

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О преподавании специальной теории относительности на основе современных экспериментальных данных

В.А. Алешкевич

Предлагается новый методический подход к изучению свойств пространства-времени в специальной теории относительности, который основывается на большом экспериментальном материале, накопившемся в XX в. благодаря, прежде всего, экспериментам с релятивистскими частицами, разгоняемыми в ускорителях, и космическими лучами. Такой подход наглядно доказывает, что релятивистские эффекты представляют собой проявления фундаментальных свойств пространства-времени, и позволяет избежать ложного представления, что релятивизм связан исключительно со световыми явлениями.

PACS numbers: 01.40.gb, 01.65.+g, 03.30.+p

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201212c.1301

Содержание

1. Введение (1301).
 2. Преобразования Лоренца (1302).
 3. Предельная скорость распространения взаимодействий (1303).
 4. Измерение промежутков времени (1303).
 5. Замедление темпа хода движущихся часов (1304).
 6. Сокращение продольных размеров движущихся тел (1306).
 7. Нарушение синхронности хода совокупности движущихся часов (1307).
 8. Несинхронность и принцип эквивалентности (1308).
 9. Пространство Минковского (1310).
 10. Преобразования скоростей (1311).
 11. Ускорители на встречных пучках (1312).
 12. Струи частиц (1312).
 13. Аберрация света звёзд (1313).
 14. Преобразования ускорений (1313).
 15. Сопутствующая система отсчёта (1314).
 16. Парадокс близнецов (1316).
 17. Заключение (1318).
- Список литературы (1318).

1. Введение

Специальная теория относительности (СТО), с момента создания которой прошло более ста лет, является одним из наиболее трудно постигаемых разделов физики. Трудности восприятия основных представлений о пространстве-времени, кинематики и динамики движений с околосветовыми скоростями, как представляется, свя-

заны с отсутствием учебной экспериментальной базы и возможностей наблюдения за движениями с такими скоростями. Обычный повседневный опыт заставляет усомниться в достоверности релятивистских эффектов и даже вызывает их неприятие.

Традиционная методика изложения СТО основывается на постулате о постоянстве скорости света и принципе относительности. Такой подход был единственным аргументом в пользу СТО у её создателей в начале XX в. Поэтому при первом знакомстве с теорией относительности нередко складывается ложное представление, что релятивистские эффекты связаны исключительно со световыми сигналами, поскольку в формулах Лоренца скорость света является фундаментальной величиной. Ситуация усугубляется ещё и тем, что при изложении основ СТО прибегают к "использованию" абстрактных часов и линеек, движущихся с околосветовыми скоростями, и часто ссылаются на умоглядные опыты, которые невозможно провести в реальных условиях.

Проблематично также при первом знакомстве с основами релятивизма вообразить часы, которые могли бы двигаться с очень большой скоростью, сравнимой с предельной. Кроме того, такие часы пролетают типичное лабораторное расстояние $l \approx 1$ м за время $t = l/c \approx 3$ нс, поэтому они должны предоставлять возможность измерять промежутки времени порядка 1 нс.

А о лоренцевом сокращении длин "линеек" (да и как они выглядят?) и говорить не приходится. С большой долей сомнения разглядывает читатель в замечательной книге Э. Тейлора и Дж. Уилера [1] рисунок, на котором изображён бегун с 20-метровым шестом, помещающийся в 10-метровом сарае.

Время от времени появляются сообщения об обнаружении движущихся объектов, скорость которых превышает общепринятое значение скорости света в вакууме. По-прежнему издаются "научные труды", авторы которых находят "ошибки" при расчёте интерферограмм в

В.А. Алешкевич. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Воробьёвы горы, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: victoraleshkevich@rambler.ru

Статья поступила 23 января 2012 г.,
после доработки 16 февраля 2012 г.

опытах Майкельсона – Морли, "доказывают" существование эфира и тем самым — ошибочность СТО.

Ещё совсем недавно (каких-то 25–30 лет тому назад) продолжались дискуссии о фундаментальных понятиях "масса" и "энергия" в теории относительности. Как представляется, наиболее последовательное и логичное толкование этих понятий дано в статье Л.Б. Окуня [2].

Многолетний опыт преподавания на физическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова привёл автора настоящих заметок к глубокому убеждению, что изложение основ СТО требует привлечения новой методики, основанной на большом количестве накопившихся в XX в. экспериментальных результатов, никак не связанных с измерением скорости света. Это, прежде всего, эксперименты с релятивистскими частицами, разгоняемыми в ускорителях, и космическими лучами [3]. Доказательную основу справедливости СТО, несомненно, усилят и эксперименты с атомными часами, установленными на борту космических аппаратов, в частности на спутниках, используемых в системах GPS (Global Positioning System) и ГЛОНАСС (Глобальная навигационная спутниковая система), в том числе недавние эксперименты по прямому измерению скорости распространения импульсов синхротронного излучения [4] и независимости скорости света от скорости движения источника [5]. Скорость света в этой методике выступает как мировая константа, определяющая предельную скорость распространения взаимодействия.

Цель настоящей статьи — описание нового методического подхода к изучению свойств пространства-времени в СТО. Поскольку вопросы релятивистской динамики хорошо изложены в многочисленных учебниках и учебных пособиях, в том числе в упомянутой выше статье [2], имеет смысл сосредоточиться на принципиальных методах измерения времени и координат и ограничиться кинематикой при движении с релятивистскими скоростями.

При написании этой заметки не ставилась задача полностью избежать повторения общеизвестных фактов и методических подходов. Различные методики, взаимно дополняя друг друга, будут только способствовать углублению понимания основ СТО. Материал, приведённый в статье, адаптирован для самого широкого круга читателей.

2. Преобразования Лоренца

История создания СТО заслуживает небольшого исторического экскурса.

В 1898 г. А. Пуанкаре опубликовал в философском журнале статью "Измерение времени" [6], посвящённую вопросам одновременности. В этой работе были практически изложены все основные положения СТО. Со статьёй Пуанкаре был знаком его близкий друг профессор Цюрихского технологического института Г. Минковский, порекомендовавший своему ученику А. Эйнштейну изучить эту работу. Спустя почти 7 лет, в 1905 г., Эйнштейн опубликовал статью "К электродинамике движущихся тел" [7], в которой была изложена СТО в её современном виде. Однако ссылка на работу Пуанкаре в ней отсутствовала.

Как известно, Г.А. Лоренц попытался найти такие преобразования координат и времени, при которых уравнения Максвелла оставались бы инвариантными при переходе из одной инерциальной системы отсчёта (ИСО) в

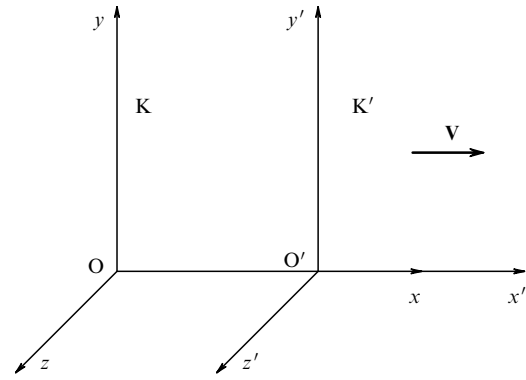


Рис. 1. Движение системы координат K' со скоростью V относительно лабораторной системы K в направлении оси x .

другую. Эти преобразования были им получены в 1904 году. Минковский во время чтения лекций обнаружил в них ошибку, исправил её и при издании конспекта лекции назвал эти преобразования лоренцевскими.

Лоренц установил, что при переходе в систему отсчёта K' , которая движется относительно системы K со скоростью V в направлении оси x (другие оси сонаправлены) (рис. 1), координаты и время какого-либо события изменяются в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Позднее, в 1905 г., Пуанкаре назвал эти преобразования лоренцевскими и показал их фундаментальный характер. Затем Эйнштейн в 1905 г. получил их на основе постулата о постоянстве скорости света и принципа относительности.

Масштабный множитель

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2)$$

получил название лоренцевского фактора. Здесь $\beta = V/c$. Очевидно, что при малых скоростях ($V \ll c$) и небольших значениях координаты ($x \ll tc^2/V$) формулы (1) переходят в преобразования Галилея.

При релятивистских скоростях ($V \leq c$) преобразования Лоренца существенно отличаются от галилеевых и приводят к совершенно новым эффектам. В частности, наличие в них множителя γ "приводит" к замедлению времени и сокращению длины, а слагаемое $(V/c^2)x$ ответственно за нарушение синхронности хода часов, расположенных в различных точках пространства.

Если решить (1) относительно переменных x, y, z, t , то получим обратные преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Обратные преобразования можно получить также из прямых, воспользовавшись принципом относительности, согласно которому скорость системы К относительно системы К' равна $-V$. Поэтому, если в (1) изменить знак скорости V и, удалив штрихи у переменных в левой части всех равенств системы, поставить их у переменных в правой части, то получим соотношения (3). Из (1) видно, что при $V = 0$ значение $\gamma = 1$, а при $V \rightarrow c$ фактор $\gamma \rightarrow \infty$. Ясно также, что скорость V не может быть равной скорости света c или превышать её, поскольку тогда либо знаменатель обращается в нуль, либо под корнем получается отрицательное число.

С физической точки зрения условие $V < c$ означает, что не обнаружены объекты (а только с ними и может быть связана движущаяся система отсчёта), скорость которых достигала бы величины скорости света в вакууме или превосходила её. Существует также и предельная скорость распространения взаимодействий.

3. Предельная скорость распространения взаимодействий

Исходя из результатов проведённых в XX в. экспериментов, совсем нетрудно прийти к выводу о конечной величине скорости распространения взаимодействий. В самом деле, на всех ускорителях при возрастании энергии заряженных элементарных частиц их скорость стремится к пределу $c \approx 3 \times 10^8$ м с⁻¹. Никто не наблюдал частиц, скорости которых превышали бы этот предел. Например, в линейном ускорителе SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) (США) электроны проходят в электрическом поле область с разностью потенциалов $\Delta U = 2,3 \times 10^{10}$ В. Согласно классической механике Ньютона, скорость таких электронов в конце пути ускорения должна составлять $v = 9,9 \times 10^{10}$ м с⁻¹, т.е. примерно в 300 (!) раз превышать упомянутый предел. Однако фактическая скорость электронов в конце пути ускорения на $0,075$ м с⁻¹ меньше предела c .

В космических лучах встречаются частицы, предположительно протоны, с энергией $E \approx 5$ Дж. Оцениваемая косвенным образом скорость таких частиц также не превышает предела c , вопреки фантастически большому расчётному значению $v = \sqrt{2E/m} \approx 2,4 \times 10^{14}$ м с⁻¹ (!).

Отметим, что предельная скорость частиц c совпадает со скоростью света (потока фотонов) в вакууме. Последняя измерялась многократно, и в настоящее время принято её значение $c = 299792458$ м с⁻¹.

24 февраля 1987 г. астрономы наблюдали редчайшее событие: вспышку света вследствие взрыва сверхновой в соседней с нашей небольшой галактике Большое Магелланово Облако. Это была первая со времён звезды Кеплера (1604 г.) сверхновая, видимая невооружённым глазом. Расстояние от Большого Магелланова Облака до Галактики примерно равно $1,6 \times 10^{21}$ м. Очевидно, что от момента вспышки до момента её регистрации на Земле прошло время $t \approx 5,4 \times 10^{12}$ с. За время $\Delta t \approx 10^4$ с до вспышки был зарегистрирован поток нейтрино от этого взрыва, образование которых, согласно теории, предшествует моменту вспышки примерно на то же самое время. Это наблюдение означает, что скорость c_ν нейтрино не отличается от скорости света c в пределах относительной погрешности $|c_\nu/c - 1| < 10^{-8}$.

Таким образом, все современные измерения подтверждают вывод о существовании предельной скорости частиц.

В современной физике фундаментальное взаимодействие интерпретируется как обмен соответствующими частицами. Например, сильное взаимодействие между кварками внутри нуклонов (протонов и нейтронов) осуществляется посредством обмена глюонами — переносчиками этих взаимодействий. Так называемые электрослабые взаимодействия — следствие обмена векторными бозонами.

