

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О релятивистском движении двух тел
с массами противоположного знака

П.Б. Иванов

Рассматривается релятивистское движение двух частиц с массами противоположного знака при малой разнице абсолютных величин масс, $m_{1,2} = \pm(\mu \pm \Delta\mu)$, $\mu > 0$, $|\Delta\mu| \ll \mu$, в пределе слабого поля. Как показал в 1957 г. Г. Бонди в рамках ньютоновской динамики и общей теории относительности, при отсутствии относительного движения такая пара частиц может бесконечно ускоряться. Результаты Бонди обобщаются для случая малой разницы относительных скоростей частиц. В пределе слабого поля при предположении консервативности динамической системы исходя из законов сохранения энергии-импульса показано, что система может приобрести сколь угодно большое значение лоренц-фактора γ . Система бесконечно ускоряется, если её вектор энергии-импульса равен нулю, а разность модулей масс частиц $\Delta\mu \leq 0$. При достаточно малом значении модуля квадрата нормы вектора энергии-импульса $|N^2|$ лоренц-фактор системы может достичь очень больших значений, $\gamma \propto |N^2|^{-1}$. Показано, что, удерживая только главные члены в разложении по малому отношению характерных гравитационных радиусов к расстоянию между телами, можно получить уравнения движения, эквивалентные уравнениям, выводимым из релятивистских уравнений Ховаса и Голдберга в пределе слабого поля (1962 г.). Положительная энергия частицы с массой больше нуля, обладающей большим γ -фактором, может быть передана другим телам, например при захвате частицы мишенью. Если предположить, что рождение таких пар частиц возможно и в некоторой области пространства остаются только частицы с положительной массой, а частицы с отрицательной массой покидают эту область, то такая система могла бы постоянно поставлять положительную энергию другим телам. Подобную систему можно квалифицировать как "вечный двигатель третьего рода". Критически рассматриваются некоторые недавние утверждения по этому вопросу.

PACS numbers: 03.30.+p, 04.20.-q, 47.75.+f

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201212d.1319

Содержание

1. Введение (1319).
 2. Ньютоновская трактовка задачи (1320).
 3. Релятивистский анализ (1321).
 - 3.1. Вывод динамических уравнений. 3.2. Решение динамических уравнений.
 4. Методические замечания (1324).
 5. Заключение (1325).
- Список литературы (1326).

1. Введение

В 1957 г. Г. Бонди [1] отметил, что в ньютоновском приближении две частицы с массами противоположного знака, изначально находящиеся в состоянии покоя отно-

сительно друг друга, в инерциальной системе отсчёта будут бесконечно ускоряться. Этот процесс разрешён законами сохранения, поскольку кинетическая энергия и импульс такой системы тождественно равны нулю, а её потенциальная энергия зависит только от относительного расстояния между частицами. В той же работе [1] Бонди обобщил свой результат, получив соответствующее стационарное ускоренное решение в общей теории относительности (ОТО), из которого следовало, что для того чтобы ускоренные частицы с массами противоположного знака оставались в покое относительно друг друга, они должны обладать некоторой разницей абсолютных величин масс.

В ньютоновском приближении легко показать (см. раздел 2), что величина относительной скорости двух частиц с массами противоположного знака остаётся примерно постоянной. В результате период ускорения оказывается конечным и пара изначально покоящихся частиц приобретает конечную скорость. Мы также показываем, что при достаточно малой начальной относительной скорости частиц пара может в конце концов приобрести релятивистскую скорость.

В разделе 3 проблема рассматривается в релятивистской постановке и результаты Бонди обобщаются для

П.Б. Иванов. Астрокосмический центр
Физического института им. П.Н. Лебедева РАН,
ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 333-33-66. Факс (495) 333-23-78
E-mail: pbi20@cam.ac.uk

Статья поступила 26 июля 2011 г., после доработки 31 декабря 2011 г.

пары частиц с массами противоположного знака, мало различающимися по абсолютной величине, $m_{1,2} = \pm(\mu \pm \Delta\mu)$, $\mu > 0$, $|\Delta\mu| \ll \mu$, имеющих начальную относительную скорость v_{in} в выбранной лабораторной системе отсчёта, где пара изначально покоилась. Мы полагаем гравитационное взаимодействие слабым, т.е. $G\mu/(c^2 D_{in}) \ll 1$, где D_{in} — начальное расстояние между частицами. Для простоты в релятивистском рассмотрении предполагается, что орбитальный момент импульса системы равен нулю, а движение является прямолинейным.

Анализ этой ситуации проводится элементарными методами. Уравнения движения выводятся из законов сохранения энергии и импульса. Предполагается, что энергия и импульс системы в мгновенной сопутствующей лоренцевой системе отсчёта даются ньютоновыми выражениями и образуют временную и пространственную компоненты локального 4-вектора. Затем этот вектор энергии-импульса проецируется в лабораторную систему отсчёта. Поскольку энергия и импульс в лабораторной системе сохраняются (в предположении незначимости гравитационно-волнового излучения), мы получаем два дифференциальных уравнения первого порядка по времени, которые полностью описывают динамику системы. Мы также показываем, как можно получить два эквивалентных уравнения второго порядка по времени, рассматривая закон тяготения Ньютона в системе отсчёта, ускоряющейся вместе с частицами.

Показано, что пара частиц как целое всегда имеет положительное ускорение с нулевым или ненулевым асимптотическим значением, в зависимости от начальных условий. Относительное расстояние между частицами может либо иметь точку поворота, либо возрастать монотонно. Система неограниченно ускоряется, если разность масс частиц $\Delta\mu \leq 0$ и норма вектора энергии-импульса

$$N = \sqrt{\left(2\Delta\mu c^2 + \frac{G\mu^2}{D_{in}}\right)^2 - \mu^2 v_{in}^2} = 0,$$

т.е. вектор энергии-импульса — светоподобный (нулевой). В этом случае относительное расстояние монотонно возрастает. Если величина N^2 достаточно мала, то для начальных условий, соответствующих монотонному изменению относительного расстояния, период ускорения конечен, но лоренц-фактор асимптотически стремится к очень большому значению, пропорциональному $|N^2|^{-1}$.

