

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Об условиях существования быстрой поверхностной волны

А.В. Кукушкин, А.А. Рухадзе, К.З. Рухадзе

Выяснены условия существования быстрой (со скоростью, близкой к скорости света в вакууме) поверхностной электромагнитной волны на плоской поверхности раздела вакуума и изотропной диссипативной среды с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$. Проанализированы случаи границы раздела вакуум–морская вода, вакуум–металл, вакуум–плазма, вакуум–диэлектрик. Рассмотрены условия существования поверхностных волн с исчезающе малым затуханием: с предельно большим (вакуум–морская вода, вакуум–металл) и предельно малым (вакуум–плазма, вакуум–диэлектрик) значениями ϵ'' . Показано, что по крайней мере в этих двух предельных случаях имеет место синхронизм перехода фазовой V_p и групповой V_g скоростей волны через скорость света в вакууме c . Отмечается, что это можно считать причиной существования поверхностных волн на границе раздела вакуум–бесстолкновительная плазма (при $\epsilon' < -1$, $V_{p,g} < c$) и отсутствия их на границе вакуум–слабопоглощающий диэлектрик (при $\epsilon' > 1$, $V_{p,g} > c$). Показано, что в первом предельном случае переход обеих скоростей поверхностной волны через c реализуется при $\epsilon' = -3/4$. Отсюда следует, что на границе раздела вакуум–металл (при $\epsilon' < -3/4$) поверхностная волна существует, а на границе вакуум–морская вода (при $\epsilon' > -3/4$) поверхностная волна (волна Ценнека) существовать не может.

PACS numbers: 41.20.Jb, 78.68.+m

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211f.1205

Содержание

1. Введение (1205).
 2. Анализ дисперсионного уравнения (1208).
 3. Границы раздела вакуум–металл, вакуум–морская вода, вакуум–земной грунт (1210).
 4. Границы раздела вакуум–плазма, вакуум–диэлектрик (1212).
 5. Кинетическая модель плазموподобной среды (1213).
 6. Краткие выводы (1214).
- Список литературы (1215).

1. Введение

Сразу же после того как Г. Маркони [1] в 1901 г. осуществил передачу радиосигнала на частоте 30 кГц через Атлантический океан, относительно механизма проникновения электромагнитной волны за линию горизонта возникли две конкурирующие гипотезы. Гипотеза Кеннели–Хевисайда [2, 3] объясняла эффект предполагаемым наличием в верхних слоях атмосферы Земли

отражающих сигнал слоёв ионосферы, которая действительно позже была открыта. Вторая, не менее правдоподобная, гипотеза Зоммерфельда–Ценнека [4, 5] объясняла эффект "прилипанием" к сферической поверхности Земли распространяющейся вдоль неё почти без затухания поверхностной волны (ПВ), которая была названа впоследствии волной Ценнека.

В настоящее время никто не сомневается в том, что глобальная радиосвязь реализуется благодаря существованию ионосферы. Эти эффекты хорошо изучены как теоретически, так и экспериментально, что нашло отражение в обширнейшей литературе, которую можно найти, например, в книге Я.Л. Альперта [6]. Согласно многочисленным экспериментам и отвечающим им математическим моделям глобальная радиосвязь реализуется на спектре высших типов волн сферического экранированного волновода, одной из "стенок" которого является хорошо проводящая поверхность Земли (моря), а второй — ионосфера. Построенные теоретические модели, в которых поверхность Земли для простоты полагалась фактически идеально проводящей, показывают [7], что основная, "кабельная", мода сферического волновода не принимает участия в эффектах передачи радиосигнала за линию горизонта. Причиной этого является то, что поле этой моды с увеличением частоты оказывается всё более прижатым к вогнутой поверхности ионосферы, а не к выпуклой поверхности Земли. Вследствие этого считается [7], что эффективность возбуждения кабельной моды искусственными наземными антеннами оказывается очень низкой. Только грозовые разряды способны возбудить низкочастотные резонансы Шумана со структурой поля кабельной моды.

А.В. Кукушкин. Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, ул. Минина 24, 603600 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: avkuku@gmail.com
А.А. Рухадзе, К.З. Рухадзе. Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 135-02-47. E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

Статья поступила 27 марта 2011 г.,
после доработки 14 июля 2011 г.

Таковы в общих чертах основные положения современной теории, объясняющей глобальные эффекты возбуждения искусственных и природных электромагнитных полей над сферической поверхностью Земли в частотном диапазоне $0 \dots 10$ МГц, в котором влияние ионосферы оказывается решающим. Вероятно, единственный уязвимый пункт рассчитанных математических моделей этой теории — то, что в действительности поверхность Земли не является идеально проводящей. Это приближение применимо только в области очень низких частот, так как удельная проводимость σ у морской воды приблизительно на семь порядков меньше, чем у меди. Вследствие этого нельзя исключать того, что на самом деле поле кабельной моды будет прижатым также и к поверхности Земли уже на частотах порядка единиц кГц и больших. Во всяком случае, этот важный вопрос требует отдельного рассмотрения, о чём мы ещё будем говорить, потому что он может оказаться тесно связанным с основной темой настоящей статьи, которая посвящена главным образом рассмотрению второй гипотезы — гипотезы Зоммерфельда – Ценнека.

История этого вопроса очень поучительна по многим причинам. Главный результат, который получен в нашей работе, состоит в том, что гипотетическая поверхностная волна Ценнека над *плоской* морской или земной поверхностью существовать не может, потому что её *групповая* скорость, а не только фазовая, оказывается больше скорости света в вакууме!

Приведём кратко исторические сведения о ПВ Ценнека.

Идея существования электромагнитной волны на поверхности проводящей среды возникла у А. Зоммерфельда в 1896 г. [8] при исследовании дифракции однодальной плоской электромагнитной волны на идеально проводящей поверхности. Эта идея была в дальнейшем разработана учеником А. Зоммерфельда Дж. Ценнеком, который решил модельную задачу о распространении ПВ над *бесконечной* неидеально проводящей плоскостью [4]. С позиций сегодняшнего дня этот результат выглядит, конечно, весьма скромно, но в то время, когда до создания теории экранированных волноводов, а затем — открытых волноводов, было ещё очень далеко, он вдохновил многих физиков-экспериментаторов на оказавшиеся в целом безрезультатными поиски этой волны, которые, несмотря ни на что, продолжают до сих пор [9].

Характерной особенностью ПВ Ценнека является то, что для сред с положительной вещественной частью ε' диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ подстилающего полупространства (морская вода, земной грунт) её фазовая скорость превышает скорость света в вакууме, $V_p > c$. Этим такая волна отличается, например, от обычных ПВ, которые позднее были обнаружены в спектре волн диэлектрических волноводов и которые составляют физическую основу для передачи электромагнитных сигналов в оптических линиях связи. Этим же она отличается и от ПВ Зоммерфельда, для которой $V_p < c$ и которая способна распространяться над проводящим цилиндрическим проводником, например, в проволочных антеннах. Условие $V_p < c$ является характерной отличительной чертой для всех наблюдаемых в реальности ПВ, независимо от формы поперечного сечения открытого волновода и физического состояния его внутренней материальной среды, будь то диэлект-

рик, проводник или бесстолкновительная газоразрядная плазма.

В настоящее время теоретические и экспериментальные исследования, связанные с ПВ, способными распространяться над хорошими проводниками с плоской конфигурацией поперечного сечения и толщиной, много большей толщины скин-слоя, проводятся в терагерцевой частотной области [10]. Существенно то, что в этом случае (в отличие от ситуации над морской поверхностью или земным грунтом) $\varepsilon' < 0$. Для ПВ, распространяющейся вдоль плоской границы раздела вакуум – металл (по другой терминологии — для распространяющихся поверхностных плазмонов [10] или плазмон-поляритонов [11]) фазовая скорость $V_p < c$ [10]. Как уже было сказано, это выполняется для всех обычных ПВ. Поэтому, несмотря на внешнее сходство двух случаев, нет никаких оснований называть обычную ПВ, у которой $V_p < c$, волной Ценнека, у которой, вообще говоря, $V_p > c$. Но именно так поступают, в отличие, например, от авторов статьи [11], авторы работы [10] и многие другие авторы из списка литературы в [10]. С другой стороны, авторы работы [11] и, конечно, не только они называют обычную ПВ ($V_p < c$) над плоской поверхностью металла или плазмы волной Фано. Над цилиндрической поверхностью металла обычную ПВ именуют ещё волной Зоммерфельда. Не слишком ли много наименований придумано для одного и того же физического явления? Но это ещё полбеды, когда за множеством наименований кроется одно и то же *физическое* явление. Полным историческим курьёзом является то, что за математически корректным решением сингулярной краевой задачи Штурма – Лиувилля, которому соответствует волна Ценнека в исходном смысле этого термина ($V_p > c$), не стоит вообще никакого физического явления! Доказательство этого утверждения и составляет основной предмет нашей работы. Чтобы вынести из ситуации полезный урок на будущее, нужно понять, как могло случиться, что результат математических расчётов обманул ожидания физиков и обман длится целое столетие! Для этого нужно продолжить рассмотрение истории вопроса.