Если взаимодействия интерпретировать как обмен частицами, то из факта существования предельной скорости c частиц следует ограничение и на скорость распространения взаимодействий. Следовательно, совершенно естественным является утверждение: *скорость распространения фундаментального взаимодействия, или, как говорят, скорость сигнала не превосходит предела $c \approx 3 \times 10^8$ м с⁻¹.*

4. Измерение промежутков времени

Для измерений малых промежутков времени можно использовать явление распада нестабильных частиц (пионов, каонов, мюонов и др.). Такие частицы, движущиеся с большими скоростями, образуются в результате взаимодействий протонов с ядрами атомов мишени на ускорителях.

Основные этапы генерации нестабильных частиц выглядят следующим образом. Сначала необходимо ускорить протоны. Для того чтобы избежать их столкновений с ядрами атомов воздуха, протоны ускоряются в вакуумной камере (остаточное давление около 10^{-9} торр) — трубе диаметром около 10 см. Так как за время ускорения (цикл ускорения), равное примерно нескольким секундам, до скорости, практически неотличимой от световой, протоны проходят огромные расстояния, очевидно, что трубу необходимо сделать кольцевой. Радиус кольца достигает нескольких километров.

Для того чтобы протоны двигались по окружности, на них должно действовать магнитное поле, величина которого в процессе ускорения возрастает до нескольких тесла. Магниты (в последнее время — с использованием устройств из сверхпроводящих сплавов, охлаждаемых до температур жидкого гелия), создающие магнитное поле, размещены по периметру кольца. В некоторых участках кольца расположены источники мощного высокочастотного электрического поля, которое и ускоряет протоны до энергий порядка 10^{12} эВ после многократного прохождения ими этих участков. Для этого протоны должны попадать на данные участки в фазе с высокочастотным электрическим полем.

Условия, при которых протоны ускоряются, сформулированы российским физиком В.И. Векслером. В соответствии с этими условиями протоны должны распределяться по кольцу не равномерно, а сосредоточиваться в сгустках, продольный размер которых для различных ускорителей колеблется от нескольких метров до нескольких сантиметров, а поперечный равняется нескольким микрометрам. Число протонов в сгустке может достигать многих миллиардов, а число сгустков в кольце изменяется от нескольких десятков до нескольких тысяч. С помощью специальных магнитов ускоренные протоны направляются на мишень (рис. 2).

В результате взаимодействия только одного из протонов с каким-либо ядром атома мишени образуется большое число (10–100 на одно взаимодействие) неста-

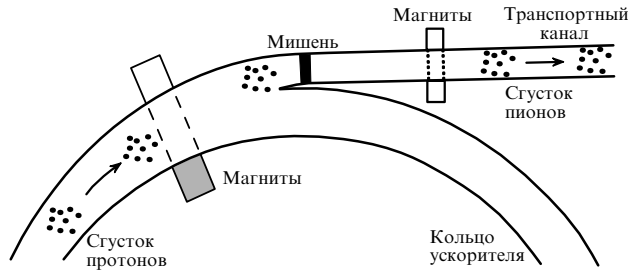


Рис. 2. Схематическое изображение движения сгустков протонов в фрагменте кольца ускорителя.

бильных вторичных частиц (в основном пионов, каонов и т.д.). Эти вторичные частицы сепарируются магнитным полем по типу и по скорости и направляются в различные транспортные каналы, которые в случае нестабильных частиц иногда называют распадными. Так как протоны попадают на мишень сгустками, нестабильные частицы также образуются сгустками. Эти сгустки движутся в транспортном канале с постоянной скоростью. Такова в самых общих чертах схема формирования пучков (последовательности сгустков) различных нестабильных частиц.

В частности, в Большом адронном коллайдере формируются сгустки, каждый из которых содержит порядка 10^8 протонов, разгоняемых до скоростей $V = 0,999999991c$. Длина сгустка от 3 до 5 см, его поперечный размер — около 16 мкм. Одновременно в кольце коллайдера находится около 3000 сгустков, претерпевающих 6×10^8 столкновений в 1 с. Если длину канала принять равной 27 км, то среднее расстояние между сгустками составит около 90 м.

Явление распада можно использовать для измерений времени. Свяжем с движущимися частицами (сгустком частиц) систему отсчёта K' . Эту систему отсчёта будем называть собственной, а время t' в ней — собственным временем. Время в лабораторной системе отсчёта K , в которой ускоритель и транспортные каналы неподвижны, обозначим через t . Вероятность dP распада одной частицы за время $dt' \ll \tau$ определяется отношением

$$dP = \frac{dt'}{\tau}, \quad (4)$$

где постоянная τ — среднее собственное время жизни частицы (в системе, где она покоится). Эту постоянную можно измерить в различных экспериментах, а также вычислить на основе законов радиоактивного распада. Её значение для различных нестабильных частиц колеблется в очень широких пределах (от 10^{-16} до 10^3 с). Если рассматривать сгусток из $N(t')$ нестабильных частиц, то изменение на dN этого числа за время dt' определяется произведением числа частиц на вероятность распада одной частицы:

$$dN = -N(t') dP = -N(t') \frac{dt'}{\tau}. \quad (5)$$

Знак минус здесь означает, что число частиц уменьшается. Уравнение (5) легко проинтегрировать и определить среднее число $N(t')$ частиц в сгустке в любой момент t' :

$$N(t') = N(0) \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right), \quad (6)$$

где $N(0)$ — число частиц в сгустке при $t' = 0$.

Измерения величин $N(0)$ и $N(t')$ позволяют решить и обратную задачу — вычислить из (6) собственное время t' :

$$t' = \tau \ln \frac{N(0)}{N(t')}. \quad (7)$$

Для того чтобы флуктуации в случайных явлениях распада не сказывались существенно на точности измерений времени, необходимо рассматривать сгустки с большим числом частиц N .

Таким образом, если сформировать сгусток из известного числа частиц $N(0)$ и определять их число $N(t')$, уменьшающееся вследствие распада, то соотношение (7) позволит измерять собственное время t' в системе K' , т.е. сгусток нестабильных частиц может выполнять функцию часов, движущихся с околосветовой скоростью.

5. Замедление темпа хода движущихся часов

Очевидно, что в различные моменты времени показания одних движущихся часов можно сравнивать с показаниями разных неподвижных часов. Поэтому контролировать темп хода движущихся часов можно следующим образом.

Пусть в лабораторной системе отсчёта K имеется набор измеряющих время t в этой системе (см. рис. 3 в разделе 7) синхронизованных неподвижных часов, расположенных вдоль транспортного канала ускорителя на оси x на расстояниях $l_0 = \text{const}$ друг от друга. Со сгустком частиц, который движется в этом канале с постоянной скоростью V , свяжем систему отсчёта K' . Пусть оси координат обеих систем сонаправлены и начала координат совпадают в момент $t = t' = 0$. Когда сгусток будет проходить мимо очередных неподвижных часов с номером i (назовём этот момент i -м событием), они будут показывать время:

$$t_i = \frac{L_i}{V}, \quad (8)$$

где $L_i = il_0$, $i = 1, 2, 3, \dots$

В системе K' , связанной со сгустком, времена этих же событий равны t'_i . Очевидно, что для определения одного конкретного значения t'_i из (7) необходимы измерения чисел частиц $N(0)$ и $N(t'_i)$. Таким образом, зная показания лабораторных часов для определённых событий и измеряя числа частиц в движущемся сгустке в соответствующие моменты времени, можно определить, отличается ли темп хода движущихся часов от темпа хода неподвижных.

В одном из многих экспериментов, проводившихся в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) в Женеве, в транспортный канал длиной $L_0 = 100$ м направлялся пучок из $N(0) = 1,5 \times 10^7$ (по результатам измерений) положительно заряженных ультрарелятивистских пионов, для которых лоренцевский фактор составлял $\gamma = 857$. Скорость этих пионов с точностью до шестого знака совпадает с величиной c . Время пролёта ими транспортного канала

$$t = \frac{L_0}{c} = \frac{10^2}{3 \times 10^8} \text{ с} \approx 3,33 \times 10^{-7} \text{ с}. \quad (9)$$

В транспортном канале пион может распадаться на мюон и нейтрино. Поэтому по измерениям числа N_μ появив-

шихся мюонов можно определить число распавшихся пионов. Измерения показали, что в конце транспортного канала $N_\mu = 2,27 \times 10^5$. Следовательно, число пионов в конце канала $N(t') = N(0) - N_\mu = 1,477 \times 10^7$. Так как для пионов собственное время жизни $\tau = 2,56 \times 10^{-8}$ с, то для t' из формулы (7) получим оценку

$$t' = \tau \ln \frac{N(0)}{N(t')} = 3,90 \times 10^{-10} \text{ с.} \quad (10)$$

Из (9) и (10) для отношения t/t' , характеризующего замедление темпа хода движущихся часов, находим значение

$$\frac{t}{t'} = 854, \quad (11)$$

которое совпадает с $\gamma = 857$ с погрешностью 0,35%. Таким образом, можно полагать, что

$$\frac{t}{t'} = \gamma, \quad (12)$$

или для интервалов времени

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \gamma. \quad (13)$$

Последнее соотношение часто представляют в виде

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t. \quad (14)$$

В огромном числе экспериментов, которые проводились на ускорителях во многих странах мира, в частности на крупнейших ускорителях в России (в Институте физики высоких энергий в Протвино), США (в Национальной ускорительной лаборатории им. Ферми в Чикаго) и ЦЕРН, длина L_0 транспортного канала изменялась от нескольких метров до нескольких километров, а лоренцевский фактор γ — от нескольких единиц до нескольких тысяч. Эксперименты проводились с различными нестабильными частицами, собственное время жизни которых изменялось в очень широких пределах (от 10^{-16} до $2,2 \times 10^{-6}$ с). Ни в одном из экспериментов не было обнаружено отклонений от зависимости (13).

Фактически формула (13) стала основой инженерных расчётов при проектировании транспортных каналов для любых нестабильных частиц. Отметим, что в прецизионных опытах Ф. Комбли, Ф. Фарли и Е. Пикассо (ЦЕРН), в которых изучался распад мюонов в кольцевом накопителе, относительная погрешность выполнения соотношения (13) составила $(0,9 \pm 0,4) \times 10^{-3}$ [8].

Исторически первыми опытами по проверке (13) явились эксперименты, выполненные Б. Росси в США (1939–1941 гг.) [9]. В этих экспериментах исследовалось уменьшение числа мюонов (в то время они назывались мезотронами) при их распространении в атмосфере. В результате взаимодействия космических лучей с ядрами атомов на больших высотах в атмосфере рождаются пионы. Эти пионы довольно быстро распадаются на мюоны и нейтрино. Собственное время жизни мюонов относительно мало: $\tau \approx 2,2 \times 10^{-6}$ с. Если бы время жизни мюонов t_μ , измеренное по лабораторным часам, равнялось их собственному времени жизни, то по направлению к Земле они пролетели бы в среднем расстояние

$$\lambda_0 = ct_\mu = c\tau \approx 660 \text{ м.} \quad (15)$$

Пусть число мюонов в некоторой верхней точке атмосферы равно $N(0)$. Поскольку мюоны движутся практически со скоростью света, то расстояние l , пройденное ими по направлению к Земле, к моменту t составит

$$l = ct. \quad (16)$$

Если бы не было замедления времени (т.е. выполнялось бы равенство $t' = t$), то из (6) с учётом (15) и (16) получилась бы следующая зависимость числа мюонов от расстояния l :

$$N(l) = N(0) \exp\left(-\frac{tc}{\tau c}\right) = N(0) \exp\left(-\frac{l}{\lambda_0}\right), \quad (17)$$

т.е. число мюонов уменьшалось бы в e раз на расстоянии $\lambda_0 = 660$ м. Если замедление имеет место (см. (12)), то вместо (17) находим

$$N(l) = N(0) \exp\left(-\frac{l}{\gamma\lambda_0}\right), \quad (18)$$

т.е. уменьшение в e раз происходит на расстоянии $\lambda = \gamma\lambda_0$, значительно большем (в γ раз), чем λ_0 . Измерения чисел мюонов проводились в Чикаго (на высоте 180 м над уровнем моря) и в горах Колорадо на высотах 1600, 3240 и 4300 м. Эти измерения показали уменьшение числа мюонов в e раз на расстоянии порядка нескольких километров. Из проведённой оценки энергии мюонов следовало, что лоренцевский фактор составлял $\gamma \approx 5$, отсюда расстояние $\lambda = \gamma\lambda_0 \approx 3$ км, что согласуется с приведёнными выше данными прямых измерений.