Такие пары частиц могут быть использованы для реализации гипотетического эффекта, который мы назвали "вечный двигатель третьего рода" (ВДТ) [2]. Этот эффект в своей наиболее общей формулировке в классических теориях, допускающих существование подсистем с отрицательной энергией, даёт возможность постоянно передавать энергию от подсистемы с отрицательной энергией подсистеме с положительной. Действительно, частица с положительной массой в принципе может быть использована для передачи положительной энергии другим телам после того, как пара была ускорена до больших значений лоренц-фактора. Повторяя этот процесс многократно, мы можем извлекать произвольно большую энергию. Заметим, однако, что эта схема является не единственной "работающей моделью" ВДТ и в принципе для создания ВДТ не требуются системы ни

с отрицательной массой покоя, ни с гравитационным взаимодействием. Как показано в [2], для реализации ВДТ достаточно иметь среду с нарушенным слабым энергетическим условием и определёнными дополнительными свойствами, в которой осуществляются чисто гидродинамические взаимодействия.

В разделе 4 мы прокомментируем некоторые утверждения, сделанные в работе [3], где рассматривалась задача Кеплера для двойной системы, состоящей из тел с массами противоположных знаков. Эти утверждения, на наш взгляд, могут привести к некоторым недоразумениям.

2. Ньютоновская трактовка задачи

Сначала рассмотрим задачу в ньютоновском приближении, в котором взаимные гравитационные ускорения, действующие на частицы с массами m_1 и m_2 , даются известными выражениями:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2}{|\mathbf{D}|^3} \mathbf{D}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{Gm_1}{|\mathbf{D}|^3} \mathbf{D}, \quad (1)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -й частицы, $i = 1, 2$, $\mathbf{D} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Полагая $\mu \equiv Gm_1 = -Gm_2$, из (1) получим

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{\mu}{|\mathbf{D}|^3} \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{v}} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{V} \equiv (\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2)/2$, $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{D}}$. Из уравнения (2) следует, что если величина вектора \mathbf{v} равна нулю в некоторый момент времени, то она остаётся равной нулю и при дальнейшей эволюции системы. Таким образом, в этом случае относительное расстояние между частицами \mathbf{D} в ходе эволюции не изменяется и система ускоряется как целое, при этом ускорение постоянно:

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{V}} = \frac{\mu}{|\mathbf{D}|^3} \mathbf{D}. \quad (3)$$

Тем не менее законы сохранения не нарушаются, поскольку кинетическая энергия и импульс системы точно равны нулю, а её потенциальная энергия зависит только от относительного расстояния¹.

При $\mathbf{v}(t=0) \equiv \mathbf{v}_{in} \neq 0$ абсолютная величина относительного расстояния уменьшается во времени. Соответственно абсолютная величина ускорения также убывает и в конце концов становится пренебрежимо малой при условии² $\mathbf{D}_{in} \mathbf{v}_{in} \neq -|\mathbf{v}_{in}| |\mathbf{D}_{in}|$, где $\mathbf{D}_{in} \equiv \mathbf{D}(t=0)$. Имеем

$$\mathbf{D} = \mathbf{v}_{in} t + \mathbf{D}_{in}, \quad (4)$$

таким образом, интегрируя систему уравнений (3), получаем

$$|\mathbf{V}(t)| = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{\mu}{D_{in} v_{in}} \sqrt{2 \left(1 - \frac{\epsilon^{1/2} + \alpha\tau}{\Delta}\right)}, \quad (5)$$

¹ Как легко показать, такое же движение можно реализовать в системе из N частиц при условии, что полная масса системы $M = \sum_{i=1}^{i=N} m_i = 0$ и положения частиц специальным образом подобраны. Например, в системе из трёх частиц положения частиц должны образовывать равнобедренный треугольник.

² Очевидно, что при $\mathbf{D}_{in} \mathbf{v}_{in} = -|\mathbf{v}_{in}| |\mathbf{D}_{in}|$ частицы сталкиваются.

где τ — безразмерное время,

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu}{D_{\text{in}}^3}} t, \quad D_{\text{in}} = |\mathbf{D}_{\text{in}}|, \quad v_{\text{in}} = |v_{\text{in}}|,$$

$$\epsilon = \frac{\mu}{D_{\text{in}} v_{\text{in}}^2}, \quad \alpha = \frac{v_{\text{in}} \mathbf{D}_{\text{in}}}{v_{\text{in}} D_{\text{in}}}, \quad \Delta = \sqrt{\epsilon + \tau^2 + 2\alpha\epsilon^{1/2}\tau}.$$

Заметим, что если система движется прямолинейно с возрастающим значением $|\mathbf{D}|$ и соответственно $\alpha = 1$, то тогда уравнение (5) даёт

$$|\mathbf{V}(t)| = \frac{\mu}{D_{\text{in}} v_{\text{in}} \epsilon^{1/2} + \tau}. \quad (6)$$

В пределе $\tau \rightarrow \infty$ из уравнений (5) и (6) получим

$$V_{\infty} \equiv |\mathbf{V}(\tau \rightarrow \infty)| = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha}} \frac{\mu}{D_{\text{in}} v_{\text{in}}}. \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что при

$$v_{\text{in}} < v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha}} \frac{\mu}{D_{\text{in}} c} \quad (8)$$

асимптотическое значение скорости системы V_{∞} формально превосходит скорость света c . Очевидно, что в этом случае требуется релятивистское рассмотрение.