Итак, в 1907 г. Дж. Ценнек [4] получил решение соответствующей краевой задачи для отдельной "моды" с указанными выше свойствами. Чтобы теоретически доказать возможность существования отдельной моды, нужно, конечно, решить задачу о её возбуждении реальной антенной.

Сначала Зоммерфельд, рассмотрев в 1909 г. [5] задачу возбуждения такой волны над проводящей плоскостью вертикальным диполем Герца, доказал, что поле волны Ценнека присутствует в поле диполя на больших расстояниях от него. Однако впоследствии сначала Г. Вейль [12], затем В. Фок [13], Ван дер Поль [14] и другие [15] нашли ошибку в вычислениях Зоммерфельда. Оказалось, что именно вследствие того, что для волны Ценнека $V_p > c$, она не может быть выделена в виде отдельной моды из-под интеграла по плоским волнам, которым описывается поле диполя. В 1926 г. Зоммерфельд в статье [16] исправил свою ошибку и показал следующее. Полюс спектральной функции, соответствующий волне Ценнека, хотя и не захватывается (вследствие того, что $V_p > c$) при деформировании контура интегрирования в перевальный контур, но оказывается в непосредственной близости от него; из-за этого всё-таки имеет место своего

рода имитация поля волны Ценнека в некоторой окрестности антенны, названной в дальнейшем "численным расстоянием Зоммерфельда". Но на больших расстояниях от антенны за пределами этого "численного расстояния" поле волны Ценнека отсутствует в поле диполя. Отметим, что результаты измерений в последнем по времени натурном эксперименте, выполненном в 2009 г. на двухслойной трассе лёд–солёная вода протяжённостью 1,2 км на частотах 10 и 15 МГц [9], полностью соответствуют результату Зоммерфельда и подтверждают, что с увеличением расстояния за пределами "численного расстояния Зоммерфельда" поле, имитирующее ПВ Ценнека в его пределах, экспоненциально затухает.

Таким образом, в теоретических работах [12–14, 16] коллективными усилиями выдающихся учёных был впервые установлен тот *математический* факт, что граничное условие на бесконечности, которому волна Ценнека хорошо удовлетворяет, для реального существования этой волны не играет никакой роли! Действительно, впоследствии было доказано реальное существование так называемых "вытекающих волн", которые не удовлетворяют граничному условию на бесконечности в поперечном направлении. Это был второй пример, свидетельствующий о закономерности.

Итак, полученный в статьях [12–14, 16] результат был первым предупреждающим сигналом как для теоретиков, так и для экспериментаторов, но они его не заметили. Не заметили в силу того, что это был чисто математический результат, а в противопоставление ему можно, как это часто случается, представить результат другого математического аппарата и т.д. до тех пор, пока не произойдёт "естественный отбор". Пока этого не случилось, в периодической печати [17, 18] продолжают появляться дискуссии о физическом смысле ПВ Ценнека ($V_p > c$), хотя со времени её "открытия" уже истекло целое столетие.

В рассматриваемом историческом контексте хороший математический аппарат не замедлил явиться в теории регулярных открытых волноводов [19], сформулированной в терминах идеализированной модели бесконечного регулярного открытого волновода. Дискретный спектр нормальных волн этого волновода включает в себя любые ПВ без различия случаев $V_p > c$ или $V_p < c$, поскольку с *математической* точки зрения они ничем не отличаются друг от друга. И в том, и в другом случаях поле ПВ *бесконечного* волновода, конечно, может существовать, согласно математическим расчётам, над регулярной направляющей трассой, так как это поле является решением задачи на собственные функции в сингулярной краевой задаче Штурма–Лиувилля на бесконечном отрезке. Вопрос состоит, однако, в физической корректности самой постановки задачи Штурма–Лиувилля на *бесконечном* интервале в условиях, когда в системе имеется излучение. Его характеристики должны быть хорошо согласованы с физикой канализации электромагнитной энергии вдоль трассы. Это требование в теории [19] хорошо выполняется применительно к вытекающим волнам, которые, однако, больше связаны с описанием эффектов утечки энергии во внешнее пространство, чем эффектов её направленной канализации вдоль трассы. Как важнейший элемент теории, это требование должно предъявляться также и к поверхностным модам в пространственных областях, где они только

начинают формироваться или, наоборот, заканчивают свой бег вдоль трассы. Ясно, что идеализированная модель бесконечного волновода и связанная с ней постановка задачи Штурма–Лиувилля на *бесконечном* отрезке не пригодны для этого. Такова суть проблемы. Для её решения нужен другой математический аппарат, основы которого изложены в работах [20–22], а полное описание — в диссертации [23].

Коротко суть подхода к проблеме в работах [20–23] сводится к замене бесконечного отрезка, на котором ставится сингулярная задача Штурма–Лиувилля, на полубесконечный. В результате этого у модальных (точнее, квазимодальных) функций полубесконечного (т.е. нерегулярного) открытого волновода появляется множитель в виде комплексного интеграла Френеля с параметрической зависимостью от волнового числа моды (неважно какой — поверхностной, вытекающей или любой моды из континуума волн непрерывного спектра). Это полностью меняет ситуацию. Математический аппарат, изложенный в работах [20–23], существенно отличается от описанного в [19]. Несмотря на то, что между ними имеется определённая внутренняя связь, которая в некоторых важных пунктах отразилась в формулировке математического аппарата в [20–23], результаты расчётов двух теорий заметно различаются. Результаты математических расчётов теперь согласуются с результатами работ [12–16]. В частности, наличие здесь интегралов Френеля естественным образом "по умолчанию" обеспечивает согласованность характера полей излучения с характером полей волноводных мод. Получается, что с ПВ, у которой $V_p > c$, невозможно согласовать излучение, которое сопутствует процессу начала формирования этой моды, и поэтому мода не может сформироваться. Это проявляется в том, что такие моды просто не могут попасть в спектр мод полубесконечного открытого волновода из-за свойств интеграла Френеля, в которых, собственно, и закодированы характерные особенности тех полей излучения, которые сопутствуют процессу начала формирования мод.

Таким образом, круг мог бы замкнуться, если бы было точно доказано, что ПВ, у которой $V_p > c$, не удовлетворяет ещё каким-то другим требованиям, которым должна удовлетворять физическая волна в обязательном порядке! Этого до сих пор сделано не было.

Поэтому в настоящее время в Европе по-прежнему продолжают получать финансовую поддержку проекты [24], базирующиеся на представлениях о том, что волну Ценнека ($V_p > c$) можно возбудить над локально плоской морской поверхностью реальными береговыми антеннами. Более того, в России уже находится в эксплуатации система радионаблюдения [25] декаметрового диапазона длин волн с радиусом действия 300 км, которая позиционируется её разработчиками как береговой загоризонтный радар поверхностной волны (БЗГР "Подсолнух-Э"). Если заявленное в [25] соответствует действительности, а не достигается за счёт дифракции "земного луча", что более вероятно, то встаёт вопрос: о какой поверхностной волне может идти речь, если волна Ценнека, как мы покажем ниже, обладает всеми признаками *математической* волны-призрака, потому что её групповая скорость больше скорости света в вакууме?

2. Анализ дисперсионного уравнения

Рассмотрим плоскую границу раздела двух сред при $z = 0$. В области $z \leq 0$ среда описывается комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, а в области $z \geq 0$ имеем вакуум с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 = 1$. Вдоль границы раздела сред, параллельно оси Ox , может распространяться поверхностная электромагнитная волна¹, затухающая по обе стороны от границы при возрастании поперечной координаты. Поверхностная волна представляет собой волну Е-типа (ТМ-волна) с отличными от нуля компонентами поля E_z , E_x и B_y , причём E_z удовлетворяет уравнению [26],

$$\Delta E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) E_z = 0. \quad (1)$$

При его получении из системы уравнений Максвелла электромагнитное поле считалось монохроматическим, зависящим от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, причём в вакууме $\varepsilon(\omega) \equiv 1$. Остальные компоненты поля выражаются через продольную компоненту простыми соотношениями (см. [26], гл. 9).