Современные исследования космических лучей показывают, что формула (13) справедлива и при очень больших значениях лоренцевского фактора, $\gamma \approx 10^{10} - 10^{11}$.

Во взаимодействиях первичных частиц космического излучения с ядрами атомов высоко в атмосфере рождаются, кроме заряженных пионов и других частиц, нейтральные пионы, собственное время жизни которых очень мало: $\tau \approx 0,8 \times 10^{-16}$ с. Поэтому такие нейтральные пионы практически мгновенно распадаются. Однако при очень высоких энергиях космических лучей лоренцевский фактор этих пионов может достигать упомянутых выше значений и расстояние λ , на котором их число уменьшается вследствие распада в e раз, становится большим:

$$\lambda = \gamma\tau c \approx 2,4 \times 10^3 \text{ м.} \quad (19)$$

В этом случае нейтральные пионы успевают осуществить взаимодействие с ядрами атомов в атмосфере. Косвенные измерения показывают, что, действительно, в области сверхвысоких энергий нейтральные пионы не распадаются, а взаимодействуют с ядрами атомов, т.е. формула (13) выполняется и для $\gamma \sim 10^{10}$.

После появления прецизионных атомных часов возникла возможность проверки формулы (12) для замедления времени и при небольшой скорости V , например, при полётах на самолётах, когда $V \approx 10^3$ км ч⁻¹, $\beta = V/c \approx 10^{-6}$ и соответственно γ превышает единицу на очень малую величину, порядка 10^{-12} .

В опытах Д. Хафеле и Р. Китинга [10] на борту коммерческих авиалайнеров находилось четыре комплекта цезиевых атомных часов. Самолёты дважды облетели вокруг света, сначала на восток, затем на запад, после чего было проведено сравнение показаний "летающих" часов и аналогичных часов, оставшихся в Военно-

морской обсерватории США. Часы на борту самолёта отставали от земных на (59 ± 10) нс, если самолёт летел на восток, и опережали земные на (273 ± 70) нс, если самолёт летел на запад. Погрешность проверки формулы (12) составила 10%. Теоретические оценки этих величин: (40 ± 23) нс и (275 ± 21) нс соответственно. В более поздних опытах С. Алле и др. (1980 г.) [11] погрешность была уменьшена до 1%.

Таким образом, из совокупности экспериментальных данных для интервала изменения лоренцевского фактора γ от 1 до 10^{11} можно сделать следующий вывод: темп хода одних движущихся часов при сравнении с показаниями совокупности часов, расположенных в разных точках в неподвижной системе отсчёта, замедляется в γ раз.

Такое замедление хода движущихся часов получило название лоренцевского, поскольку формула (13) следует из преобразований Лоренца. В самом деле, движущимся в лабораторной системе часам соответствует фиксированное значение координаты $x'_w = \text{const}$ в системе, в которой они покоятся. Поэтому для двух моментов времени, t_1 и t_2 , в лабораторной системе на основании (3) имеем

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma \left(t'_1 + \frac{V}{c^2} x'_w \right), \\ t_2 &= \gamma \left(t'_2 + \frac{V}{c^2} x'_w \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где t'_1 и t'_2 — соответствующие моменты собственного времени. Вычитая из второго равенства в (20) первое и вводя обозначения $\Delta t = t_2 - t_1$ и $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, приходим к соотношению (13).

В завершение обсуждения этой темы отметим, что атомные часы, установленные на навигационных спутниках, движущихся на высотах около 20000 км со скоростью $V = 4000 \text{ м с}^{-1}$, отстанут за сутки ($\Delta t = 8,64 \times 10^4 \text{ с}$) на

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2} \right) \Delta t \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c} \right)^2 \Delta t = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \right)^2 10^{-10} \times 8,64 \times 10^4 \text{ с} = 7,7 \text{ мкс}. \end{aligned}$$

6. Сокращение продольных размеров движущихся тел

Система отсчёта, в которой тело покоится, называется собственной для этого тела. Длина тела (стержня, линейки), измеренная в такой системе, называется собственной длиной. Измерить длину покоящегося тела — не проблема. Например, пусть в лабораторной системе отсчёта К имеется неподвижный стержень, расположенный вдоль оси x . Длина L_0 стержня определяется как разность координат его правого (г) x_r и левого (л) x_l концов:

$$L_0 = x_r - x_l. \quad (21)$$

При этом безразлично, в какие моменты времени t по часам лабораторной системы отсчёта измеряются координаты.

Возможно и альтернативное определение длины, преимущества которого станут ясны ниже. Представим транспортный канал ускорителя длиной L_0 как некото-

рый стержень. Пусть от левого конца канала к правому с постоянной скоростью V движется сгусток частиц. Тогда, если в момент времени t_1 по часам лабораторной системы этот сгусток поравняется с левым концом стержня, а в момент t_r — с правым, то собственная длина L_0 транспортного канала (который далее для краткости будем называть стержнем) будет равна расстоянию, которое пролетел сгусток:

$$L_0 = V(t_r - t_1). \quad (22)$$

При измерении длины L движущегося тела (стержня) необходимо принять, что координаты обоих его концов измеряются в один и тот же момент времени t по часам той системы, в которой эта длина определяется. Поэтому

$$L = x_r(t) - x_l(t). \quad (23)$$

Примером быстро движущегося стержня может служить транспортный канал ускорителя, который движется с околосветовой скоростью относительно системы отсчёта, связанной со сгустком частиц. В этом случае его длина

$$L = x'_r(t') - x'_l(t') \quad (24)$$

определяется координатами x' , зафиксированными в один и тот же момент t' . Однако легко увидеть, что определение длины по формулам (23) или (24) крайне сложно, поскольку у обоих концов движущегося стержня, длину которого предстоит измерить, следует заранее установить часы. Иное дело — альтернативный метод (формула (22)), основанный на использовании закона движения. Если в системе отсчёта K' (связанной со сгустком частиц) сначала, в момент t'_1 , со сгустком поравнялся левый конец стержня, а затем, в момент t'_r , — правый, то длина движущегося стержня будет равна

$$L = V(t'_r - t'_1). \quad (25)$$

При практическом использовании формулы (25) для оценки времён t'_1 и t'_r необходимо измерить числа частиц в сгустке в те моменты, в которые сгусток влетает в канал и вылетает из него.

Из сравнения (25) с (22) сразу ясно, что длина L движущегося тела отличается от собственной длины L_0 . Если обозначить разности времён как $\Delta t = t_r - t_1$ и $\Delta t' = t'_r - t'_1$, то с учётом замедления темпа хода движущихся часов получим соотношение между собственной длиной L_0 и длиной L движущегося тела:

$$\frac{L_0}{L} = \gamma. \quad (26)$$

Таким образом, приходим к выводу: продольные размеры движущихся тел сокращаются в γ раз.

Например, в рассмотренном выше эксперименте в ЦЕРН собственное время движения сгустка пионов составляло $t' = 3,90 \times 10^{-10} \text{ с}$ (см. (10)), тогда для длины L движущегося стержня (всего транспортного канала) получаем

$$L = Vt' \approx 11,7 \text{ см}, \quad (27)$$

что в 857 раз меньше L_0 .

Сокращение продольных размеров движущихся тел называется лоренцевским, так как оно тоже следует из преобразований Лоренца. В самом деле, пусть тело покоится в лабораторной системе отсчёта, тогда, согласно обратным преобразованиям Лоренца, для одного и того же момента времени t' в системе K' , относительно которой тело движется, имеем

$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'), \quad (28)$$

$$x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'). \quad (29)$$

Обозначим расстояния $L_0 = x_2 - x_1$ и $L = x'_2 - x'_1$. Из (28), (29) следует $L_0/L = \gamma$, что совпадает с (26).

Поперечные размеры движущихся тел не изменяются. Такой вывод можно сделать из экспериментов на ускорителях со встречными пучками. Представим себе, что два сгустка протонов движутся навстречу друг другу. Определим полное число столкновений протонов. При высоких энергиях кулоновским взаимодействием частиц можно пренебречь. Что касается ядерных сил, то они эффективны лишь на расстояниях, сравнимых с радиусом частиц, поэтому протоны в данном случае можно рассматривать как шары с конечным радиусом.

Очевидно, что два шара столкнутся только тогда, когда расстояние между их центрами не превышает суммы их радиусов $r_1 + r_2$. Эта сумма определяет так называемое сечение взаимодействия $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$. Если шары движутся в трубе радиусом R и они распределены внутри трубы случайным образом, то вероятность одного столкновения $P = (r_1 + r_2)^2/R^2$. Ясно, что если в сгустках содержится по n протонов, то полное число столкновений

$$N = n^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{R^2}. \quad (30)$$

Если бы поперечные размеры частиц (радиусы r_1 и r_2) изменялись при движении, то полное число столкновений в эксперименте отличалось бы от оценки (30). Так как этого не происходит, можно сделать вывод, что поперечные размеры движущихся тел остаются неизменными. Это следует также из преобразований Лоренца для координат, оси которых перпендикулярны направлению движения.

Таким образом, приходим к выводу: поперечные размеры движущихся тел инвариантны.

7. Нарушение синхронности хода совокупности движущихся часов

Как следует из преобразований Лоренца, наблюдатель в системе K отметит несинхронность хода совокупности движущихся относительно него часов, расположенных в системе K' , и наоборот.

Для количественной оценки этой несинхронности обратимся к примеру со сгустками частиц, которые движутся со скоростью V в транспортном канале ускорителя (рис. 3).

Пусть имеются синхронизованные часы, расположенные на равных расстояниях l_0 друг от друга в этом канале, и пусть они показывают одинаковое время $t = 0$, когда первые часы-сгусток пролетают мимо часов, находящихся в начале координат. Можно условиться, что собственное время, показываемое этими часами, в этот момент также равно нулю: $t' = 0$. Очевидно, что когда

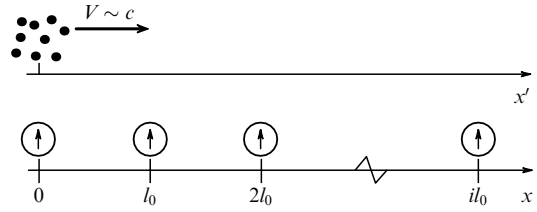


Рис. 3. Схематическое изображение движения сгустка частиц относительно синхронизованных часов, расположенных на равных расстояниях вдоль транспортного канала ускорителя.

часы-сгусток будут пролетать мимо лабораторных часов с номером i , последние будут показывать время t_i (см. (8)).

В системе K' , связанной со сгустками, расстояние между лабораторными часами вследствие лоренцевского сокращения составит величину

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (31)$$

Поэтому в системе K' это событие по часам-сгустку должно произойти в момент

$$t'_i = \frac{il}{V} = \frac{il_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{V} = \frac{L_i \sqrt{1 - \beta^2}}{V}. \quad (32)$$

В системе K' i -е часы движутся навстречу сгустку со скоростью V . С точки зрения наблюдателя в системе K' темп хода движущихся лабораторных часов должен замедлиться в γ раз. Поэтому этот наблюдатель может ожидать, что по часам системы K рассматриваемое событие произойдёт в момент

$$t_i^{\text{exp}} = \frac{t'_i}{\gamma} = \frac{L_i(1 - \beta^2)}{V}. \quad (33)$$

Разница между ожидаемым временем t_i^{exp} (33) и фактическим t_i (8) может быть интерпретирована единственным образом: движущиеся в системе K' лабораторные часы с номерами 0 и i несинхронны. Разность δ_i в показаниях часов составляет

$$\delta_i = t_i - t_i^{\text{exp}} = \frac{L_i}{V} - \frac{L_i(1 - \beta^2)}{V} = \frac{L_i \beta^2}{V}. \quad (34)$$

С точки зрения наблюдателя в системе K' часы с номером i показывают более позднее время по сравнению с фиксируемыми часами с номером 0. Эта разница в показаниях, согласно (34), тем больше, чем дальше часы отстоят друг от друга.