3. Релятивистский анализ

3.1. Вывод динамических уравнений

С целью упрощения выкладок ограничимся рассмотрением только прямолинейного релятивистского движения с возрастающим значением $|\mathbf{D}|$ ($\alpha = 1$). Кроме того, в этом разделе будем использовать естественную систему единиц, в которой скорость света и гравитационная постоянная равны единице. Однако в релятивистском анализе рассмотрим частицы с малой разностью масс, $m_{1,2} = \pm(\mu \pm \Delta\mu)$, и ниже будем полагать, что $\mu > 0$ и $|\Delta\mu| \ll \mu$.

Удобно ввести две локальные системы отсчёта и связанные с ними системы координат: 1) неподвижную лабораторную систему с глобальными лоренцевыми координатами x, t ; 2) локальную лоренцеву систему, сопутствующую движению точки $R(t) = (x_1(t) + x_2(t))/2$, где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — положения частиц в лабораторной системе, и соответствующие сопутствующие лоренцевы координаты $x^{\text{com}}, t^{\text{com}}$. Предполагается, что в некоторый момент времени $t = t_*$ координаты события $(t_*, R(t = t_*))$ в сопутствующей системе равны $(\tau, 0)$, где τ — собственное время вдоль мировой линии $(t, R(t))$, которую будем называть "опорной мировой линией".

Обозначим положения частиц при $t^{\text{com}} = \tau$ как $x_{1,2}^{\text{com}}(t^{\text{com}})$, их скорости — как $v_{1,2}^{\text{com}} = dx_{1,2}^{\text{com}}/dt^{\text{com}}$. Введём также относительное положение и скорость частиц в сопутствующей системе: $D = x_1^{\text{com}} - x_2^{\text{com}}$, $v^{\text{com}} = dD/dt^{\text{com}}$. Без потери общности будем полагать, что $D^{\text{com}} > 0$. Если относительное расстояние между частицами вдоль опорной мировой линии остаётся достаточно малым, то $x_2^{\text{com}} \approx -x_1^{\text{com}}$.

В глобальной системе координат на временном сечении $t = t_*$ скорость движения системы как целого выражается как $V = (1/2)(dx_1/dt + dx_2/dt)(t = t_*)$, отно-

сительное положение частиц $D_{\text{lab}} = x_1(t_*) - x_2(t_*)$, а их скорость относительного движения $v = dD/dt$.

Вводя лоренц-фактор $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$, связанный с опорной мировой линией, в пределе малых относительных расстояний между частицами получим

$$D(t^{\text{com}}) = \gamma D_{\text{lab}}, \quad \frac{dt}{dt^{\text{com}}} = \gamma, \quad (9)$$

соответственно

$$v^{\text{com}} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma D_{\text{lab}}) = \gamma^2 v + \gamma \frac{d\gamma}{dt} D_{\text{lab}}. \quad (10)$$

Предполагая, что, с одной стороны, относительное расстояние много больше μ , $D \gg \mu$, и, следовательно, справедливо приближение слабого поля, а с другой стороны, D не слишком велико и можно пользоваться локальными лоренцевыми координатами и соответственно уравнениями (9), (10), мы можем взять ньютоновские выражения для энергии E_c и импульса P_c пары частиц в сопутствующей системе координат в момент времени $t^{\text{com}} = \tau$:

$$E_c = 2\Delta\mu + \frac{\mu^2}{D}, \quad P_c = \mu\dot{D}, \quad (11)$$

где точка означает дифференцирование по собственному времени τ .

В том же пределе E_c и P_c представляют собой временную и пространственную компоненты локального 4-вектора и, следовательно, их значения в лабораторной системе отсчёта могут быть получены из уравнения (11) с помощью стандартного преобразования Лоренца. Имеем

$$E = \gamma \left(2\Delta\mu + \frac{\mu^2}{D} + V\mu\dot{D} \right), \quad (12)$$

$$P = \gamma \left[\mu\dot{D} + V \left(2\Delta\mu + \frac{\mu^2}{D} \right) \right],$$

где предполагается, что скорость V системы как целого — функция собственного времени τ . Поскольку очевидно, что энергия и импульс в лабораторной системе сохраняются, уравнения (12) полностью описывают динамику системы. Эти уравнения должны решаться при условии, что в лабораторной системе в начальный момент система частиц покоится, т.е. при $\tau = 0$ скорость $V = 0$ и

$$E = E_{\text{in}} = 2\Delta\mu + \frac{\mu^2}{D_{\text{in}}}, \quad P = P_{\text{in}} = \mu v_{\text{in}}, \quad (13)$$

где D_{in} и v_{in} — начальные расстояние между частицами и их относительная скорость соответственно. Ниже будем полагать, что $v_{\text{in}} > 0$.

Возможно, наш вывод динамических уравнений (12) покажется несколько эвристичным, в связи с этим стоит упомянуть, что если опустить члены более высокого порядка по параметру μ , то эти уравнения могут быть выведены из точных уравнений, записанных в пределе слабого поля [4], при малых расстояниях между частицами и $|\Delta\mu| \ll \mu$.

Удобно привести уравнения (12) к другому виду, взяв их линейную комбинацию $E - VP$ и вычислив квадрат нормы вектора энергии-импульса $N^2 = E^2 - P^2$. Полу-

чаем

$$E - VP = \gamma^{-1} \left(2\Delta\mu + \frac{\mu^2}{D} \right), \quad (14)$$

$$N^2 = \left(2\Delta\mu + \frac{\mu^2}{D} \right)^2 - \mu^2 (\dot{D})^2. \quad (15)$$

Очевидно также, что $N^2 = (2\Delta\mu + \mu^2/D_{\text{in}})^2 - \mu^2 v_{\text{in}}^2$. Заметим, что в зависимости от начальных условий вектор энергии-импульса, в отличие от такового в обычном случае, может быть светоподобным, времениподобным или пространственно-подобным.

