

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

## Поиск негауссности в наблюдательных данных по реликтовому микроволновому фону

О.В. Верходанов

*Даётся обзор методов поиска негауссности в данных миссии WMAP. Обсуждаются проблемы связанные с этим поиском анализа данных реликтового излучения. К настоящему времени указания на отклонение от гауссности данных микроволнового фона получены различными методами в нескольких диапазонах мультиполей. Различные подходы при поиске негауссности в данных по реликтовому фону чувствительны к различным сторонам этого явления, которое иногда может быть обусловлено первичной негауссностью, а иногда — остаточным проявлением фоновых излучений Галактики и/или трудно учитываемыми систематическими ошибками, оставшимися после анализа наблюдательных данных.*

PACS numbers: 95.75.-z, 98.70.Vc, 98.80.-k

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211d.1177

**Содержание**

1. Введение (1177).
2. Карта реликтового излучения (1179).
3. Фазовый анализ (1181).
  - 3.1. Цветовые фазовые диаграммы и негауссность на высоких мультиполах ( $100 < \ell \leq 400$ ).
  - 3.2. Круговой статистический анализ и негауссность на мультиполах с  $10 \leq \ell \leq 50$ .
  - 3.3. Корреляции фаз соседних мультиполей и случайное блуждание в пространстве фаз.
4. Нестабильность восстановления космического микроволнового фона на низких мультиполах ( $2 \leq \ell \leq 10$ ) (1183).
5. Мозаичная корреляция (1185).
6. Мультипольные векторы (1186).
7. Квадрупольная статистическая анизотропия (1187).
8. Функционалы Минковского (1187).
9. Сферические вейвлеты (1189).
  - 9.1. Негауссов экспесс.
  - 9.2. Холодное пятно.
  - 9.3. Нидлеты.
10. Угловой спектр мощности (1190).
11. Заключение (1191).

Список литературы (1192).

**1. Введение**

В стандартном космологическом сценарии с Большим взрывом и простой инфляцией [1–5] квантовые флуктуации скалярного поля генерируют неоднородности в распределении видимой и тёмной материи [6–10], что приводит к флуктуациям в реликтовом излучении Все-

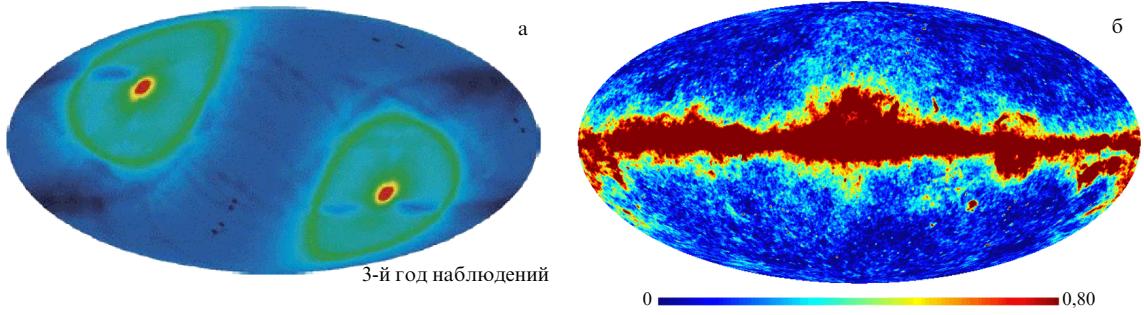
лennой. Причём ожидается — и это подтверждается наблюдениями, что флуктуации температуры и поляризации реликтового излучения, или космического микроволнового фона (CMB — Cosmic Microwave Background), с определённой степенью точности являются гауссовыми случайными полями, статистически изотропными в пространстве. Тем не менее некоторые модели предсказывают небольшие, но всё же заметные отклонения от гауссовой статистики сигнала и/или статистической изотропии, которые в принципе могут быть вызваны рядом причин. В инфляционной теории сравнительно сильная негауссность возникает в моделях со сложной инфляцией [11–16] (например, если имеется нелинейная связь между классическими флуктуациями скалярного поля, генерируемыми на инфляционной стадии, и наблюдаемым полем флуктуаций плотности вещества) (см. также [17–22]), а статистическая анизотропия может быть вызвана анизотропным расширением на инфляционной стадии [23–30], связанным, например, с наличием классических векторных полей. Другими интересными с точки зрения космологии источниками негауссости и статистической анизотропии могут быть нетривиальная топология пространства [31–35], топологические дефекты [36–39], анизотропное расширение [40, 41], первичное магнитное поле [42–46] и т.д. В связи с появлением новых данных на полной сфере [47] вопрос поиска и объяснения негауссовых свойств реликтового излучения становится особенно актуальным.

Негауссность и статистическая анизотропия являются довольно близкими с точки зрения космологии, хотя и далеко не тождественными понятиями. Далее при обсуждении возможных отклонений от простой картины гауссовых и статистически изотропных флуктуаций мы для краткости будем говорить о негауссости, хотя ряд свойств карт СМВ, таких как соосность мультиполей (см. разделы 3.3 и 6), следует обсуждать скорее в терминах статистической анизотропии.

**О.В. Верходанов.** Специальная астрофизическая обсерватория РАН, 369167 Нижний Архыз, Зеленчукский район, Карачаево-Черкесская Республика, Российская Федерация

E-mail: vo@sao.ru

Статья поступила 13 июля 2011 г., после доработки 1 декабря 2011 г.



**Рис. 1.** (См. в цвете онлайн.) (а) Пример обусловленного эклиптической координатной системой негауссова эффекта, который проявляется в картах чувствительности космического аппарата WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). (б) Пример обусловленного галактической координатной системой негауссова эффекта, связанного с излучением Галактики, которое приходит в основном из галактической плоскости, — показана карта синхротронного излучения в К-канале WMAP.

Надёжное установление негауссости, вызванной процессами, происходившими в ранней Вселенной, имело бы важнейшее значение для космологии. Различные космологические сценарии приводят к разным формам негауссости возмущений плотности (см., например, [48–58] и приведённые там ссылки). Например, возникающие трёхточечные и высшие корреляционные функции имеют самую разнообразную зависимость от координат или волновых векторов. Поэтому исследование негауссости может помочь выделить жизнеспособные космологические модели. При этом исследование флуктуаций СМВ обоснованно считается наиболее эффективным способом поиска негауссости [59]. У многообразия возможных форм негауссости есть, однако, и обратная сторона: *a priori* неизвестно, какой сигнал следует искать и в каких характеристиках СМВ негауссость проявляется сильнее всего. Дело осложняется и тем, что к негауссости СМВ могут приводить также эффекты, связанные с поздней Вселенной, такие как линзирование СМВ [60, 61], неучтённые точечные источники и др.

Есть ещё две причины, приводящие к негауссости в реальном сигнале, возникающем при исследовании СМВ. Это совокупность систематических ошибок, обусловленных наблюдательными эффектами и/или эффектами обработки данных (например, негауссовой формой диаграммы направленности антенны, особенностями наблюдений микроволнового фона в плоскости эклиптики и др.) и нестабильностью алгоритмов разделения компонент сигнала, приводящая к остаточному загрязнению галактическими фоновыми компонентами (рис. 1), которые на малых угловых масштабах плохо изучены [62].

Для поиска и анализа негауссовых свойств температуры СМВ развиты как методы, использующие само распределение флуктуаций температуры по небесной сфере  $\Delta T(\theta, \phi)$ , где  $\theta, \phi$  — углы в полярной системе координат, так и методы, основанные на разложении флуктуаций температуры по сферическим гармоникам:

$$\Delta T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (1)$$

где  $a_{\ell m}$  — комплексные величины, обладающие свойством

$$a_{\ell m}^* = a_{\ell, -m}, \quad (2)$$

следующим из действительности флуктуаций температуры  $\Delta T(\theta, \phi)$ . Теоретически связь между первичными неоднородностями, представляющими собой адиабатические скалярные возмущения, и коэффициентами  $a_{\ell m}$  является линейной [63]:

$$a_{\ell m} = (-i)^{\ell} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}) g_{T\ell}(k) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (3)$$

где  $\Phi(\mathbf{k})$  описывает первичное возмущение плотности (точнее, гравитационного потенциала) в фурье-пространстве,  $g_{T\ell}(k)$  — передаточная функция,  $\hat{\mathbf{k}}$  — единичный вектор вдоль направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Линейная связь имеется и между флуктуациями температуры  $\Delta T(\theta, \phi)$  и первичными флуктуациями  $\Phi(\mathbf{k})$ . Полная функция переноса излучения  $g_{T\ell}(k)$  может быть рассчитана с помощью программы CMBFAST [64]. Простая линейная связь позволяет, по крайней мере в принципе, связать статистику сигнала СМВ со статистикой первичных возмущений: если первичные флуктуации  $\Phi(\mathbf{k})$  негауссовые, то возможно наблюдение негауссости и в реликтовом излучении. Для чувствительных обзоров всего неба, например миссий WMAP<sup>1</sup> и Planck<sup>2</sup>, уже можно искать проявление отклонений от гауссовой статистики сигнала. Подчеркнём, что выражение (3) справедливо не только для адиабатических первичных возмущений, но и для мод постоянной кривизны [63] (со своими передаточными функциями).

Отметим один момент, о котором необходимо сказать при обсуждении проблем негауссости СМВ, — он связан с расчётом углового спектра мощности  $C(\ell)$ . По определению

$$C(\ell) = \frac{1}{2\ell + 1} \left( |a_{\ell 0}|^2 + 2 \sum_{m=1}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 \right), \quad (4)$$

а коэффициенты  $a_{\ell m}$  получаются обращением карты в гармоники:

$$a_{\ell m} = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Delta T(x, \phi) Y_{\ell m}^*(x, \phi). \quad (5)$$

В выражении (4) предполагается гауссово распределение  $2\ell + 1$  коэффициентов  $a_{\ell m}$ , квадраты амплитуд которых

<sup>1</sup> <http://lambda.gsfc.nasa.gov>

<sup>2</sup> <http://www.rssd.esa.int/Planck/>

усредняются с одинаковыми весами. В этом случае для двухточечного коррелятора справедливо (усреднение идёт по ансамблю Вселенных)

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_\ell \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'}. \quad (6)$$

Для негауссовых данных при усреднении на заданном  $\ell$  смысл величины  $C_\ell$  становится неочевидным.

