического тензора квадрату показателя преломления автоматически следует из приведённых выше условий. Поляризации вырожденных мод ортогональны вектору собственной поляризации \mathbf{e}_i . Строго говоря, для выполнения условия $\varepsilon_j = \varepsilon_k$ требуется не только изотропность диэлектрического отклика в плоскости, ортогональной \mathbf{e}_i , но и отсутствие гиротропии вдоль \mathbf{e}_i . Для краткости мы будем использовать понятие частичного вырождения анизотропии, подразумевая при этом и одновременное вырождение гиротропии среды.

2.1.2. Поляризационное вырождение в окрестности резонанса среды. Поляризационное вырождение без вырождения анизотропии реализуется в окрестности резонанса среды, когда один из векторов собственных поляризаций среды сонаправлен с волновым вектором, соответствующее ему собственное значение тензора диэлектрической проницаемости равно нулю, а два других собственных значения не равны между собой (при этом один из них автоматически равен квадрату показателя преломления):

$$\mathbf{e}_i \parallel \mathbf{k}, \quad \varepsilon_i = 0, \quad \varepsilon_j = n^2, \quad \varepsilon_k \neq n^2 \quad (j \neq k \neq i). \quad (13)$$

Поляризации вырожденных мод ортогональны вектору собственной поляризации \mathbf{e}_k .

2.1.3. Полное поляризационное вырождение. Если волновой вектор сонаправлен с одним из векторов собственных поляризаций среды, соответствующее собственное значение тензора диэлектрической проницаемости равно нулю (резонанс среды), а два других собственных значения равны между собой,

$$\mathbf{e}_i \parallel \mathbf{k}, \quad \varepsilon_i = 0, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_k = n^2 \quad (j \neq k \neq i), \quad (14)$$

то реализуется *полное* поляризационное вырождение, при котором любая поляризация поля удовлетворяет системе волновых уравнений. Рассматриваемый случай соответствует лишь частичному вырождению анизотропии среды, поскольку в среде остаётся выделенное направление \mathbf{e}_i .

2.1.4. Полное вырождение анизотропии среды. Если все три собственных значения диэлектрического тензора равны,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = n^2, \quad (15)$$

то реализуется поляризационное вырождение в условиях полного вырождения анизотропии среды. Очевидно, что при отсутствии пространственной дисперсии это условие реализуется для всех направлений распространения волн. Поляризации вырожденных мод ортогональны \mathbf{k} . Заметим, что в специальном случае резонанса среды при $n^2 = 0$ полное вырождение реализуется одновременно и для поляризации волн, и для анизотропии среды.

Из приведённых условий следует, что в точке поляризационного вырождения волновой вектор параллелен некоторому вектору собственной поляризации среды. Если мы рассматриваем распространяющиеся волны с действительным \mathbf{k} , то параллельный ему вектор собственной поляризации должен быть *действительным* или приводиться к действительному. Другими словами, одна из собственных поляризаций среды должна быть линейной и ориентированной вдоль направления распространения вырожденных мод. Но это не единственно возможная ситуация.

2.1.5. Волновой вектор ортогонален вектору собственной поляризации среды. Поляризационное вырождение возможно одновременно и без вырождения анизотропии, и без резонанса среды. При этом, в отличие от всех предыдущих случаев, волновой вектор *ортогонален* одному из векторов собственных поляризаций среды, а на собственные значения тензора диэлектрической проницаемости наложены следующие условия:

$$\mathbf{e}_i \perp \mathbf{k}, \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_j \varepsilon_k}{\varepsilon_j |\kappa_j|^2 + \varepsilon_k |\kappa_k|^2} = n^2 \quad (j \neq k \neq i). \quad (16)$$

Для действительного вектора собственной поляризации \mathbf{e}_i приведённые условия определяют вектор \mathbf{k} (первое условие задаёт плоскость, второе — направление в этой плоскости и модуль \mathbf{k}) и не накладывают никаких дополнительных условий на компоненты диэлектрического тензора и на поляризацию нормальных мод, кроме условий разрешимости уравнений (16). Но в общем случае вектор \mathbf{e}_i может быть неприводимым к действительному комплексному вектору. В этом случае первое условие однозначно определяет направление волнового вектора $\mathbf{k} \parallel [\operatorname{Re} \mathbf{e}_i \times \operatorname{Im} \mathbf{e}_i]$, поэтому второе условие даёт дополнительную связь между собственными значениями диэлектрического тензора. Этот случай более удобно исследовать в представлении главных оптических осей, рассмотренном в следующем разделе.

2.1.6. Примеры поляризационного вырождения в недиссипативной среде. Рассмотрим наиболее типичные случаи, возможные в недиссипативной среде. Среда может обладать осью гиротропии и быть изотропной в плоскости поперёк этой оси. Наиболее распространённым примером такой среды является плазма в магнитном поле. Тогда один из векторов собственных поляризаций среды действителен и направлен вдоль оси гиротропии, а два других вектора собственных поляризаций комплексны. Из приведённых условий следует, что линейное взаимодействие волн с действительным \mathbf{k} возможно, только если волновой вектор параллелен или ортогонален к оси гиротропии². Если среда представляет собой одно- или двухосный кристалл, то все три вектора

² В этом легко убедиться. Пусть $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}$ направлен вдоль оси гиротропии, и $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ являются комплексными. Тогда из условия ортонормированности данных векторов следует, что $\mathbf{e}_2 = \cos \gamma \mathbf{a} + i \sin \gamma \mathbf{b}$ и $\mathbf{e}_3 = \sin \gamma \mathbf{a} - i \cos \gamma \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_1$ образуют ортонормированную тройку *действительных* векторов. Условия (12)–(14) возможны только при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_1$, т.е. при распространении вдоль оси гиротропии. Допустим, что условие (16) выполняется при $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_2$, т.е. $\mathbf{k} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{b}$. Тогда автоматически $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_1$, т.е. случай 2.1.5 сводится к случаю вырождения анизотропии 2.1.1. Поэтому без ограничения общности достаточно рассматривать случай 2.1.5 при $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}$, т.е. распространение поперёк оси гиротропии.

собственных поляризаций среды действительны и направлены вдоль главных оптических осей кристалла. Линейное взаимодействие распространяющихся волн возможно, если волновой вектор параллелен или ортогонален одной из главных оптических осей. И, наконец, если в анизотропном кристалле есть направление гиротропии, не совпадающее с главными оптическими осями (например, индуцированное произвольно направленным внешним магнитным полем), то все три вектора собственных поляризаций среды являются комплексными (неприводимыми к действительным). Тогда единственная возможность для линейного взаимодействия распространяющихся волн реализуется через случай 2.1.5 с комплексными \mathbf{e}_i . Описание этого довольно экзотического случая требует несколько иного формализма, приведённого в следующем разделе.

В качестве примера применения данной классификации рассмотрим распространение высокочастотных волн в холодной магнитоактивной плазме. Если частота излучения много выше всех ионных частот и эффективной частоты соударений, то рассматриваемая среда описывается гиротропным тензором диэлектрической проницаемости [2, 5, 30]

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix},$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{ce}}^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2}, \quad g = \frac{\omega_{\text{ce}}\omega_{\text{pe}}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{\text{ce}}^2)},$$

ω_{ce} и ω_{pe} — циклотронная и плазменная частоты электронов. Данный тензор написан в стоковой системе координат, в которой оси x_3 и x_2 направлены соответственно вдоль внешнего магнитного поля и поперёк \mathbf{k} . Векторы собственной поляризации среды и соответствующие диагональные элементы диэлектрического тензора можно определить как

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), & \varepsilon_1 &= \varepsilon_{\perp} - g = 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega(\omega - \omega_{\text{ce}})}, \\ \mathbf{e}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{\perp} + g = 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega(\omega + \omega_{\text{ce}})}, \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1), & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{\parallel}. \end{aligned}$$

Прежде всего отметим, что плазма изотропна в плоскости, ортогональной магнитному полю, а условие частичного вырождения анизотропии $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ фактически сводится к условию вырождения гиротропии $g \rightarrow 0$. Это условие реализуется в трёх случаях: при выходе излучения в вакуум, $\omega_{\text{pe}} \ll \omega$, $|\omega \pm \omega_{\text{ce}}|$, при слабой замагниченности, $\omega_{\text{ce}} \ll \omega$, и, наоборот, в сильном магнитном поле, $\omega_{\text{ce}} \gg \omega$, ω_{pe} . В первых двух случаях линейное взаимодействие волн происходит в условиях полного вырождения анизотропии 2.1.4, в третьем случае — в условиях частичного вырождения анизотропии 2.1.1, при этом излучение должно находиться вне области плазменной отсечки. Случай 2.1.2 реализуется в окрестности отсечки на плазменной частоте $\omega \rightarrow \omega_{\text{pe}}$, при этом в сильном магнитном поле ($\omega_{\text{ce}} \gg \omega_{\text{pe}}$) происходит переход к случаю полного поляризационного вырождения 2.1.3. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что случай 2.1.5 в магнитоактивной плазме возможен лишь

при $\omega_{\text{pe}} = 0$ или $\omega_{\text{ce}} = 0$, т.е. как самостоятельный случай не реализуется. С физической точки зрения это можно интерпретировать как следствие невозможности пересечения дисперсионных веток обыкновенной и необыкновенной волн, распространяющихся строго поперёк магнитного поля. Таким образом, за исключением случая полного вырождения анизотропии, волновой вектор взаимодействующих мод всегда выстраивается вдоль магнитного поля. Учёт столкновительной диссипации волн [2] не меняет картины, поскольку векторы \mathbf{e}_i при этом не изменятся (эффективная частота соударений войдёт только в диагональные элементы ε_i , сделав их комплексными), а появившаяся мнимая часть волнового вектора будет сонаправлена с действительной частью.