Уравнения (12) являются первыми интегралами динамических уравнений второго порядка по времени. Одно из двух последних может быть получено дифференцированием (15) по τ , что даёт

$$\ddot{D} = -\frac{2\Delta\mu}{D^2} - \frac{\mu^2}{D^3}, \quad (16)$$

а другое — дифференцированием какого-либо из уравнений (12) с учётом (16):

$$\gamma^2 \dot{V} = \frac{\mu}{D^2}. \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) могут быть получены и из других независимых качественных соображений. Однако вывод динамических уравнений второго порядка, которые связывают динамические переменные с различными значениями временных координат, неудобен в локальной лоренцевой системе, введённой выше, поскольку эти координаты определены относительно выделенного события на опорной мировой линии и, следовательно, их определение будет разным для разных событий на мировой линии. Гораздо удобнее воспользоваться системой координат, в которой собственное время τ играет роль координатного времени. Для этого рассмотрим другую систему отсчёта, так называемую систему координат Ферми–Уокера (τ, y) (см., например, [5]), в которой собственное время τ является координатным временем, а единичный вектор в пространственном направлении y всегда перпендикулярен 4-скорости вдоль опорной мировой линии. Координаты опорной мировой линии в этой системе координат определяются просто как $(\tau, 0)$.

На временном сечении $t^{\text{com}} = \tau$ локальные лоренцевы координаты и координаты Ферми–Уокера совпадают: $x_{1,2}^{\text{com}} = y_{1,2}$, но система координат Ферми–Уокера имеет ускорение $g(y)$ относительно локальной лоренцевой системы отсчёта. Очевидно, что величина $g(y=0)$ должна совпадать с модулем 4-ускорения опорной мировой линии относительно лабораторной системы отсчёта. Предполагается, что уравнения движения в координатах Ферми–Уокера определяются законом (1) с дополнительным ускорением $-g$, которое учитывает неинерциальность этой системы отсчёта:

$$\ddot{y}_{1,2} = \frac{\mu \mp \Delta\mu}{D_{\text{FW}}^2} - g. \quad (18)$$

Здесь $D_{\text{FW}} = y_1 - y_2$ и мы учли, что ускорение зависит от координаты y (см., например, [5]): $g = a + a^2 y$. Для того чтобы средняя точка $Y = (y_1 + y_2)/2$ оставалась в покое, $Y(\tau) = 0$, ускорение a должно компенсироваться гравита-

ционным ускорением μ/D_{FW}^2 , отсюда следует

$$a = \frac{\mu}{D_{\text{FW}}^2}. \quad (19)$$

Учитывая, что в лабораторной системе отсчёта пространственная часть 4-ускорения связана с a как $a^x = \gamma a$, получим

$$\dot{U}^x = \gamma^3 \dot{V} = \gamma a, \quad \dot{V} = \frac{\mu}{\gamma^2 D_{\text{FW}}^2}. \quad (20)$$

Очевидно, что (20) совпадает с уравнением (17).

Динамическое уравнение для относительного расстояния D_{FW} непосредственно следует из (18) и (19):

$$\ddot{D}_{\text{FW}} = -\frac{2\Delta\mu}{D_{\text{FW}}^2} - a^2 D_{\text{FW}} = -\frac{2\Delta\mu}{D_{\text{FW}}^2} - \frac{\mu^2}{D_{\text{FW}}^3}. \quad (21)$$

Это уравнение совпадает с (16).

Последнее слагаемое в правой части (21) является следствием неоднородного ускорения, которое возникает в координатах Ферми–Уокера. Так как это слагаемое пропорционально μ^2 , с формальной точки зрения оно представляет собой постньютоновскую поправку. Поскольку в (21) мы рассматриваем гравитационную силу в ньютоновском приближении, важно проверить, сравнимы ли постньютоновские поправки к гравитационной силе с ускорением в (21). На самом деле, как указано во многих учебниках (см., например, [6]), постньютоновские поправки пропорциональны или $\Delta\mu$, или $y_{1,2}$. Разности масс и скоростей частиц предполагаются малыми, следовательно, слагаемые, которые могут появиться в уравнении (21) из-за постньютоновских поправок, окажутся малыми по сравнению с другими слагаемыми.

Из уравнения (21) следует, что при отрицательной разности масс и $D_{\text{FW}} = 2|\Delta\mu|$ частицы покоятся относительно друг друга. В этом случае система отсчёта Ферми–Уокера локально совпадает с риндлеровской системой отсчёта и частицы неограниченно ускоряются. Таким образом, в отличие от частиц в ньютоновском случае, рассмотренном в разделе 2, частицы, неограниченно ускоряющиеся из состояния покоя, должны иметь малую разность масс. Очевидно, что этот эффект, впервые отмеченный Бонди [1], обусловлен неоднородным характером ускорения.

3.2. Решение динамических уравнений

Так как уравнение (14) содержит только V и D , используя его, можно выразить V через D :

$$V = \frac{EP}{E_c^2 + P^2} \left(1 \mp \frac{E_c}{EP} \sqrt{E_c^2 - N^2} \right), \quad (22)$$

где E_c в свою очередь выражается через D первым из уравнений (11), а E и P даются уравнениями (13). Как обсуждалось в разделе 3.1, мы предполагаем, что в начальный момент времени $t = \tau = 0$ скорость $V = 0$. Это означает, что в уравнении (22) с самого начала следует выбрать знак минус. Однако при определённых условиях, обсуждаемых ниже, направление движения частиц относительно друг друга и соответственно \dot{D} меняют знак. В точке поворота $\dot{D} = 0$ величина $N^2 = E_c^2$. Поскольку скорость V должна монотонно

возрастать согласно уравнению (17), мы должны вы- брать знак плюс в (22) после точки поворота.