Простейшей и наиболее хорошо изученной величиной, в которой может проявляться негауссовость флуктуаций СМВ, является трёхточечная корреляционная функция или её гармонический аналог — биспектр

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3} \rangle. \quad (7)$$

Биспектр весьма чувствителен к некоторым формам негауссности, считающимся "стандартными". К последним относят так называемую локальную форму, получаемую в предположении, что первичные флуктуации обладают нелинейностью, локальной в координатном пространстве [63]:

$$\Phi(x) = \Phi_L(x) + f_{NL} (\Phi_L^2(x) - \langle \Phi_L^2(x) \rangle), \quad (8)$$

где  $\Phi_L(x)$  обозначает линейное гауссово поле,  $\langle \Phi_L(x) \rangle = 0$ ,  $f_{NL}$  — константа, описывающая нелинейность в виде квадратичной поправки к возмущениям гравитационного потенциала (кривизны). Такая форма негауссности действительно возникает в некоторых инфляционных моделях, использующих дополнительное скалярное поле (curvaton) [12, 65, 66] и/или нетривиальную динамику постинфляционного разогрева (modulated reheating) [14, 15]. "Стандартными" считаются также "равносторонняя" [67] и "ортогональная" формы [68] негауссности. Исследованиям этих, а также некоторых других форм негауссности команда космической миссии WMAP посвятила несколько работ [22, 69–72], причём основным инструментом являлся именно угловой биспектр температуры СМВ. Авторы [72] установили, что результаты анализа данных за семь лет наблюдений миссии WMAP согласуются с гипотезой о гауссности первичных флуктуаций на уровне достоверности 95 %, и после комбинирования своих результатов с данными SDSS (Sloan Digital Sky Survey) ( $-29 < f_{NL} < 70$  [73]) нашли, в частности, что  $-5 < f_{NL} < 59$ .

В зависимости от исследуемых статистических свойств сигнала СМВ, параметра разрешения  $\ell$ , описывающего угловые масштабы на сфере, а также поставленных целей применяются различные подходы при изучении особенностей распределения излучения на небесной сфере. За годы, прошедшие после появления данных миссии WMAP [69, 74–79], было объявлено о целом ряде отклонений в распределении сигнала СМВ от гауссости и статистической изотропии [80–98]. Для проверки и изучения негауссости было предложено несколько тестов на основе фазового анализа, мультипольных векторов, функционалов Минковского, вейвлетов и нидлетов, биспектра и триспектра и др. В настоящей статье мы рассмотрим некоторые из этих методов (применимых в упомянутых выше работах к данным миссии WMAP), главное преимущество которых заключается в многоразовом и многочастотном полном покрытии неба. Именно этот факт дал возможность широко применить описанные в настоящей статье методы.

Необходимо отметить, что наблюдения космического микроволнового фонового излучения космической миссии WMAP NASA и дальнейшее их представление астрономическому сообществу в архиве наблюдений WMAP стало революционным шагом в современной космологии.

В заключение этого раздела отметим, что окончательного ответа на вопрос о наличии или отсутствии негауссовых особенностей в статистике первичных возмущений плотности пока не получено. Некоторые особенности, которые мы обсудим в этой статье, вполне могут быть вызваны упомянутыми выше систематическими эффектами и нестабильностью алгоритмов разделения компонент, другие могут быть просто статистическими флуктуациями. В последнем случае, как подчёркивает команда WMAP [69], оценки статистической значимости аномалий затруднены тем, что они были наблюдены *a posteriori* и нередко с использованием параметров, значения которых специально подбирались для того, чтобы добиться максимального негауссова сигнала.

## 2. Карта реликтового излучения

Измеряемый в эксперименте сигнал содержит, помимо СМВ, вклады галактических фоновых компонент и галактических и внегалактических радиоисточников. Это обстоятельство можно учесть, накладывая маски, т.е. исключая из рассмотрения определённые участки небесной сферы (22 % для маски KQ85y7, используемой для данных, собранных за семь лет миссии WMAP [99]). Можно, однако, восстановить сигнал СМВ со всей небесной сферы, используя результаты многочастотных наблюдений WMAP. Один из методов построения полной карты температуры СМВ представляет собой комбинацию наблюдательных данных на разных частотах с домножением на некоторые коэффициенты, которые позволяют в результате удалить галактический сигнал и тем самым выделить микроволновый реликтовый фон [77]. В таком подходе используется идея о том, что спектры излучения компонент галактического фона (а именно синхротронного, свободно-свободного излучений и излучения пыли) отличаются от спектра СМВ. Поскольку комбинация каналов в миссии WMAP производится без привлечения наблюдений в других экспериментах, этот метод получил название "внутренняя линейная комбинация" (ILC — Internal Linear Combination) и созданная с его помощью карта соответственно называется картой ILC. Коэффициенты можно определить минимизацией дисперсии в результирующей карте, приравнив их сумму единице, для того чтобы сохранить общую нормировку сигнала СМВ.

Для описания этой процедуры отметим прежде всего, что по результатам моделирования [77] установлено, что инструментальный шум не оказывает существенного влияния на ситуацию, поскольку даёт смешение в оценке сигнала в плоскости Галактики лишь порядка 10 мК. В простом случае, когда инструментальным шумом можно пренебречь, а фоновые компоненты имеют одинаковый спектр в исследуемой области и различаются в разных её местах лишь температурой, искомую ILC-температуру можно записать в виде линейной комбинации сигналов карт на различных часто-

так  $v_i$ :

$$\begin{aligned} T_{\text{ILC}}(p) &= \sum_i \zeta_i T_i(p) = \sum_i \zeta_i [T_c(p) + S_i T_f(p)] = \\ &= T_c(p) + \Gamma T_f(p). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $T_i(p) \equiv T(v_i, p)$  — карта наблюдаемого сигнала на частоте  $v_i$ ,  $p$  — некоторый пиксель изображения (минимальная область карты с измеренной температурой), карта сигнала  $T_i(p) = T_c(p) + S_i T_f(p)$  представлена в виде суммы карт СМВ  $T_c(p)$  и фоновой компоненты  $S_i T_f(p)$ , коэффициент  $S_i \equiv S(v_i)$  описывает суммарный частотный спектр фонового излучения,  $T_f(p)$  — температурное распределение фонового излучения. Коэффициенты  $\zeta_i$ , которые требуется определить, подчиняются нормировочному условию  $\sum_i \zeta_i = 1$ . В (9) введено обозначение  $\Gamma \equiv \sum_i \zeta_i S_i$ .

Для определения коэффициентов  $\zeta_i$  проводится минимизация дисперсии  $T_{\text{ILC}}(p)$ . Для этой дисперсии имеем [77]

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ILC}}^2 &= \langle T_{\text{ILC}}^2(p) \rangle - \langle T_{\text{ILC}}(p) \rangle^2 = \\ &= \langle T_c^2 \rangle - \langle T_c \rangle^2 + 2\Gamma[\langle T_c T_f \rangle - \langle T_c \rangle \langle T_f \rangle] + \\ &+ \Gamma^2[\langle T_f^2 \rangle - \langle T_f \rangle^2] = \sigma_c^2 + 2\Gamma\sigma_{cf} + \Gamma^2\sigma_f^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по пикселям выбранной области. В результате минимизации  $\sigma_{\text{ILC}}^2$ ,

$$0 = \frac{\delta \sigma_{\text{ILC}}^2}{\delta \zeta_i} = 2 \frac{\delta \Gamma}{\delta \zeta_i} \sigma_{cf} + 2\Gamma \frac{\delta \Gamma}{\delta \zeta_i} \sigma_f, \quad (11)$$

получим  $\Gamma = -\sigma_{cf}/\sigma_f^2$  и

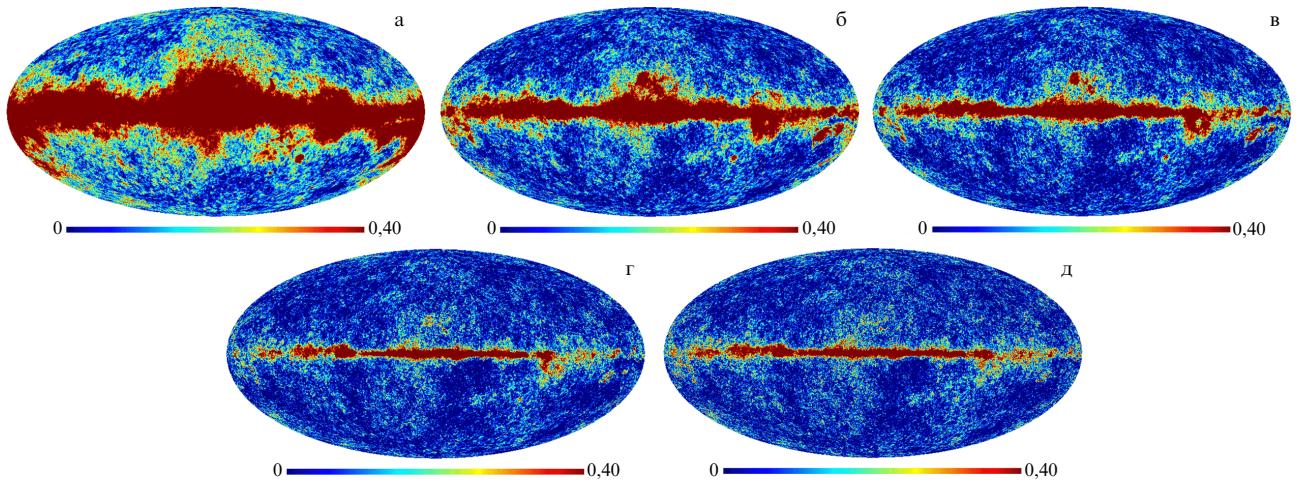
$$T_{\text{ILC}}(p) = T_c(p) - \frac{\sigma_{cf}}{\sigma_f^2} T_f(p).$$