Иллюстрацией к описанным выше явлениям замедления хода часов, движущихся относительно других часов, нарушения синхронности их хода и сокращения расстояния между движущимися часами может служить рис. 4, на котором пронумерованные (числами в квадратах) лабораторные часы (отмеченные кружками) установлены на расстоянии $l_0 \approx 30$ м друг от друга вдоль транспортного канала (оси x лабораторной системы K). По этому каналу движутся часы-сгустки (обведённые овалами) с релятивистской скоростью, при которой $\gamma = 10$. В системе K' , собственной для сгустков, расстояние между ними также равно около 30 м. Лабораторные часы, как показано на рисунке, движутся относительно часов-

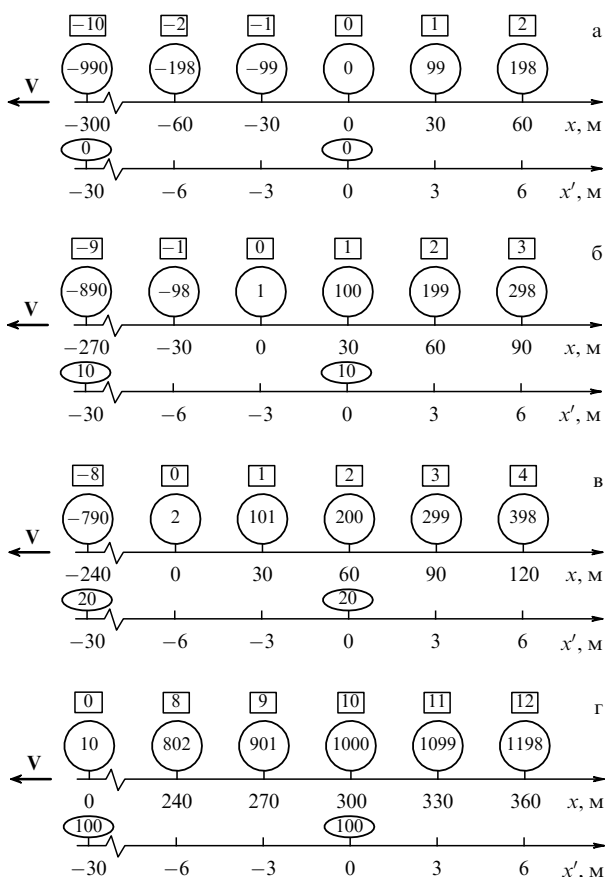


Рис. 4. Иллюстрация замедления хода часов, нарушения синхронности их хода и сокращения расстояния между движущимися часами.

сгустков со скоростью V справа налево. В момент $t' = 0$ (по часам-сгусткам) начала обеих систем координат совпадают (рис. 4а). Лабораторные часы с номером 0, находящиеся в точке $x = 0$, также показывают время $t = 0$.

Обращают на себя внимание два факта. Во-первых, в соответствии с (34) показания лабораторных часов различны (время указано внутри кружков и овалов в наносекундах, для большей наглядности показания всех часов округлены): часы с номером 2 спешат по отношению к соседним часам на $\delta = 99$ нс, а те в свою очередь показывают время на 99 нс большее, чем часы с номером 0 и т.д. Во-вторых, в системе K' расстояние между лабораторными часами $\Delta x' \approx 3$ м, т.е. в 10 раз меньше, чем в системе K . Через время $\Delta t' \approx 10$ нс (рис. 4б) напротив сгустка в точке $x' = 0$ окажутся часы с номером 1, показывающие время 100 нс. Разница в показаниях соседних лабораторных часов по-прежнему равна 99 нс, причём показания всех лабораторных часов увеличились на $\Delta t = 1$ нс. Через время $\Delta t' \approx 20$ нс напротив сгустка окажутся лабораторные часы с номером 2, показывающие время 200 нс (рис. 4в), а $\Delta t = 2$ нс. Ситуация, представленная на рис. 4г, реализуется по истечении $\Delta t' \approx 100$ нс, когда лабораторные часы с номером 0 окажутся уже рядом со следующим сгустком, и для них $\Delta t = 10$ нс.

Обсудим теперь вопрос о замедлении темпа хода каких-либо часов. Поскольку лабораторные часы и часы-сгустки находятся в относительном движении, то это замедление присуще часам обоих типов. Если проследить за показаниями одних и тех же лабораторных

часов, например с номером 1, сравнивая ситуации, представленные на рис. 4а и б, то можно увидеть, что за время $\Delta t' = 10$ нс (по часам-сгустку) их показания увеличились на $\Delta t = 100 - 99 = 1$ нс, что указывает на 10-кратное замедление их темпа хода по сравнению с ходом часов-сгустков. С другой стороны, сравнивая показания одних и тех же часов-сгустка (находящихся в точке $x' = 0$) с показаниями разных лабораторных часов, оказавшихся рядом со сгустком, легко увидеть (рис. 4б), что время по часам-сгустку равно 10 нс, а по часам с номером 1 — 100 нс, на рис. 4в часы-сгусток показывают 20 нс, а часы с номером 2 — 200 нс, на рис. 4г часы-сгусток показывают время 100 нс, а лабораторные часы с номером 10 — время 1000 нс. Это свидетельствует о 10-кратном замедлении хода часов-сгустка.

Аналогичные рассуждения можно провести с использованием следующих часов-сгустка, расположенных в точке $x' \approx -30$ м. Сравнивая, например, рис. 4а и г, приходим к выводу, что когда пройдёт 100 нс (по часам-сгустку), промежуток времени, измеренный с помощью разных, но находящихся вблизи сгустка лабораторных часов, составит $10 - (-990) = 1000$ нс.

Наконец, укажем также на относительность одновременности: события, происходящие одновременно в одной системе отсчёта, не будут одновременными в другой. Действительно, пусть в момент $t' = 20$ нс (рис. 4в) сгустки с координатами $x'_1 \approx -30$ м и $x'_2 = 0$ м "повредили" находящиеся вблизи лабораторные часы. Их стрелки "замерли" соответственно на отметках $t_1 = -790$ нс и $t_2 = 200$ нс. Следовательно, для экспериментатора, работающего на ускорителе, повреждения часов произошли последовательно с интервалом времени 990 нс.

8. Несинхронность и принцип эквивалентности

Эйнштейн, обратив внимание на то, что и силы инерции, и силы гравитации пропорциональны массе тел, предложил простой мысленный эксперимент. Предположим, что наблюдатель находится в закрытой со всех сторон кабине лифта. Если кабина лифта покоится на Земле, то наблюдатель увидит обычные проявления силы тяготения: все тела будут падать с одинаковым ускорением.

В случае, когда кабина движется с постоянным ускорением g , направленным в сторону потолка, в пространстве, где нет сил тяготения, наблюдатель также отметит, что ускорения всех падающих на пол кабины тел одинаковы. Поэтому по явлениям, происходящим в кабине, различить эти два случая можно лишь тогда, когда кабина достаточно велика. Действительно, вследствие неоднородности поля тяготения можно заметить незначительное изменение расстояния между двумя падающими телами, а в поле сил инерции этого изменения не будет. Однако всегда можно выбрать такую локальную систему отсчёта, в которой действия сил инерции и гравитации будут неразличимы. Это утверждение известно как знаменитый принцип эквивалентности Эйнштейна. На основе этого принципа Эйнштейн разработал общую теорию относительности (ОТО).

С помощью принципа эквивалентности объясняется один из основных эффектов ОТО — красное смещение в гравитационном поле. Пусть имеется установка, содержащая источник фотонов с частотой ω и расположенный

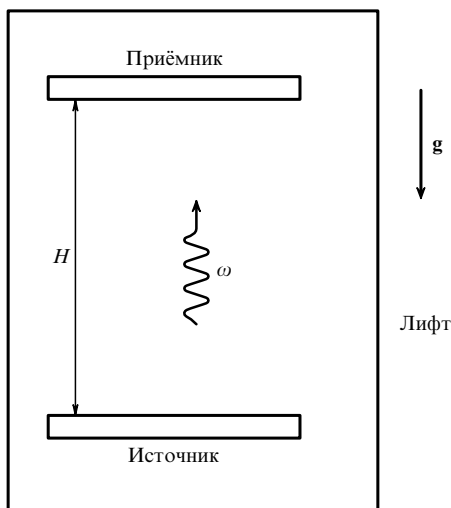


Рис. 5. Иллюстрация принципа эквивалентности для объяснения гравитационного красного смещения.

на высоте H над ним приёмник, который может поглощать эти фотоны (рис. 5).

Рассмотрим фотоны, летящие вверх в поле тяготения Земли, которое будем считать однородным. Эффект заключается в том, что частота, регистрируемая приёмником, меньше ω на $\Delta\omega$. В первом приближении имеет место равенство

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{gH}{c^2}, \tag{35}$$

где c — скорость света.

Проанализируем этот эффект в системе отсчёта лифта (см. рис. 5), который свободно падает относительно установки с ускорением g . В лифте поле тяготения отсутствует, и поэтому нет никаких причин, которые бы могли привести к изменению частоты фотона. Если в момент $t = 0$ скорость лифта $v = 0$ и в этот же момент времени излучается фотон с частотой ω , то в момент $t = H/c$ фотон достигнет приёмника, который в системе отсчёта, связанной с лифтом, будет иметь скорость

$$v = gt = \frac{gH}{c}, \tag{36}$$

направленную вверх. Таким образом, фотон будет догонять приёмник. Но в этом случае должен проявиться эффект Доплера. В соответствии с этим эффектом, зарегистрированная в приёмнике частота окажется меньше ω на величину $\Delta\omega$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c}. \tag{37}$$

Если в (37) подставить скорость v (36), то получим формулу (35), предсказанную в ОТО. Из рассмотренного ясно, что частота ω фотона не изменяется, а эффект возникает из-за движения приёмника.

Рассмотрим теперь, с чем связано появление $\Delta\omega$ в гравитационном поле. Согласно ОТО, в статическом гравитационном поле частота ω фотона не изменяется с высотой подъёма H . Следовательно, единственным возможным объяснением появления $\Delta\omega$ может быть различие в темпе хода часов, находящихся вблизи источника и вблизи приёмника.

Темп хода часов действительно увеличивается по мере их поднятия в гравитационном поле. Если, например, часы на Земле "отмерили" время t , то часы, поднятые на высоту H , убегут вперёд на

$$\Delta t = t \frac{gH}{c^2}. \tag{38}$$

Прямые эксперименты с прецизионными часами, одни из которых находились в самолёте на некоторой высоте, а другие оставались на Земле, подтвердили этот эффект вначале с погрешностью $\approx 10\%$ (опыты Д. Хафеле и Р. Китинга) [10], а затем с погрешностью $\approx 1\%$ (опыты С. Алле и др.) [11].

В 1976 г. Р. Вессо и М. Левин из Смитсоновской астрофизической обсерватории Гарвардского университета совместно со своими коллегами из NASA установили на ракете Scout D, стартовавшей с о. Вуллопс в штате Вирджиния, атомные часы, точность которых составляет одну триллионную долю секунды в час [12]. С помощью двустороннего обмена микроволновыми сигналами сравнивались показания двух атомных часов. Было установлено, что к моменту достижения ракетой максимальной высоты 10000 км находящиеся в ней атомные часы обогнали на четыре миллиардных доли секунды часы, оставшиеся на Земле. Расхождение экспериментальных данных с результатами теоретических расчётов составило менее 0,01%.

В случае атомных часов при их подъёме в гравитационном поле возрастает расстояние между уровнями энергии электрона в атоме, а в случае ядерных часов — расстояние между уровнями энергии ядра. При увеличении разности энергий между уровнями в атоме (ядре) повышается частота излучения и уменьшается период колебаний. Это означает, что такие атомные (ядерные) часы будут идти быстрее.

Частота фотонов измеряется в одном случае "быстрыми" часами, расположенными наверху, а в другом — "медленными" часами, находящимися внизу. В первом приближении и получается формула (35) для красного смещения $\Delta\omega$ частоты. Очевидно, что $\Delta\omega$ — просто разность частот, которая возникает при измерениях с помощью часов с разным темпом хода.

Атомные часы навигационных спутников из-за наличия гравитации за сутки "убегут" на величину

$$\Delta t = t \frac{gH}{c^2} = t \frac{\Delta U}{c^2}, \tag{39}$$

где ΔU — изменение гравитационного потенциала,

$$\Delta U = -GM \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right).$$

При $H = 3R = 19200$ км и $t = 8,6 \times 10^4$ с величина $\Delta t = 46$ мкс.

Таким образом, с учётом релятивистского отставания разница в показаниях часов на спутнике и на Земле за сутки составит $\Delta t_0 = \Delta t - \Delta t' = (46 - 7,7)$ мкс = 38,3 мкс. Если не учитывать это различие, то ошибка в определении расстояния между спутником и объектом на Земле составила бы $\Delta r = c\Delta t_0 = 11,5$ км.