С другой стороны, уравнение (15) содержит только D и его производную по времени τ , следовательно, (15) можно проинтегрировать и получить зависимость D от времени:

$$\int_{D_{\min}}^D \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{\tau}{\mu}, \quad (23)$$

где

$$R(x) = (\mu^2 + 2\Delta\mu x)^2 - N^2 x^2. \quad (24)$$

Интеграл в (23) может быть взят с помощью стандартной подстановки, в результате получим соотношение между D и τ . Однако окончательные выражения довольно громоздки, и мы их здесь не приводим. Вместо этого мы качественно проанализируем решения уравнения (15), основываясь на аналогии между (15) и уравнением, описывающим движение частиц в потенциальном яме.

Приведём (15) к стандартному виду:

$$\frac{\dot{D}^2}{2} + U(D) = \mathcal{E}, \quad U(D) = -\frac{2\Delta\mu}{D} - \frac{\mu^2}{2D^2}, \quad (25)$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{4\Delta\mu^2 - N^2}{2\mu^2} = \frac{v_{\text{in}}^2}{2} - \frac{2\Delta\mu}{D_{\text{in}}} - \frac{\mu^2}{2D_{\text{in}}^2}. \quad (26)$$

Вводя естественные единицы $\tilde{U} = (\mu^2/\Delta\mu^2)U$ и $\tilde{D} = (|\Delta\mu|/\mu^2)D$, можно выразить \tilde{U} через \tilde{D} в очень простом виде: $\tilde{U} = \mp 2/\tilde{D} - 1/(2\tilde{D}^2)$, где знак минус (плюс) соответствует $\Delta\mu > 0$ ($\Delta\mu < 0$). Зависимость $\tilde{U}(\tilde{D})$ приведена на рисунке.

Прежде всего рассмотрим подробно важный случай нулевой нормы вектора энергии-импульса, $N^2 = 0$, и положим соответственно $P = E$. Простой анализ уравнения (22) показывает, что в этом случае нет точек поворота и относительное расстояние D со временем возрастает, а скорость V в пределе $\tau \rightarrow \infty$ может достичь величины $V = 1$, следовательно, система может бесконечно ускоряться.

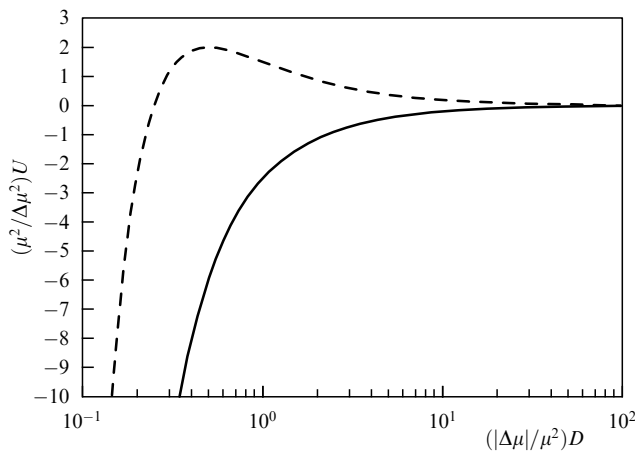


Рисунок. Зависимость потенциала U от пространственной координаты D . Сплошная кривая соответствует $\Delta\mu > 0$, а штриховая — $\Delta\mu < 0$.

При $N^2 = 0$ уравнение (22) упрощается:

$$V = \frac{E^2 - E_c|E_c|}{E^2 + E_c^2}, \quad \gamma = \frac{E^2 + E_c|E_c|}{2EE_c}, \quad (27)$$

и из (23) получаем

$$\tau = \frac{1}{4\Delta\mu^2} \left(2\Delta\mu(D - D_{\min}) - \mu^2 \log \frac{\mu^2 + 2\Delta\mu D}{\mu^2 + 2\Delta\mu D_{\min}} \right). \quad (28)$$

Из уравнения (27) следует, что при $E_c > 0$ бесконечное ускорение возможно при условии, что $E_c \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, а из выражения для E_c (11) видно, что тогда разность масс $\Delta\mu$ должна быть отрицательной. Ниже мы рассмотрим подробно только этот случай. Если $|\Delta\mu| \neq 0$, то $E_c \rightarrow 0$ при $D \rightarrow D_{\text{crit}} = \mu^2/(2|\Delta\mu|)$. Из уравнения (28) следует, что логарифм в его правой части стремится к бесконечности при $D \rightarrow D_{\text{crit}}$, т.е. предел $D \rightarrow D_{\text{crit}}$ должен соответствовать пределу $\tau \rightarrow \infty$. Оценим зависимость лоренц-фактора γ от времени в данном случае.

Введём новую переменную $\Delta = D_{\text{crit}} - D$ и подставим её в уравнение (28), предполагая, что она мала. Получим

$$\tau \approx \frac{\mu^2}{4\Delta\mu^2} \log \frac{\mu^2 - 2|\Delta\mu|D_{\text{in}}}{2|\Delta\mu|\Delta} \quad (29)$$

и, подставляя (29) в уравнение (27), находим

$$\gamma \approx \frac{\mu^2}{4|\Delta\mu|D_{\text{in}}} \exp \frac{4\Delta\mu^2}{\mu^2} \tau. \quad (30)$$

Из уравнения (30) видно, что при $D \approx D_{\text{crit}}$ ускорение возрастает экспоненциально.