Решение уравнения (1) для поверхностной волны записывается в виде

$$E_z(x, z) = \exp(ikx) \begin{cases} \exp(-\kappa_0 z), & z > 0, \\ \exp(\kappa_\varepsilon z), & z < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\kappa_0 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \kappa_\varepsilon = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2}}. \quad (3)$$

Из требования убывания поля для ПВ по обе стороны поверхности раздела сред при удалении от неё следует, что должны быть выполнены условия

$$\operatorname{Re} \kappa_0 > 0, \quad \operatorname{Re} \kappa_\varepsilon > 0. \quad (4)$$

При подстановке решения (2) в электродинамические граничные условия (условия непрерывности полей E_z и B_y на плоскости $z = 0$; подробнее см. [26], гл. 9) получаем дисперсионное уравнение для поверхностной электромагнитной волны:

$$\varepsilon \kappa_0 + \kappa_\varepsilon = 0. \quad (5)$$

В целях упрощения анализа уравнения (5) введём следующую нормировку: $K = k/k_0$ ($k_0 = \omega/c$), приводящую уравнение к форме

$$\varepsilon \tilde{\kappa}_0 + \tilde{\kappa}_\varepsilon = 0. \quad (6)$$

Здесь $\tilde{\kappa}_0 = \sqrt{K^2 - 1}$, $\tilde{\kappa}_\varepsilon = \sqrt{K^2 - \varepsilon}$ и в общем случае предполагается, что ε и K — комплексные числа: $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $K = K_1 + iK_2$. Уравнение (6) в комплексной области имеет простое решение [24]:

$$K^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}. \quad (7)$$

Удивительно, но детального и связного физического анализа столь простого уравнения, как (6), который

охватывал бы весь спектр возможных значений ε : $\varepsilon' \in [-\infty, +\infty]$, $\varepsilon'' \geq 0$, по-видимому, так и не было проведено. А если он всё-таки проводился, то не был завершён важными для физики выводами. Ведь в противном случае, как мы покажем, давно стало бы ясно, что такой волны, как волна Ценнека, у которой фазовая скорость больше скорости света в вакууме, существовать не может не только по этой причине (как утверждается в [18], поскольку это следует из математических расчётов работ [20–23]), но, что гораздо важнее для физики, потому что и её групповая скорость оказывается больше скорости света, $V_g > c!$

Этот неизвестный ранее и всё ставящий на место результат вытекает из связного физического анализа уравнения (6). Такой анализ не представляет собой ничего особенного, и маловероятно, что его до нас никто не проводил, но в доступной для нас литературе мы его не нашли. Поэтому, ввиду важности вытекающих из него выводов, приводим его полностью.

Начнём анализ с общего замечания, касающегося записи поля (2) в двух граничащих друг с другом средах, которая, собственно, и ведёт к уравнению вида (6). Вопрос о форме уравнения только кажется тривиальным и поэтому обычно в литературе ему не уделяется должного внимания, а это может привести к недоразумениям. Дело сводится к следующему.

В статье [24] в фигурных скобках (2) используется запись в виде мнимых экспонент с *одинаковым положительным* знаком в аргументе перед мнимой единицей. Это приводит к тому, что знак второго слагаемого в уравнении (6) меняется с положительного на отрицательный и, кроме того, в обоих радикалах уравнения (6) меняются местами их внутренние слагаемые, что символически отобразим соответствующим преобразованием: $\tilde{\kappa}_{0,\varepsilon} \rightarrow \bar{\kappa}_{0,\varepsilon}$. Легко убедиться в том, что тогда выражение (7), если $\varepsilon > 0$, является вещественным корнем "дисперсионного уравнения", которое вытекает из транскрипции записи полей в [24]:

$$\varepsilon \bar{\kappa}_0 - \bar{\kappa}_\varepsilon = 0. \quad (8)$$

Это очень удобно, но только для вещественных, положительных ε . Однако в данном случае эта задача не имеет никакого отношения к краевой задаче Штурма–Лиувилля, т.е. к задаче на собственные функции и собственные значения. Нетрудно догадаться, к какой краевой задаче относится в этом случае вещественное решение (7) уравнения (8).

Запись полей в виде мнимых экспонент в обоих полупространствах физически означает наличие двух однородных плоских волн, распространяющихся под разными углами в двух средах. Существенно то, что имеет место перенос энергии в направлении возрастания координаты z , т.е. к границе раздела (i) подводится энергия снизу ($z < 0$), и она, нисколько не отражаясь от границы ($z = 0$), полностью излучается в вакуум ($z > 0$). Свойство (i) рассматриваемой задачи является её характерной, инвариантной чертой, которую нужно запомнить. Это нужно для правильной интерпретации аналитического продолжения вещественного решения (7) в комплексную область, когда (7) является решением дисперсионного уравнения, записанного в форме (8).

Итак, излучение энергии вниз отсутствует, т.е. граница раздела совсем не отражает падающую на неё под

¹ В БСЭ приводится следующее определение волны Ценнека: "Я. Ценнек в 1907 г. теоретически показал, что вдоль плоской поверхности Земли (или моря) может распространяться поверхностная волна, подобная волне, распространяющейся вдоль провода".

некоторым углом плоскую волну. Следовательно, волна падает на границу снизу под углом Брюстера, так как волна имеет нужную для этого поляризацию. Уравнение (8) в вещественной области — это уравнение для определения значения этого угла, а вовсе не дисперсионное уравнение. Уравнение (8) получается приравниванием к нулю френелевского выражения для амплитуды зеркально отражённой вниз (от границы раздела двух сред) плоской волны. Это известное решение краевой задачи из оптики. Физический смысл корня уравнения (8) очевиден:

$$K \equiv \cos \theta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}}, \quad (9)$$

где θ_0 — угол скольжения прошедшей в вакуум волны, который отсчитывается от плоскости границы раздела. Можно легко показать, что угол Брюстера θ_ε в нижней среде, отсчитываемый от нормали к границе, вычисляется аналогичным образом: $\sin \theta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon/(\varepsilon + 1)}$.

В связи с этим аналитическое продолжение вещественного решения (9) в комплексную область будет иметь тот же смысл. Тем не менее этим, теперь уже комплексным, значениям углов θ_0 и θ_ε (комплексный угол Брюстера) можно приписать смысл волновых чисел "мод", направляемых границей раздела, а уравнение (8) считать теперь *дисперсионным уравнением*. Однако эти "моды" не будут поверхностными вследствие того, что они неизбежно наследуют инвариантное свойство (i) рассматриваемой задачи. Согласно свойству (i) эти "моды" должны быть тесно связаны отнюдь не с эффектом направленной канализации энергии вдоль границы без излучения, на что настроена структура поля ПВ, а с эффектами излучения канализируемой энергии во внешнюю среду (вакуум). Такими "модами" являются, как известно, вытекающие волны.

Математический механизм реализации идеи наследования инвариантного свойства (i) при указанном аналитическом продолжении вещественного решения (7) в комплексную область в программных средах современной практической (компьютерной) математики сводится к следующему.

Встроенные функции извлечения квадратного корня из комплексного числа в стандартных программных средах компьютерной математики (например, MatLab) дают главное значение для двузначной функции квадратного корня как величину с положительной вещественной частью. Для уравнения (6) в комплексной области это означает автоматическое выполнение условий (4) для поверхностных волн при подстановке в уравнение аналитического продолжения решения (9). Для уравнения (8) те же действия будут также давать решение этого уравнения с той только разницей, что по указанной выше причине оно будет обладать свойством $\operatorname{Re} \bar{\kappa}_{0,\varepsilon} > 0$, а не свойством (4), как требуется для ПВ. Поэтому, а также вследствие того, что $K_{1,2} > 0$ (рассматриваются пассивные среды и волны, бегущие в сторону возрастания продольной координаты x), волновое уравнение в вакууме для комплексных решений уравнения (8) будет удовлетворяться ($1 = K^2 + \bar{\kappa}_0^2$), только если $\operatorname{Im} \bar{\kappa}_0 < 0$. Следовательно, при поперечном смещении точки наблюдения от границы раздела в вакууме амплитуда поля волны будет всегда увеличиваться. Если при этом выполняется дополнительное условие $K_1 < 1$, такое поле во внешней среде можно отнести к физически реализуемому случаю вытекающей волны. Но никогда уравнение (8) не будет давать

решений, которые во внешней среде соответствовали бы полю ПВ: $\operatorname{Im} \bar{\kappa}_0 > 0$.