2.2. Представление в базисе главных оптических осей

В этом разделе мы рассмотрим альтернативный способ описания условий поляризационного вырождения, основанный на представлении поля через линейные поляризации, т.е. в базисе действительных векторов. По сравнению с рассмотренным в разделе 2.1 этот способ несколько более "физичный", поскольку явно разделяет эффекты гиротропии и анизотропии, однако в большинстве случаев приводит к более сложным уравнениям линейного взаимодействия. Тем не менее способ оказывается более удобным и информативным при анализе одного специального случая — выделенного выше случая 2.1.5, в котором волновой вектор ортогонален одному из векторов собственных поляризаций среды.

Разделим эрмитов тензор диэлектрической проницаемости на симметричную и антисимметричную часть:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}, \quad \varepsilon''_{ij} = \varepsilon_{ijk} g_k.$$

Здесь ε'_{ij} и ε''_{ij} — соответственно симметричная и антисимметричная матрицы с действительными коэффициентами, ε_{ijk} — единичный антисимметричный тензор, по индексу k подразумевается суммирование. Во втором соотношении мы воспользовались известным фактом, что в трёхмерном пространстве антисимметричный тензор может быть задан трёхмерным вектором. В данном случае это действительный вектор \mathbf{g} с декартовыми компонентами g_k , известный как вектор гирации [16]. Симметричную часть ε'_{ij} можно диагонализировать с помощью перехода к новому действительному ортогональному базису \mathbf{e}'_i , который определяет направления главных оптических осей среды [16]. Совокупность базисных векторов образует матрицу перехода U'_{ij} . Подчёркнём, что, в отличие от рассмотренного в разделе 2.1 базиса собственных поляризаций среды, базис главных оптических осей по построению всегда действителен (отвечает линейным поляризациям).

Рассмотрим волновые уравнения в базисе главных оптических осей. Электрическое поле представим в виде разложения по ортогональным линейным поляризациям $\mathbf{E} = \mathcal{E}'_i \mathbf{e}'_i$. В новом базисе антисимметричная часть диэлектрического тензора естественно определяется тем же вектором гирации \mathbf{g} , компоненты которого пересчитываются как $G_j = U'_{ij} g_i$. В результате полный диэлектрический тензор в новом базисе имеет следующий вид:

$$U'^{-1}_{im} \varepsilon_{mn} U'_{nj} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 & iG_3 & -iG_2 \\ -iG_3 & \varepsilon'_2 & iG_1 \\ iG_2 & -iG_1 & \varepsilon'_3 \end{bmatrix}.$$

Соответствующий волновой оператор может быть построен по аналогии с (6):

$$D'_{ij} = \begin{bmatrix} (1-\kappa_1'^2)n^2 - \varepsilon_1' & -n^2\kappa_1'\kappa_2' + iG_3 & -n^2\kappa_1'\kappa_3' - iG_2 \\ -n^2\kappa_1'\kappa_2' - iG_3 & (1-\kappa_2'^2)n^2 - \varepsilon_2' & -n^2\kappa_2'\kappa_3' + iG_1 \\ -n^2\kappa_1'\kappa_3' + iG_2 & -n^2\kappa_2'\kappa_3' - iG_1 & (1-\kappa_3'^2)n^2 - \varepsilon_3' \end{bmatrix},$$

$\kappa_j' = \mathbf{e}_j' \mathbf{k} / k$ — действительные координаты единичного орта вдоль направления волнового вектора в новом базисе.

Далее можно ввести вектор $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, -1)$, определяющий плоскость поляризации вырожденных мод, и полностью повторить логику предыдущего раздела. В частности, условия (9) в системе главных оптических осей примут вид:

$$n_2^2 + n_3^2 - \varepsilon_1' = \tau_1(iG_2 + n_1n_3), \quad (17)$$

$$n_1^2 + n_3^2 - \varepsilon_2' = -\tau_2(iG_1 - n_2n_3), \quad (18)$$

$$iG_2 - n_1n_3 = -\tau_1(n_1^2 + n_2^2 - \varepsilon_3'), \quad (19)$$

$$iG_1 + n_2n_3 = \tau_2(n_1^2 + n_2^2 - \varepsilon_3'), \quad (20)$$

$$iG_3 - n_1n_2 = \tau_2(iG_2 + n_1n_3), \quad (21)$$

$$iG_3 + n_1n_2 = \tau_1(iG_1 - n_2n_3), \quad (22)$$

где $n_i = nk_i$ — координаты вектора \mathbf{k}/k_0 в новом базисе. Условия совместности этих уравнений определяют дополнительные ограничения на поляризацию, волновой вектор и компоненты ε_{ij} в точке поляризационного вырождения. Так, уравнения (21) и (22) определяют вектор $\boldsymbol{\tau}$. Подставляя этот вектор в (19), (20) и исключая множитель $(n_1^2 + n_2^2 - \varepsilon_3')$, находим условие совместности (19)–(22):

$$n_1n_2n_3(G_1n_1 + G_2n_2 + G_3n_3) = 0.$$

Аналогично, подставляя вектор $\boldsymbol{\tau}$ в (17), (18) и приравнявая нулю мнимую часть, получаем

$$G_1G_2G_3 = n_1n_2n_3(G_1n_1 + G_2n_2 + G_3n_3) = 0.$$

Таким образом, для совместности приведённых уравнений волновой вектор должен быть ортогонален либо одной из главных оптических осей, либо вектору гирации. Кроме того, вектор гирации должен быть ортогонален одной из главных оптических осей.

Пусть τ_1 и τ_2 оба не равны нулю. Возможны два случая: $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_1'$ или $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$. Рассмотрим для определённости $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_1'$, т.е. $n_1 = 0$. Из уравнения (21) следует, что $\tau_2 = G_3/G_2$ — действительная величина. Приравняв нулю мнимую часть в (18), получаем, что $G_1 = 0$, т.е. вектор гирации должен быть ортогонален той же оптической оси \mathbf{e}_1' , что и волновой вектор. Из (22) находим $\tau_1 = -iG_3/n_2n_3$, после чего, исключая $\boldsymbol{\tau}$ из уравнений, получаем условия поляризационного вырождения в виде

$$\begin{cases} (n^2 - \varepsilon_1')n_3n_2 = G_2G_3, \\ (n^2 - \varepsilon_1')(n_3^2 - \varepsilon_2') = G_3^2, \\ (n^2 - \varepsilon_1')(n_2^2 - \varepsilon_3') = G_2^2, \end{cases}$$

где $n^2 = n_2^2 + n_3^2$. Решая эту систему уравнений относительно $n_{2,3}$ и ε_1 , получаем модуль и направление волнового вектора, а также дополнительное условие на тензор

диэлектрической проницаемости среды:

$$n^2 = \frac{\varepsilon_2'^2G_2^2 + \varepsilon_3'^2G_3^2}{\varepsilon_2'G_2^2 + \varepsilon_3'G_3^2}, \quad \kappa_2'\varepsilon_2'G_2 + \kappa_3'\varepsilon_3'G_3 = 0,$$

$$\varepsilon_1' - n^2 = \frac{G_2^2}{\varepsilon_3'} + \frac{G_3^2}{\varepsilon_2'}.$$

Из первых двух соотношений можно получить условие, по форме совпадающее с (16):

$$n^2 = \frac{\varepsilon_2'\varepsilon_3'}{\varepsilon_2'\kappa_2'^2 + \varepsilon_3'\kappa_3'^2}.$$

Условие на направление можно также интерпретировать в инвариантном виде как $\mathbf{k} \perp \hat{\varepsilon}'\mathbf{g}$. Теперь рассмотрим второй случай, $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$. Одна из компонент G_i должна быть равна нулю, пусть $G_1 = 0$. Исключая $\boldsymbol{\tau}$ из уравнений (17)–(22) и учитывая условие ортогональности $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$ (т.е. $G_2n_2 + G_3n_3 = 0$), можно получить

$$\begin{cases} (G_2^2 + n_1^2n_3^2)(n^2 - \varepsilon_2') = G_2n_2(G_2n_2 + G_3n_3) = 0, \\ (G_3^2 + n_1^2n_2^2)(n^2 - \varepsilon_3') = G_3n_3(G_2n_2 + G_3n_3) = 0, \\ (n^2 - \varepsilon_1')n_2n_3 = G_2G_3, \end{cases}$$

где $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Отсюда $\varepsilon_2' = \varepsilon_3' = n^2$ и $\varepsilon_1' - n^2 = G_2^2/n_2^2 = G_3^2/n_3^2$. В негиротропных средах ($\mathbf{g} = 0$) этот случай отвечает полному вырождению анизотропии (15). По-видимому, оба рассмотренных выше случая отвечают случаю (16) с комплексным вектором собственной поляризации ($\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_i \in \mathbb{C}$), поскольку полностью определяют волновой вектор и задают одно дополнительное условие на компоненты диэлектрического тензора.