Вырожденный случай $\Delta\mu = 0$ надо анализировать отдельно. В этом случае из уравнения (28) имеем

$$\tau = \frac{1}{2\mu^2} (D^2 - D_{\min}^2) \quad (31)$$

и расстояние D неограниченно возрастает со временем. Из уравнения (27) получаем

$$\gamma \approx \frac{\mu}{2D_{\min}} \sqrt{2\tau}. \quad (32)$$

Теперь рассмотрим общий случай $N^2 \neq 0$. Полагая $\dot{D} = 0$ в (25), находим общее уравнение для точек поворота:

$$D_{1,2} = \frac{\Delta\mu}{\mathcal{E}} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \mathcal{E}}{2\Delta\mu^2}} \right) = \frac{\Delta\mu}{\mathcal{E}} \left(-1 \pm \frac{\sqrt{N^2}}{2\Delta\mu} \right). \quad (33)$$

Уравнение (33) означает, что точки поворота существуют только тогда, когда $N^2 > 0$. Их число зависит от знаков \mathcal{E} и $\Delta\mu$. При $\Delta\mu > 0$ потенциал $U(D)$ отрицателен (см. рисунок), следовательно, при $\mathcal{E} < 0$ относительное движение является финитным и имеет одну точку поворота³

$$D_1 = \frac{\Delta\mu}{|\mathcal{E}|} \left(1 + \frac{N}{2\Delta\mu} \right). \quad (34)$$

³ Напомним, что мы рассматриваем только положительные значения D .

В противоположном случае, $\mathcal{E} > 0$ и соответственно $N < 2\Delta\mu$, движение неограниченно и относительное расстояние D неограниченно возрастает со временем.

В случае $\Delta\mu < 0$ потенциал $U(D)$ является положительным при $D > \mu^2/(4|\Delta\mu|)$ (см. рисунок), стремится к нулю при $D \rightarrow \infty$ и имеет максимум при $D = D_{\text{crit}}$. Заметим, что из условия $U(D_{\text{crit}}) = \mathcal{E} = 2\Delta\mu^2/\mu^2$ в точке максимума получим $N^2 = 0$. Характер относительного движения зависит от того, является ли \mathcal{E} отрицательной величиной, или лежит в интервале $0 < \mathcal{E} < 2\Delta\mu^2/\mu^2$, соответствующем $0 < N < 2|\Delta\mu|$, или принадлежит области $\mathcal{E} > 2\Delta\mu^2/\mu^2$ и соответственно $N^2 < 0$. Когда энергия \mathcal{E} отрицательна, движение ограничено и имеется точка поворота

$$D_1 = \frac{|\Delta\mu|}{|\mathcal{E}|} \left(-1 + \frac{N}{2\Delta\mu} \right). \quad (35)$$

В промежуточной области, $0 < \mathcal{E} < 2\Delta\mu^2/\mu^2$, существуют две точки поворота:

$$D_{\pm} = \frac{|\Delta\mu|}{\mathcal{E}} \left(1 \pm \frac{N}{2\Delta\mu} \right). \quad (36)$$

При $D_{\text{in}} < D_-$ движение ограничено, а при $D_{\text{in}} > D_+$ величина D бесконечно возрастает. Наконец, при $N^2 < 0$ движение всегда неограниченно.

Когда движение ограничено, скорость \dot{D} меняет знак после прохождения точки поворота и в этом случае в (22) следует брать знак плюс. Поскольку D уменьшается после прохождения точки поворота и $E_c \propto D^{-1}$, из уравнения (22) следует, что $V \rightarrow 1$. Частицы стремятся столкнуться. Однако в этом случае предполагаемое нами условие $D \gg \mu$ не выполняется и в рамках нашего формализма описать движение на масштабах $D \sim \mu$ нельзя. Заметим, что в настоящей статье мы рассматриваем только пары частиц с равным нулю моментом импульса. Если частицы имеют малый ненулевой момент импульса, то они пролетят мимо друг друга и в определённый момент времени расстояние D между ними станет отрицательным. В этом случае наш анализ можно повторить без существенных изменений для отрицательных значений D и прийти к заключению, что для таких параметров движения существует другая симметричная точка поворота при отрицательном D . Таким образом, относительное движение пары частиц с малым ненулевым орбитальным моментом импульса будет периодическим в полной аналогии с движением пары обычных частиц с положительной массой.

Теперь рассмотрим случай неограниченного движения и оценим максимальное значение лоренц-фактора, которое может приобрести система. Как следует из предыдущего обсуждения, при $N^2 \neq 0$ расстояние D неограниченно возрастает. Следовательно, энергия в сопутствующей системе отсчёта E_c асимптотически стремится к значению $2\Delta\mu$. Заметим, что при $\Delta\mu < 0$ асимптотическое значение E_c отрицательно. Полагая $E_c = 2\Delta\mu$, из уравнения (22) находим

$$V = \frac{1}{4\Delta\mu^2 + E^2 - N^2} \left(E\sqrt{E^2 - N^2} - 2\Delta\mu\sqrt{4\Delta\mu^2 - N^2} \right). \quad (37)$$

Уравнение (37) свидетельствует, что, поскольку при $\Delta\mu > 0$ последнее слагаемое в его правой части отрица-

тельно, асимптотическое значение скорости меньше единицы. Большого значения скорость V может достичь в противоположном случае, $\Delta\mu < 0$, если предположить, что $|N^2| \ll \Delta\mu^2$. Тогда, разложив в ряд Тейлора выражения в правой части (37) по малому параметру $|N^2|/\Delta\mu^2$, получим

$$V = 1 - \frac{N^4}{32\Delta\mu^2 E^2}, \quad (38)$$

соответственно

$$\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-V)}} = \frac{4|\Delta\mu E|}{|N^2|}. \quad (39)$$

Из (39) видно, что в случае фиксированных значений E и $\Delta\mu < 0$ гамма-фактор системы можно сделать произвольно большим, выбирая произвольно малые значения нормы $|N^2|$. Этот вывод согласуется с предыдущим заключением о бесконечном ускорении системы при $N^2 = 0$.