Поэтому правильной формой *дисперсионного уравнения* для ПВ остаётся именно уравнение (6), а не (8), как это фактически предполагается в работе [24]. Таким образом, форма записи полей в обеих средах играет важную роль. А именно, выбрав для анализа уравнение (6), а не (8), мы заранее исключаем из рассмотрения в комплексной области вытекающие волны и оставляем только поверхностные, при этом в вещественной области исключается "оптическая ветвь" решений, как не имеющая отношения к задаче Штурма–Лиувилля. К достоинствам формы дисперсионного уравнения (6) относится также то, что в вещественной области, но при условии $\varepsilon < -1$, она, в отличие от уравнения (8), удобна для решения краевой задачи Штурма–Лиувилля применительно к обычной ПВ при $V_p < c$, существующей на границе раздела вакуум–плазма. Именно это свойство будет наследоваться при аналитическом продолжении соответствующего вещественного корня! Как и прежде, собственное значение, соответствующее этому корню, вычисляется по формуле (7), где вещественное число $K = K_1 > 1$ имеет смысл коэффициента замедления ПВ относительно скорости света в вакууме.

Главным для нашего анализа является следующее.

Аналитическое продолжение решения в комплексную область ε будет всегда корректным как с математической точки зрения (уравнение (6) при подстановке в него решения (7) автоматически удовлетворяется для любых значений ε из полуплоскости $\varepsilon' \in [-\infty, +\infty]$, $\varepsilon'' > 0$), так и с физической в том смысле, что собственная функция будет *автоматически* удовлетворять требованиям (4). Однако уравнение (6), как и условия (4), при этом не будут выполняться для вещественных *положительных* ε : $\varepsilon' \in [0, +\infty]$, $\varepsilon'' = 0$. Кроме того, отрезок вещественной оси $\varepsilon' \in [-1, 0]$, $\varepsilon'' = 0$ также исключается, так как, хотя уравнение (6) будет на нём по-прежнему удовлетворяться, но условия (4) — нет. Решение в этом случае попадает точно на разрез $\operatorname{Re} \bar{\kappa}_{0,\varepsilon} = 0$, поэтому не удовлетворяет требованию (4). Однако этот случай (нормальное падение на границу раздела не испытывающей при этом отражения *неоднородной* плоской волны) также не имеет отношения к определению спектра собственных волн, а относится к решениям из "комплексной оптики".

Итак, мы показали, что связанный анализ характера решений дисперсионного уравнения (6) во всей области возможных значений комплексных ε с мотивированно указанными исключениями должен сводиться, согласно формуле (9), к простой операции извлечения квадратного корня из соответствующего комплексного числа. Важнейшей характеристикой волны является её фазовая (и, конечно, групповая) скорость, поэтому на комплексной полуплоскости ε мы, прежде всего, должны совершенно точно установить границу перехода фазовой скорости волны через скорость света в вакууме. Без этого анализ решений не будет полноценным и физически связным. На полуплоскости ε эта граница будет реализована в форме некоторой полубесконечной кривой, которая в пересчёте на комплексную четвертьплоскость K , $K_1, K_2 \in [0, \infty]$, должна выглядеть как перевальный контур интегрирования (на котором реализуется равенство $K_1 = 1$) в теории нормальных волн открытого волновода [19]. Поэтому при извлечении квадратного корня из правой и левой частей соотношения (7) и при определении указанной

границы перехода через скорость света будем придерживаться следующей последовательности действий.

После разделения действительной и мнимой частей в правой и левой частях соотношения (7) получаем систему двух алгебраических уравнений относительно K_1 и K_2 :

$$K_1^2 - K_2^2 = \frac{\varepsilon' \chi + \varepsilon''^2}{a}, \quad (10)$$

$$K_2 = \frac{\varepsilon''}{2K_1 a}, \quad (11)$$

где введены следующие обозначения:

$$\chi = 1 + \varepsilon', \quad (12)$$

$$a = \chi^2 + \varepsilon''^2.$$

После подстановки (11) в (10) находим биквадратное уравнение относительно K_1 с решением

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(1 - \frac{\chi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon''}{a}\right)^2} + 1 - \frac{\chi}{a}}. \quad (13)$$

Явное выражение для K_2 получается при подстановке (13) в (11), откуда после несложных преобразований имеем

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(1 - \frac{\chi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon''}{a}\right)^2} - \left(1 - \frac{\chi}{a}\right)}. \quad (14)$$

Уравнение для линии перехода через скорость света на плоскости $(\varepsilon', \varepsilon'')$ можно получить после подстановки в левую часть уравнения (13) вместо K_1 единицы. Искомое уравнение имеет вид

$$\varepsilon''^2 = \frac{\chi^3}{1/4 - \chi}$$

или, окончательно,

$$\varepsilon'' = (1 + \varepsilon') \sqrt{\frac{1 + \varepsilon'}{-(\varepsilon' + 3/4)}}. \quad (15)$$

Видно, что вещественная ветвь уравнения (15) реализуется на плоскости $(\varepsilon', \varepsilon'')$ в полосе $-1 < \varepsilon' < -3/4$. Таким образом, на плоскости $(\varepsilon', \varepsilon'')$, условно говоря, имеются три области для анализа: сама эта полоса и две отличные друг от друга области справа и слева от неё. Но по существу имеются только две принципиально отличные друг от друга области — это области справа и слева от кривой, на которой $V_p = c$.

Эти области, как и описываемая уравнением (15) граница между ними, где $V_p = c$, показаны на рисунке.

Как уже говорилось, в переменных K_1 и K_2 изображённая на рисунке разделительная кривая представляет собой отображение перевальной контура интегрирования с комплексной плоскости K на комплексную плоскость $(\varepsilon', \varepsilon'')$. Образом бесконечно удалённой точки контура на рисунке является точка $(-1, 0)$, так как здесь $K_2 = \infty$, а образом седловой точки контура на плоскости $(\varepsilon', \varepsilon'')$ является бесконечно удалённая точка $(-3/4, \infty)$, где $K_2 = 0$. Везде справа от "перевальной линии" на рисунке фазовая скорость поверхностной волны больше скорости света в вакууме, а везде слева — меньше.

С точки зрения математического аппарата, которым оперировали авторы работ [12–16], так же как и совер-

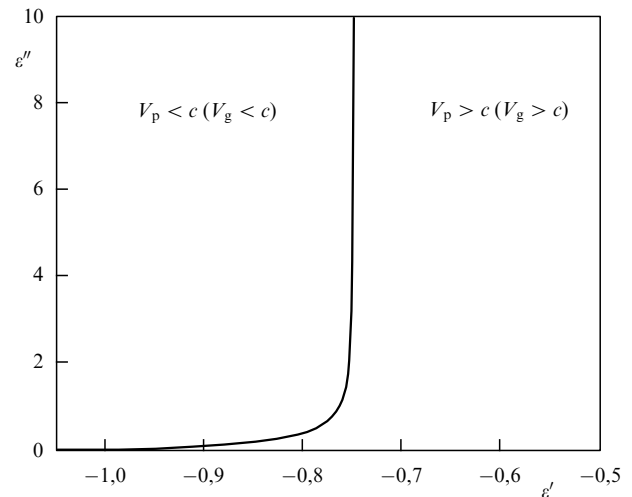


Рис. Две разграниченные линией $V_p = c$ области корней дисперсионного уравнения (6) на плоскости $(\varepsilon', \varepsilon'')$, которым отвечают решения, характеризующиеся соотношениями $V_{p,g} > c$ и соответственно $V_{p,g} < c$.

шенно другого математического аппарата, изложенного в [20–23], область справа от "перевального контура" на рисунке не имеет отношения к реальным ПВ, которые могут поддерживаться границей раздела сред как волноводные моды, способные оторваться от источника. Соответствующие этой области решения краевой задачи относятся к решениям из "комплексной оптики" по определению значений комплексного угла Брюстера для неоднородной плоской волны, удовлетворяющей граничным условиям на бесконечности в обеих средах. Физическим смыслом волноводных мод, способных оторваться от источника, обладают здесь только те решения дисперсионного уравнения для ПВ, которые находятся слева от "перевального контура".