Пусть только одно число из τ_1 и τ_2 не равно нулю, например, для определённости, $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 \neq 0$. Тогда из уравнений (19) и (22) следует, что $G_2 = G_3 = n_1n_2 = n_1n_3 = 0$, т.е. $\mathbf{e}_1' \parallel \mathbf{g}$ и либо $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$, либо $\mathbf{k} \parallel \mathbf{g}$. Заметим, что из условия $\mathbf{e}_1' \parallel \mathbf{g}$ следует, что один из векторов собственных поляризаций среды действителен, совпадает с главной оптической осью \mathbf{e}_1' и отвечает собственному значению ε_1' ; кроме того, $G_1 = \pm|\mathbf{g}|$. В случае $\mathbf{k} \perp \mathbf{g}$ условия совместности сводятся к

$$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon_2'\varepsilon_3' - \mathbf{g}^2}{\varepsilon_2'\kappa_2'^2 + \varepsilon_3'\kappa_3'^2} = n^2.$$

Этот случай отвечает случаю (16) с действительным вектором собственной поляризации ($\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}$), поскольку определяет только волновой вектор (модуль и направление). В случае $\mathbf{k} \parallel \mathbf{g}$ условия совместности сводятся к

$$\varepsilon_1' = 0, \quad (n^2 - \varepsilon_2')(n^2 - \varepsilon_3') = \mathbf{g}^2.$$

Этот случай отвечает случаю (13) или при $\mathbf{g} \rightarrow 0$ случаю (14).

И, наконец, пусть $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$. Тогда из уравнений (19)–(21) следует, что среда становится негиротропной, $\mathbf{g} = 0$, и этот случай сводится либо к случаю (12), либо к частному случаю (13).

2.3. Сравнение двух представлений

Итак, мы нашли некоторые ограничения на диэлектрический тензор среды в точке поляризационного вырожде-

Таблица. Условия поляризационного вырождения в представлениях собственных поляризаций среды и главных оптических осей. Заметим, что в ряде случаев в правой колонке таблицы встречаются величины (без штрихов), соответствующие представлению собственных поляризаций среды. Это означает, что указанные величины совпадают в обоих представлениях. Это возможно либо при $\mathbf{g} = 0$, когда оба представления полностью тождественны, либо при $\mathbf{g} \parallel \mathbf{e}'_i$, когда совпадают орты $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i$

Случай	Представление собственных поляризаций среды	Представление главных оптических осей
2.1.1	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \varepsilon_i \neq 0, \varepsilon_j = \varepsilon_k$	$\mathbf{g} \rightarrow 0, \mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \varepsilon_i \neq 0, \varepsilon_j = \varepsilon_k$
2.1.2	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \varepsilon_i = 0, \varepsilon_j \neq \varepsilon_k$	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}'_i \parallel \mathbf{g}, \varepsilon_i = 0, (n^2 - \varepsilon'_j)(n^2 - \varepsilon'_k) = g^2$
2.1.3	$\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \varepsilon_i = 0, \varepsilon_j = \varepsilon_k$	$\mathbf{g} \rightarrow 0, \mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_i, \varepsilon_i = 0, \varepsilon_j = \varepsilon_k$
2.1.4	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$	$\mathbf{g} \rightarrow 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$
2.1.5	$\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_i, \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_j \varepsilon_k}{\varepsilon_j \kappa_j ^2 + \varepsilon_k \kappa_k ^2}$	$\mathbf{k} \perp \mathbf{e}'_i, \mathbf{k} \perp \hat{\varepsilon}' \mathbf{g}, \mathbf{g} \perp \mathbf{e}'_i, \varepsilon'_i = \frac{G_j^2}{\varepsilon'_k} + \frac{G_k^2}{\varepsilon'_j} + \frac{\varepsilon_j'^2 G_j^2 + \varepsilon_k'^2 G_k^2}{\varepsilon'_j G_j^2 + \varepsilon'_k G_k^2}$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{g}, \mathbf{g} \perp \mathbf{e}'_i, \varepsilon'_j = \varepsilon'_k, \varepsilon'_i - \varepsilon'_j = \frac{G_j^2}{\varepsilon'_j \kappa_j'^2}$
		$\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}, \mathbf{g} \parallel \mathbf{e}'_i, \varepsilon_i = \frac{\varepsilon'_j \varepsilon'_k - g^2}{\varepsilon'_j \kappa_j'^2 + \varepsilon'_k \kappa_k'^2}$

ния. Результаты этого анализа подытожены в таблице. Видно, что представление главных оптических осей позволяет получить несколько более детальную информацию о структуре диэлектрического тензора в точке поляризационного вырождения, поскольку оно основано на более детальной модели диэлектрического отклика, в которой гиротропные эффекты описываются отдельным вектором \mathbf{g} . Следующий шаг заключается в построении укороченных волновых уравнений в окрестности точки поляризационного вырождения в плавно-неоднородной среде. Такой анализ можно провести для обоих рассмотренных представлений поля, однако использование главных оптических осей приводит к гораздо более громоздким выкладкам по сравнению с более грубым описанием через собственные поляризации среды. Методика анализа при этом одинакова. Поэтому в следующем разделе мы ограничимся более наглядным анализом волновых уравнений в представлении собственных поляризаций среды.

3. Эталонные уравнения, описывающие линейное взаимодействие волн в окрестности точек поляризационного вырождения

Как известно, поляризационное вырождение снимается в пространственно неоднородной среде. Рассмотрим слабонеоднородную среду без пространственной дисперсии, заданную эрмитовым тензором диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r})$, изменяющимся в пространстве медленно по сравнению с длиной волны вдали от области взаимодействия,

$$k_0 L \gg 1.$$

Здесь L — характерный масштаб изменения диэлектрических свойств среды. Приведённое условие позволяет выделить в среде нормальные волны, распространяющиеся независимо в приближении геометрической оптики [2, 5, 6]. Однако в окрестности точек поляризационного вырождения, найденных в разделе 2, приближение геометрической оптики может нарушаться, в

результате чего между нормальными волнами в плавно-неоднородной среде появляется связь (линейное взаимодействие). В этом случае распределение электромагнитного поля может быть описано эталонными волновыми уравнениями, полученными в результате использования укороченных уравнений Максвелла в окрестности точек поляризационного вырождения. В данном разделе мы найдём и классифицируем такие уравнения.

В каждой точке пространства применим процедуру диагонализации тензора $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, описанную в разделе 2.1. В результате получим диагональную матрицу $\varepsilon_{ij}^d(\mathbf{r})$ с элементами $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ и матрицу перехода $U_{ij}(\mathbf{r})$, составленную из векторов собственных поляризаций среды $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$. Все эти величины плавно зависят от координат с характерным масштабом изменения L . Может оказаться, что масштаб изменения $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ и $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$ разный. Например, в условиях вырождения анизотропии ($\varepsilon_i \approx \varepsilon_j$) поворот векторов \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j , как правило, проходит существенно быстрее изменения ε_i и ε_j . В таких случаях под L подразумевается наименьший из масштабов. Пусть существует точка в пространстве, в которой выполняется одно из найденных в разделе 2.1 условий поляризационного вырождения для плоской электромагнитной волны с некоторым фиксированным волновым вектором \mathbf{k}^0 . Рассмотрим окрестность этой точки, предполагая, что компоненты тензора диэлектрической проницаемости и вектора собственных поляризаций среды непрерывны и мало отличаются от соответствующих величин в точке поляризационного вырождения,

$$U_{ij}(\mathbf{r}) = U_{ij}^0 + \delta U_{ij}(\mathbf{r}), \quad |\delta U_{ij}| \ll |U_{ij}^0|$$

или

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_i^0 + \delta \mathbf{e}_i(\mathbf{r}), \quad |\delta \mathbf{e}_i| \ll |\mathbf{e}_i^0|.$$

Точка поляризационного вырождения может быть удалена на бесконечность или вовсе не существовать, как, например, в случае, когда среда плавно переходит в вакуум [2, 5, 8]. Это обстоятельство, однако, не мешает рассматривать окрестность данной точки, определённую

как область пространства, где параметры среды и поля почти удовлетворяют условиям поляризации вырождения. Заметим, что требование непрерывности векторов собственных поляризаций среды снимает неоднозначность выбора этих векторов в случаях, соответствующих вырождению анизотропии среды.