В 1960 г. Паунд и Ребка с погрешностью $\sim 10\%$ (позднее Паунд и Снайдер уменьшили погрешность до $\sim 1\%$) подтвердили формулу (35) [13] при проведении опытов с гамма-лучами, которые испускаются ядрами

изотопа железа ^{57}Fe . Фотоны поднимались вверх (в другой серии опытов опускались вниз) в башне высотой около 22 м. Наблюдаемое смещение частоты составляло очень малую величину $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-15}$. Высокая точность измерений была достигнута благодаря эффекту Мёссбауэра. Эффект состоит в том, что в процессе излучения фотона отдача воспринимается не одним излучающим атомом, а всем кристаллом. Поскольку масса кристалла велика, скорость отдачи мала. Поэтому излучаются (и поглощаются) чрезвычайно монохроматические фотоны, что и позволило добиться высокой точности измерений.

Теперь обратимся к нарушению синхронности часов, движущихся со скоростью V относительно наблюдателя в K -системе. Прежде чем достичь скорости V , система K' должна двигаться ускоренно. Рассмотрим начальную стадию ускоренного движения системы K' ($\gamma = 1$) и будем считать, что в течение небольшого отрезка времени t ускорение a системы отсчёта постоянно. Тогда по прошествии времени t она достигнет скорости $V = at$. Согласно принципу эквивалентности, показания часов в разгоняющейся системе отсчёта, находящихся при этом на расстоянии L друг от друга в направлении движения, с точки зрения неподвижного в ней наблюдателя будут, в соответствии с (39), различаться на

$$\Delta t = t \frac{aL}{c^2} = \frac{VL}{c^2}. \tag{40}$$

Для того чтобы устранить это различие и тем самым синхронизировать часы в K' -системе, находящийся в ней наблюдатель должен "отвернуть стрелки назад" у убежавших вперёд часов. А это наблюдатель в системе K зафиксирует как появление несинхронности: последовательное уменьшение показаний часов, расположенных друг за другом в направлении их движения.

9. Пространство Минковского

Многообразие переменных x, y, z, ct образует пространство Минковского. Причинно-следственные отношения между событиями в простейшем случае, когда эти события происходят в различных точках на оси x , удобно анализировать с использованием так называемой плоскости Минковского (рис. 6). Декартовыми координатами на этой плоскости являются переменные x и ct . Любое событие, которое происходит на оси x системы отсчёта K , отображается как точка на плоскости

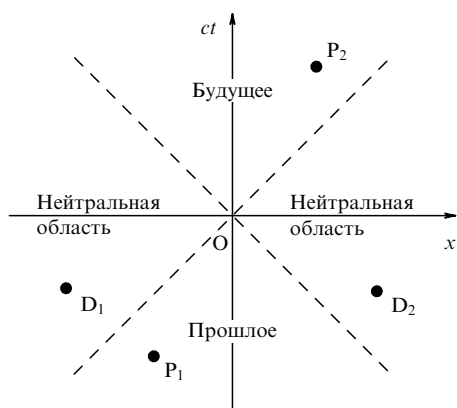


Рис. 6. Плоскость Минковского.

Минковского. Если в начале координат в момент $t = 0$ произошла вспышка света, то координаты x волнового фронта определяются соотношением

$$x = \pm ct. \tag{41}$$

На плоскости Минковского закон движения (41) отображается двумя биссектрисами углов между осями координат (штриховые прямые). В случае двух пространственных координат (x и y) вместо линий получается конус, называемый световым. Для трёх пространственных координат также вводят понятие "светового конуса", хотя его и нельзя изобразить графически. Для наблюдателя, находящегося в момент $t = 0$ в начале координат (заметим, что в качестве начала координат можно выбрать любую точку оси x), световой конус делит пространство Минковского на три части. Область внутри верхнего конуса называется "будущее", а область внутри нижнего — "прошлое". Оставшаяся часть — это "нейтральная" область. Очевидно, что любые события, отображаемые точками на поверхности светового конуса, связаны светоподобными интервалами

$$\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0. \tag{42}$$

События из областей "будущее" P_2 или "прошлое" P_1 связаны с "нулевым" событием в точке O времениподобными интервалами $\Delta S^2 > 0$.

Произвольное событие P_1 из области "прошлое" произошло раньше "нулевого" и может быть причиной последнего, а любое событие P_2 в "будущем" наступает позднее "нулевого" и поэтому может быть его следствием. Таким образом, для наблюдателя в точке $x = 0$ все события из нижнего конуса произошли в "прошлом", а из верхнего — наступят в "будущем".

Любые события из "нейтральной" области (точки D_1 и D_2 на рис. 6) связаны с событием в точке O пространственноподобными интервалами ($\Delta S^2 < 0$). Ясно, что между этими событиями и "нулевым" невозможны причинно-следственные отношения.

Координатная ось x и все возможные прямые, параллельные ей (например, линия $a_1 a_2$), — это так называемые линии одновременности в системе отсчёта K (рис. 7). Любые два события, принадлежащие этим линиям (например, события M_1 и M_2 на прямой $a_1 a_2$), одновременны, т.е. происходят в один и тот же момент t_0

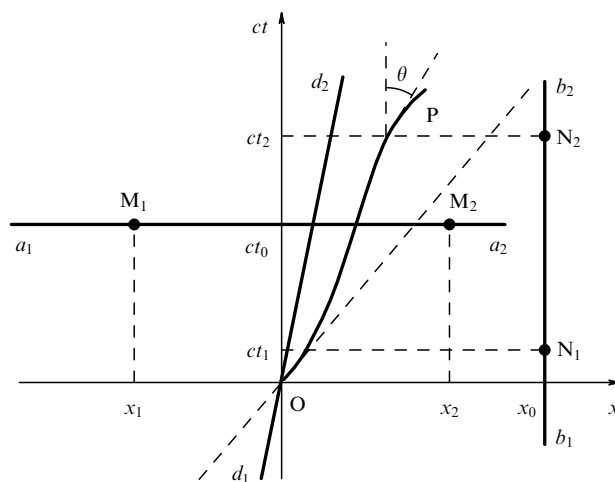


Рис. 7. Отображение движения частицы на плоскости Минковского.

по часам системы К, но в разных точках пространства, x_1 и x_2 . Ясно, что эти события связаны пространственно-подобным интервалом и поэтому между ними невозможны причинно-следственные отношения.

На оси ординат ($x = 0$) и всех возможных прямых $x = \text{const}$, параллельных ей (например, линии b_1b_2), отображены события, которые происходят в одной и той же точке пространства, но в разные моменты времени. Любые два события, которые отображаются точками, принадлежащими этим линиям, характеризуются одним и тем же значением координаты, но разными значениями времени (например, события N_1 и N_2 на прямой b_1b_2 произошли в одной и той же точке с координатой x_0 , но в разные моменты, t_1 и t_2). Ясно, что эти события связаны времениподобным интервалом и между ними возможны причинно-следственные отношения. Очевидно, что событие, которое произошло раньше, может быть причиной, а наступившее позднее — следствием.

На плоскости Минковского можно отображать не только события, но и движения частиц. Например, покоящиеся в различных точках x частицы отображаются прямыми $x = \text{const}$. Эти прямые называются мировыми линиями покоящихся частиц. Движение частицы с постоянной скоростью V отображается на этой плоскости прямой, угол наклона которой к оси ct не превышает 45° . Такие прямые называются мировыми линиями движущихся частиц. Например, если частица в момент $t = 0$ находилась в начале координат, то её мировая линия d_1d_2 расположена в областях "прошлое" и "будущее". Уравнение этой прямой определяется следующим выражением:

$$ct = \frac{x}{\beta}, \tag{43}$$

где $\beta = V/c$.

Если скорость V частицы переменна, то её мировая линия отображается некоторой кривой ОР с уравнением

$$ct = f(x). \tag{44}$$

Касательная к этой кривой в любой точке образует с осью ординат угол θ , для которого

$$\tan \theta = \beta. \tag{45}$$

Так как $V \leq c$, то $\theta \leq 45^\circ$.

10. Преобразования скоростей

Согласно СТО, при движении с релятивистскими скоростями не выполняется закон сложения скоростей, вытекающий из преобразований Галилея. Рассмотрим один из экспериментов, выполненный на ускорителе в ЦЕРН Т. Алвагером, Ф. Фарли, Д. Кжеллманом и И. Валлином [14] в 1964 г.

Для ускорения протонов использовалось переменное электрическое поле частотой $\nu = (9,53220 \pm 0,00005)$ МГц. Для того чтобы протоны ускорялись, они должны попадать на участок ускорения в фазе с электрическим полем. Поэтому сгустки протонов в кольце ускорителя должны следовать друг за другом с той же частотой. При заданной длине кольца соседние сгустки протонов находились на расстоянии $s = 31,45$ м (рис. 8). Длина l каждого сгустка равнялась примерно 1 м.

В результате взаимодействий ускоренных протонов с ядрами атомов мишени образуются различные вторич-

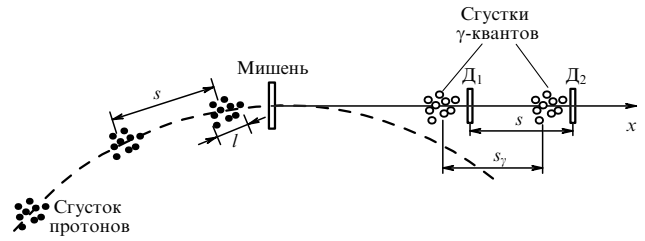


Рис. 8. Схема эксперимента, выполненного на ускорителе в ЦЕРН.

ные частицы, в том числе нейтральные пионы π^0 . Так как протоны попадали на мишень сгустками с частотой ν , то и нейтральные пионы рождались также сгустками с той же частотой. После рождения нейтральные пионы двигались со скоростью $V \sim c$ по касательной к окружности ускорителя в направлении детекторов D_1 и D_2 , отстоящих друг от друга на расстоянии, также равном $s = 31,45$ м, а все заряженные частицы с помощью магнитов отклонялись. Нейтральные пионы — нестабильные частицы со средним временем жизни $\tau = 0,83 \times 10^{-16}$ с — распадаются на два гамма-кванта на расстоянии $\lambda = \gamma V \tau \approx 1,1 \times 10^{-6}$ м ($\gamma \approx 45$), т.е. вблизи места своего рождения. В эксперименте отбирались такие гамма-кванты, которые летели в том же направлении, что и пионы, имевшие скорости $V > 0,99975c$ (лоренцевский фактор $\gamma > 45$). Таким образом, от сгустков нейтральных пионов, которые двигались со скоростью V в направлении оси x и следовали друг за другом с частотой ν , рождались следующие с той же частотой сгустки гамма-квантов, скорость которых относительно пионов равнялась скорости света.

Если преобразования Галилея верны, то скорость гамма-квантов относительно детекторов должна выражаться как

$$v_\gamma = V + c. \tag{46}$$

В этом случае два соседних сгустка гамма-квантов, которые будут находиться на расстоянии $s_\gamma = v_\gamma/\nu$ друг от друга, достигнут детекторов не одновременно, а с интервалом времени

$$\Delta t = \frac{s_\gamma - s}{v_\gamma} = \frac{1}{\nu} - \frac{c}{\nu v_\gamma} = \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{c}{v_\gamma} \right) = \frac{1}{\nu} \delta, \tag{47}$$

где $\delta = 1 - c/v_\gamma$. Эксперимент показал, что $\Delta t = -(0,005 \pm 0,013)$ нс, поэтому в пределах ошибки $\delta = -4,7 \times 10^{-5}$, а

$$v_\gamma = (2,9977 \pm 0,0004) \times 10^8 \text{ м с}^{-1}, \tag{48}$$

что совпадает со скоростью света.

Таким образом, необходимы, вместо формулы (46), новые законы преобразования скоростей. Их легко можно получить на основе преобразований Лоренца (1). Дифференциалы левых и правых частей этих преобразований имеют вид

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - V dt), \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right). \end{aligned} \tag{49}$$

Разделим левые и правые части первых трёх равенств (49) соответственно на левую и правую части последнего и учтём кинематические определения проекций скоростей в системах отсчёта K и K' . В результате получим искомые преобразования проекций скорости на координатные оси:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, & v'_y &= \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2} v_y, \\ v'_z &= \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2} v_z. \end{aligned} \quad (50)$$

Соотношения (50) известны как лоренцевские преобразования проекций скорости. В случае малых скоростей ($v \ll c$, $V \ll c$) они переходят в преобразования скоростей Галилея.

