*Ноябрь 2012 г.* *Том 182, № 11*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

# В стохастических динамических системах могут образовываться пространственные структуры, благодаря событиям, происходящим с вероятностью, стремящейся к нулю

(Комментарий к статье Г.Р. Иваницкого "XXI век: что такое жизнь с точки зрения физики" [*УФН* **180** 337 2010])

В.И. Кляцкин

*Цель этого письма — кратко, в концентрированном виде, обратить внимание на то, что, наряду с многочисленными вероятностными моделями (включая широко используемые в настоящее время модели случайных графов и цепей), имеется прямой универсальный путь к описанию возникновения с вероятностью единица стохастических структур в случайных средах (в "хаосе"), т.е. почти во всех реализациях случайных полей. При этом описание проводится на математическом уровне, доступном студентам младших курсов. Таким образом, можно заключить, что явление кластеризации в "хаосе" является общим (а не только физическим) явлением, присущим природе (разумеется, при определённых условиях).*

PACS numbers: **05.45.–a**, **05.65.+b**, 87.23.Kg DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211k.1235

В стохастических, параметрически возбуждаемых динамических системах, описываемых уравнениями в частных производных, *в отдельных реализациях случайных полей* могут происходить такие стохастические нестационарные явления, как перемешивание и *кластеризация* в фазовом и физическом пространствах. Кластеризация какого-либо поля — это возникновение компактных областей с большими величинами данного поля на фоне окружающих областей с относительно низкими их значениями.

Само физическое явление структурообразования в таких системах хорошо известно в физике. Так, например, имеют место *динамическая локализация Андерсона* собственных функций одномерного стационарного уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом и соответственно *динамическая локализация* интенсивности волн в краевой задаче о волнах в случайных слоистых средах (стохастическое уравнение Гельмгольца). Это явление тесно связано с вопросом о перемежаемости случайных процессов.

Перемежаемость случайных процессов — это более или менее "равномерное" чередование выбросов процесса как в сторону бóльших, так и меньших значений этого процесса относительно некой детерминированной кривой (вне зависимости от величин этих выбросов), характеризующей динамику отдельных реализаций в целом на всём интервале эволюции. Эта кривая, называемая кривой типичной реализации $f^*(t)$, для любого случайного процесса $f(t)$ обладает следующими свойствами (см., например, обзорную работу [1] и монографии [2, 3]).

С одной стороны, для любого фиксированного момента времени $t$ для вероятностей справедливо:

$$P\{f(t) > f^*(t)\} = P\{f(t) < f^*(t)\} = \frac{1}{2}\,.$$

С другой стороны, имеется специфическое свойство кривой $f^*(t)$, заключающееся в том, что для любого интервала $(t_1, t_2)$ случайный процесс $f(t)$ "*обвивает*" кривую $f^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течение которого справедливо неравенство $f(t) > f^*(t)$, совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство $f(t) < f^*(t)$, т.е.

$$\left\langle T_{f(t)>f^*(t)} \right\rangle = \left\langle T_{f(t)<f^*(t)} \right\rangle = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\,.$$

В случае гауссового случайного процесса $u(t)$ кривая типичной реализации совпадает со средним значением процесса $u^*(t) = \langle u(t) \rangle$.

Для параметрически возбуждаемых процессов характерно существование больших, но редких выбросов, обусловленных пологими "хвостами" соответствующих распределений вероятностей. Для таких процессов вся

**В.И. Кляцкин.** Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, 119017 Москва, Российская Федерация
E-mail: klyatskin@yandex.ru

*Статья поступила 10 июня 2011 г., после доработки 9 апреля 2012 г.*

статистика обусловлена этими большими выбросами. И для простейшей модели параметрически возбуждаемого положительного логнормального случайного процесса $f(t)$ кривая типичной реализации совпадает со статистической ляпуновской экспонентой $f^*(t) = \exp(\langle f(t) \rangle) = f(0) \exp(-\alpha t)$, где параметр $\alpha = -\lim_{t\to\infty} \partial \langle \ln f(t) \rangle / \partial t$ — статистический ляпуновский характеристический индекс. При этом индекс может быть как положительным или отрицательным, так и обращаться в нуль (критический случай). Для $\alpha > 0$ поведение отдельных реализаций случайного процесса соответствует экспоненциальному убыванию, а для $\alpha < 0$ — возрастанию во времени. При $\alpha = 0$ перемежаемость осуществляется относительно прямой $f^*(t) = f(0)$. Отмечу, что для одномерных задач положительность индекса $\alpha$ соответствует физическому явлению динамической локализации.

Далее, в задачах *турбулентного переноса*, описываемых уравнениями в частных производных, в ряде случаев может происходить *кластеризация как пассивной скалярной примеси* (поля плотности), так и *векторной примеси* (энергии магнитного поля). Стохастическое структурообразование может осуществляться и в виде *каустической структуры* интенсивности волнового поля в задачах о волнах в случайно-неоднородных средах в рамках стохастического параболического уравнения Леонтовича (нестационарное уравнение Шрёдингера со случайным потенциалом). Все эти стохастические структурообразования происходят (при определённых условиях) с вероятностью единица, т.е. почти в каждой её реализации (см., например, [1–3]).