С точки зрения математического аппарата, который использовался при формулировании теории открытых волноводов, изложенной в книге [19], все решения — и справа, и слева от показанного на рисунке "перевального контура" — обладают физическим смыслом волновых чисел для мод дискретного спектра регулярного бесконечного открытого волновода, что ведёт, как мы увидим, к физическому абсурду.

Теперь мы покажем, что по крайней мере для областей с предельно малым затуханием, где групповая скорость волны хорошо определена, решения справа от "перевального контура" на плоскости $(\varepsilon', \varepsilon'')$ должны быть *безусловно* отброшены, так как у этих ПВ (слабо затухающая волна Ценнека) не только $V_p > c$, но и $V_g > c$!

И, наоборот, у всех решений из этой области, но слева от "перевального контура", которым соответствуют обычные ПВ с $V_p < c$ (поверхностные плазмон-поляритоны), также и $V_g < c$. Иначе говоря, это безусловно наблюдаемые ПВ.

3. Границы раздела вакуум–металл, вакуум–морская вода, вакуум–земной грунт

На знак ε' не накладываем никаких ограничений, но полагаем, что для металлов, морской воды и земного грунта в пределах соответствующих им частотных

интервалов выполняется условие $\varepsilon'' \gg |\varepsilon'|$. В этом случае из формул (13) и (14) легко находятся соответствующие приближения. Действительно, здесь мы имеем

$$a \approx \varepsilon''^2, \quad 1 - \frac{\chi}{a} \approx 1 - \frac{1 + \varepsilon'}{\varepsilon''^2},$$

$$\left(1 - \frac{\chi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon''}{a}\right)^2 \approx 1 - \frac{1 + 2\varepsilon'}{\varepsilon''^2}.$$

Подставляя эти выражения в (13) и (14), получаем следующие оценки:

$$K_1 \approx 1 - \frac{3 + 4\varepsilon'}{8\varepsilon''^2}, \quad K_2 \approx \frac{1}{2\varepsilon''}. \quad (16)$$

Учитывая, что для металлов (как для морской воды и земного грунта, но на более низких, чем для металлов, частотах) $\varepsilon'' \rightarrow 4\pi\sigma/\omega \gg 1$, видим, что волна слабо поглощается в среде, поэтому фазовая и групповая скорости для неё определены как

$$V_p \cong c \left[1 - \frac{(\varepsilon' + 3/4)\omega^2}{2(4\pi\sigma)^2} \right]^{-1}, \quad (17)$$

$$V_g \cong c \left[1 - \frac{3(\varepsilon' + 3/4)\omega^2}{2(4\pi\sigma)^2} \right]^{-1}. \quad (18)$$

Как и должно быть, в предельном случае $\varepsilon'' \gg |\varepsilon'|$ разграничительная линия, как это видно из рисунка и формул (17), (18), соответствует значению $\varepsilon' = -3/4$. Слева от него, $\varepsilon' < -3/4$, и фазовая, и групповая скорости волны меньше скорости света, поверхностная волна является физической волной. При $\varepsilon' > -3/4$ фазовая скорость волны больше скорости света, но при этом её групповая скорость, как это хорошо видно из формулы (18), также оказывается больше скорости света в вакууме!

Конечно, формула (18) получена в результате выполнения очень простой операции: $V_g \approx [dk_1/d\omega]^{-1}$, т.е. в пределе исчезающе малых потерь. Таким образом, более корректная формулировка полученного результата должна быть следующей.

В области $\varepsilon' < -3/4$ при $\varepsilon'' \gg |\varepsilon'|$ групповая скорость ПВ над плоской границей раздела двух сред в пределе исчезающе малых потерь стремится к скорости света снизу, а в области $\varepsilon' > -3/4$ — сверху.

Переход через скорость света при $\varepsilon' = -3/4$ у фазовой скорости происходит синхронно с запрещённым физикой переходом для групповой скорости (хотя и определённой только в пределе исчезающе малых потерь). Этого результата уже достаточно для того, чтобы раз и навсегда отказаться от мысли, что слабо затухающую ПВ Ценнека над локально плоской земной или морской поверхностью можно возбудить реальными антеннами, поскольку в этом случае у ПВ всегда $V_p > c$, а следовательно, и $V_g > c$.

Это как раз тот бесспорный *физический* аргумент, которого так недоставало для достоверного решения вопроса о физическом смысле ПВ, у которых $V_p > c$, — вопроса, который не мог не возникнуть у физиков сразу же, как только была опубликована статья Г. Вейля [12] и затем её основные выводы подтвердились в работах других весьма авторитетных учёных [13–16]. Надо полагать, что теперь этот вопрос, если не решён окончательно (так как остаётся задача более точного определения скорости переноса энергии слабо затухающими поверхностными волнами), то по меньшей мере его решение вплотную приблизилось к своему финалу.

Необходимо отметить характерную особенность физики волновых процессов в открытых направляющих структурах по сравнению с физикой канализации энергии в экранированных волноводах.

Как только фазовая скорость ПВ, распространяющихся в открытых системах, становится больше скорости света, волна перестаёт существовать, так как её групповая скорость в этой же точке переходит через дозволенный физикой предел. Этим, в частности, очень сильно различаются ситуации, которые, как мы видим, имеют место в теории открытых и экранированных волноводов, где групповая скорость распространяющихся мод всегда меньше скорости света, несмотря на то что их фазовая скорость может быть и больше неё.

Последнее, что нужно сказать о волне Ценнека, связано с реальными проектами радионаблюдения за морской акваторией, основанными на неверном предположении о возможности её возбуждения береговыми антеннами.

Для оценки характеристик волны Ценнека за ε' обычно [24] принимают статическое значение диэлектрической проницаемости воды $\varepsilon' \approx 80 > -3/4$. В этом случае, если за удельную проводимость морской воды принять значение $\sigma \approx 5$ (в практических единицах 1/Ом м) [24], то условие $\varepsilon'' \gg |\varepsilon'|$ будет выполняться в частотном диапазоне 0...100 МГц и, следовательно, групповая скорость волны будет превышать скорость света. Такой волны, конечно, не может существовать, и реальные проекты по созданию систем радионаблюдения с помощью "радаров поверхностной волны" больше не могут, как это до сих пор имеет место [24, 25], базироваться на этом "эффекте". Физическое обоснование эффекта, если он существует (а именно на нём основано функционирование уже реализованного проекта декаметрового БЗГР "Подсолнух-Э" [25]), должно существенным образом обновиться. Для этого имеются следующие теоретические предпосылки.

Начнём с того, что модель плоской границы раздела двух сред не адекватна реальным условиям, так как не учитывает конечности радиуса кривизны земной поверхности. Недооценивать этот фактор, как это делается до сих пор, нельзя, потому что искривление направляющей волну трассы открытого волновода (когда из-за *произвольного* предположения о наличии эффекта прижатия поля поверхностной волны к *выпуклой* поверхности трассы влиянием ионосферы пренебрегают) ставит под сомнение физическую корректность такого понятия, как поверхностная волна в чистом виде. Это происходит из-за того, что в каждой точке непрерывно изогнутой трассы обязательно будет иметь место излучение электромагнитной энергии в окружающее пространство. Вместе с тем структура поля поверхностной волны в её чистом виде, которая совершенно адекватна физике канализации энергии в *регулярных* открытых волноводах, но в случае, когда $V_p < c$, совсем не "настроена" на существование *непрерывной* утечки энергии на излучение! На это "настроена" структура поля так называемых вытекающих волн регулярного открытого волновода, а она, скорее, отжата от поверхности трассы, чем прижата! В этом суть проблемы, которая возникает при локальной аппроксимации сферической поверхности Земли плоской, к чему для простоты до сих пор прибегают теоретики, в частности, обслуживающие проекты по созданию "радаров поверхностной волны" [24].