4. Методические замечания

Отметим несколько методических аспектов рассматриваемой проблемы.

1. На первый взгляд, тот факт, что "среднее" положение пары $(x_1 + x_2)/2$ всегда возрастает со временем, может показаться противоречащим закону сохранения центра масс системы. Это противоречие снимается, если заметить, что для системы, содержащей частицы с отрицательными массами, положение центра масс R определяется *разностью* положений отдельных частиц. Например, в ньютоновском приближении $R = m_1 x_1 + m_2 x_2 = (\mu + \Delta\mu)x_1 - (\mu - \Delta\mu)x_2$. В релятивистском случае ситуация аналогична для систем с $N^2 > 0$. В противном случае само понятие центра масс оказывается плохо определённым. Действительно, вводя скорость системы отсчёта, в которой центр масс покоится, стандартным способом как $V_{\text{cm}} = P/E$ [6], мы видим, что при $N^2 = 0$ скорость $V_{\text{cm}} = 1$, а при $N^2 < 0$ величина V_{cm} формально превосходит скорость света. Очевидно, что понятие положения центра масс в обоих случаях не определено.

2. Во введении работы [3] утверждается, что концепция ВДТ, выдвинутая автором настоящей заметки, связана с проблемой бесконечного ускорения гравитационно-взаимодействующих частиц. Это утверждение, на наш взгляд, требует пояснения. Во-первых, заметим, что, как обсуждалось выше, даже в случае, когда частицы с массами противоположного знака имеют конечное ускорение, ВДТ возможен, если существует физический механизм генерации таких пар. Во-вторых, в общем случае концепция ВДТ вообще не опирается на гравитационное взаимодействие. В частности, в работе [2] рассматривается модель, в которой непрерывный поток положительной энергии из определённых областей пространства с отрицательной энергией в области с положительной энергией обусловлен чисто гидродинамическими эффектами. В этой модели пространство-время предполагается плоским и гравитационные взаимодействия отсутствуют. Более того, для построения ВДТ не нужно привлекать объекты с отрицательной массой покоя. Достаточно рассмотреть такую среду с положи-

тельной сопутствующей плотностью энергии, в которой нарушается слабый энергетический принцип [2]. Кроме того, существуют способы построения ВДТ, в которых гравитационное взаимодействие играет совершенно другую роль, например обеспечивает передачу энергии от нестационарной системы с отрицательной массой гравитационным волнам; такая ситуация реализуется, в частности, в релятивистской модели вращающейся струны, соединяющей два монополя с отрицательными массами [2, 7]. Очевидно, что эффекты, относящиеся к динамике свободных частиц с отрицательной массой, не имеют никакого отношения к таким моделям.

3. Авторы работы [3] утверждают, что в принципе невозможно достичь бесконечного ускорения системы, состоящей из двух частиц с противоположным знаком массы. Может показаться, что это явно противоречит результатам Бонди [1] и нашим результатам. Однако недоразумение устраняется, если принять во внимание, что авторы работы [3] рассматривают только *относительные* движения частиц, в то время как и анализ Бонди, и анализ, проведённый в настоящей заметке, относятся к движению пар частиц как целого относительно инерциальной системы отсчёта.

5. Заключение

Итак, мы показали, исходя из простых соображений, что в приближении слабого поля пара частиц с массами противоположного знака может неограниченно ускоряться, если 4-вектор энергии-импульса, характеризующий систему, является светоподобным (нулевым). Система также может достичь сколь угодно большого значения лоренц-фактора, если разность масс частиц $\Delta m < 0$ и норма вектора энергии-импульса достаточно мала.

Если предположить, что процесс генерации таких пар существует и частицы с положительными массами перехватываются некоторой мишенью, а частицы с отрицательными массами улетают, то мишени может быть передано любое количество положительной энергии. Можно также рассмотреть более естественную ситуацию, в которой частицы с положительными и отрицательными массами по-разному взаимодействуют с обычным веществом. Общий случай такой системы, в которой реализуется непрерывная передача энергии от подсистемы с отрицательной энергией подсистеме, имеющей положительную энергию, был назван нами "вечным двигателем третьего рода" [2]. Заметим, однако, что это просто классический аналог хорошо известной неустойчивости квантовой системы с неограниченным снизу спектром отрицательных энергетических состояний.

Ответ на вопрос о том, является или не является существование ВДТ или вечно ускоряющихся пар частиц парадоксом, зависит, на наш взгляд, от определения парадокса. С одной стороны, например, Боннор в работе [8] утверждает: "Я считаю бесконечное самоускорение... настолько абсурдным, что предпочитаю исключить его из рассмотрения, предполагая, что могут быть только положительные или только отрицательные инертные массы". Очевидно, что существование ВДТ может быть также квалифицировано как разновидность неустойчивости системы. С другой стороны, в таких системах никакие законы физики не нарушаются. Нам представляется, что появление неустойчивостей такого рода в теориях явля-

ется признаком их несостоятельности. Так, бесконечная концентрация энергии противоположного знака в пространственно разделённых областях могла бы привести к сильно неоднородному пространству-времени, едва ли совместимому с наличием жизни. Следовательно, подобные теории, по-видимому, должны быть отвергнуты, хотя их дополнительное изучение в рамках ОТО и может представлять некоторый интерес.