Как и в однородной среде, будем искать волновое поле в представлении собственных поляризаций среды,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t),$$

где $\mathcal{E}_i(\mathbf{r})$ — медленные на масштабе длины волны функции. Уравнения для медленных амплитуд волнового поля могут быть получены формальной заменой в уравнениях (5) волнового вектора на дифференциальный оператор

$$\mathbf{k} \rightarrow \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^0 - i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}.$$

При этом в окрестности точки поляризации вырождения пространственная производная мала по сравнению с "несущим" волновым вектором \mathbf{k}^0 , поэтому при вычислении квадратичных операторов можно ограничиться членами первого порядка малости:

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 \hat{k}_1 &= \hat{k}_1 \hat{k}_2 = \hat{k}_2 \hat{k}_2 = 0, \\ \hat{k}_1 \hat{k}_3 &= -ik_0 n \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \hat{k}_2 \hat{k}_3 = -ik_0 n \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \hat{k}_3 \hat{k}_3 &= k_0^2 n^2 - 2ik_0 n \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Здесь мы выбрали декартову систему координат так, чтобы ось x_3 была параллельна волновому вектору \mathbf{k}^0 . Показатель преломления $n = |\mathbf{k}^0|/k_0$ вычисляется в точке поляризации вырождения. В результате система укороченных волновых уравнений примет следующий вид:

$$\hat{D}_{ij} \mathcal{E}_j = 0, \quad \hat{D}_{ij} = U_{mi}^* \hat{K}_{mn} U_{nj} - k_0^2 \varepsilon_{ij}^d, \quad (23)$$

где

$$\hat{K}_{mn} = k_0 n \begin{bmatrix} k_0 n - 2i \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & i \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & k_0 n - 2i \frac{\partial}{\partial x_3} & i \frac{\partial}{\partial x_2} \\ i \frac{\partial}{\partial x_1} & i \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что производные по координатам в операторе \hat{D}_{ij} действуют не только на волновое поле, но и на компоненты векторов собственных поляризаций среды, определяемых матрицей U_{nj} . Однако, ограничившись только членами нулевого и первого порядка малости по δU_{ij} , волновой оператор (23) нетрудно переписать в виде, в котором производные по координатам действуют только на волновое поле:

$$\hat{D}_{ij} = U_{mi}^* U_{nj}^0 \hat{K}_{mn} - k_0^2 \varepsilon_{ij}^d + \delta D_{ij}, \quad (24)$$

$$\delta D_{ij} = k_0^2 n^2 (\delta U_{mi}^* \sigma_{mn} U_{nj}^+ + U_{mi}^* \sigma_{mn} \delta U_{nj}),$$

где $\sigma_{mn} = \delta_{mn} - \delta_{3m} \delta_{3n}$. Слагаемое δD_{ij} описывает "шировую" часть волнового оператора, связанную с

поворотом выделенных направлений среды — оптических осей или оси гиротропии. Этот член может быть несколько упрощён, если воспользоваться свойством ортонормированности векторов $\mathbf{e}_i(\mathbf{r})$ в каждой точке пространства. Действительно, из равенства $\mathbf{e}_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij}$ с точностью до членов первого порядка следует соотношение $U_{mi}^0 \delta U_{nj}^* + \delta U_{mi} U_{mj}^{0*} = 0$, из которого следует, что матрица σ_{mn} в (24) может быть заменена на более простую матрицу $\sigma_{mn} = -\delta_{3m} \delta_{3n}$, у которой все элементы равны нулю, за исключением последнего элемента на диагонали.

То обстоятельство, что за исключением некоторых специальных случаев производными от векторов собственных поляризаций среды (23) можно пренебречь по сравнению с производными от компонент электрического поля, имеет ясный физический смысл. Действительно, учитываемые в (23) члены имеют вид $(x_i/L) \mathcal{E}_j$ и $(k_0^{-1} \partial/\partial x_i) \mathcal{E}_j$, где L — масштаб неоднородности диэлектрического отклика среды. Сопоставляя эти члены, нетрудно убедиться, что волновое поле изменяется на характерном масштабе $L/\sqrt{k_0 L} \ll L$, т.е. быстро по сравнению с изменением дисперсионных свойств среды. Векторы собственных поляризаций среды меняются на масштабе L , поэтому их производные могут быть отброшены по сравнению с первыми производными от амплитуды поля: $\mathcal{E}_j \partial U_{ij}/\partial x_k \ll U_{ij} \partial \mathcal{E}_j/\partial x_k$.

Перейдём к анализу случаев поляризации вырождения, найденных в разделе 2.1. В случаях 2.1.1–2.1.3 на базис собственных векторов среды наложено условие $\mathbf{e}_i = (0, 0, 1)$, так как ось x_3 направлена вдоль несущего волнового вектора \mathbf{k}^0 . Нетрудно убедиться, что с точностью до перестановок индексов унитарная матрица U_{ij}^0 в этом случае имеет общий вид

$$U_{ij}^0 = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \varphi - i \sin \gamma \sin \varphi & \sin \gamma \cos \varphi + i \cos \gamma \sin \varphi & 0 \\ \cos \gamma \sin \varphi + i \sin \gamma \cos \varphi & \sin \gamma \sin \varphi - i \cos \gamma \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Координатные оси x_1 и x_2 всегда можно повернуть относительно оси x_3 так, что $\varphi = 0$; при этом координатные оси направлены вдоль осей эллипсов собственных поляризаций среды в плоскости (x_1, x_2) . Оставшийся параметр γ характеризует отношение главных осей эллипсов собственных поляризаций среды. В дальнейшем будем работать именно в такой системе координат, обозначив её (x, y, z) , где ось $z = x_3$ направлена вдоль волнового вектора и одновременно вдоль действительного собственного вектора среды. После подстановки приведённой выше матрицы U_{ij}^0 при $\varphi = 0$ в (24) система волновых уравнений $\hat{D}_{ij} \mathcal{E}_j = 0$ сводится к следующему укороченному виду:

$$\begin{cases} \hat{D}_{11} \mathcal{E}_1 + \hat{D}_{13} \mathcal{E}_3 = 0, \\ \hat{D}_{22} \mathcal{E}_2 + \hat{D}_{23} \mathcal{E}_3 = 0, \\ \hat{D}_{13}^* \mathcal{E}_1 + \hat{D}_{23}^* \mathcal{E}_2 = \varepsilon_3 \mathcal{E}_3, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\hat{D}_{11} = n^2 - \varepsilon_1 - 2ink_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\hat{D}_{22} = n^2 - \varepsilon_2 - 2ink_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_{13} &= n^2(\delta e_{3x} \cos \gamma - i \delta e_{3y} \sin \gamma) + \\ &+ ink_0^{-1} \left(\cos \gamma \frac{\partial}{\partial x} - i \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{D}_{13}^* &= n^2(\delta e_{3x} \cos \gamma + i \delta e_{3y} \sin \gamma) + \\ &+ ink_0^{-1} \left(\cos \gamma \frac{\partial}{\partial x} + i \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{D}_{23} &= n^2(\delta e_{3x} \sin \gamma + i \delta e_{3y} \cos \gamma) + \\ &+ ink_0^{-1} \left(\sin \gamma \frac{\partial}{\partial x} + i \cos \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{D}_{23}^* &= n^2(\delta e_{3x} \sin \gamma - i \delta e_{3y} \cos \gamma) + \\ &+ ink_0^{-1} \left(\sin \gamma \frac{\partial}{\partial x} - i \cos \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

При выводе мы воспользовались соотношениями

$$\hat{D}_{11} = -\varepsilon_3, \quad \hat{D}_{12} = \hat{D}_{21} = 0, \quad \hat{D}_{31} = \hat{D}_{13}^*, \quad \hat{D}_{32} = \hat{D}_{23}^*,$$

здесь звёздочка обозначает эрмитово сопряжение оператора. Заметим, что продольная производная (вдоль волнового вектора) входит только в диагональные операторы \hat{D}_{11} и \hat{D}_{22} , а все недиагональные операторы содержат только поперечные производные. Заметим также, что вращение векторов собственных поляризацій среды вносит свой вклад в линейное взаимодействие волн, однако он определяется только поперечными возмущениями $\delta \mathbf{e}_3$ выделенного собственного вектора \mathbf{e}_3 , вдоль которого выстраиваются волновые векторы взаимодействующих волн. Напомним, что в приведённых уравнениях компонента \mathcal{E}_3 определяет продольное электрическое поле $E_z = \mathcal{E}_3$, при этом $\mathbf{e}_3^0 \parallel \mathbf{k}^0$.