В идеальном случае, когда корреляция между СМВ и фоном отсутствует, т.е.  $\sigma_{cf} = 0$ , карта ILC совпадает с картой СМВ. В действительности, как подчёркивают авторы [77], карта ILC смещена в сторону уменьшения

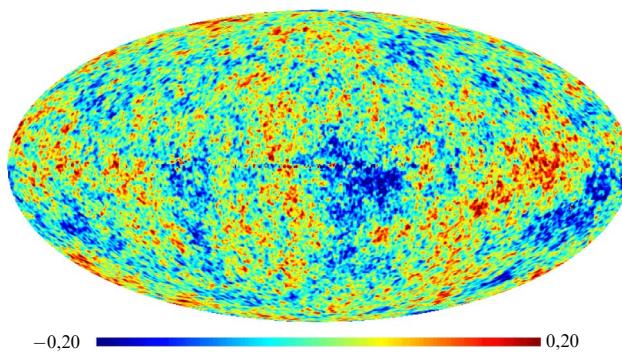
корреляции между сигналом СМВ и сигналом фоновых компонент.

Отметим, что существуют различные вариации метода ILC как в пиксельном, так и в гармоническом пространстве (см. обзор в [100]). Области, для которых применяется метод, можно ограничить следующим образом: 1) разбивая сферу на отдельные зоны [77] (например, при анализе данных WMAP сфера разбивалась на 12 областей, большая часть которых расположена в галактической плоскости); 2) используя правила отбора усредняемых пикселов [101]; 3) задавая определённый набор гармоник [102]. Можно использовать и другие комбинации разночастотных наблюдений. В результате модификаций получаются немного различные карты. Кроме того, существуют различные версии самой процедуры построения карты внутренней линейной комбинации (например, метод Lagrange ILC — LILC [86], который демонстрирует те же результаты, что ILC). И наконец, возможно разделение компонент сигнала и построение карт СМВ с использованием других методов, таких, например, как метод максимальной энтропии (MEM — Maximum Entropy Method) [77, 103], подгонка шаблонов фоновых компонент по другим наблюдениям [77, 103], винеровская фильтрация (карта WFM (Wiener-Filtered Map) М. Тегмарка и др. [104]) или взвешенное удаление фона (карта FCM (Foreground-Cleaned Map) М. Тегмарка и др. [104]). С помощью последних Тегмарком и др. были построены карты СМВ с большим разрешением ( $\ell_{\max} = 600$ ), чем даёт WMAP. Далее мы будем преимущественно говорить о карте WMAP ILC, но коснёмся и карт, полученных другими методами.

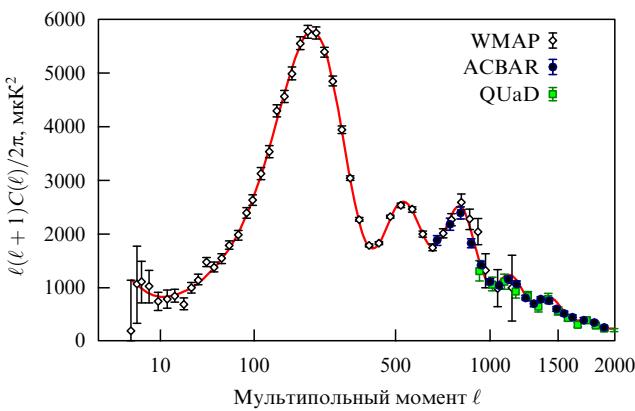
Наблюдения WMAP проводились в пяти полосах: 23 ГГц (полоса K), 33 ГГц (полоса Ka), 4 ГГц (полоса Q), 61 ГГц (полоса V) и 94 ГГц (полоса W) (рис. 2), с измерением интенсивности и поляризации. Массивы данных по итогам одного года, трёх, пяти и семи лет работы миссии предоставлялись на сайте для использования [74–79]. В результате обработки наблюдательных данных, включающей в себя регистрацию и запись временных рядов, создание карты (map-making) и пикселизацию неба, разделение компонент сигнала, и последующего анализа получены данные о распределении



**Рис. 2.** (См. в цвете онлайн.) Карты наблюдаемого микроволнового излучения в частотных каналах WMAP: (а) 23 ГГц (полоса K), (б) 33 ГГц (полоса Ka), (в) 41 ГГц (полоса Q), (г) 61 ГГц (полоса V) и (д) 94 ГГц (полоса W) по данным седьмого года наблюдений WMAP. Карты построены в галактических координатах.



**Рис. 3.** (См. в цвете онлайн.) Карта ILC СМВ, построенная в галактических координатах по данным седьмого года работы миссии WMAP (приведена с разрешением до  $\ell_{\max} = 150$ ).



**Рис. 4.** (См. в цвете онлайн.) Угловой спектр мощности  $\ell(\ell+1)C(\ell)/(2\pi)$  карты WMAP седьмого года наблюдений [72] и результаты измерения углового спектра мощности флюктуаций температуры в экспериментах ACBAR [105] и QUaD [106]. Результаты приведены для области мультиполей до  $\ell < 2000$ , в которой не столь высок вклад эффекта Зельдовича – Сюняева и точечных источников. Сплошной кривой показан модельный спектр для космологии  $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter) с параметрами, определенными на основе результатов WMAP.

анизотропии и поляризации СМВ, фоновых компонент (синхротронного и свободно-свободного излучения, излучения пыли), а также рассчитаны их спектры мощности. Построенная карта ILC WMAP сглаживалась диаграммой гауссовой формы с разрешением  $1^\circ$ . Весь архив наблюдаемых и обработанных данных доступен и представлен научному сообществу на сайте WMAP.

На рисунке 3 для не очень высоких гармоник ( $\ell \leq 150$ ) приведена карта распределения анизотропии СМВ, восстановленная методом ILC. На рисунке 4 показан угловой спектр мощности, построенный с использованием данных миссии WMAP и экспериментов ACBAR (Arc-minute Cosmology Bolometer Array Receiver) [105] и QUaD (QUEST (Q and U Extragalactic Sub-mm Telescope) at DASI) [106].

### 3. Фазовый анализ

Впервые об обнаружении негауссовых свойств в данных WMAP было объявлено в работах, в которых исследовалась статистика данных первого года работы миссии [74–76] методами фазового анализа сигнала [80–82].

Хотя после предоставления карт СМВ команда WMAP объявила [76], что выделенный сигнал является гауссовым с достоверностью 95 %, было также отмечено, что ILC-карта содержит шум со сложными свойствами ("complex noise properties")<sup>3</sup>.

Фазовый анализ сигнала опирается на тот факт, что входящие в формулу (1) мультипольные коэффициенты  $a_{\ell m}$  являются комплексными и они могут быть представлены в виде

$$a_{\ell m} = |a_{\ell m}| \exp(i\phi_{\ell m}), \quad (12)$$

где  $\phi_{\ell m}$  — фаза гармоники  $(\ell, m)$ . Из (2) следует, что при  $m = 0$  и всех  $\ell$  фазы  $\phi_{\ell, 0} = 0$ , а  $\phi_{\ell, -m} = -\phi_{\ell m}$ . Однородные и изотропные гауссова случайные поля имеют моды Фурье с независимыми распределениями вещественной и мнимой частей. Поэтому если первичные неоднородности плотности являются однородным и изотропным гауссовым полем в пространстве, то они приводят к фазам  $\phi_{\ell m}$ , независимо и равномерно распределенным в интервале  $[0, 2\pi]$  [107, 108], что как раз и соответствует соотношению (6).

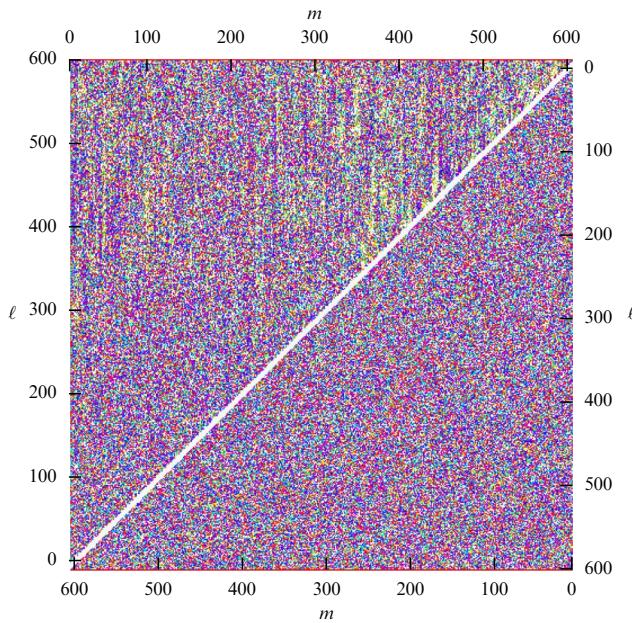
Строгое определение однородного и изотропного гауссова случайного поля требует, чтобы амплитуда имела распределение Рэлея, а распределение фазы было случайнym [109]. В то же время центральная предельная теорема гарантирует, что суперпозиция большого числа фурье-мод со случайной фазой будет гауссовой. Поэтому требование случайного и равномерного распределения фаз само по себе служит определением гауссости [107]. Если анализируемые данные негауссовые, то, как упоминалось, это может означать, что или какие-то механизмы в ранней Вселенной привели к негауссовым неоднородностям плотности, или имеются неучтённые систематические эффекты.