Разрешая (50) относительно v_x , v_y и v_z , можно получить обратные преобразования проекций скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, & v_y &= \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} v'_y, \\ v_z &= \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} v'_z. \end{aligned} \quad (51)$$

Применим найденные преобразования для определения скорости гамма-квантов в рассмотренном выше эксперименте. Так как нейтральные пионы движутся со скоростью $V = 0,99975c$, а гамма-кванты — со скоростью света $v'_x = c$, то первая из формул (51) в этом случае даёт

$$v_y = \frac{c + 0,99975c}{1 + c \cdot 0,99975c/c^2} = c, \quad (52)$$

что находится в полном соответствии с результатом измерений (48).

Релятивистские формулы преобразования скоростей (50) и (51) подтверждаются всеми без исключения экспериментами. В разделах 11–13 рассмотрим несколько важных примеров.

11. Ускорители на встречных пучках

Физический результат столкновения элементарных частиц зависит от величины их энергии в системе центра масс, в которой сумма релятивистских импульсов равна нулю. Чем выше эта энергия, тем богаче спектр новых явлений.

Рассмотрим столкновение двух одинаковых частиц, движущихся навстречу друг другу со скоростью v_0 , которой соответствует лоренцевский фактор γ_0 . В этом случае система центра масс покоится, а энергия каждой из частиц пропорциональна γ_0 . Столкновение этих частиц можно рассматривать также в системе отсчёта, связанной с одной из них. При этом весь спектр явлений остаётся прежним, однако лоренцевский фактор γ , соответствующий относительной скорости v сближения частиц, будет значительно больше γ_0 . В самом деле, полагая в (50) $v_x = v_0$, $V = -v_0$, для относительной скорости $v = v'_x$ получаем

$$v = \frac{2v_0}{1 + v_0^2/c^2}. \quad (53)$$

Релятивистский фактор γ выражается как

$$\gamma = 2\gamma_0^2 - 1. \quad (54)$$

Например, при $\gamma_0 = 10$ получим $\gamma \approx 200$, а при $\gamma_0 \approx 10^3$ фактор γ увеличивается в 2000 (!) раз. Отсюда следует исключительно важный вывод: для того чтобы получить тот же эффект, что и от соударения с неподвижной частицей (мишенью), гораздо выгоднее сталкивать частицы, движущиеся навстречу друг другу со скоростями, которым соответствуют сравнительно небольшие значения лоренцевского фактора γ_0 .

Такая идея реализована в ускорителях, в которых сталкиваются два встречных пучка частиц, движущихся с релятивистскими скоростями. Например, для достижения значения $\gamma \approx 10^6$ размеры обычного ускорителя (с неподвижной мишенью) могут превысить радиус Земли, что делает невозможным его строительство. Что касается ускорителей на встречных пучках, то их размеры (при заданной индукции магнитного поля) и, следовательно, стоимость будут в $\gamma/\gamma_0 = 2\gamma_0$ раз меньше. Ещё одним преимуществом таких ускорителей является симметрия пространственного разлёта вторичных частиц. Идея такого ускорителя впервые была высказана Г.А. Будкером, а один из первых ускорителей был построен под Новосибирском.

12. Струи частиц

При столкновении релятивистской частицы с неподвижной мишенью образуются новые частицы (вторичные), которые движутся внутри узкого конуса, ось которого ориентирована вдоль вектора скорости первичной частицы, а угол раствора зависит от лоренцевского фактора γ (чем больше γ , тем меньше угол). Вторичные частицы образуют так называемые струи, и при малом угле раствора конуса они практически не детектируются, так как находятся очень близко друг к другу. Отличить одну частицу от другой в этом случае становится трудно.

Столкновения частиц удобно рассматривать в системе центра масс (СЦМ), в которой вторичные частицы летят внутри конусов с большим углом раствора, так как $\gamma_0 < \gamma$. Поэтому на ускорителях со встречными пучками существенно облегчена проблема детектирования и распознавания вторичных частиц.

Направления движения частиц, образующих струи, можно рассчитать, пользуясь законом сложения скоростей. Пусть в системе K' (СЦМ) первичные частицы движутся навстречу друг другу вдоль оси x' и после столкновения одна из вторичных частиц приобретает скорость \mathbf{v}' , направленную под зенитным углом θ' к оси x' (рис. 9а).

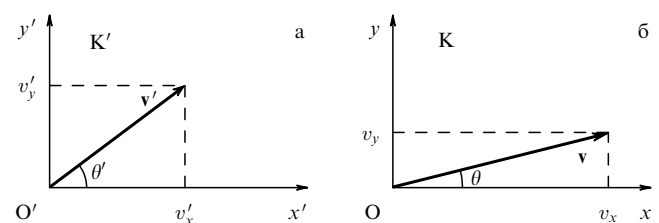


Рис. 9. Направления движения частиц, образующих струи, в разных системах отсчёта.

Проекции скорости этой вторичной части

$$v'_x = v' \cos \theta', \quad v'_y = v' \sin \theta'. \quad (55)$$

Система K' (СЦМ) движется относительно системы K , в которой одна из частиц неподвижна, с некоторой скоростью V . Проекция скорости вторичной частицы в системе K , в соответствии с законом сложения скоростей,

$$v_x = \frac{v' \cos \theta' + V}{1 + v'V \cos \theta' / c^2}, \quad v_y = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'V \cos \theta' / c^2} v' \sin \theta'. \quad (56)$$

Если эти проекции записать в виде

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad (57)$$

то для зенитного угла θ (рис. 9б) получим

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{\gamma} \frac{v' \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}, \quad (58)$$

где $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. Отсюда видно, что в ультрарелятивистском случае, когда $\gamma \rightarrow \infty$, зенитный угол $\theta \rightarrow 0$, вне зависимости от величины θ' . Таким образом, при больших значениях γ почти все вторичные частицы движутся внутри очень узкого конуса.

13. Аберрация света звёзд

Если звезда расположена под углом θ к оси x системы отсчёта K , то в другой системе отсчёта, K' , движущейся вдоль этой оси со скоростью V , угол окажется другим (рис. 10). Проекция вектора скорости световой волны в системе K (рис. 10а)

$$v_x = -c \cos \theta, \quad v_y = -c \sin \theta. \quad (59)$$

В системе K' , согласно формулам преобразования проекций скорости, имеем

$$v'_x = \frac{-c \cos \theta - V}{1 + V \cos \theta / c}, \quad v'_y = -\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V \cos \theta / c} c \sin \theta. \quad (60)$$

Попутно отметим, что $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v' = c$. Так как, согласно рис. 10б,

$$v'_x = -c \cos \theta', \quad v'_y = -c \sin \theta', \quad (61)$$

для искомого угла θ' можем записать

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{\sin \theta}{\gamma(V/c + \cos \theta)}. \quad (62)$$

При ультрарелятивистских скоростях, когда $\gamma \rightarrow \infty$, звезда, вне зависимости от её положения, будет казаться расположенной под очень малым углом к направлению движения системы отсчёта K' .

Если ввести угол $\delta' = \pi/2 - \theta'$, который используется в астрономии для характеристики аберраций света звёзд, то из (62) для звезды, находящейся в зените ($\theta = \pi/2$), получим формулу

$$\sin \delta' = \frac{V}{c}, \quad (63)$$

которая при релятивистских скоростях существенно отличается от классической формулы

$$\tan \delta' = \frac{V}{c}. \quad (64)$$

Отметим, что рассматриваемое явление связано с изменением направления прихода световой волны, распространяющейся от далёкой звезды. Рассмотрим, как ориентирован фронт волны в различных системах отсчёта.

Пусть, для простоты, в системе отсчёта K звезда находится в зените ($\theta = \pi/2$). Тогда плоский фронт $a_1 a_2$ достигнет точек O и P на оси x одновременно (рис. 11а). Наблюдатель фиксирует (визуально или с помощью оптического прибора) положение звезды по направлению движения волны, перпендикулярному к её фронту.

В системе отсчёта K' (рис. 11б) свет в точку O' придёт позднее, чем в точку P' . Если длина отрезка $OP = L$, то, в соответствии с формулой преобразования времени (1), такое запаздывание составит

$$\Delta t' = \gamma \frac{V}{c^2} L. \quad (65)$$

Наблюдатель в системе отсчёта K' обнаружит, что нормаль к фронту волны наклонена под углом δ' к оси y' . За время $\Delta t'$ свет пройдёт расстояние $M'O' = c\Delta t'$. Расстояние между точками O' и P' в системе K' , согласно преобразованиям Лоренца для координат, $L' = \gamma L$. Отсюда

$$\sin \delta' = \frac{O'M'}{O'P'} = \frac{c\Delta t'}{L'} = \frac{V}{c}, \quad (66)$$

что совпадает с (63).

14. Преобразования ускорений

В случае преобразований Галилея при переходе от одной ИСО к другой ускорение является инвариантной величи-

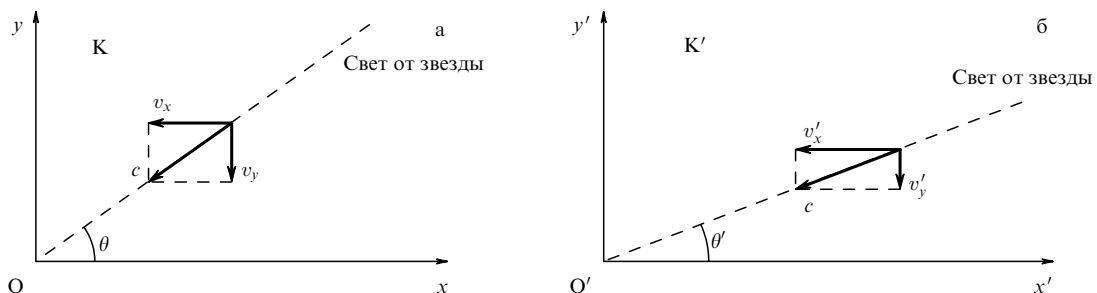


Рис. 10. Направления распространения светового луча от находящейся в зените звезды в разных системах отсчёта.

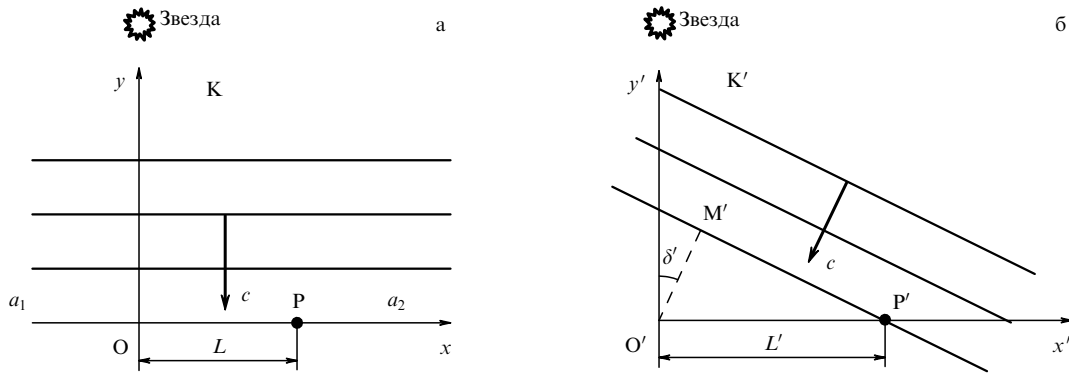


Рис. 11. Положение плоского волнового фронта световой волны, распространяющейся от находящейся в зените звезды, в разных системах отсчёта.