3.1. Поляризационное вырождение в условиях частичного вырождения анизотропии (случай 2.1.1)

В случае поляризационного вырождения в условиях частичного вырождения анизотропии в силу условий (12) в окрестности точки поляризационного вырождения выполняются условия

$$|n^2 - \varepsilon_1| \ll 1, \quad |n^2 - \varepsilon_2| \ll 1,$$

при которых все члены вида $\hat{D}_{ij}\mathcal{E}_k$ в уравнениях (26) являются малыми величинами одного порядка. С другой стороны, среда должна находиться вдали от продольного резонанса, поэтому можно считать $\varepsilon_3 \sim 1$, точнее $|\hat{D}_{13}^*|, |\hat{D}_{23}^*| \ll \varepsilon_3$. Отсюда в силу последнего уравнения системы (26) следует, что продольное электрическое поле мало, $\mathcal{E}_3 \ll \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$. Отбросив малую компоненту электрического поля, получаем систему двух не связанных уравнений

$$\hat{D}_{11}\mathcal{E}_1 = 0, \quad \hat{D}_{22}\mathcal{E}_2 = 0.$$

В этом приближении две поперечные моды с поляризациями, совпадающими с двумя собственными поляризациями среды, распространяются независимо в соответствии с уравнениями геометрической оптики. Физически это означает, что взаимодействие определяется отброшенными членами более высоких порядков и происходит на геометро-оптических масштабах порядка L , а не $L/\sqrt{k_0 L}$, как предполагалось при выводе укороченных уравнений. С учётом этих членов уравнения для взаимо-

действующих геометро-оптических мод в этом случае могут быть записаны в форме (1):

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} - ik_0 n_1 \right) E_1 = \eta E_2, \\ \left(\frac{d}{dt} - ik_0 n_2 \right) E_2 = \eta^* E_1, \end{cases}$$

где производная берётся вдоль геометро-оптической трассы l , $E_{1,2}$ и $n_{1,2}$ — амплитуды нормальных мод и их показатели преломления соответственно, η — коэффициент связи между модами. Подобные уравнения для связанных мод в слабоанизотропных средах систематически исследовались, например, в [6, 8]; мы не будем останавливаться на этом хорошо известном случае. Как уже отмечалось во введении, в рассматриваемом случае взаимодействие мод носит эффективно одномерный характер, поскольку эффект "накапливается" по мере распространения волн вдоль геометро-оптической трассы.

3.2. Поляризационное вырождение в окрестности резонанса среды (случай 2.1.2)

Совершенно иной характер имеют волновые уравнения в случае поляризационного вырождения в окрестности резонанса среды. В силу условий (13) один из диагональных операторов \hat{D}_{11} или \hat{D}_{22} не является малым. Пусть для определённости в окрестности точки поляризационного вырождения выполняются условия

$$|n^2 - \varepsilon_1| \ll 1, \quad |n^2 - \varepsilon_2| \gtrsim 1, \quad |\varepsilon_3| \ll 1. \quad (27)$$

Это означает, что \hat{D}_{22} в (26) не мал, а все остальные слагаемые одного порядка и малы по сравнению с \hat{D}_{22} . Отсюда следует, что компонента $\mathcal{E}_2 \ll \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3$ может быть отброшена. Уравнения (26) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \hat{D}_{11}\mathcal{E}_1 + \hat{D}_{13}\mathcal{E}_3 = 0, \\ \hat{D}_{13}^*\mathcal{E}_1 - \varepsilon_3\mathcal{E}_3 = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Уравнения такого типа, насколько известно авторам, применительно к электродинамике гиротропной плазмы впервые были введены в работе [18], понимание физики и решение этих уравнений были получены в [19] и, независимо, в [20], после чего последовало довольно большое число публикаций, посвящённых анализу волновых процессов, описываемых данными уравнениями. В работах [19, 20, 31–36] был детально рассмотрен случай взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн в двумерно неоднородной магнитоактивной плазме, в работе [37] был исследован случай трёхмерно неоднородной плазмы. В [21] задача была обобщена для случая, не привязанного к электродинамике магнитоактивной плазмы.

Приведённые выше уравнения описывают совершенно новый тип волновых взаимодействий, не укладывающийся в стандартную картину. Данное утверждение можно проиллюстрировать в рамках приближения геометрической оптики. Формально это приближение здесь неприменимо, однако оно даёт наглядное качественное представление об основных свойствах процесса линейного взаимодействия в рассматриваемом случае. Дисперсионное соотношение, соответствующее условиям (28) в диапазоне углов распространения $k_x, k_y \ll k_z \approx nk_0$,

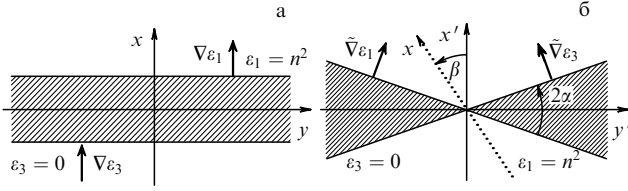


Рис. 1. Поверхности отсечки $\varepsilon_1 = n^2$ и $\varepsilon_3 = 0$ в одномерном и двумерном случаях. Область непроникновения волн заштрихована.

может быть записано в следующем виде:

$$k_x^2 \cos^2 \gamma + k_y^2 \sin^2 \gamma = k_0^2 \varepsilon_3 \left(\frac{\varepsilon_1}{n^2} - 1 \right). \quad (29)$$

Это условие легко получить, если в исходных уравнениях положить $\partial_x = ik_x$, $\partial_y = ik_y$, $\partial_z = 0$, $\delta \varepsilon_{3x,y} = 0$. Видно, что волны, описываемые этим дисперсионным соотношением, могут распространяться в областях, где правая часть выражения (29) больше нуля. Противоположное условие, $\varepsilon_3(\varepsilon_1 - n^2) < 0$, определяет область непрозрачности для рассматриваемых мод. Заметим, что третья мода с ненулевым \mathcal{E}_2 в принципе может распространяться в указанной области, поскольку она "отщеплена".

На рисунке 1 изображена структура области линейного взаимодействия в одномерном (а) и двумерном (б) случаях. Области распространения волн с фиксированным продольным волновым числом разделены областью непрозрачности, границами которой служат "поверхности отсечки излучения" $\varepsilon_1 = n^2$ и $\varepsilon_3 = 0$. Как правило, номенклатура мод вводится таким образом, что с одной стороны области непрозрачности распространяется мода одного типа, с другой стороны — другого типа.

В одномерном случае поверхности отсечки в первом приближении можно считать параллельными, при этом ширина области непрозрачности зависит от значения волнового числа. При некотором оптимальном значении продольного волнового числа n плоскости отсечки могут совпадать, тогда область непрозрачности отсутствует и волна распространяется совершенно свободно, что соответствует случаю полной трансформации одной моды в другую. При наличии области непрозрачности в приближении геометрической оптики излучение отражается назад и взаимодействия с другой модой не происходит. Однако вне рамок геометрической оптики возможно туннелирование электромагнитного излучения через область непрозрачности, что может приводить к эффективной трансформации в случае достаточно тонкого слоя [13–15].

В двумерном (или трёхмерном) случае ситуация оказывается топологически иной — поверхности отсечки пересекаются в пространстве вдоль некоторой линии, перпендикулярной плоскости рисунка. Для геометро-оптического луча, проходящего через эту линию, область непрозрачности отсутствует, что формально соответствует случаю полной трансформации. Причём, в отличие от одномерного случая, такой луч существует не для одного оптимального значения n , а для некоторого непрерывного диапазона значений, при которых существует линия пересечения поверхностей отсечки. Изменение n в этом диапазоне приводит только к смещению области трансформации вслед за линией пересечения поверхностей отсечки.

Конечно, рассмотренное геометро-оптическое описание становится некорректным в области трансформации, однако полное волновое исследование эффекта трансформации даёт сходный результат: если в рассматриваемой геометрии поверхности отсечки пересекаются, то существует оптимальное распределение поля, при котором падающий волновой пучок проходит область взаимодействия без отражения.

Уравнения (28) удобно анализировать в приближении плоских поверхностей отсечки. Как будет показано ниже, эти уравнения описывают взаимодействие волн, происходящее на масштабах, малых по сравнению с масштабами неоднородности среды. Поэтому в локализованной области линейного взаимодействия достаточно ограничиться линейными по координатам вариациями коэффициентов в уравнениях (28):

$$k_0(\varepsilon_1 - n^2) = a_1x + a_2y + a_3z, \quad k_0\varepsilon_3 = b_1x + b_2y + b_3z,$$

где $a_1 = k_0 \partial \varepsilon_1 / \partial x$, $b_1 = k_0 \partial \varepsilon_3 / \partial x$ и т.д. считаются константами. Здесь мы учли, что в начале координат выполняются строгие условия поляризации вырождения: $\varepsilon_1 = n^2$ и $\varepsilon_3 = 0$. Для упрощения выкладок рассмотрим наиболее простой случай, когда в среде есть фиксированная ось гиротропии, т.е. направление вектора собственной поляризации \mathbf{e}_3 в окрестности области взаимодействия можно считать неизменным (случай переменной оси гиротропии рассмотрен в [37]). В результате уравнения (28) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \left(i n \left(\cos \gamma \frac{\partial}{\partial x} - i \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \mathcal{E}_3 = \left(a_1x + a_2y + a_3z + 2in \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}_1, \\ \left(i n \left(\cos \gamma \frac{\partial}{\partial x} + i \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \mathcal{E}_1 = (b_1x + b_2y + b_3z) \mathcal{E}_3. \end{cases} \quad (30)$$

В качестве важного частного случая рассмотрим двумерно неоднородную среду, в которой все параметры изменяются поперёк выделенной оси вдоль вектора собственной поляризации \mathbf{e}_3 — оси гиротропии. В такой среде $a_3 = 0$, $b_3 = 0$ и $\partial / \partial z = k_z = \text{const}$. Соответствующие волновые уравнения описывают распространение независимых фурье-гармоник по z , общее решение волновых уравнений строится как их суперпозиция. Нетрудно видеть, что в приведённых выше уравнениях член с волновым числом k_z может быть учтён за счёт сдвига начала координат вдоль осей x и y , после чего для каждой фурье-гармоники получается одна и та же система уравнений. После поворота координатных осей и масштабирования полей система (30) может быть сведена к эталонному виду

$$\begin{cases} - \left(i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial y'} \right) \mathcal{E}'_3 = (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha) \mathcal{E}'_1, \\ - \left(i \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} \right) \mathcal{E}'_1 = (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) \mathcal{E}'_3. \end{cases} \quad (31)$$

Новые координаты привязаны к области линейного взаимодействия, как показано на рис. 1б: оси x' и y' направлены вдоль биссектрис углов, образованных пересечением векторов $\tilde{\mathbf{V}}_{\varepsilon_1} = (a_1 \cos \gamma, a_2 \sin \gamma, 0)$ и $\tilde{\mathbf{V}}_{\varepsilon_3} = (b_1 \cos \gamma, b_2 \sin \gamma, 0)$. Координаты нормированы на характерный масштаб взаимодействия

$$L_V = \sqrt{n} (k_0^2 |\tilde{\mathbf{V}}_{\varepsilon_1}| |\tilde{\mathbf{V}}_{\varepsilon_3}|)^{-1/4}.$$

Степень "неоднородности" задачи определяется единственным безразмерным параметром α (это половина угла между \vec{V}_{ε_1} и \vec{V}_{ε_3}), при $\alpha \rightarrow 0$ происходит переход к одномерной задаче.