Поскольку наше приближение учитывает только линейные возмущения метрики и один последующий член разложения, определяемый ускорением пары, интересно оценить: какие поправки возникнут при рассмотрении следующих, квадратичных по метрике, возмущений? В случае нерелятивистского движения, $V \ll c$, чтобы ответить на этот вопрос, мы можем воспользоваться хорошо известными уравнениями движения Эйнштейна – Инфельда – Хоффмана (см., например, [6]). В рамках этого формализма удобно рассматривать системы с отличным от нуля орбитальным моментом импульса, так же как и пары частиц с большой разницей масс. Однако существует множество не учитываемых в нашем рассмотрении поправок, в частности поправок, связанных с излучением гравитационных волн. Следовательно, самосогласованный релятивистский анализ проблемы в следующем порядке по метрике возмущений после приближения слабого порядка Хаваса и Гольдберга [4]. Возможно, такой подход будет применён в будущих работах.

Хотя в настоящей статье мы рассматриваем только частицы, не наделённые внутренней структурой, наш анализ может быть верен и для пары протяжённых объектов с полными энергиями противоположного знака, если они разнесены на достаточно большое расстояние друг от друга и их относительные скорости достаточно малы. Например, Дезер и Пирани [9], рассматривая поведение систем со всевозможными знаками инертной и гравитационной массы, отметили, что пара геонов с полными энергиями противоположного знака в соответствующем пределе будет вести себя как пара точечных частиц.

Интересно также отметить, что понятие "вечный двигатель третьего рода" вводилось в контексте термодинамических систем с отрицательными температурами, в которых одна система может извлекать тепло из резервуара с отрицательной температурой и полностью превращать тепло в работу (см., например, [10, с. 176]). Поскольку термодинамические системы с отрицательными массами компонентов должны иметь отрицательную температуру (см., например, [11]), должна также существовать связь между термодинамическими свойствами таких систем и свойствами систем, обсуждавшихся в настоящей заметке. В частности, неустойчивость термодинамической системы, состоящей из двух подсистем, содержащих частицы с массами противоположного знака, обсуждалась, например, в работе [12], где было отмечено, что этот процесс аналогичен гравитационному самоускорению пары частиц с массами противоположного знака.

Автор благодарит С. Дезера, Х.Ф. Гонсалеса Хернандеса, И.Д. Новикова, К.А. Постнова и В.Н. Строкова за полезные замечания. Работа частично поддержана грантом некоммерческого фонда "Династия", ФЦП "Научно-преподавательские кадры инновационной России" на

2009–2013 гг. (госконтракт П 1336 от 2 сентября 2009 г.) и грантом РФФИ 11-02-00244-а.

Список литературы

1. Bondi H *Rev. Mod. Phys.* **29** 423 (1957)
2. Ivanov P *Phys. Lett. B* **680** 212 (2009)
3. Шацкий А А, Новиков И Д, Кардашев Н С *УФН* **181** 399 (2011) [Shatskiy A A, Novikov I D, Kardashev N S *Phys. Usp.* **54** 381 (2011)]
4. Havas P, Goldberg J N *Phys. Rev.* **128** 398 (1962)
5. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973)
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980)]
7. Martin X, Vilenkin A *Phys. Rev. D* **55** 6054 (1997)
8. Bonnor W B *Gen. Relat. Grav.* **21** 1143 (1989)
9. Deser S, Pirani F A E *Ann. Physics* **43** 436 (1967)
10. Landsberg P T *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (New York: Dover Publ., 1990)
11. Vyšin V *Phys. Lett.* **2** 32 (1962)
12. Pollard D, Dunning-Davies J *Nuovo Cimento B* **110** 857 (1995)

On relativistic motion of a pair of particles having opposite signs of masses

P.B. Ivanov

*Astro Space Center, P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
Tel. +7 (495) 333 33 66. Fax +7 (495) 333 23 78
E-mail: phi20@cam.ac.uk*

In this methodological note we consider, in a weak-field limit, a relativistic linear motion of two particles with opposite signs of masses and a small difference between their absolute values $m_{1,2} = \pm(\mu \pm \Delta\mu)$, $\mu > 0$, $|\Delta\mu| \ll \mu$. In 1957 H. Bondi showed both in framework of Newtonian analysis and in General Relativity that when the relative motion of particles is absent such a pair can be accelerated indefinitely. We generalise results of his paper to account for a small nonzero difference between velocities of the particles. Assuming that the weak-field limit holds and the dynamical system is conservative an elementary treatment of the problem based on the laws of energy and momentum conservation shows that the system can be accelerated indefinitely, or attain very large asymptotic values of the Lorentz factor γ . The system experiences indefinite acceleration when its energy-momentum vector is null and the mass difference $\Delta\mu \leq 0$. When modulus of the square of the norm of the energy-momentum vector, $|N^2|$, is sufficiently small the system can be accelerated to very large $\gamma \propto |N^2|^{-1}$. It is stressed that when only leading terms in the ratio of a characteristic gravitational radius to the distance between the particles are retained our elementary analysis leads to equations of motion equivalent to those derived from relativistic weak-field equations of motion of Havas and Goldberg 1962. Thus, in the weak-field approximation, it is possible to bring the system to the state with extremely high values of γ . The positive energy carried by the particle with positive mass may be conveyed to other physical bodies say, by intercepting this particle with a target. Suppose that there is a process of production of such pairs and the particles with positive mass are intercepted while the negative mass particles are expelled from the region of space occupied by physical bodies of interest. This scheme could provide a persistent transfer of positive energy to the bodies, which may be classified as a "Perpetuum Mobile of third kind". Additionally, we critically evaluate some recent claims on the problem.

PACS numbers: **03.30.+p**, **04.20.-q**, **47.75.+f**

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201212d.1319

Bibliography — 12 references

Received 26 July 2011, revised 31 December 2011

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (12) 1319–1326 (2012)

Physics – Uspekhi **55** (12) (2012)