Парадоксальность ситуации состоит в том, что обычный в таких случаях аргумент о малой величине отношения длины волны к радиусу Земли здесь неприменим! Ведь достаточно лишь слегка искривить трассу регулярного открытого волновода, как в системе с неизбежностью появится излучение, которое будет непрерывно сопровождать распространение канализируемой волны. Следует ещё раз подчеркнуть, что бесспорное наличие этого фактора над слегка искривлённой поверхностью Земли *абсолютно* несовместимо с понятием поверхностной волны над выпуклой поверхностью Земли! Такую волну по указанной выше причине уже никак нельзя считать чисто поверхностной! Возникает вопрос о структуре поля канализируемой волны, так как именно от этого зависит конструкция и эффективность работы наземных антенн. Каким будет характер поперечного распределения поля у такой волны, если она из самых общих физических соображений уже не может быть чисто поверхностной? Этот вопрос, конечно, выходит далеко за рамки настоящей статьи². Однако уже ясно, что у такого рода волны, характеристики которой должны быть обязательно увязаны с наличием сопровождающего её излучения, поле не может быть сильно прижатым к поверхности Земли. В таких обстоятельствах отбрасывать влияние ионосферы невозможно. В теоретическом плане это означает переход от теории открытых волноводов к теории экранированных волноводов, так как ионосферная плазма вплоть до частот порядка 10 МГц будет вести себя как отражающий электромагнитное поле экран. Отметим, что именно в этом диапазоне работает БЗГР "Подсолнух-Э". Мы уже говорили, что единственным кандидатом на роль поверхностной волны, которая в соответствии с высказанными выше соображениями могла бы заменить собой нефизическую в данных обстоятельствах волну Ценнека, является основная "кабельная мода" сферического закрытого волновода, которая из-за конечной проводимости земной или морской поверхности может быть прижатой также и к этой поверхности, а не только к поверхности ионосферы. Других вариантов для теоретической поддержки проектов создания "радаров поверхностной волны" в декаметровом диапазоне длин волн ($f < 10$ МГц), по нашему мнению, просто не существует.

Итак, мы видим, что термин "волна Ценнека" исторически возник применительно к волне, не имеющей, как

выяснилось практически совершенно определённо, физического смысла. Ведь первоначально эта волна чётко ассоциировалась с поверхностной волной, которая должна по предположению Ценнека распространяться над локально плоской морской или земной поверхностью, где групповая скорость этой волны, как показано выше, больше скорости света. Однако потом этот термин стал, по нашему мнению, необоснованно использоваться применительно к физическим волнам, которые могут распространяться над металлической поверхностью, где $\varepsilon' < -3/4$. В этом случае могут существовать обычные *медленные* поверхностные волны в том смысле, что их фазовая, а значит, и групповая скорости меньше скорости света. Волны с точно такими же характеристиками распространяются в оптических линиях связи вне зависимости от конфигурации поперечного сечения световода, и никому не приходит в голову называть их волнами Ценнека. Однако это название закрепилось за точно такими же медленными ($V_p < c$) поверхностными волнами, которые могут действительно распространяться, как это имеет место в диэлектрических волноводах, и над металлическими пластинами, но только с *плоской* конфигурацией поперечного сечения [10]. Ведь за точно такой же медленной и физической поверхностной волной, распространяющейся над *цилиндрическим* проводником, закреплено название по имени учителя Дж. Ценнека А. Зоммерфельда.

История науки не знает примеров, когда название какого-либо явления или эффекта зависело бы от столь несущественной особенности его проявления, как в данном случае — от конкретной формы поперечного сечения волновода. Настоящие исторические причины возникновения в научной литературе термина "волна Ценнека" базировались на правдоподобном предположении, что Дж. Ценнек открыл волну, которая должна существовать в реальности над соответствующей плоской подстилающей поверхностью. Правдоподобность этого предположения оказалась обманчивой, и теперь мы знаем, почему. Если в будущем будет обнаружен соответствующий эффект, то его существование уже невозможно будет объяснить волной Ценнека. В действительности Дж. Ценнеком было "открыто" надолго сбившее с толку очень многих "хорошее" математическое решение, которому в реальности ничего не соответствует. Если этот курьёзный исторический феномен делает честь хорошему исследователю Дж. Ценнеку, то название "волна Ценнека" может продолжать существовать в литературе и дальше, но только в указанном и вовсе не обидном для памяти Дж. Ценнека историческом контексте.

4. Границы раздела вакуум–плазма, вакуум – диэлектрик

Для завершения темы расширенного связанного физического анализа дисперсионного уравнения (6) для ПВ рассмотрим ещё один интересный как в теоретическом, так и в практическом отношении случай предельно малых потерь в газоразрядной плазме и диэлектрике.

Для этого перепишем формулы (13) и (14) в виде

$$K_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a - \chi}{a} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{a - \chi} \right)^2} \pm 1 \right]}. \quad (19)$$

² За время, пока настоящая статья готовилась к печати, были опубликованы статьи [27, 28], которые имеют прямое отношение к выяснению этого вопроса. В работе [27] показано, что волна Зоммерфельда над цилиндрическим проводником с проводимостью морской воды и радиусом, равным радиусу Земли, переходит в волну Ценнека на частоте, приблизительно равной 1 МГц. На частотах ниже этой критической частоты фазовая скорость ПВ над цилиндром меньше c , а на частотах, превышающих 1 МГц, — больше c . Это свидетельствует о корректности локальной аппроксимации (в данном физическом контексте) цилиндрической направляющей поверхности плоской. В работе же [28], где рассматривались "псевдоповерхностные моды" сферического открытого волновода с параметрами реальной земной поверхности, конкретными расчётами доказана некорректность локальной аппроксимации сферической поверхности Земли плоской. В частности, показано, что поле этих волн оказывается очень сильно отжатым от сферической поверхности Земли. Таким образом, высказанные соображения об абсолютной несовместимости самого понятия ПВ с физической ситуацией, которая имеет место над искривлённой направляющей трассой сферической поверхности Земли, полностью подтвердились в [28].

Далее введём следующие условия:

$$\varepsilon'(1 + \varepsilon') > 0, \quad (20)$$

$$\varepsilon''^2 \ll \varepsilon'(1 + \varepsilon'), \quad (21)$$

$$\varepsilon''^2 \ll (1 + \varepsilon')^2. \quad (22)$$

Условие (20) актуально для плазмы и будет выполняться, если принять ограничение $\varepsilon' < -1$. Таким образом, при анализе из рассмотрения исключается область $0 > \varepsilon' > -1$ (см. рисунок), которая полностью включает в себя полосу перехода фазовой скорости ПВ через скорость света. Следовательно, в отрицательной области, где $\varepsilon' < -1$, всегда имеем $V_p < c$, т.е. случай, который соответствует наблюдаемым волнам. Наоборот, в положительной области, $\varepsilon' > 0$, всегда имеет место случай $V_p > c$. Из этой области мы будем исключать полосу $1 \geq \varepsilon' > 0$ и справа будет рассматриваться случай диэлектриков, $\varepsilon' > 1$. Таким образом, ниже будет рассматриваться случай $|\varepsilon'| > 1$.

С учётом принятых ограничений имеем

$$\frac{a - \chi}{a} = \frac{\varepsilon'(1 + \varepsilon') + \varepsilon''^2}{(1 + \varepsilon')^2 + \varepsilon''^2} \approx \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{a - \chi}\right)^2} \approx 1 + \frac{\varepsilon''^2}{2(\varepsilon'(1 + \varepsilon'))^2}.$$

В результате из формулы (19) получаем следующие приближённые выражения для нормированных значений действительной и мнимой частей продольного волнового числа поверхностной моды:

$$K_1 \approx \sqrt{\frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'}} \left[1 + \frac{\varepsilon''^2}{8(\varepsilon'(1 + \varepsilon'))^2} \right], \quad (23)$$

$$K_2 \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'}} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'(1 + \varepsilon')}. \quad (24)$$

Что касается границы раздела вакуум–плазма, $\varepsilon' < -1$, то приближениям (23), (24) соответствует обычная ПВ с $V_p < c$. При $\varepsilon'' \rightarrow 0$ формулы (23), (24) дают значение для вещественного корня уравнения (6), соответствующего обычной ПВ, распространяющейся над границей раздела вакуум–плазма без затухания: $K_1 = \sqrt{\varepsilon'/(1 + \varepsilon')} > 1$, $K_2 = 0$. Никаких сомнений относительно физического смысла этой волны нет.