ной. Очевидно, что при движении с релятивистской скоростью проекции ускорения a_x , a_y , a_z не могут оставаться постоянными в различных инерциальных системах отсчёта, поскольку ни дифференциалы проекций скорости, ни дифференциал времени dt не являются инвариантами преобразований Лоренца. Из формул (51) находятся дифференциалы проекций скорости:

$$\begin{aligned} dv_x &= \frac{dv'_x}{\gamma^2(1+v'_x V/c^2)^2}, \\ dv_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{dv'_y}{1+v'_x V/c^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y V/c^2}{(1+v'_x V/c^2)^2} dv'_x, \\ dv_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{dv'_z}{1+v'_x V/c^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z V/c^2}{(1+v'_x V/c^2)^2} dv'_x \end{aligned} \quad (67)$$

и дифференциалы времени

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right). \quad (68)$$

Если поделить левые и правые части трёх равенств (67) соответственно на левую и правую части (68), то получим следующие преобразования проекций ускорения:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^3(1+v'_x V/c^2)^3}, \\ a_y &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{a'_y}{(1+v'_x V/c^2)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{v'_y(V/c^2) a'_x}{(1+v'_x V/c^2)^3}, \\ a_z &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{a'_z}{(1+v'_x V/c^2)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{v'_z(V/c^2) a'_x}{(1+v'_x V/c^2)^3}. \end{aligned} \quad (69)$$

Неинвариантность ускорения легко проиллюстрировать с помощью (69) на простом примере. Если частица в системе K' движется в направлении, перпендикулярном оси x' , равномерно и прямолинейно ($v'_y \neq 0$, $v'_z \neq 0$, $a'_y = 0$, $a'_z = 0$), а вдоль оси x' — с ускорением a'_x , то в системе K она обладает отличными от нуля ускорениями a_y и a_z .

15. Сопутствующая система отсчёта

Введём важное понятие сопутствующей инерциальной системы отсчёта K'_c , движущейся вдоль оси x лабораторной системы K . Её скорость V определяется условием обращения в нуль проекции скорости ($v'_x = 0$).

В случае ускоренного движения частицы вдоль оси x скорость V соответствующей сопутствующей системы K'_c в разные моменты времени должна быть различна:

$$V = v_x, \quad (70)$$

так как скорость v_x переменна. Особо подчеркнём, что система K'_c является инерциальной системой отсчёта и должна двигаться с постоянной скоростью, $V = \text{const}$. Выполнение условия (70) возможно только для набора систем отсчёта K'_c , движущихся с разными скоростями, и в каждый момент времени t необходимо использовать одну из систем, для которой в этот момент $V = v_x$.

С учётом $v'_x = 0$ проекции ускорения в системе K и системе K'_c , движущейся в данный момент со скоростью V , связаны более простыми соотношениями:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}, \quad a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2} - v'_y \frac{V}{c^2} \frac{a'_x}{\gamma^2}, \quad a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2} - v'_z \frac{V}{c^2} \frac{a'_x}{\gamma^2}. \quad (71)$$

Напомним, что в формулах (71) скорость V системы отсчёта K'_c определяется из условия (70).

Если в сопутствующей системе K'_c скорость и ускорение частицы направлены вдоль оси x' ($v'_y = v'_z = 0$, $a'_y = a'_z = 0$), то в лабораторной системе отлична от нуля лишь проекция a_x :

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}. \quad (72)$$

В качестве примера рассмотрим движение элементарной частицы в постоянном электрическом поле E , направленном вдоль оси x . Под действием поля скорость частицы в системе K возрастает, однако движение не будет равноускоренным. Действительно, в сопутствующей системе отсчёта на частицу с зарядом q действует сила $f = qE$, так как напряжённость поля вдоль оси x одинакова во всех ИСО. В этой системе ($v'_x = 0$) для определения ускорения можно воспользоваться классическим уравнением движения

$$a'_x = a_0 = \frac{qE}{m} = \text{const}. \quad (73)$$

Возвращаясь к формуле (72), отмечаем, что с возрастанием γ ускорение $a_x \rightarrow 0$, хотя сила $f = \text{const}$. Из (72) при учёте (73) легко получается зависимость от времени скорости v_x и закон движения $x(t)$ частицы. Действитель-

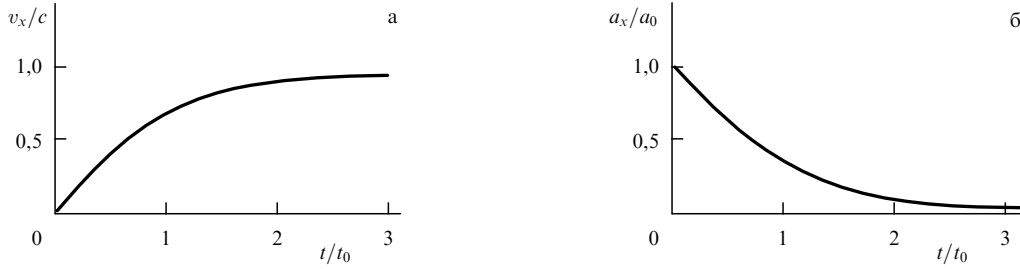


Рис. 12. Зависимости скорости и ускорения релятивистской частицы при воздействии на неё постоянной силы.

но, перепишем (72) в виде

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a_0 \left[1 - \left(\frac{v_x}{c} \right)^2 \right]^{3/2}, \tag{74}$$

где учтено равенство (70). Разделяя переменные v_x и t , получим

$$\frac{dv_x}{[1 - (v_x/c)^2]^{3/2}} = a_0 dt. \tag{75}$$

Если принять, что в момент $t = 0$ скорость $v_x = 0$, то интегрирование (75) приведёт к соотношению

$$\frac{v_x}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}} = a_0 t. \tag{76}$$

Выражая отсюда v_x , получим закон возрастания скорости v_x :

$$v_x = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}} = \frac{ct/t_0}{\sqrt{1 + (t/t_0)^2}}, \tag{77}$$

где $t_0 = c/a_0$ — характерный масштаб времени. После подстановки (77) в (74) имеем

$$a_x = a_0 \frac{1}{[1 + (t/t_0)^2]^{3/2}}. \tag{78}$$

Зависимости (77) и (78) показаны на рис. 12. Видно, что ускорение частицы монотонно уменьшается, а её скорость асимптотически стремится к предельному значению, равному c . Отметим, что в механике Ньютона $a_x = a_0$ и скорость частицы неограниченно увеличивалась бы и уже за время t_0 достигла бы значения скорости света.

Практический интерес представляет время t_β , за которое частица разгоняется до заданной относительной скорости $\beta = v_x/c$. Из (77) следует, что

$$t_\beta = \beta \gamma t_0. \tag{79}$$

Поскольку $\beta \approx 1$, время t_β в γ раз превышает характерное время t_0 . Например, в международном проекте TESLA (TeV-Energy Superconducting Linear Accelerator) предусматривается ускорение электронов до скорости, при которой лоренцевский фактор достигает значения $\gamma = 10^6$ при $a_0 = 3 \times 10^{18}$ м с⁻². Поскольку при таких условиях $t_0 \approx 10^{-10}$ с, время t_β составит $\approx 10^{-4}$ с.

Интегрируя (77), получим закон движения

$$x = \int_0^t v_x dt = ct_0 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{t}{t_0} \right)^2} - 1 \right), \tag{80}$$

где учтено, что $x = 0$ при $t = 0$. Как нетрудно увидеть, при $t \ll t_0$

$$x = \frac{ct^2}{2t_0} = \frac{a_0 t^2}{2}, \tag{81}$$

что совпадает с классическим законом равноускоренного движения. Однако при $t \gg t_0$ координата x возрастает со временем примерно линейно. Асимптотой закона движения является прямая (рис. 13), уравнение которой имеет вид

$$x = c(t - t_0). \tag{82}$$

За время t_β , как следует из (79) и (80), частица пройдёт расстояние

$$x_\beta = ct_0(\gamma - 1). \tag{83}$$

В частности, за $t \approx 10^{-4}$ с для достижения значения $\gamma = 10^6$ электрон преодолет расстояние $x_\beta \approx 30$ км. Естественно, строительство линейного ускорителя такой длины требует огромных затрат, поэтому проект TESLA является международным.

Найдём зависимость собственного времени τ (определённого по часам, связанным с частицей) от времени t в лабораторной системе отсчёта. С учётом (77) эта зависимость имеет вид

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \beta^2} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + (t/t_0)^2}} = t_0 \operatorname{arsinh} \frac{t}{t_0}. \tag{84}$$

При больших временах движения, $t \gg t_0$,

$$\tau = t_0 \ln \frac{2t}{t_0}. \tag{85}$$

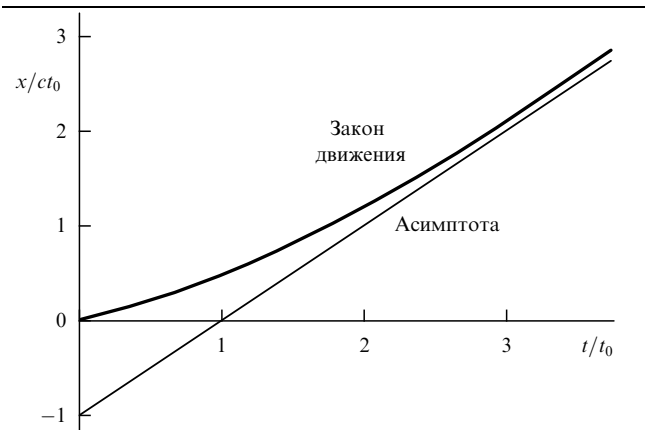


Рис. 13. Закон движения релятивистской частицы при воздействии на неё постоянной силы.

Здесь использовано известное представление обратной функции гиперболического синуса

$$\operatorname{arsinh} \zeta = \ln \left(\zeta + \sqrt{1 + \zeta^2} \right).$$

Для электронов в рассмотренном выше процессе их ускорения при $t \approx 10^{-4}$ с величина $\tau \approx 1,45 \times 10^{-9}$ с, т.е. на пять порядков меньше.

Огромный эффект замедления времени позволяет в принципе ускорять и нестабильные частицы. Например, для мюонов, которые примерно в 200 раз тяжелее электронов, характерное время t_0 также будет в 200 раз больше: $t_0 \approx 2 \times 10^{-8}$ с. Для достижения значения $\gamma \approx 10^6$ за время ускорения $t_\beta \approx 2 \times 10^{-2}$ с мюоны пройдут путь $x_\beta \approx 6000$ км. Согласно (85), собственное время составит

$$\tau_\beta = t_0 \ln \left(\frac{2t_\beta}{t_0} \right) \approx 3 \times 10^{-7} \text{ с}, \quad (86)$$

т.е. окажется на порядок меньшим собственного времени жизни мюонов. Ускоритель в этом случае необходимо делать кольцевым.

16. Парадокс близнецов

Пусть имеются два брата-близнеца, один из которых совершил космический полёт с Земли на далёкую планету и возвратился обратно. С точки зрения брата-домоседа, из-за лоренцевского сокращения времени, обусловленного движением ракеты, вернувшийся брат-космонавт будет моложе его.

Однако, если рассуждать подобным образом, то брат-космонавт вправе ожидать замедления старения брата-домоседа, поскольку последний вначале "улетал" вместе с Землёй, а затем вернулся к ракете. В этом и состоит парадокс близнецов, который возникает из-за неправильного применения принципа относительности.

Действительно, брат-домосед находится в одной и той же ИСО, связанной с Землёй. Напротив, система отсчёта, связанная с ракетой, на участках разгона и торможения является неинерциальной (НИСО), а на участках равномерного движения к далёкой планете и обратно к Земле необходимо говорить о двух разных ИСО, движущихся в противоположных направлениях со скоростью ракеты.

На рисунке 14а на плоскости Минковского изображена мировая линия ракеты (МЛР), движущейся со скоростью $V \sim c$ к планете, удалённой от Земли на расстояние L_0 . На участках ускорения и торможения, которые по продолжительности могут быть малыми по сравнению с временем равномерного движения, мировая линия искривлена. Мировая линия Земли (МЛЗ) совпадает с осью ординат. Штриховой прямой отмечена световая линия, совпадающая с биссектрисой прямого угла между осями координат.