#### 3.1. Цветовые фазовые диаграммы и негауссость на высоких мультиполиях ( $100 < \ell \leq 400$ )

Одними из первых цветовую визуализацию фаз для демонстрации фазовых связей применили Коулз и Чанг [110]. Не вдаваясь в детали методов визуализации, отметим, что наиболее подходящим для визуализации фазы является метод цвет – насыщение – яркость (Hue – Saturation – Brightness (HSB)), позволяющий учесть особенность фазы как круговой переменной. В этом методе чистые цвета — красный, зелёный и синий — соответствуют фазам 0, 120° и 240°, а дополнительные цвета (жёлтый, голубой и фиолетовый) — промежуточным фазам 60°, 180° и 300° соответственно. При изменении фазы цвета плавно "перетекают" друг в друга, причём фиолетовый переходит в красный, что согласовано с отождествлением фаз 360° и 0.

Метод картографирования фаз был применён в работе [80] к данным СМВ с высоким разрешением, полученным Тегмарком и др. [104]. На рисунке 5 показана цветовая кодировка фазового градиента  $D_\ell \equiv \phi_{\ell+1, m} - \phi_{\ell, m}$  для карт FCM и WFM Тегмарка и др. Хотя нахождение фазового градиента для соседних мод — это наиболее примитивный способ проверки фазовых корреляций, видимое присутствие полос на фазовой карте FCM указывает на сильную связь между одинаковыми модами  $m$  соседних по  $\ell$  мультиполей. В то

<sup>3</sup> [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/m\\_products.html](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/m_products.html)



**Рис. 5.** (См. в цвете онлайн.) Цветовая фазовая диаграмма градиента  $D_\ell$  для карт FCM (верхний левый треугольник) и WFM (нижний правый). 256 цветов воспроизводят фазовые интервалы в диапазоне  $[0, 2\pi]$ , для которых фазы берутся из комплексного представления гармоник. По вертикальной оси отложены номера мультиполей  $\ell$ , по горизонтальной — моды мультиполей  $m$ ,  $m \leq \ell$ . Ввиду соотношения  $a_{\ell, m} = a_{\ell, -m}^*$  приведены только моды с неотрицательными  $m$ . (См. детали в [80].)

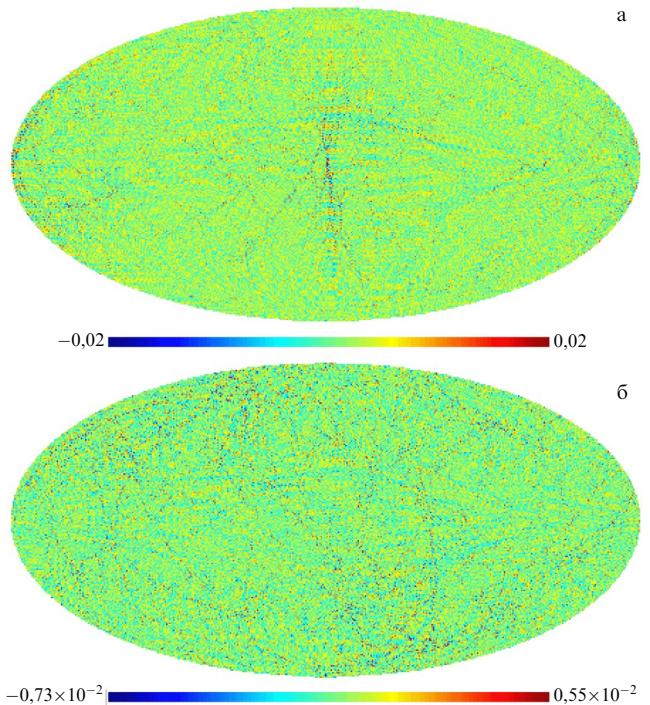
же время фазовая диаграмма для карты WFM показывает равномерное распределение фаз, совместимое с гауссостью сигнала.

Авторы [80] проверили "случайность" фаз более строгим образом, использовав моделирование и получив соответствующие статистические оценки разброса значений фаз [80, 111]. Для этого было построено 2000 симуляций случайных гауссовых полей, и в результате было обнаружено, что отклонение от гауссности для нескольких диапазонов мультиполей в области  $\ell \simeq 150, 290, 400$  и  $500$  наблюдается на уровне достоверности, превышающем 95 % [80]. Пример таких гармоник, фазы которых значительно отличаются от статистически ожидаемых ( $\ell = 350$  и  $352$  для карты FCM), приведён на рис. 6, где на карте видна перпендикулярная плоскость Галактики структура, проходящая через её центр. Это было первое обнаружение негауссости в картах миссии WMAP; такая негауссовость интерпретируется как остаточное влияние фона Галактики.

### 3.2. Круговой статистический анализ и негауссость на мультиполях с $10 \leq \ell \leq 50$

Позднее фазовые свойства карт WMAP проверялись другими методами. С использованием кластерного анализа и круговой статистики, работающей с углами, при анализе распределения фаз в работах [81, 112] были независимо продемонстрированы негауссовые свойства карт СМВ.

Были изучены фазы мультиполей из диапазона  $2 \leq \ell \leq \ell_{\max} = 50$  для карт, взятых с web-сайта WMAP. Кроме карт фоновых компонент, подготовленных командой WMAP для каждого частотного наблюдательного канала, в работах [81, 112] также исследовались пять карт, отображающих разность между сигналом в наблю-

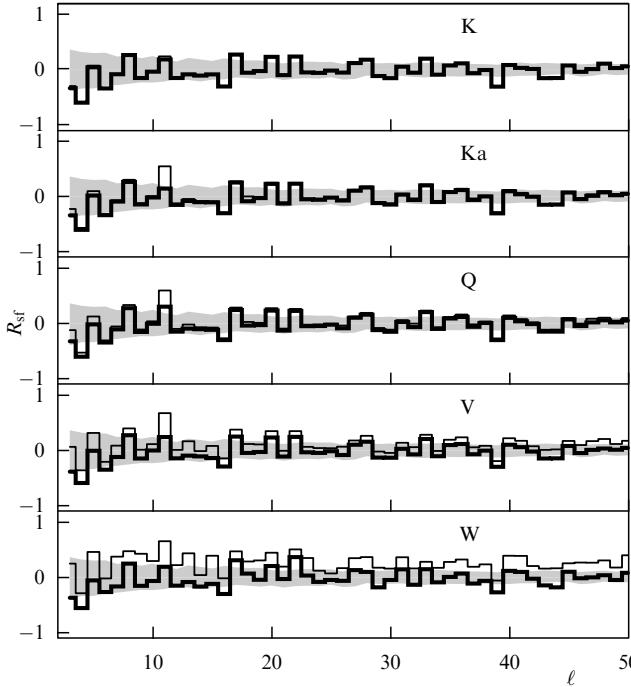


**Рис. 6.** (См. в цвете онлайн.) Вклад в вариации температуры СМВ от двух мультиполей,  $\ell = 350$  и  $352$ , для карт FCM (а) и WFM (б) в галактических координатах. Выбор мультиполей обусловлен обнаружением связи фаз для гармоник с  $\Delta\ell = 2$  в карте FCM. Видимая на FCM структура для  $\varphi \simeq 0$  и  $\pi$ , перпендикулярная плоскости Галактики и проходящая через её центр, исчезает на картах WFM, полученных винеровской фильтрацией, делая их практически гауссовыми на этих мультиполиях. (См. детали в [80].)

дательном канале (S) и сигналом ILC:  $F = S - ILC$ . Такие карты мы будем называть "вторичными фоновыми картами", в отличие от полученных при разделении компонент и представленных на сайте WMAP; последние будем называть просто "фоновыми картами". Если  $\psi_m$  и  $\phi_m$  — соответственно фазы некоторой фоновой компоненты и карты ILC для данного  $\ell$  и всех соответствующих величин  $m$ , то, следуя статистике Фишера [113] для угловых величин, можно определить круговой кросскорреляционный коэффициент в каждой mode  $\ell$ :

$$R_{sf}(\ell) = \ell^{-1} \sum_{m=1}^{\ell} \cos(\phi_m - \psi_m). \quad (13)$$

На рисунке 7 приведены рассчитанные круговые коэффициенты корреляции между данными ILC и фоновыми компонентами, а также между ILC и вторичными фондами для пяти частотных полос K–W. Как видно из рисунка, для первых трёх каналов эти коэффициенты невелики — не превышают случайного разброса ( $1\sigma$ ), полученного в 200 модельных реализациях. Видно также, что для всех частотных полос функции  $R_{sf}(\ell)$  по форме подобны друг другу, что отражает сильные корреляции между фазами во всех каналах [81]. Рисунок 7 демонстрирует также то, что корреляция между фазами ILC и вторичных фоновых компонент выглядит более значительной, чем для фонов WMAP. Таким образом, поведение (положение максимумов и минимумов) галактического фонового (без СМВ) сигнала оказывается связанным с сигналом ILC СМВ. Особенно заметно про-



**Рис. 7.** Круговой коэффициент корреляции между фазами сигнала ILC CMB и галактических компонент в каналах K – W в зависимости от номера гармоники  $\ell$ . Жирная линия соответствует результату корреляций с фазами фоновой компоненты, представленными WMAP. Тонкая линия соответствует данным фону, полученным из разности общего сигнала WMAP в заданном канале и сигнала ILC CMB. Затемнённая область показывает уровень ошибки  $1\sigma$ , определённый по результатам моделирования 200 случайных реализаций. (См. также [81, 112].)

явление корреляций в 11-м мультиполе в частотных полосах Ka, Q, V и W, а также во всём канале W, в котором излучение пыли является доминирующим. Заметим, что 11-й мультиполь принадлежит диапазону пространственных гармоник  $10 \leq \ell \leq 20$ , в котором особенно существенно излучение плоскости Галактики, приходящее из области углов  $|b| < 10^\circ$ . Всё это говорит о существовании остаточного сигнала галактических компонент в очищенному сигнале СМВ. Остаточное влияние Галактики на очищенный сигнал можно продемонстрировать даже в одномерном скане, например, на склонении  $\delta = 41^\circ$  (рис. 8) [114], где заметен неглубокий минимум температуры в карте ILC в области Галактики.