Совершенно другая ситуация имеет место для корней уравнения (6) в области $\varepsilon' > 1$ и $\varepsilon'' \neq 0$, т.е. корней, которые бесконечно близко подходят к положительной полуоси ε' , но не сливаются с ней. В последнем случае, как говорилось в разделе 2, уравнение (6) удовлетворяться не будет. Но каким бы малым ни было значение ε'' , уравнение (6) будет удовлетворяться, и это решение, как хорошо видно из (23) и (24), будет соответствовать полю слабозатухающей ПВ ($K_2 \rightarrow 0$), у которой $V_p > c$, так как $K_1 < 1$.

Это полный физический абсурд, поскольку хорошо известно, что никаких ПВ над границей раздела вакуум–слабо поглощающий диэлектрик существовать не может. Если бы это было возможным, такие эффекты были бы давно замечены в оптике. Физическая причина отсутствия ПВ на границе вакуум–слабо поглощающий диэлектрик та же, что и в случае границ вакуум–морская

вода, вакуум–земной грунт. Из формулы (23) в пределе исчезающе малых потерь имеем $K_1 \approx \sqrt{\varepsilon'/(1 + \varepsilon')}$. Отсюда следует, что при $\varepsilon' > 1$ групповая скорость $V_g > c$! Точно такой же результат мы получим и для металлов в рентгеновской области частот.

Избавиться от этих противоречий можно очень легко. Для этого нужно только признать, что вся область (причём без изъятий) справа от разграничительной кривой, на которой $V_p = c$ и которая показана на рисунке, не имеет никакого отношения к физическим поверхностным волнам над границей раздела двух соответствующих сред, волнам, способным свободно распространяться вдоль этой границы, оторвавшись от источника.

Этот общий вывод захватывает оба случая, при которых реализуются малые потери: больших и малых значений ε'' . В первом случае речь идёт о ПВ над границей раздела вакуум–морская вода, вакуум–земной грунт, а во втором случае — о ПВ над границей раздела вакуум–слабо поглощающий диэлектрик. Физическая аргументация в обоих случаях одна и та же: $V_g > c$. Однако, если во втором случае никаких вопросов не возникает, то в первом случае они есть и такую ситуацию желательно исправить.

5. Кинетическая модель плазмopodobной среды

В настоящем разделе рассмотрим простейшую реалистическую модель среды, описывающую в противоположных пределах модели электронно-ионной плазмы и металла. При этом покажем, что для такой модельной среды действительная часть диэлектрической проницаемости всегда отрицательна. Именно в плазме и металле наблюдаются поверхностные волны в радио-, УКВ- и СВЧ-диапазонах. Рассмотрим так называемую лоренцевскую модель плазмopodobной среды, учитывающую только упругое рассеяние электронов на ионах (либо на ионной решётке). Она количественно оправдана в случае многозарядных ионов, когда рассеянием электронов на электронах можно пренебречь и записывать кинетическое уравнение для электронной функции распределения в виде (см. [26], гл. 3)

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = \frac{v_i}{2} \frac{\partial}{\partial v_i} (v^2 \delta_{ij} - v_i v_j) \frac{\partial f_e}{\partial v_j}, \quad (25)$$

где $v_i \equiv 4\pi e^2 e_i^2 N_i L / m^2 v^3$. Исходя из этого уравнения найдём диэлектрическую проницаемость для стационарной и однородной плазмopodobной среды в отсутствие внешних полей и с равновесным распределением электронов $f_0(p)$. Пренебрежём пространственной дисперсией, поскольку интересуемся быстрыми волнами, скорость которых намного превосходит тепловую скорость электронов. Для малого монохроматического возмущения функции распределения,

$$f_e = f_0 + \delta f_e \exp(-i\omega t), \quad (26)$$

из (25) получим

$$-i\omega \delta f_e + \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{v_i}{2} \frac{\partial}{\partial v_i} (v^2 \delta_{ij} - v_i v_j) \frac{\partial \delta f_e}{\partial v_j}. \quad (27)$$

Решение этого уравнения легко находится и записывается в виде

$$\delta f_e = -\frac{i e \mathbf{E} \partial f_0 / \partial \mathbf{p}}{\omega + i \nu_i}. \quad (28)$$

Подставляя это выражение в формулу для индуцированного возмущением тока

$$J_i = e \int d\mathbf{p} v_i \delta f_e = \sigma \delta_{ij} E_j, \quad (29)$$

находим проводимость и затем диэлектрическую проницаемость среды:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} = 1 + \frac{4\pi e^2}{3\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v^2 \partial f_0 / \partial \tilde{\varepsilon}}{\omega + i \nu_i}, \quad (30)$$

где $\tilde{\varepsilon} = p^2/2m$ — энергия электрона.

Интеграл (30) легко вычисляется в случае вырожденного распределения Ферми, $f_0 = f_F$, когда $\partial f_F / \partial \tilde{\varepsilon} = -\delta(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_F)$. Здесь $\varepsilon_F = p_F^2/2m$ — энергия Ферми, а p_F — импульс Ферми для электронов. В результате вычислений получаем хорошо известную формулу [29]:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i \nu_{iF})}, \quad (31)$$

где $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 N_e / m}$ — ленгмюровская частота электронов, а $\nu_{iF} = 4\pi e^2 e_i^2 N_i L / m^2 v_F^3$ — частота столкновений электронов.

В случае максвелловского распределения, $f_0 = f_M$, интеграл можно свести к специальной функции, которая известна в асимптотических пределах. Поэтому сразу приведём эти предельные значения [29]³:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_{ei}}{\omega} \right) \quad \text{при } \omega \gg \nu_{ei}, \quad (32)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu_{ei}} \frac{32}{3\pi} \left(1 + i \frac{105\omega}{16\pi \nu_{ei}} \right) \quad \text{при } \omega \ll \nu_{ei}, \quad (33)$$

где

$$\nu_{ei} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}}. \quad (34)$$

Из выражений (32) и (33) видно, что в плазменной области частот, когда $\omega \gg \nu_{ei}$, действительная часть диэлектрической проницаемости при $\omega^2 \ll \omega_{Le}^2$ является большой отрицательной величиной. И именно в этой области частот возможно существование слабо поглощающихся поверхностных волн на поверхности плазмы [26]. В обратном же пределе большой частоты столкновений диэлектрическая проницаемость обладает большой мнимой частью в условиях, когда $\omega_{Le}^2 \gg \omega \nu_{ei}$, причём возможность существования поверхностной волны, как уже было показано, зависит от знака действительной части диэлектрической проницаемости, которая определяется выражениями

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\nu_{iF}^2}, \quad \varepsilon' = 1 - \frac{105\omega_{Le}^2}{3\pi^2 \nu_{ei}^2} \quad (35)$$

³ Отметим, что формула (31) не учитывает вырожденность состояний электронов при рассеянии. Учёт вырожденности электронов приводит в этой формуле к замене $\nu_{eF} \rightarrow \nu_{eF} T_e / \varepsilon_F$, $\varepsilon_F = m v_F^2 / 2$ — энергия Ферми.

соответственно для вырожденных и невырожденных электронов. Эти величины по условиям применимости газового приближения имеют отрицательные и большие по модулю значения [26, 29]⁴.

Следует, однако, отметить, что мы рассмотрели плазмopodobные среды, описываемые классической теорией Власова с интегралом столкновений Ландау, в лоренцевской модели. В случае плохих проводников (например, морской воды либо полупроводников и полуметаллов с малым числом носителей), когда по каким-либо причинам в определённой области частот при достаточно большой проводимости вклад в действительную часть диэлектрической проницаемости оказывается положительным, быстрая поверхностная волна существовать не может.

В заключение заметим, что возможно возражение о необоснованности введения групповой скорости для времён, превосходящих время затухания амплитуды волны. Вопрос о скорости распространения энергии волны с комплексной частотой, как это может иметь место в случае уравнения (6), в теории волн решается путём исследования распывания волнового пакета в вакууме (см. [31], гл. 4 и 5).

При этом показывается, что именно величина $\text{Re}(\partial\omega/\partial k)$ характеризует скорость распространения энергии пакета, т.е. является групповой скоростью волны и не может превышать скорость света в вакууме. Величина $\text{Re}(\partial\omega/\partial k)$ характеризует скорость потока энергии поля вдоль границы раздела сред. Если в нижней среде имеется диссипация энергии, то снаружи существует также нормальная компонента её потока с направлением к нижней среде, величина этой компоненты определяет меру поглощения поля ПВ средой. Скорость этого потока, как и поглощение поля средой, пренебрежимо малы [32].