Разумеется, для любого случайного поля $f(\mathbf{r}, t)$ также всегда имеется свойство перемежаемости. Прежде всего для любой фиксированной пространственной точки $\mathbf{r}$ эволюция во времени $f(\mathbf{r}, t)$ — случайный процесс, для которого справедливо всё вышесказанное. Для статистически однородной задачи все одноточечные статистические характеристики поля $f(\mathbf{r}, t)$ не зависят от точки $\mathbf{r}$ и положительность индекса $\alpha = -\lim_{t\to\infty} \partial \langle \ln f(\mathbf{r}, t) \rangle / \partial t$ для логнормального поля $f(\mathbf{r}, t)$ означает, что в любой точке пространства реализации этого поля убывают во времени, несмотря на то что для логнормального процесса имеются большие редкие выбросы. При этом характерное время убывания поля $t \sim 1/\alpha$. Однако если это поле почти везде убывает, то где-то оно должно и концентрироваться, т.е. должна иметь место кластеризация.

Обнаружить и описать явление пространственного структурообразования (кластеризацию) в отдельных реализациях случайных полей удаётся только с помощью анализа одновременных и одноточечных плотностей вероятностей решений соответствующих уравнений на основе идей статистической топографии.

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трёхмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством $f(\mathbf{R}, t) = f = \mathrm{const}$.

Для анализа системы контуров (для простоты и наглядности изложения ограничимся двумерным случаем, $\mathbf{R} = \{x, y\}$) удобно ввести сосредоточенную на этих контурах дельта-функцию Дирака $\varphi(\mathbf{R}, t; f) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f)$, называемую *индикаторной функцией*.

Через эту функцию выражаются, например, такие величины, как общая площадь, ограниченная линиями уровня областей, в которых случайное поле $f(\mathbf{R}, t)$ превышает заданный уровень $f$, т.е. $f(\mathbf{R}, t) > f$:

$$S(t; f) = \int \theta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\, \mathrm{d}\mathbf{R} = \int_f^\infty \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}\mathbf{R}\, \varphi(\mathbf{R}, t; f')\,.$$

Общая "масса" поля, заключённая в этих областях,

$$M(t; f) = \int f(\mathbf{R}, t)\, \theta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\, \mathrm{d}\mathbf{R} = \int_f^\infty f'\, \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}\mathbf{R}\, \varphi(\mathbf{R}, t; f')\,,$$

где $\theta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)$ — функция Хевисайда. Среднее значение индикаторной функции по ансамблю реализаций случайного поля $f(\mathbf{R}, t)$ определяет одновременну́ю во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей $P(\mathbf{R}, t; f) = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle$. Следовательно, средние по ансамблю реализаций значения величин $S(t; f)$ и $M(t; f)$ определяются непосредственно этой плотностью вероятностей:

$$\big\langle S(t; f) \big\rangle = \int_f^\infty \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}\mathbf{R}\, P(\mathbf{R}, t; f')\,,$$

$$\big\langle M(t; f) \big\rangle = \int_f^\infty f'\, \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}\mathbf{R}\, P(\mathbf{R}, t; f')\,.$$

Ясно, что для *положительного поля* $f(\mathbf{R}, t)$ в общем случае условием её кластеризации с вероятностью единица, т.е. почти для всех её реализаций, является тенденция одновременного выполнения асимптотических равенств при $t \to \infty$:

$$\big\langle S(t; f) \big\rangle \to 0\,, \qquad \big\langle M(t; f) \big\rangle \to \int \mathrm{d}\mathbf{R}\, \big\langle f(\mathbf{R}, t) \big\rangle\,.$$

Отсутствию структурообразования соответствует тенденция одновременного выполнения асимптотических равенств при $t \to \infty$:

$$\big\langle S(t; f) \big\rangle \to \infty\,, \quad \big\langle M(t; f) \big\rangle \to \int \mathrm{d}\mathbf{R}\, \big\langle f(\mathbf{R}, t) \big\rangle\,.$$

Для пространственно однородного поля $f(\mathbf{R}, t)$, когда одноточечная плотность вероятностей $P(\mathbf{R}, t; f)$ не зависит от $\mathbf{R}$, статистические средние всех выражений (без интегрирования по $\mathbf{R}$) будут описывать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин. Так, например, удельная средняя площадь $\big\langle S_{\mathrm{hom}}(t; f) \big\rangle$, на которой случайное поле $f(\mathbf{R}, t)$ превышает заданный уровень $f$, совпадает с вероятностью события в любой точке пространства $f(\mathbf{R}, t) > f$, т.е.