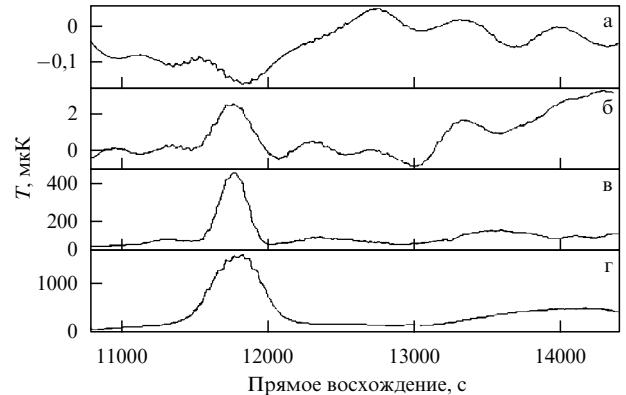
### 3.3. Корреляции фаз соседних мультиполей и случайное блуждание в пространстве фаз

Чтобы проверить статистическую независимость фаз  $\phi_{\ell,m}$  для нечётных и чётных  $\ell$ , Хансен и др. [98] использовали тригонометрические моменты:

$$Si(\ell) = \ell^{-1} \sum_{m=1}^{\ell} \sin(\phi_{\ell,m}), \quad Ci(\ell) = \ell^{-1} \sum_{m=1}^{\ell} \cos(\phi_{\ell,m}), \quad (14)$$

и рассчитывали средний угол для заданного мультиполя  $\ell$  как арктангенс отношения средних значений синуса и косинуса для мультиполей с фиксированным  $\ell$ :

$$\Theta(\ell) = \arctan \frac{Si(\ell)}{Ci(\ell)}. \quad (15)$$



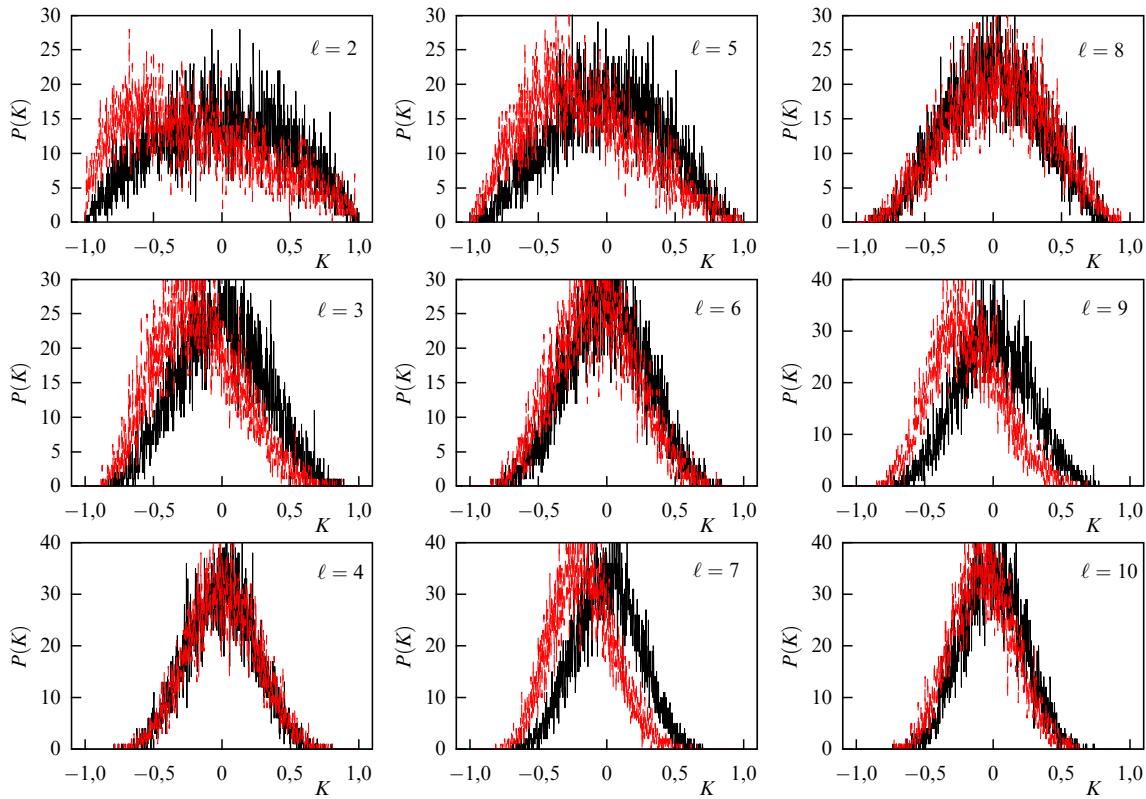
**Рис. 8.** Одномерные сканы карт WMAP: (а) ILC, (б) излучение пыли в W-канале, (в) свободно-свободное излучение в канале V и (г) синхротронное излучение в K-канале, на склонении  $\delta = 41^\circ$  в области пересечения плоскости Галактики (см. пики на рис. б–г).

При этом для однородного и изотропного случайного гауссова поля, генерируемого первичными флуктуациями, однородность в распределении фаз приводит к однородности средних углов  $\Theta(\ell)$  и отсутствию корреляций между углами  $\Theta(\ell)$ , характеризующими мультиполи с разными  $\ell$ . В то же время Хансен и др. [98] обнаружили такую корреляцию. Прежде всего они подтвердили факт соосности квадрупольной и октупольной компонент (см. раздел 6), проявляющийся в подходе работы [98] как близость значений  $\Theta(\ell)$  при  $\ell = 2$  и  $\ell = 3$ . Более того, они показали, что подобный факт (соосность) не уникален. Например, было показано, что аналогичное явление близости значений  $\Theta(\ell)$  наблюдается для фаз некоторых пар мультиполей с  $\Delta\ell = 1$  (т.е. имеется корреляция между соседними чётными и нечётными мультиполями,  $\ell = 18, 19; 28, 29; 33, 34$  и др.) в галактической системе координат, а также с  $\Delta\ell = 2$  ( $\ell = 5, 7; 23, 25; 33, 35$  и др.) в эквиполярной системе координат.

Кроме того, авторы работы [98] предложили алгоритм случайного блуждания для средних углов  $\Theta(\ell)$  и обнаружили значительное расхождение между поведением средних углов для чётных и нечётных гармоник, которое особенно чётко проявляется на карте ILC СМВ, построенной в галактической системе координат. Наряду с различиями в значениях мультипольных коэффициентов  $C_\ell$  для гармоник с чётными и нечётными  $\ell$ , о которых пойдёт речь в разделе 10, этот результат указывает на нарушение пространственной чётности в данных WMAP. Происхождение обнаруженного проявления негауссовойности авторы [98] объясняют как инструментальными, так и возможными космологическими причинами.

### 4. Нестабильность восстановления космического микроволнового фона на низких мультиполях ( $2 \leq \ell \leq 10$ )

Чтобы понять свойства кросскорреляций карт ILC-фон как возможной причины негауссовойности, был проведён [93] численный тест с использованием 10000 модельных реализаций входных карт СМВ со случайным гауссовым сигналом [86]. Из 10000 исходных карт модели СМВ в космологии  $\Lambda$ CDM (назовём их входными картами) было получено столько же карт посредством добавления фона Галактики и дальнейшего восстановления СМВ



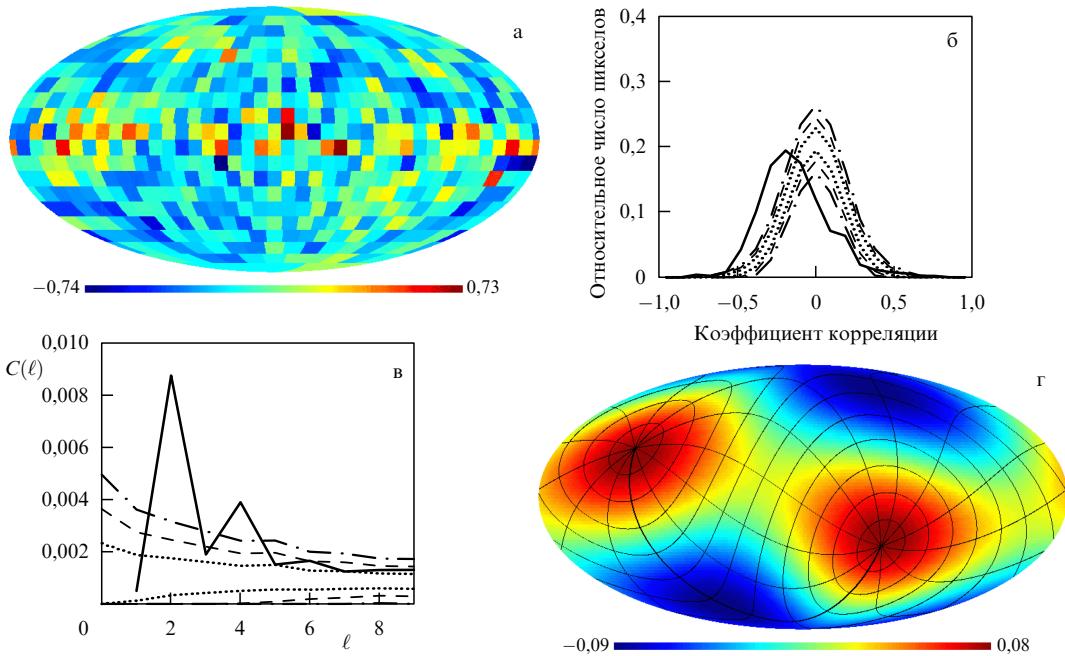
**Рис. 9.** Функция распределения  $P(K)$  для кросскорреляции случайных реализаций сигнала СМВ и фоновой компоненты в полосе V при  $\ell = 2-10$ , указанных на рисунке. Тёмная сплошная линия соответствует входному сигналу, светлая линия — выходному сигналу. (См. также [93].)