Проведём простейший расчёт продолжительности полёта, воспользовавшись формулой Лоренца преобразования времени:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right). \quad (87)$$

Пренебрежём временем (по земным часам), затраченным на разгон и торможение ракеты, и мировую линию ракеты изобразим в виде двух прямых, ОА и АР (рис. 14б). Очевидно, что продолжительность полёта t_0 по земным часам составит

$$t_0 = \frac{2L_0}{V}. \quad (88)$$

Часы на возвратившейся ракете покажут меньшее время:

$$t'_0 = \frac{t_0}{\gamma}. \quad (89)$$

Таким образом, брат-космонавт постареет меньше. Для него в этой уменьшенной величине времени нет ничего удивительного, так как вследствие лоренцевского сокращения длины Земля за время t'_0 "пролетела" со скоростью V расстояние $2L' = 2L_0/\gamma$. Однако он может сделать неверный вывод относительно времени t_0 , если будет считать, что время \tilde{t}_0 на Земле, которое из-за её движения замедлилось по сравнению с t'_0 в γ раз, представляет собой полное время:

$$\tilde{t}_0 = \frac{t'_0}{\gamma} = \frac{t_0}{\gamma^2}. \quad (90)$$

Ошибка вывода космонавта состоит в том, что \tilde{t}_0 — это только малая часть времени, прошедшего на Земле за время его полёта. Когда космонавт подлетает к планете и

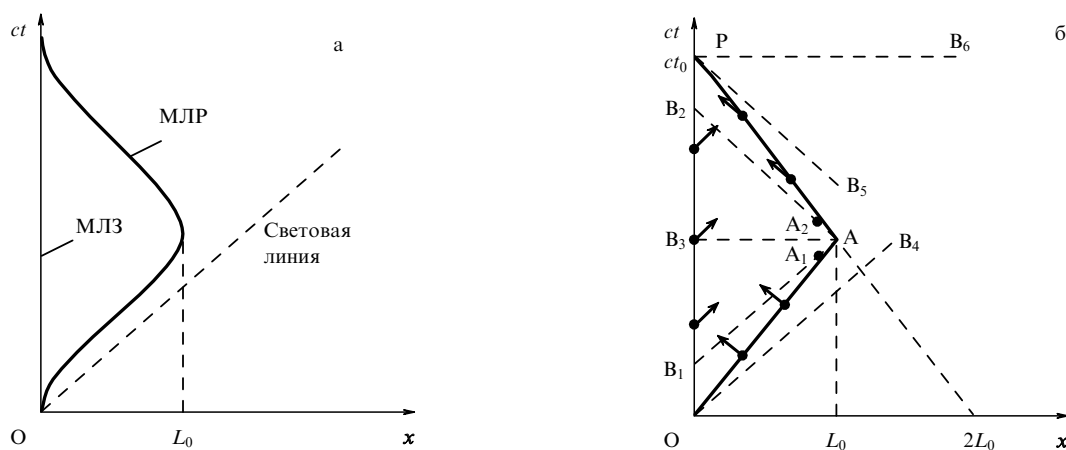


Рис. 14. Иллюстрация парадокса близнецов на плоскости Минковского.

находится в системе K'_1 , удаляющейся от Земли, линией одновременности будет AB_1 , а когда начнёт возвращаться на Землю и окажется в системе K'_2 , приближающейся к Земле, — линия AB_2 . Время $\tilde{t}_0 = (OB_1 + B_2P)/c$. Таким образом, космонавт не учёл промежутка времени B_1B_2/c .

Для оценки этого промежутка времени воспользуемся формулой (87), в которой положим $t'_{A_1} = t'_0/2$. В этот момент ракета находится в точке A_1 , сколь угодно близкой к точке поворота A . В наших рассуждениях точка A_1 используется для того, чтобы отразить факт нахождения ракеты ещё в системе отсчёта K'_1 , удаляющейся от Земли. Тогда из (87) получается уравнение прямой B_1A_1 :

$$ct = \frac{ct'_0}{2\gamma} + \frac{Vx}{c}. \quad (91)$$

Все события на этой прямой происходят одновременно в момент $t' = t'_0/2$ (с точки зрения космонавта). Очевидно, что показания часов в ИСО, связанной с Землёй, для этих событий будут разными. Например, для события B_1 земные часы покажут время

$$t_{B_1} = \frac{OB_1}{c} = \frac{t'_0}{2\gamma} = \frac{1}{2} \tilde{t}_0 = \frac{1}{2} \frac{t_0}{\gamma^2}, \quad (92)$$

которое получается из (91) при $x = 0$, а для события A_1 ($x \approx L_0$) земные часы покажут время $t_{A_1} = t_0/2$.

После пересадки в другую систему отсчёта K'_2 по часам космонавта $t'_{A_2} \approx t'_{A_1}$. Одновременно с событием A_2 в этой системе будут происходить события, лежащие на штриховой прямой B_2A_2 . В ИСО, связанной с Землёй, часы покажут для этих событий разное время. В частности, для события B_2 земное время

$$t_{B_2} = \frac{OB_2}{c}. \quad (93)$$

Для того чтобы вычислить это время, получим уравнение для линии одновременности B_2A_2 .

Из соображений симметрии очевидно, что в момент $t = t' = 0$ начало отсчёта системы K'_2 находилось на расстоянии $x = 2L_0$ от точки O (Земли). Поэтому в (87) вместо координаты x должна входить величина $x - 2L_0$. Напомним также, что скорость V системы K'_2 направлена к Земле. Тогда

$$t' = \gamma \left[t + \frac{V}{c^2} (x - 2L_0) \right]. \quad (94)$$

Из (94) для линии одновременности B_2A_2 получим (опять принимаем $t' = t'_0/2 = t_0/2\gamma$):

$$ct = \frac{ct_0}{2\gamma^2} - \frac{V}{c} (x - 2L_0). \quad (95)$$

В частности, для события A_2 , бесконечно близкого к A ($x \approx L_0$), из (95) находим $t_{A_2} = t_0/2$, а для события B_2 ($x = 0$)

$$t_{B_2} = \frac{t_0}{2\gamma^2} + 2 \frac{V}{c^2} L_0 = t_0 - \frac{t_0}{2\gamma^2}. \quad (96)$$

Таким образом, для упомянутого выше времени B_1B_2/c получим

$$\frac{B_1B_2}{c} = t_{B_2} - t_{B_1} = t_0 - \frac{t_0}{\gamma^2}. \quad (97)$$

Если к (90) прибавить это время, то будем иметь

$$t = \frac{t_0}{\gamma^2} + t_0 - \frac{t_0}{\gamma^2} = t_0, \quad (98)$$

что, конечно, не вызовет никаких возражений со стороны землян.

Отметим особенности течения времени при стартах с Земли и планеты и двух посадках. При старте с Земли ракета ускоряется в течение малого промежутка времени $\delta t \ll t_0$, и к окончанию разгона ракеты для космонавта часы на Земле и планете в ИСО Земли будут рассинхронизованы (часы на планете покажут большее время) на величину

$$\Delta t = \frac{VL_0}{c^2} = \beta^2 \frac{t_0}{2}. \quad (99)$$

Поэтому при подлёте к планете в момент $t_0/2$ (по часам на планете) часы на Земле покажут время

$$\frac{t_0}{2} - \Delta t = \frac{t_0}{2\gamma^2} = t_{B_1}. \quad (100)$$

За время разгона линия одновременности, вначале совпадающая с осью x , повернётся и займёт положение OB_4 (рис. 146), а за время полёта переместится параллельно самой себе в положение B_1A . При посадке на планету за время $\delta t \ll t_0$ конец линии одновременности AB_1 (точка B_1) начнёт перемещаться вверх (несинхронность уменьшится), и в момент остановки ракеты линия одновременности AB_3 будет параллельна оси x . Это означает, что часы на Земле и на планете покажут одинаковое время, равное $t_0/2$ (тогда как часы космонавта покажут время $t_0/2\gamma$).

При старте ракеты с планеты опять возникнет несинхронность, однако показания земных часов уже будут больше на величину (99), при этом за время старта δt линия одновременности переместится из положения AB_3 в положение AB_2 . За время полёта к Земле эта линия перейдёт параллельно самой себе в положение PB_5 . При посадке на Землю за время δt линия одновременности повернётся, заняв положение PB_6 , и опять станет параллельной оси абсцисс. Часы на Земле и планете зафиксируют одинаковое время полёта, равное t_0 , а часы космонавта покажут время t_0/γ . Таким образом, большая часть времени, прошедшего на Земле за время полёта, с точки зрения космонавта, приходится на время ускоренного движения ракеты (два старта и две посадки).

Ещё раз отметим, что оба близнеца (и на Земле, и на ракете) будут ощущать естественный (равномерный) темп хода времени.

Интересно проследить, как путешественник будет воспринимать радиосигналы, посылаемые с Земли через одинаковые промежутки времени по земным часам, и как на Земле будут восприниматься аналогичные сигналы с ракеты. Из рисунка 146, на котором посылаемые радиосигналы отмечены стрелками, видно, что на пути к планете путешественник регистрирует лишь небольшую долю всех посланных ему сигналов, а на обратном пути — гораздо большую их часть. На Земле сигналы с ракеты будут восприниматься через очень большие промежутки времени практически в течение всего путешествия и только в период очень небольшого заключительного этапа — через малые.

Разумеется, даже неуклюжий читатель понимает, что в действительности такой эксперимент осуществить

невозможно. Во-первых, для достижения таких скоростей ракеты требуется затратить огромную энергию, которую невозможно "запастись" на её борту. Во-вторых, для того чтобы получить такие скорости за время, соизмеримое с продолжительностью жизни человека, требуется создать настолько большие ускорения, что перегрузки намного превысят предельный уровень, совместимый с жизнью. И наконец, полёт с субсветовой скоростью несовместим с возможностями радиационной защиты в связи с наличием межзвёздного газа (водород и намного более тяжёлые ионы).

17. Заключение

Представленный в настоящих заметках подход, разумеется, не претендует на статус однозначного и всеобъемлющего — он может рассматриваться как один из вариантов при изложении основ СТО. Если следовать основному дидактическому принципу — стремлению к максимальной доступности и наглядности, то это в достаточной мере, как представляется, обеспечивается описанием реальных экспериментов, результаты которых имеют ясное физическое содержание и обладают несомненной достоверностью.

В настоящей статье преднамеренно сведено к минимуму рассмотрение "световых" экспериментов, подтверждающих справедливость СТО. Это позволяет избежать спекуляций относительно существования эфира и эфирного ветра и "сенсационных" сообщений об изме-

ренных значениях скорости света, превышающей общепринятое.

Автор считает приятным долгом выразить признательность своим коллегам Л.Г. Деденко и В.А. Караваеву за плодотворные дискуссии при написании данной статьи.

Список литературы

1. Taylor E F, Wheeler J A *Spacetime Physics* (San Francisco: W. H. Freeman, 1966) [Тейлор Э, Уилер Дж *Физика пространства-времени* (М.: Мир, 1971)]
2. Окунь Л Б *УФН* **158** 511 (1989) [Okun' L B *Sov. Phys. Usp.* **32** 629 (1989)]
3. Алешкевич В А, Деденко Л Г, Караваев В А *Механика* (Под ред. В А Алешкевича) (М.: Физматлит, 2011)
4. Александров Е Б и др. *Письма в ЖЭТФ* **94** 374 (2011) [Aleksandrov E B et al. *JETP Lett.* **94** 344 (2011)]
5. Александров Е Б и др. *УФН* **181** 1345 (2011) [Aleksandrov E B et al. *Phys. Usp.* **54** 1272 (2011)]
6. Poincare H "La mesure du temps" *Rev. Métaphys. Morale* **6** 1 (1898) [Пуанкаре А *Избранные труды* Т. 3 (М.: Наука, 1974) с. 419]
7. Einstein A "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" *Ann. Physik* **322** 891 (1905)
8. Bailey J et al. *Nature* **268** 301 (1977)
9. Rossi B, Hall D B *Phys. Rev.* **59** 223 (1941)
10. Hafele J C, Keating R E *Science* **177** 166 (1972)
11. Alley C O, in *Quantum Optics, Experimental Gravity, and Measurement Theory* (Eds P Meystre, M O Scully) (New York: Plenum Press, 1983) p. 363
12. Vessot R F C, Levine M W *Gen. Relat. Grav.* **10** 181 (1979)
13. Pound R V, Rebka G A (Jr.) *Phys. Rev. Lett.* **4** 337 (1960)
14. Alväger T et al. *Phys. Lett.* **12** 260 (1964)

On special relativity teaching using modern experimental data

V.A. Aleshkevich

Department of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Vorob'evy gory, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: victoraleshevich@rambler.ru

A new methodological approach to the study of relativistic space-time properties is proposed based on the 20th century's vast experimental research on relativistic accelerator and cosmic ray particles. This approach vividly demonstrates that relativistic effects are the manifestation of the fundamental space-time properties and refutes the false notion that relativity is only of relevance to light phenomena.

PACS numbers: 01.40.gb, **01.65. + g**, **03.30. + p**

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201212c.1301

Bibliography — 14 references

Received 23 January 2012, revised 16 February 2012

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (12) 1301–1318 (2012)

Physics – Uspekhi **55** (12) (2012)