6. Краткие выводы

Из изложенного следует, что по крайней мере в двух предельных случаях — предельно большого (вакуум — морская вода, вакуум — металл) и предельно малого (вакуум — плазма, вакуум — диэлектрик) значений мнимой части диэлектрической проницаемости подстилающего полупространства, — когда вдоль границы двух сред могла бы распространяться слабо затухающая поверхностная волна, имеет место синхронизм перехода фазовой и групповой скоростей волны через скорость света (в вакууме).

Как только фазовая скорость поверхностной волны становится больше скорости света в вакууме, её групповая скорость также начинает превышать скорость света. Таким образом, в той области, где фазовая скорость ПВ больше скорости света, эта волна существовать не может.

Область, в которой реализуется случай поверхностной волны с фазовой скоростью, меньшей скорости света в вакууме, характеризуется отрицательными значениями вещественной части диэлектрической проницаемости подстилающей среды, поэтому поверхностные волны могут существовать на границе раздела вакуум — плазма

⁴ Строго говоря, в (35) вместо единицы должна стоять величина ε_0 , обусловленная вкладом рассеяния поля на связанных электронах [30]. Однако $\varepsilon_0 \neq 1$ лишь в оптической области частот и $\varepsilon_0 > 5-7$.

и вакуум – металл. И наоборот, они не могут существовать на границе раздела вакуум – слабо поглощающий диэлектрик и вакуум – морская вода, вакуум – земной грунт, так как вещественная часть диэлектрической проницаемости в этих средах больше нуля.

Таким образом, "волна Ценнека" как волна, которая по своим математическим свойствам могла бы распространяться над земной или морской поверхностью, с физической точки зрения представляет собой волну-призрак.

Эта волна в истории естествознания должна занять такое же место, как флогистон, электрические жидкости и тому подобные понятия, которые постепенно, благодаря научному прогрессу, были вытеснены из реальной физики, но заняли подобающее им место в истории науки.

Авторы благодарят В.П. Силина и В.В. Шевченко за обсуждения.

Список литературы

1. Marconi G *Elect. World* **38** 1023 (1901)
2. Kennely A E *Elect. World* **39** 473 (1902)
3. Heaviside O, in *Encyclopedia Britannica* Vol. 33 (London: A. & C. Black, 1902) p. 213
4. Zenneck J *Ann. Physik* **328** 846 (1907)
5. Sommerfeld A *Ann. Physik* **333** 665 (1909)
6. Альперт Я Л *Распространение электромагнитных волн и ионосфера* 2-е изд. (М.: Наука, 1972) [Al'pert Ya L *Radio Wave Propagation and the Ionosphere* 2nd ed. (New York: Consultants Bureau, 1973, 1974)]
7. Краснушкин П Е, Яблочкин Н А *Теория распространения сверхдлинных волн* 2-е изд. (М.: ВЦ АН СССР, 1963)
8. Sommerfeld A *Math. Ann.* **47** 317 (1896)
9. Башкуев Ю Б, Хаштанов В Б, Дембелов М Г *Письма в ЖТФ* **36** (3) 88 (2010) [Bashkuev Yu B, Khaptanov V B, Dembelov M G *Tech. Phys. Lett.* **36** 136 (2010)]
10. Gong M, Jeon T-I, Grischkowsky D *Opt. Express* **17** 17088 (2009)
11. Зон В Б и др. *УФН* **181** 305 (2011) [Zon V B et al. *Phys. Usp.* **54** 291 (2011)]
12. Weyl H *Ann. Physik* **365** 481 (1919)
13. Fock V *Ann. Physik* **409** 401 (1933)
14. Van der Pol B *Physica* **2** 843 (1935)
15. Felsen L B, Marcuvitz N *Radiation and Scattering of Waves* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1973) [Фелсен Л, Маркувиц Н *Излучение и рассеяние волн* (М.: Мир, 1978)]
16. Sommerfeld A *Ann. Physik* **386** 1135 (1926)
17. Дацко В Н, Копылов А А *УФН* **178** 109 (2008) [Datsko V N, Korylov A A *Phys. Usp.* **51** 101 (2008)]
18. Кукушкин А В *УФН* **179** 801 (2009) [Kukushkin A V *Phys. Usp.* **52** 755 (2009)]
19. Шевченко В В *Плавные переходы в открытых волноводах* (М.: Наука, 1969) [Shevchenko V V *Continuous Transitions in Open Waveguides* (Boulder, Colo.: Golem Press, 1971)]
20. Кукушкин А В *УФН* **163** (2) 81 (1993) [Kukushkin A V *Phys. Usp.* **36** 81 (1993)]
21. Кукушкин А В *Изв. вузов. Радиофиз.* **33** 1138 (1990) [Kukushkin A V *Radiophys. Quantum Electron.* **33** 912 (1990)]
22. Кукушкин А В *Изв. вузов. Радиофиз.* **33** 1242 (1990) [Kukushkin A V *Radiophys. Quantum Electron.* **33** 835 (1990)]
23. Кукушкин А В, Дисс. ... канд. техн. наук (Н. Новгород: НГТУ, 1995)
24. Petrillo L et al. *Prog. Electromagn. Res. M* **13** 17 (2010)
25. Береговой загоризонтный радар поверхностной волны (БЗГР) "Подсолнух-Э", http://www.rusarmy.com/pvo/pvo_vvs/rls_bzgr_podsolnuh-e.html; <http://www.niidar.ru/item33/>
26. Alexandrov A F, Bogdankevich L S, Rukhadze A A *Principles of Plasma Electrodynamics* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
27. Иларионов Ю А, Ермолаев А И, Кукушкин А В *Радиотехника и электроника* **57** 413 (2012) [Ilarionov Yu A, Ermolaev A I, Kukushkin A V *J. Commun. Technol. Electr.* **57** 376 (2012)]
28. Кукушкин А В, Зотов А В *Датчики и системы* (12) 39 (2011) [Kukushkin A V, Zotov A V *Automation Remote Control*, in press]
29. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Атомиздат, 1961)
30. Бежанов С Г, Канавин А П, Урюпин С А *Квантовая электроника* **41** 447 (2011) [Bezhanov S G, Kanavin A P, Uryupin S A *Quantum Electron.* **41** 447 (2011)]
31. Кузелев М В, Рухадзе А А *Методы теории волн в средах с дисперсией* (М.: Физматлит, 2007); Kuzelev M V, Rukhadze A A *Methods of Wave Theory in Dispersive Media* (Hackensack, NJ: World Scientific, 2010)
32. Рухадзе А А, Рухадзе К З *Инженерная физика* (4) 21 (2011)

On existence conditions for a fast surface wave

A.V. Kukushkin

Nizhny Novgorod State Technical University,
ul. Minina 24, 603600 Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: avkuku@gmail.com

A.A. Rukhadze, K.Z. Rukhadze

A.M. Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Vavilova 38, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. +7 (499) 135 02 47. E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

Conditions are obtained for the existence of a fast-moving (fast-near the speed of light in vacuum) surface electromagnetic wave on the flat interface between vacuum and an isotropic dissipative medium with permittivity $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$. The interfaces considered include vacuum – seawater, vacuum – metal, vacuum – plasma, and vacuum – dielectric. Conditions for the existence of negligibly damped surface waves are considered for extremely high (vacuum – seawater, vacuum – metal) and very low (vacuum – plasma, vacuum – dielectric) ε'' values. It is shown that, at least in these two limiting cases the phase wave velocity V_p and the group wave velocity V_g pass synchronously through the vacuum light speed c , which can be considered the reason why surface waves exist at the interface between vacuum and collisionless plasma (with $\varepsilon' < -1$, $V_{p,g} < c$), and do not at the interface between vacuum and a weakly absorbing dielectric (with $\varepsilon' > 1$, $V_{p,g} > c$). In the first limiting case, it is shown that both the phase and group velocities pass c at $\varepsilon' = -3/4$, implying that a surface wave exists at the vacuum – metal interface (with $\varepsilon' < -3/4$), but that a surface wave (Zenneck's wave) cannot exist at the vacuum – sea water interface (with $\varepsilon' > -3/4$).

PACS numbers: 41.20.Jb, **78.68. + m**

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211f.1205

Bibliography — 32 references

Received 27 March 2011, revised 14 July 2011

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (11) 1205 – 1215 (2012)

Physics – Uspekhi **55** (11) (2012)