методом ILC (назовём такие карты выходными). На рисунке 9 приведены гистограммы числа событий  $P(K_\ell)$  в зависимости от величины  $K_\ell$ , являющейся коэффициентом корреляции между входной (или выходной) картой и картой фоновой компоненты для каждой симуляции и каждой гармоники  $\ell$ .

Для входной квадрупольной компоненты форма функции распределения хорошо согласуется с формой функции  $P(K) = A(1 - K^2)$ , где  $A$  — множитель нормировки. По зависимости  $P(K)$ , приведённой в левом верхнем углу на рис. 9 ( $\ell = 2$ ), определяются первый момент  $\langle K \rangle = -0,00043$  и второй момент  $\langle K^2 \rangle = 0,19934$  для функции  $P(K)$  [115, 116]. Затем аналогичный анализ может быть проведён для выходных карт. Из рисунка 9 можно увидеть, что функция распределения для квадруполя значительно сдвинута, так что  $\langle K \rangle \simeq -0,254$  при дисперсии  $\sigma^2 = \langle K^2 \rangle - \langle K \rangle^2 \simeq 0,1454$ . Для квадрупольной и октупольной компонент не только смешён центр тяжести функции распределения для выходного сигнала, но и искажена форма этой функции. При  $\ell = 4$  наблюдается практически полное соответствие функций распределения для входных и выходных карт. Для гармоник  $\ell = 5, 7, 9$  вновь наблюдается искажение функции распределения, обусловленное влиянием фоновых компонент. Как видно из рис. 9, в результате применения метода ILC (точнее LILC, являющегося одной из модификаций ILC [86] и точно воспроизводящего карту ILC WMAP) в выходных картах отрицательные корреляции с фоном получаются с большей вероятностью, чем положительные. Для квадрупольной и октупольной компонент характерные масштабы разностей между входными и выходными картами сравнимы с величиной сигнала

СМВ. Как показано в [117], эти разности связаны с фоновыми компонентами. Для того чтобы это продемонстрировать, можно рассчитать, исходя из данных WMAP, комбинацию  $d_{\ell,m} = a_{\ell,m}^{(\text{Ka})} - a_{\ell,m}^{(\text{V})}$ , в которую вклад даёт только фон, и определить её корреляцию с коэффициентами  $a_{\ell,m}$  для выходных карт LILC (например, для реализации 00008 [93]). Для чётных мультиполей,  $\ell = 2, 4, 6, 8, 10$ , этой реализации СМВ корреляционные коэффициенты составляют  $K_n^{\text{even}} = 0,183; 0,421; 0,323; 0,136; 0,139$  соответственно, в то время как для нечётных,  $\ell = 2n+1, n = 1, \dots, 4$ , —  $K_n^{\text{odd}} = 0,908; 0,732; 0,732; 0,686$ . Таким образом, видно, что сигнал после восстановления октупольной и других нечётных компонент характеризуется высоким уровнем корреляции с фоном. Другая важная характеристика — величина корреляции остаточной карты (полученной как разность между входной и выходной картами) с входной. Для чётных мультиполей,  $\ell = 2n, n = 1, \dots, 5$ , коэффициенты  $K_n^{\text{even}} = -0,218; -0,458; 0,0152; -0,223; -0,130$  соответственно, а для нечётных мультиполей,  $\ell = 2n+1, n = 1, \dots, 4$ , —  $K_n^{\text{odd}} = -0,172; -0,116; -0,128; -0,011$ .

Кроме того, описанный подход проверки стабильности восстановления сигнала СМВ выявил [93] ещё одну важную особенность метода разделения компонент ILC, имеющую отношение к проблеме квадруполя. Используем те же 10000 входных и выходных карт и рассмотрим квадрупольную моду  $a_{2,0}$ , применив эстиматор  $S = s_{2,0}^{\text{in}} s_{2,0}^{\text{out}}$ , где  $s_{2,0}^{\text{in,out}} = +1$  или  $-1$  для положительного или отрицательного знака амплитуды  $a_{2,0}^{\text{in,out}}$  соответственно (индексы in и out относятся к входной и выходной картам). При правильном восстановлении сигнала должно быть  $S = +1$ . Тем не менее значение



**Рис. 10.** (См. в цвете онлайн.) Результаты мозаичной корреляции карт СМВ ILC WMAP и фонового излучения пыли в канале W с корреляционным окном  $\Xi_p = 540' \times 540'$ . (а) Мозаичная карта  $M_c$ . (б) Гистограмма распределения пикселов по корреляционным коэффициентам карты  $M_c$  (сплошная кривая). (в) Угловой спектр мощности карты  $M_c$ . (г) Карта квадрупольной компоненты сигнала  $M_c$  с наложенной сеткой экваториальной системы координат. Пунктирные, штриховые и штрихпунктирные линии на рис. б и в обозначают соответственно уровни разброса  $\pm 1\sigma$ ,  $\pm 2\sigma$  и  $\pm 3\sigma$  в модельных мозаичных картах корреляций, рассчитанных для 200 случайных гауссовых полей в космологической модели  $\Lambda$ CDM. (См. также [118, 119].)

$S = -1$  получается для 2148 карт из 10000 реализаций. Можно предположить, что такой сильный эффект вызван изменением знака  $a_{2,0}$  у тех реализаций, для которых изначально он был положительным,  $s_{2,0}^{\text{in}} = +1$ , а связано это изменение знака с просочившимся фоновым сигналом. Действительно, у всех фоновых компонент во всех частотных каналах K–W миссии WMAP знак  $a_{2,0}^f$  отрицателен,  $s_{2,0}^f = -1$ . Если такое предположение верно, то сильное влияние фона на обсуждаемую характеристику существует для 43 % реализаций, у которых  $s_{2,0}^{\text{in}} = +1$ . Заметим, что гармоники с чётным значением  $\ell + m$  являются особенно сложными для восстановления, с учётом того, что наиболее мощная часть фоновых компонент сконцентрирована в плоскости Галактики, а она даёт в основном вклад в моды с чётным значением  $\ell + m$ . Любопытно также отметить, что силовое изменение знака в квадрупольной компоненте меняет форму восстановленного квадруполя и решает проблему существования "Оси зла" [91]; в этом отношении такая процедура аналогична модифицированным методам разделения компонент [101].

## 5. Мозаичная корреляция

В работах [118, 119] предложен мозаичный корреляционный метод анализа распределённого сигнала, позволяющий обнаружить и исследовать возможное остаточное влияние фоновых компонент (как протяжённых, так и определяемых точечными источниками) как возможной причины негауссовойности в заданных областях при заданном угловом масштабе. Метод реализован в пиксельном параметрическом пространстве. На основе исследования двух карт с достаточно высоким разрешением и одинаковым разбиением небесной сферы на пиксели — карты

температуры  $\Delta T(\theta_i, \phi_i)$  и карты фонового излучения  $S(\theta_i, \phi_i)$ , где  $i$  — номер пикселя, — строится мозаичная корреляционная карта с более низким разрешением, каждый пиксель которой (назовём его M-пикселям) содержит некоторое число пикселов исходных карт. M-пиксели с номером  $p$  ( $p = 1, 2, \dots, N_0$ , где  $N_0$  — полное число M-пикселов на сфере) присваивается значение коэффициента корреляции между областями двух исследуемых карт более высокого разрешения, покрывающими эти M-пиксели. Иначе говоря, рассчитывается корреляционный коэффициент двух карт внутри телесного угла  $\Xi_p$ , стягивающего данный M-пиксель. Телесные углы  $\Xi_p$  выбираются одинаковыми и равными  $\Xi$  для всех M-пикселов; значение  $\Xi$  (величина корреляционного окна) определяет угловой масштаб, на котором изучается корреляция. Полный корреляционный коэффициент для двух исходных карт на угловом масштабе  $\Xi$  имеет вид

$$K(\Xi) = \frac{1}{\sigma_{\Delta T_p} \sigma_{S_p}} \times \sum_p \sum_{(\theta_i, \phi_i) \in \Xi_p} (\Delta T(\theta_i, \phi_i) - \overline{\Delta T(\Xi_p)})(S(\theta_i, \phi_i) - \overline{S(\Xi_p)}), \quad (16)$$

где  $\sigma_{\Delta T_p}^2$  и  $\sigma_{S_p}^2$  — соответствующие дисперсии.

Данный метод позволяет проверить качество разделения компонент СМВ при многочастотных наблюдениях в предположении, что корреляция случайного гауссова сигнала реликтового излучения с фоновыми компонентами должна быть минимальной. Присутствие остаточного коррелированного сигнала в данных СМВ может привести к систематическим ошибкам в определении углового спектра мощности в разных диа-

пазонах мультиполей [93, 115] и, как следствие, к уменьшению точности определения космологических параметров. Применив различные корреляционные окна, можно увидеть, что в распределении корреляционных коэффициентов карт WMAP ILC и фонового излучения пыли в случае корреляционного окна  $\Xi = 540' \times 540'$  имеется сдвиг величиной  $-0,26$  относительно ожидаемого нулевого значения, получаемого при моделировании с учётом гауссова слаживания в окне радиусом  $1^\circ$  и маскирования области Галактики. Это проиллюстрировано на рис. 10, где приведены результаты мозаичной корреляции карт WMAP и фонового излучения пыли (см. детали в [119]). Кроме собственно сдвига в распределении пикселов по корреляционным коэффициентам, обращает на себя внимание значительное искажение формы этого распределения. Медианы распределения пикселов мозаичных карт для корреляционных масштабов  $160'$ ,  $300'$  и  $540'$  равны соответственно  $-0,219$ ,  $-0,233$  и  $-0,274$ . Интересно отметить, что сдвиг в распределении пикселов карт корреляций подобен сдвигу, возникающему при статистически нестабильном восстановлении сигнала ILC в квадрупольной компоненте [93].