Приведённые уравнения допускают полное аналитическое решение [19, 21, 31]. Уравнения описывают линейное взаимодействие с масштабом $L_V \sim L/\sqrt{k_0 L} \ll L$, малым по сравнению с масштабом неоднородности среды. Это, в частности, оправдывает использованное приближение линейных по координатам вариаций коэффициентов волновых уравнений. Заметим, однако, что в прозрачных средах масштаб $L_V \sim \lambda\sqrt{k_0 L} \gg \lambda$ велик по сравнению с длиной волны излучения. В двумерной геометрии появляются новые эффекты, отсутствующие в стандартной одномерной модели — существование ограниченных по апертуре волновых пучков, испытывающих полную (безотражательную) трансформацию, и отсутствие симметрии процессов прямой и обратной трансформации волн в гиротропных средах.

В трёхмерно неоднородной среде уравнения (30) почти во всех случаях могут быть с той или иной степенью точности приведены к виду (31), допускающему полное аналитическое решение. Это позволяет говорить об уравнениях (31) как о новой эталонной задаче теории распространения волн, допускающей широкую область применимости. Например, при решении задач, связанных с магнитным удержанием плазмы, как правило, можно считать, что плотность равновесной плазмы быстро перераспределяется вдоль магнитных силовых линий, поэтому хорошим приближением является условие $\nabla \varepsilon_3 \perp \mathbf{B}$. С учётом результатов, приведённых в разделе 2.1.6, можно считать, что координата z направлена вдоль магнитного поля, $b_3 = 0$ и $\gamma = \pi/4$. Тогда с помощью замены

$$\mathcal{E}'_{1,3} = \mathcal{E}_{1,3} \exp\left(ik_z z + \frac{ia_3 z^2}{4n}\right)$$

координата вдоль магнитного поля из уравнений исключается и задача становится двумерной:

$$\begin{cases} in\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathcal{E}'_3 = \sqrt{2}(a_1 x + a_2 y - 2nk_z)\mathcal{E}'_1, \\ in\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathcal{E}'_1 = \sqrt{2}(b_1 x + b_2 y)\mathcal{E}'_3. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что в результате сдвига и поворота координат задача сводится к эталонным уравнениям (31). Заметим, что в сильных внешних полях плотность плазмы может меняться вдоль магнитного поля, при этом интересным оказывается случай $\nabla \varepsilon_3 \parallel \mathbf{B}$, т.е. $b_1 = b_2 = 0$. В этом случае заменой

$$\mathcal{E}'_{1,3} = \mathcal{E}_{1,3} \exp\left[-\frac{iz(a_1 x + a_2 y)}{2n}\right]$$

из уравнений (30) исключается явная зависимость от поперечных координат x, y , после чего задача сводится к одномерной:

$$\begin{cases} in\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathcal{E}'_3 = \frac{1}{2}(a_1 - ia_2)z\mathcal{E}'_3 + 2\sqrt{2}in\frac{\partial \mathcal{E}'_1}{\partial z}, \\ in\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathcal{E}'_1 = \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}ia_2 + \sqrt{2}b_3\right)z\mathcal{E}'_3. \end{cases}$$

Полученная система волновых уравнений описывает независимое распространение фурье-гармоник по x и y в неоднородной вдоль оси z среде.

Отдельного внимания заслуживает случай анизотропной среды без гиротропии. Для такой среды характерны действительные векторы собственных поляризаций и, следовательно, линейная поляризация всех нормальных волн. В наших обозначениях без ограничения общности можно считать, что $\gamma = 0$. Запишем соответствующие этому случаю волновые уравнения (28):

$$\begin{cases} \left(k_0 n^2 \delta \varepsilon_{3x} + in \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{E}'_3 = \left(a_1 x + a_2 y + a_3 z + 2in \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathcal{E}'_1, \\ \left(k_0 n^2 \delta \varepsilon_{3x} + in \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{E}'_1 = (b_1 x + b_2 y + b_3 z)\mathcal{E}'_3. \end{cases}$$

Для общности мы учли дополнительные члены, отвечающие за изменение направления оптической оси \mathbf{e}_3 в окрестности области взаимодействия, причём в силу отсутствия гиротропии $\delta \varepsilon_{3x} = \delta \varepsilon_{3x}^*$. Как и в предыдущих случаях, допустим, что в окрестности точки поляризационного вырождения это направление испытывает линейные вариации в пространстве: $k_0 \delta \varepsilon_{3x} = c_1 x + c_2 y + c_3 z$. Тогда, в результате замены

$$\mathcal{E}'_{1,3} = \mathcal{E}_{1,3} \exp\left[-in\left(\frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x y + c_3 x z\right) + \frac{iy}{4nb_1}\right],$$

$$x = x' - \frac{zb_3}{b_1},$$

где $\gamma = a_1 b_3 - a_3 b_1 - 2n^2 b_3 c_3$, из уравнений исключается явная зависимость от продольной координаты z ,

$$\begin{cases} in \frac{\partial \mathcal{E}'_3}{\partial x'} = \left[(a_1 - 2n^2 c_3)x' + a_2 y + 2in \frac{\partial}{\partial z} + 2in \frac{b_3}{b_1} \frac{\partial}{\partial x'}\right]\mathcal{E}'_1, \\ in \frac{\partial \mathcal{E}'_1}{\partial x'} = (b_1 x' + b_2 y)\mathcal{E}'_3. \end{cases}$$

Формально полученная система волновых уравнений описывает независимое распространение фурье-гармоник по z в неоднородной вдоль оси x' среде. Координата y входит в эти уравнения как параметр и не влияет на размерность уравнений. Таким образом, в анизотропных средах без гиротропии взаимодействие волн всегда может рассматриваться как одномерный процесс в некоторой эффективной плоско-слоистой среде. Несмотря на то что этот процесс одномерный, он не может быть описан в рамках геометрической оптики, поскольку протекает на мелком масштабе $L_V \ll L$.

3.3. Полное поляризационное вырождение (случай 2.1.3)

Напомним, что в случае полного поляризационного вырождения в точке вырождения любая поляризация поля удовлетворяет уравнениям Максвелла в однородной среде. В неоднородной среде в силу условий (14) в окрестности точки полного поляризационного вырождения выполняются условия

$$|n^2 - \varepsilon_1| \ll 1, \quad |n^2 - \varepsilon_2| \ll 1, \quad |\varepsilon_3| \ll 1,$$

при которых все члены в уравнениях (26) являются малыми величинами одного порядка. Поэтому данные условия описывают три взаимодействующие моды, при этом связь между поперечными по отношению к направ-

лению распространения компонентами полей \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 осуществляется через продольное поле \mathcal{E}_3 . Этот экзотический случай мы рассматривать не будем.

Подчеркнём, что выше мы использовали представление волновых уравнений в виде (26), соответствующее вполне определённой матрице собственных поляризации (25). Это представление неудобно для характеристики оставшегося случая 2.1.4 и неприменимо для характеристики случая 2.1.5.

3.4. Полное вырождение анизотропии среды (случай 2.1.4)

Случай полного вырождения анизотропии, в котором все три компоненты ε_i становятся близкими в некоторой окрестности, можно анализировать с помощью уравнений, получающихся в результате диагонализации тензора диэлектрической проницаемости, но это приводит к довольно громоздким выкладкам.