$$\big\langle S_{\mathrm{hom}}(t; f) \big\rangle = \big\langle \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) \big\rangle = P\big\{ f(\mathbf{R}, t) > f \big\}\,,$$

и, таким образом, средняя удельная площадь является геометрической интерпретацией вероятности события $f(\mathbf{R}, t) > f$, независящей, естественно, от точки $\mathbf{R}$. Следовательно, условия структурообразования (кластеризации) для *однородного* случая сводятся к тенденции выполнения асимптотических равенств при $t \to \infty$:

$$\big\langle S_{\mathrm{hom}}(t; f) \big\rangle = P\big\{ f(\mathbf{r}, t) > f \big\} \to 0\,,$$

$$\big\langle M_{\mathrm{hom}}(t; f) \big\rangle \to \big\langle f(t) \big\rangle\,.$$

Случай отсутствия кластеризации соответствует тенденции выполнения асимптотических равенств при $t \to \infty$:

$$\big\langle S_{\mathrm{hom}}(t; f) \big\rangle = P\big\{f(\mathbf{r}, t) > f\big\} \to 1\,,$$

$$\big\langle M_{\mathrm{hom}}(t; f) \big\rangle \to \big\langle f(t) \big\rangle\,.$$

Таким образом, *кластеризация в пространственно однородной задаче — это физическое явление* (*происходящее с вероятностью единица, т.е. почти для всех реализаций случайного положительного поля*), *порождённое редким событием, вероятность которого стремится к нулю*.

В данном случае само наличие редких событий является тем "*спусковым механизмом*", который инициирует процесс структурообразования, а само структурообразование является свойством случайной среды.

При этом характерное время образования кластерной структуры в пространстве определяется характером приведённых асимптотических выражений при больших временах. Это время теперь определяется не только статистическим ляпуновским характеристическим индексом $\alpha$, но и коэффициентом диффузии $D_f$ в фазовом пространстве положительного поля $f(\mathbf{r}, t)$. Конечно, это время больше, чем характерное время убывания реализаций в каждой точке пространства.

Для конкретных физических динамических систем задача о кластеризации физических полей сводится, таким образом, к вычислению стохастического ляпуновского индекса $\alpha$ и коэффициента диффузии $D_f$, что, вообще говоря, является довольно громоздкой задачей для конкретных уравнений в частных производных.

Во множестве работ считается, что, для того чтобы произошло какое-либо событие, необходимо, чтобы оно было наиболее вероятным. Так, например, в недавней (очень интересной) работе [4] в результате подсчётов тех или иных вероятностей (на основе анализа стохастических графов и цепей), была высказана *гипотеза о происхождении жизни с точки зрения физики*: "*Жизнь — это результат процесса игры при взаимодействии части системы со своим окружением. В игре у этой части системы появилось свойство запоминать вероятности появления удач и неудач в предыдущих раундах, что дало ей шанс на существование в последующих раундах*".

Не могу согласиться, что происхождение жизни — это процесс игры. Думаю, что происхождение жизни — это всё же событие, произошедшее с вероятностью единица.

Автор благодарен рецензенту, критические замечания которого способствовали выделению основных факторов, определяющих явление кластеризации в случайных средах в рамках идеи статистической топографии.

## Список литературы

1. Кляцкин В И *УФН* **181** 457 (2011) [Klyatskin V I *Phys. Usp.* **54** 441 (2011)]
2. Klyatskin V *Lectures on Dynamics of Stochastic Systems* (Boston, MA: Elsevier, 2010)
3. Кляцкин В И *Очерки по динамике стохастических систем* (М.: URSS, 2012)
4. Иваницкий Г Р *УФН* **180** 337 (2010) [Ivanittskii G R *Phys. Usp.* **53** 327 (2010)]

**Spatial structures can form in stochastic dynamic systems due to near-zero-probability events:**
(comment on "21st century: what is life from the perspective of physics?"
(*Usp. Fiz. Nauk* **180** 337 (2010) [*Phys. Usp.* **53** 327 (2010)]) by G.R. Ivanitskii)

**V.I. Klyatskin**
*A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,*
*Pyzhevskii per. 3, 119017 Moscow, Russian Federation*
*E-mail*: *klyatskin@yandex.ru*

This letter is aimed to briefly highlight the fact that along with many probabilistic models (including random graphs and chains currently in wide use) there is a direct universal approach to describing the formation of stochastic structures with probability unity in random media (in "chaos"), i.e., in almost all random field realizations. The mathematical level adopted is accessible to early undergraduate students. It can thus be concluded that clustering in "chaos" is not only a physical phenomenon but rather a universal phenomenon inherent in nature — with some provisos, of course.

PACS numbers: **05.45.–a**, **05.65.+b**, 87.23.Kg DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211k.1235

Bibliography — 4 references *Received 10 June 2011, revised 9 April 2012*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **182** (11) 1235–1237 (2012) *Physics–Uspekhi* **55** (11) (2012)