Результаты применения данного метода к картам СМВ WMAP и пыли показывают существование значительного сигнала в квадрупольной компоненте мозаичной карты, приводящего к появлению пика в угловом спектре мощности. Этот пик отсутствует в случае вычисления корреляций карты симулированных гауссовых возмущений с распределением излучения пыли. Положение пятен на карте квадруполя говорит о присутствии сигнала, связанного не только с эклиптической, но и с экваториальной системой координат, что наблюдается также при использовании других методов [120, 121].

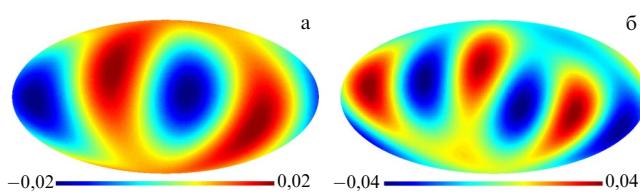
## 6. Мультипольные векторы

Уже в работе [90] была отмечена корреляция направлений, задаваемых квадрупольной и октупольной компонентами СМВ (рис. 11). Простое количественное описание этого явления состоит в нахождении отдельно для квадруполя и октуполя единичного вектора  $\hat{\mathbf{n}}$ , проекция углового момента на который имеет максимальную дисперсию. А именно, рассмотрим вклад мультиполей с заданным  $\ell$  в анизотропию температуры СМВ:

$$\Delta T_\ell(\theta, \phi) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (17)$$

и построим дисперсию — функцию направления  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\langle \Delta T_\ell(\hat{\mathbf{n}} \mathbf{L})^2 \Delta T_\ell \rangle = \sum_{m=-\ell}^{\ell} m^2 |a_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})|^2, \quad (18)$$



**Рис. 11.** (См. в цвете онлайн.) Форма квадруполя (а) и октуполя (б) на карте WMAP ILC по данным седьмого года наблюдений.

где  $\mathbf{L}$  — оператор углового момента, угловые скобки обозначают усреднение по небесной сфере, коэффициенты  $a_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})$  вычисляются в системе координат, третья ось которой совпадает с  $\hat{\mathbf{n}}$ . Используя данные первого года наблюдений миссии WMAP, авторы работы [90] нашли, что векторы, определяющие максимумы дисперсии для квадруполя и октуполя, весьма близки:

$$\hat{\mathbf{n}}_2 = (-0,1145, -0,5265, 0,8424),$$

$$\hat{\mathbf{n}}_3 = (-0,2578, -0,4207, 0,8698).$$

Скалярное произведение этих векторов, которое могло бы быть любым числом из интервала  $(0, 1)$  (дисперсия (18) не изменяется при изменении знака  $\hat{\mathbf{n}}$ , поэтому произведение  $\hat{\mathbf{n}}_2 \hat{\mathbf{n}}_3$  можно считать положительным):

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \hat{\mathbf{n}}_3 = 0,9838.$$

Вероятность такого совпадения для гауссовой карты авторы работы [90] оценили как  $1/60$ .

Для более подробного изучения вопроса о соосности мультиполей Копи с соавторами [122, 123] предложили использовать формализм мультипольных векторов, впервые введённых Максвеллом [124], и продемонстрировали его инструментарий для исследования анизотропии реликтового излучения на больших масштабах. Среди свойств этих векторов можно отметить их независимость от выбора системы координат, что делает их применимыми для проверки нулевой гипотезы о статистической изотропии, а также для поиска направлений на небе, на которых может проявляться негауссовость, обусловленная различными причинами: нестандартной физикой, наличием систематических ошибок, остаточным влиянием фоновых компонент, топологией Вселенной и т.п. [94].

Следуя Копи и др. [123], вклад мультиполей с заданным значением  $\ell$  в анизотропию температуры СМВ можно представить в эквивалентном формуле (17) виде

$$\Delta T_\ell(\theta, \phi) = \sum_{i_1, \dots, i_\ell} K_{i_1, \dots, i_\ell} e_{i_1}(\theta, \phi) \dots e_{i_\ell}(\theta, \phi),$$

где пространственные индексы  $i_\alpha$  пробегают значения от 1 до 3,  $\mathbf{e}(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  — единичный трёхмерный вектор в направлении  $(\theta, \phi)$  на сфере,  $K_{i_1, \dots, i_\ell}$  — бесследовый симметричный вещественный тензор ранга  $\ell$  в трёхмерном пространстве. Этот тензор, как и набор амплитуд  $a_{\ell m}$ , имеет  $2\ell + 1$  независимых вещественных компонент. Идея состоит в том, чтобы записать этот тензор в виде комбинации  $\ell$  единичных вещественных трёхмерных векторов  $\mathbf{v}^{(\ell, \alpha)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, \ell$  (всего  $2\ell$  независимых компонент) и общей амплитуды  $A_\ell$ :

$$K_{i_1, \dots, i_\ell} = A_\ell [v_{i_1}^{(\ell, 1)} \dots v_{i_\ell}^{(\ell, \ell)}]_{\text{TF}},$$

где  $[ \dots ]_{\text{TF}}$  обозначает выделение симметричной бесследовой части. Известно, что такое представление существует и является единственным, поэтому набор единичных векторов  $\mathbf{v}^{(\ell, \alpha)}$  вместе с амплитудой  $A_\ell$  полностью характеризуют мультипольную компоненту  $\Delta T_\ell(\theta, \phi)$ . Отметим, что векторы  $\mathbf{v}^{(\ell, \alpha)}$  определяются с точностью до знака, так как изменение знака каждого из этих векторов может быть компенсировано изменением знака амплитуды  $A_\ell$ . Отметим также, что мультипольные векторы не зависят от полной мощности  $C_\ell$  мульти-

полей температуры с фиксированным  $\ell$ : если все  $a_{\ell m}$  при заданном  $\ell$  домножаются на общий множитель, то величина  $A_\ell$  также будет умножена, а  $\mathbf{v}^{(\ell, \alpha)}$  останутся неизменными. В частности, если использовать величину  $\tilde{a}_{\ell m} = a_{\ell m} / \sqrt{C_\ell}$ , то мультипольные векторы  $\mathbf{v}^{(\ell, \alpha)}$  будут зависеть только от  $\tilde{a}_{\ell m}$ , но не от  $C_\ell$ . В этом смысле мультипольные векторы несут информацию, дополнительную к той, которая закодирована в угловом спектре мощности. И на это не влияют какие-либо предположения о гауссовой и статистической изотропии.

Сравнительно простой алгоритм нахождения мультипольных векторов предложен в работе [122], где исходя из известных коэффициентов  $a_{\ell m}$  проводится их построение с применением стандартного гармонического разложения. Полные выкладки и рекуррентные формулы для нахождения  $\mathbf{v}^{(\ell, \alpha)}$  в таком подходе приведены в [122]. Имеется также открытый программный код<sup>4</sup>.

Копи и др. [94, 123] ввели также векторы площади

$$\mathbf{w}^{(\ell, \alpha\beta)} = \mathbf{v}^{(\ell, \alpha)} \times \mathbf{v}^{(\ell, \beta)}.$$

Эти векторы ортогональны плоскостям  $\ell$ -го мультиполя, в которых лежат пары векторов  $(\mathbf{v}^{(\ell, \alpha)}, \mathbf{v}^{(\ell, \beta)})$ , и также определены с точностью до знака. Для квадруполя имеется два мультипольных вектора,  $\mathbf{v}^{(2, 1)}$  и  $\mathbf{v}^{(2, 2)}$ , и всего один вектор площади  $\mathbf{w}^{(2, 12)}$ ; октуполь характеризуется тремя мультипольными векторами и тремя векторами площади.

Наблюдение, сделанное в работах [94, 123], состоит в том, что плоскости квадруполя и октуполя близки друг к другу, т.е. направления векторов  $\mathbf{w}^{(2, 12)}$ ,  $\mathbf{w}^{(3, 12)}$ ,  $\mathbf{w}^{(3, 13)}$  и  $\mathbf{w}^{(3, 23)}$  скоррелированы на уровне достоверности более 99 %. Точнее, вектор  $\mathbf{w}^{(2, 12)}$  лежит почти посередине между тремя векторами,  $\mathbf{w}^{(3, 12)}$ ,  $\mathbf{w}^{(3, 13)}$  и  $\mathbf{w}^{(3, 23)}$ , а для скалярных произведений из результатов работы [94] следует (использовались данные трёх лет работы миссии WMAP):

$$\frac{\mathbf{w}^{(2, 12)} \cdot \mathbf{w}^{(3, 12)}}{|\mathbf{w}^{(2, 12)}| |\mathbf{w}^{(3, 12)}|} = 0,858, \quad \frac{\mathbf{w}^{(2, 12)} \cdot \mathbf{w}^{(3, 13)}}{|\mathbf{w}^{(2, 12)}| |\mathbf{w}^{(3, 13)}|} = 0,804,$$

$$\frac{\mathbf{w}^{(2, 12)} \cdot \mathbf{w}^{(3, 23)}}{|\mathbf{w}^{(2, 12)}| |\mathbf{w}^{(3, 23)}|} = 0,872.$$

Все эти величины близки к единице, что и означает соосность квадруполя и октуполя. Отметим, что векторы октуполя  $\mathbf{w}^{(3, 12)}$ ,  $\mathbf{w}^{(3, 13)}$  и  $\mathbf{w}^{(3, 23)}$  сами по себе близки друг к другу ("плоскостность" октуполя).

Кроме того, все четыре вектора площадей скоррелированы с плоскостью эклиптики, а также (на уровне достоверности более 95 %) с направлением диполя и положением точек равноденствий. Всё это выглядит как противоречие с предположением о гауссовой и статистически изотропной карте ILC.