Рассмотрим более простой путь. В силу условий (15) в точке поляризационного вырождения тензор диэлектрической проницаемости имеет вид $\varepsilon_{ij} = n^2 \delta_{ij}$ в базисе векторов собственных поляризаций среды, в точности такой же вид сохраняется и в любом другом ортогональном базисе. Выберем декартову систему координат (x, y, z) с осью z , направленной вдоль несущего волнового вектора. Тогда в окрестности точки вырождения в нулевом порядке из волнового уравнения следует, что $E_z = 0$, и, следовательно, этой компонентой волнового поля в уравнениях первого порядка для поперечных компонент полей можно пренебречь. Поэтому достаточно учесть только ту часть тензора диэлектрической проницаемости, которая описывает диэлектрические свойства среды в плоскости, ортогональной волновому вектору, т.е.

$$\varepsilon_{ij}^{2D}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}.$$

В недиссипативной среде этот тензор является эрмитовым и поэтому может быть диагонализирован в некотором унитарном базисе $\mathbf{e}'_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{e}'_2(\mathbf{r})$, который непрерывным образом меняется в окрестности точки вырождения. Поперечное электрическое поле можно выразить через новый базис как

$$\mathbf{E}_\perp = \mathcal{E}'_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}'_i(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t).$$

Применяя процедуру, аналогичную описанной в начале этого раздела, можно найти укороченные волновые уравнения для новых амплитуд электрического поля $\mathcal{E}'_i(\mathbf{r})$ вблизи точки полного вырождения анизотропии. Данные уравнения распадутся на два независимых:

$$\begin{cases} \left(n^2 - \varepsilon'_1 - 2ink_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}'_1 = 0, \\ \left(n^2 - \varepsilon'_2 - 2ink_0^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}'_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, случай полного вырождения анизотропии аналогичен рассмотренному выше случаю 2.1.1, в котором поляризационное вырождение происходит в условиях частичного вырождения анизотропии. Отличие от случая 2.1.1 заключается только в том, что собственные числа ε'_1 , ε'_2 и собственные поляризации \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 ищутся не для всего тензора диэлектрической проницаемости, а только для его "поперечной" части.

3.5. Волновой вектор ортогонален вектору собственной поляризации среды (случай 2.1.5)

Рассмотрим, наконец, последний случай, в котором несущий волновой вектор ортогонален одной из собственных поляризаций среды. Общий анализ этой задачи приводит к очень громоздким выкладкам, поэтому мы ограничимся важным частным случаем, отражающим всю основную физику. В значительном числе приложений можно считать, что хотя бы одна из собственных поляризаций среды линейная, т.е. отвечает действительному вектору \mathbf{e}_i . Как уже отмечалось, нетривиальный случай 2.1.5 реализуется, только если волновой вектор ортогонален действительному вектору собственной поляризации. Допустим для определённости, что

$$\mathbf{k}^0 \perp \mathbf{e}_1^0, \quad \mathbf{e}_1^0 \in \mathbb{R},$$

и направим ось x вдоль \mathbf{e}_1^0 и ось z вдоль несущего волнового вектора \mathbf{k}^0 . При этих условиях унитарная матрица U_{ij}^0 в наиболее общем виде определяется двумя свободными параметрами и может быть представлена как

$$U_{ij}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \cos \chi & \exp(i\varphi) \sin \chi \\ 0 & -\sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix}.$$

Подставив эту матрицу в (24), можно получить оператор \hat{D}_{ij} и соответствующую ему систему волновых уравнений $D_{ij}\mathcal{E}_j = 0$. Эта система, которую для экономии места мы не будем приводить, имеет весьма сложный вид, в котором "завязаны" все три компоненты вектора \mathcal{E} . Однако систему можно упростить, если выделить взаимодействующие моды. Для этого вспомним, что в окрестности точки поляризационного вырождения $\mathcal{E} \perp \boldsymbol{\tau}$. В рассматриваемом случае также $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{e}_1^0$, поэтому волновое поле можно разложить по трём ортогональным векторам: $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{e}_1^0 и $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\tau} \mathbf{e}_1^0]$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \mathbf{e}_1^0 + \mathcal{E}_u \mathbf{u} + \mathcal{E}_\tau \boldsymbol{\tau},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^0 &= (1, 0, 0), \quad \mathbf{u} = (0, \varepsilon_3 \cos \chi, \varepsilon_2 \sin \chi), \\ \boldsymbol{\tau} &= (0, -\varepsilon_2 \sin \chi, \varepsilon_3 \cos \chi). \end{aligned}$$

При подстановке поля в таком виде в укороченные волновые уравнения компонента \mathcal{E}_τ будет мала в окрестности точки вырождения, поэтому ею можно пренебречь. Для оставшихся двух компонент получается система уравнений

$$\begin{cases} \left(A_1 - \frac{2in}{k_0} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}_1 + \eta \left(\delta e_{1z}^* - \frac{in}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{E}_u = 0, \\ \eta \left(\delta e_{1z} - \frac{in}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{E}_1 + \\ + \left[A_u + \delta_u - \frac{2in}{k_0} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \eta \cos \varphi \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \mathcal{E}_u = 0, \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\eta = (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \right)^2 \sin \chi \cos \chi, \quad A_1 = n^2 - \varepsilon_1,$$

$$A_u = n^2 - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_2 \sin^2 \chi + \varepsilon_3 \cos^2 \chi},$$

$$\delta_u = 2n^2 \eta (\varepsilon_2 \sin \chi \operatorname{Re}(\delta e_{3z}) + \varepsilon_3 \cos \chi \operatorname{Re}(\delta e_{2z})).$$

Приведённые уравнения описывают линейное взаимодействие двух мод, которые вне области взаимодействия переходят в моды с дисперсионными соотношениями $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_u = 0$. Линейное взаимодействие возникает вследствие анизотропии среды поперёк оси x и/или гиротропии вдоль оси x . Действительно, при $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ коэффициент связи $\eta = 0$ и моды в данном приближении распространяются независимо; можно убедиться, что учёт следующих порядков приводит к одномерному взаимодействию, описываемому уравнениями вида (1). Кроме того, связь между модами пропадает при $\chi = 0$ или $\chi = \pi/2$ — это соответствует случаю частичного вырождения анизотропии 2.1.1. Напомним, что в области взаимодействия все коэффициенты в уравнениях (32) являются малыми величинами, плавно меняющимися в пространстве с масштабом L . При $\eta \neq 0$ характерный масштаб области линейного взаимодействия, как и в случае взаимодействия в окрестности резонансов среды 2.1.2, определяется как $L_{\nabla} \sim L/\sqrt{k_0 L} \ll L$, при этом линейное взаимодействие может носить существенно неодномерный характер.

В качестве примера рассмотрим двухосный кристалл, у которого $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon_3$. Нетрудно убедиться, что в этом случае единственная возможность для поляризационного вырождения реализуется именно в условиях (16), причём данные условия можно выполнить только для $\mathbf{k} \perp \mathbf{e}_1$. В кристалле с постоянными направлениями оптических осей уравнения (32) принимают вид

$$\begin{cases} i\eta \frac{\partial \mathcal{E}_u}{\partial x} = \left(k_0 \Delta_1 - 2in \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}_1, \\ i\eta \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x} = \left(k_0 \Delta_u - 2in \left(\frac{\partial}{\partial z} - \eta' \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \mathcal{E}_u, \end{cases} \quad (33)$$

где $\eta' = \eta \varepsilon_2 \varepsilon_3 / \varepsilon_1$. Разложив в окрестности линейного взаимодействия

$$k_0 \Delta_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z, \quad k_0 \Delta_u = b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

и выполнив замену

$$\mathcal{E}'_{1,u} = \mathcal{E}_{1,u} \exp \frac{ix\xi}{2n}, \quad \xi = (a_1 - b_1) \frac{y}{\eta'} + a_1 z,$$

из уравнений можно исключить координату x :

$$\begin{cases} \eta \left(\frac{\xi}{2} + in \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{E}'_u = \left(a_2 y + a_3 z - 2in \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}'_1, \\ \eta \left(\frac{\xi}{2} + in \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{E}'_1 = \left(b_2 y + b_3 z - 2in \left(\frac{\partial}{\partial z} - \eta' \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \mathcal{E}'_u. \end{cases}$$

Рассматривая эти уравнения для отдельной фурье-гармоники по x , можно привести их к следующему виду:

$$\begin{cases} z' \mathcal{E}'_u = \left(c_2 y' + c_3 z' - ic'_2 \frac{\partial}{\partial y'} - ic'_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) \mathcal{E}'_1, \\ z' \mathcal{E}'_1 = \left(d_2 y' + d_3 z' - id'_2 \frac{\partial}{\partial y'} - id'_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) \mathcal{E}'_u. \end{cases}$$

Здесь мы повернули оси координат так, что $z' = \xi/a_1$. Важно отметить, что при $\eta \neq 0$ дифференциальные операторы в приведённых уравнениях линейно независимы, т.е. $w = c'_2 d'_3 - c'_3 d'_2 \neq 0$. Это позволяет заменой

$$\mathcal{E}''_{1,u} = \mathcal{E}'_{1,u} \exp \left[i(c'_2 d'_2 - c'_2 d'_2) \frac{y' z'}{w} + i(c'_2 d'_3 - c'_3 d'_2) \frac{y'^2}{2w} \right]$$

исключить координату y' из уравнений

$$\begin{cases} z' \mathcal{E}''_u = \left(c''_3 z' - ic'_2 \frac{\partial}{\partial y'} - ic'_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) \mathcal{E}''_1, \\ z' \mathcal{E}''_1 = \left(d''_3 z' - id'_2 \frac{\partial}{\partial y'} - id'_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) \mathcal{E}''_u. \end{cases}$$

Полученная система волновых уравнений описывает независимое распространение фурье-гармоник по y' в одномерно неоднородной среде. Поэтому линейное взаимодействие волн в трёхмерно неоднородном кристалле можно представить как одномерный процесс в некоторой эффективной плоско-слоистой среде. Несмотря на одномерный характер, это взаимодействие не является "геометро-оптическим", так как оно происходит на быстром масштабе $L_{\nabla} \ll L$.

Нетрудно убедиться, что изменение направлений оптических осей в кристалле не меняет приведённый выше вывод до тех пор, пока мы ограничиваемся линейными вариациями. Действительно, из (32) видно, что вариации $\delta \varepsilon_{3z}$ учитываются аддитивно вместе с вариациями Δ_u , а вариации $k_0 \delta \varepsilon_{1z} = f_1 x + f_2 y + f_3 z$ при условии $\delta \varepsilon_{1z} = \delta \varepsilon_{1z}^*$ могут быть учтены квадратичной фазовой заменой

$$\mathcal{E}'_{1,u} = \mathcal{E}_{1,u} \exp \left[-in \left(\frac{f_1 x^2}{2} + f_2 xy + f_3 xz \right) \right],$$

после чего уравнения сводятся к ранее рассмотренному виду (33). Таким образом, мы опять приходим к выводу, что, так же как и в ранее рассмотренном случае 2.1.2, неодномерный характер линейного взаимодействия волн может проявляться только в средах с гиротропией. В рассматриваемом случае "неодномерность" обеспечивается за счёт $\delta \varepsilon_{1z} \neq \delta \varepsilon_{1z}^*$.

4. Заключение

В данной работе показано, что линейное взаимодействие электромагнитных волн в плавнеооднородной безграничной среде может проходить по двум сценариям. В случае одновременного вырождения анизотропии и гиротропии среды (случаи 2.1.2 и 2.1.4) линейное взаимодействие волн реализуется на медленном масштабе L , определяемом масштабом вариаций параметров среды. Это можно описать как взаимодействие двух геометро-оптических мод, связанных скалярной константой и описываемых уравнениями типа (1). Поскольку взаимодействие происходит вдоль лучей, процесс конверсии волн носит одномерный характер. В окрестности резонансов среды (случаи 2.1.2 и 2.1.3), а также в специальном случае поперечного распространения 2.1.5 реализуется сценарий быстрого взаимодействия волн; в этом случае конверсия происходит на мелком масштабе $L_{\nabla} \ll L$, на котором приближение геометрической оптики уже не работает. При этом в гиротропных средах, как правило, взаимодействие волн носит существенно неодномерный характер. В анизотропных средах без гиротропии взаимодействие волн всегда может быть описано как одномерный (на мелком масштабе) процесс в некоторой эффективной плоско-слоистой среде.

В заключение заметим, что выводы раздела 2 относительно классификации точек поляризационного вырождения, полученные в приближении однородной сре-

ды, остаются справедливыми для сред с пространственной дисперсией. В частности, они могут быть применены также и для магнитных сред, поскольку любая линейная среда, характеризующаяся тензорами диэлектрической и магнитной восприимчивостей, может быть эквивалентно описана как "немагнитная" среда с пространственной дисперсией [5]. Эти результаты могут представлять интерес для бурно развивающейся в настоящее время электродинамики метаматериалов. Однако выводы раздела 3, в котором рассматривались волновые уравнения в плавнонеоднородных средах, относятся только к средам без пространственной дисперсии, поэтому неприемлемы к магнитным средам.

Работа выполнена в рамках государственного контракта № 14.740.11.0607 с Министерством образования и науки РФ при поддержке РФФИ (гранты № 09-02-00972 и 10-02-00441).

Список литературы

- Budden K G *Radio Waves in the Ionosphere* (Cambridge: Univ. Press, 1961)
- Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967) [Ginzburg V L *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* (Oxford: Pergamon Press, 1970)]
- Голант В Е, Пилия А Д *УФН* **104** 413 (1971) [Golant V E, Piliya A D *Sov. Phys. Usp.* **14** 413 (1972)]
- Ерохин Н С, Моисеев С С, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 7 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1973) с. 146 [Erokhin N S, Moiseev S S, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 7 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1979) p. 181]
- Железняков В В *Электромагнитные волны в космической плазме* (М.: Наука, 1977)
- Кравцов Ю А, Орлов Ю И *Геометрическая оптика неоднородных сред* (М.: Наука, 1980) [Kravtsov Yu A, Orlov Yu I *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media* (Berlin: Springer-Verlag, 1990)]
- Ерохин Н С и др. *Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиобизике* (М.: Наука, 1982)
- Железняков В В, Кочаровский В В, Кочаровский Вл В *УФН* **141** 257 (1983) [Zheleznyakov V V, Kocharovskii V V, Kocharovskii V I *Sov. Phys. Usp.* **26** 877 (1983)]
- Cairns R A, Lashmore-Davies C N *Phys. Fluids* **26** 1268 (1983)
- Kaufman A N, Friedland L *Phys. Lett. A* **123** 387 (1987)
- Friedland L, Kaufman A N *Phys. Fluids* **30** 3050 (1987)
- Friedland L, Goldner G, Kaufman A N *Phys. Rev. Lett.* **58** 1392 (1987)
- Mjølhus E J. *Plasma Phys.* **31** 7 (1984)
- Токман М Д *Физика плазмы* **11** 1205 (1985) [Tokman M D *Sov. J. Plasma Phys.* **11** 689 (1985)]
- Тимофеев А В *Физика плазмы* **26** 874 (2000) [Timofeev A V *Plasma Phys. Rep.* **26** 820 (2000)]
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2005) [Landau L D, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
- Пилия А Д, Федоров В И *ЖЭТФ* **60** 389 (1971) [Piliya A D, Fedorov V I *Sov. Phys. JETP* **33** 210 (1971)]
- Weitzner H *Phys. Plasmas* **11** 866 (2004)
- Gospodchikov E D, Shalashov A G, Suvorov E V *Plasma Phys. Control. Fusion* **48** 869 (2006)
- Попов А Ю, Пилия А Д *Физика плазмы* **33** 128 (2007) [Popov A Yu, Piliya A D *Plasma Phys. Rep.* **33** 109 (2007)]
- Shalashov A G, Gospodchikov E D *Phys. Rev. E* **78** 065602(R) (2008)
- Littlejohn R G, Flynn W G *Chaos* **2** 149 (1992)
- Tracy E R, Kaufman A N *Phys. Rev. E* **48** 2196 (1993)
- Krasniak Yu, Tracy E R *Phys. Lett. A* **248** 235 (1998)
- Tracy E R, Kaufman A N *Phys. Rev. Lett.* **91** 130402 (2003)
- Tracy E R, Kaufman A N, Brizard A J *Phys. Plasmas* **10** 2147 (2003)
- Kaufman A N, Tracy E R, Brizard A J *Phys. Plasmas* **12** 022101 (2005)
- Nassiri-Mofakham N, Sabzevari B S *J. Plasma Phys.* **72** 71 (2006)
- Tracy E R, Kaufman A N, Jaun A *Phys. Plasmas* **14** 082102 (2007)
- Stix T H *The Theory of Plasma Waves* (New York: McGraw-Hill, 1962) [Стикс Т *Теория плазменных волн* (М.: Атомиздат, 1965)]
- Шалашов А Г, Господчиков Е Д, Суворов Е В *ЖЭТФ* **130** 554 (2006) [Shalashov A G, Gospodchikov E D, Suvorov E V *JETP* **103** 480 (2006)]
- Popov A Yu *Plasma Phys. Control. Fusion* **49** 1599 (2007)
- Gospodchikov E D, Shalashov A G, Suvorov E V *Fusion Sci. Technol.* **53** 261 (2008)
- Shalashov A G, Gospodchikov E D *Plasma Phys. Control. Fusion* **50** 045005 (2008)
- Irzak M A, Popov A Yu *Plasma Phys. Control. Fusion* **50** 025003 (2008)
- Popov A Yu *Plasma Phys. Control. Fusion* **52** 035008 (2010)
- Shalashov A G, Gospodchikov E D *Plasma Phys. Control. Fusion* **52** 115001 (2010)

On the structure of Maxwell's equations in the region of linear coupling of electromagnetic waves in weakly inhomogeneous anisotropic and gyrotropic media

A.G. Shalashov, E.D. Gospodchikov

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,

ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation

Tel. +7 (831) 416 06 23. Fax +7 (831) 416 06 16. E-mail: ags@appl.sci-nnov.ru, eggos@mail.ru

The linear interaction of electromagnetic waves in weakly inhomogeneous non-one-dimensional media is considered as a manifestation of the polarization degeneracy of Maxwell's equations. It is shown that the very presence of two polarization-degenerate normal waves places strong constraints on the dielectric tensor components near the interaction region. This results in that the possible types of linear wave coupling and corresponding wave equations can be classified in a universal manner, i.e., independent of the way in which the linear medium is modeled.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 52.35.Hr

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201202d.0157

Bibliography — 37 references

Received 28 December 2010, revised 4 July 2011

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (2) 157–171 (2012)

Physics – Uspekhi **55** (2) (2012)