## 7. Квадрупольная статистическая анизотропия

Некоторые модели инфляции с векторными полями предсказывают, что первичные скалярные возмущения являются гауссовыми, но статистически анизотропными. Это означает, что их спектр мощности зависит не только

<sup>4</sup> <http://www.phys.cwru.edu/projects/mpvectors/>

4\*

от длины волнового вектора, но и от его направления  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ ,

$$\langle \Phi(\mathbf{k}) \Phi^*(\mathbf{k}') \rangle = P(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') [1 + g(k, \hat{\mathbf{k}})]. \quad (19)$$

В частности, неплохо мотивированной является зависимость [25–28]

$$g(k, \hat{\mathbf{k}}) = g_0 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2, \quad (20)$$

где  $\hat{\mathbf{N}}$  — некоторый фиксированный единичный вектор, постоянный в пространстве,  $g_0$  — константа. Модели, основанные на конформной инвариантности, предсказывают статистическую анизотропию более общего вида [56, 57]. Статистическая анизотропия вида (19) проявлялась бы в сигнале СМВ как отличие от нуля корреляторов мультиполей с разными значениями  $(\ell, m)$  (ср. с формулой (6), верной для статистически изотропных возмущений),

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle \neq 0 \text{ при } \ell \neq \ell' \text{ и/или } m \neq m'.$$

Метод поиска этого эффекта разработан в [125, 126].

Статистическая анизотропия в форме (20) действительно была обнаружена в данных СМВ WMAP [126–128] (см. также [69]). При этом

$$g_0 = 0,29 \pm 0,03,$$

т.е. сигнал является большим по амплитуде и статистически значимым. Однако направление вектора  $\hat{\mathbf{N}}$ , а именно  $(b, l) = (30^\circ, 96^\circ)$ , оказалось близким к нормали к плоскости эклиптики. Последнее обстоятельство служит серьёзным указанием на то, что источником эффекта являются систематические погрешности. Наиболее вероятным объяснением здесь представляется асимметрия диаграммы направленности приёмников WMAP [127] (впрочем, Гронебоом и др. [128] не согласны с такой интерпретацией).

## 8. Функционалы Минковского

Функционалы Минковского [129] представляют собой эффективный метод для исследования морфологии совокупности областей в пространстве (в случае СМВ — областей на небесной сфере). Эти функционалы активно применяют для изучения статистики сигнала. Исторические аспекты и алгоритмические детали этого метода описаны в книге [48]. Кратко отметим, что в космологии трёхмерная версия метода применялась ещё в 1990-х годах при изучении распределения объектов во Вселенной [130, 131]. Идея использовать морфологические характеристики карты для описания статистических свойств анизотропии сигнала СМВ была описана и развита в целом ряде работ [48, 132–138].

В качестве рассматриваемой величины удобно выбрать не саму температуру, а поле с единичной дисперсией

$$v(\theta, \phi) = \frac{\Delta T(\theta, \phi)}{\sigma_0},$$

где  $\sigma_0$  — дисперсия флуктуаций температуры,

$$\sigma_0^2 = \langle \Delta T^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell + 1) C(\ell), \quad (21)$$

угловые скобки, как и ранее, обозначают усреднение по небесной сфере. Зафиксируем некоторое значение  $v$ , и для данной карты построим все связные области  $R_i(v)$  на единичной небесной сфере, внутри которых  $v(\theta, \phi) > v$ . Вообще говоря, области  $R_i(v)$  не являются односвязными, т.е. в них могут быть дыры (а внутри этих дыр в свою очередь могут быть области с  $v(\theta, \phi) > v$ , которые тоже нужно включить в набор  $\{R_i(v)\}$ ). Теперь можно определить три глобальных (т.е. относящихся ко всей сфере) функционала Минковского:

1) нормированную площадь

$$A(v) = \frac{1}{4\pi} \sum_i A[R_i(v)],$$

где  $A[R]$  — площадь области  $R$ ;

2) нормированную полную длину изолиний

$$L(v) = \frac{1}{4\pi} \sum_i L[R_i(v)],$$

где  $L[R]$  — длина границы области  $R$ ;

3) генус  $G(v)$  — разность числа связных областей с  $v(\theta, \phi) > v$  и числа связных областей с  $v(\theta, \phi) < v$  (эквивалентной генусу величиной является эйлерова характеристика).

Замечательно, что эти три функционала полностью описывают морфологию набора областей  $\{R_i(v)\}$  (в  $d$ -мерном пространстве имеется  $d + 1$  таких функционалов). Аналогичным образом можно определить три локальных функционала Минковского, относящихся не ко всей сфере, а к её отдельной части.

При анализе СМВ часто вместо генуса используют другую характеристику:

$$\tilde{G}(v) = N_{\max}(v) + N_{\min}(v) - N_{\text{sad}}(v),$$

где  $N_{\max}(v)$ ,  $N_{\min}(v)$  и  $N_{\text{sad}}(v)$  — соответственно числа максимумов, минимумов и седловых точек функции  $v(\theta, \phi)$ , лежащих внутри всех областей  $R_i(v)$ . Для сферы  $G(v) = \tilde{G}(v) - 1$ .

Глобальные функционалы Минковского для гауссова поля вычисляются аналитически. На плоскости нормированные функционалы выражаются в виде [48]

$$\begin{aligned} A(v) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right), \\ L(v) &= \frac{1}{8\theta_c} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), \\ G(v) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\theta_c^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx$$

— функция ошибок,  $\theta_c$  — корреляционная длина поля, определяемая как

$$\theta_c^{-1} = \sqrt{\frac{\langle (\nabla \Delta T)^2 \rangle}{\langle \Delta T^2 \rangle}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0},$$

$\sigma_1$  — дисперсия градиента температуры,

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell \ell(\ell + 1)(2\ell + 1)C(\ell). \quad (23)$$

Таким образом, поиск отклонений от гауссности можно вести на основе проверки выполнения соотношений типа (22).

Функционалы Минковского использовались для проверки гауссности данных WMAP. Эриксен и др. [85] применили три функционала, описанных выше, а также ряд других характеристик для анализа карты СМВ WMAP первого года наблюдений миссии и сравнили результаты с данными моделирования гауссовых возмущений с учётом шумового сигнала WMAP. Авторы [85] обнаружили, что при анализе всей сферы на угловых масштабах между  $1^\circ$  и  $4^\circ$  все виды статистики в общем согласуются с предположением о гауссности сигнала СМВ. В то же время было продемонстрировано, что свойства СМВ, приходящего из северной и южной галактических полусфер, сильно различаются. Статистика сигнала из южной полусферы на исследованных угловых масштабах  $1^\circ - 4^\circ$  в целом согласуется с гипотезой о гауссности, тогда как для северной полусферы наблюдается ряд особенностей. Если функционалы площади и длины  $A(v)$  и  $L(v)$  вполне вписываются в гипотезу о гауссности, то генус на северной полусфере превышает ожидаемый на всех угловых масштабах, а на масштабе  $3,4^\circ$  его амплитуда настолько велика, что лишь одна из 5000 реализаций имеет большую амплитуду для отрицательных значений порогов  $v$ . Кроме того, используя статистику, введённую в работе [139] (длина скелетной линии), и другие статистики, авторы [85] нашли значения параметра

$$\gamma = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0 \sigma_2},$$

где  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$  — дисперсии температуры и её градиента, определённые в (21) и (23),  $\sigma_2$  — дисперсия производных второго порядка, которая определяется вполне аналогично. Параметр  $\gamma$  на северной полусфере более чем в 99 % симуляций превышал ожидаемое значение, в то время как для южной полусферы подобный эффект отсутствовал. Отметим, что Парк [84] ещё до опубликования работы Эрикса и др. [85] сообщил об асимметрии между амплитудами генуса на северной и южной полусферах. Однако результаты Парка были получены для значительно меньших угловых масштабов, чем в [85], так что прямую связь между этими двумя группами результатов установить трудно. В любом случае исследование генуса Минковского продемонстрировало, что гауссова модель флуктуаций сталкивается с проблемами при описании данных WMAP на больших и средних угловых масштабах.

Функционалы Минковского применялись и для оценок параметра  $f_{NL}$  [140] в модели негауссовых первичных возмущений, описываемой формулой (8). С этой целью авторы генерировали карты СМВ в рамках данной модели и рассматривали их отличие от карт, рассчитанных в модели с гауссовыми первичными неоднородностями (в действительности, как подчёркивают авторы, при не слишком больших значениях  $f_{NL}$  выражения для функционалов Минковского в негауссовой модели могут быть с хорошей точностью получены

аналитически). Авторами также учитывались различные наблюдательные эффекты, осложняющие ситуацию, такие как функция окна пикселя, "замазывание" диаграммой направленности, неоднородный шум, экранирующие маски на картах и др. Исходя из известного поведения функционалов Минковского на различных масштабах и для различного уровня негауссности в модельных картах, авторы работы [140] получили ограничения на уровень негауссости на основе данных WMAP третьего года миссии, а именно, они получили оценку  $-70 < f_{NL} < 91$  на уровне достоверности 95 % из карт, скомбинированных из данных каналов Q + V + W миссии WMAP, сглаженных гауссовым фильтром на масштабах  $10'$ ,  $20'$  и  $40'$ . Для комбинации карт V + W была получена смещённая в область отрицательных значений оценка  $-108 < f_{NL} < 64$ , отличающаяся, например, от смещённых в область положительных значений пределов  $f_{NL}$ , найденных в работе [141] для тех же данных с помощью биспектра,  $27 < f_{NL} < 147$ .

## 9. Сферические вейвлеты

### 9.1. Негауссов эксцесс

Среди первых работ по поиску негауссости в данных CMB WMAP имеется блок исследований, основанных на методике анализа с помощью вейвлетов [83, 142]. Первые попытки использования этой техники для поиска негауссовых особенностей предпринимались в 1990-х годах для данных COBE-DMR (COsmic Background Explorer – Differential Microwave Radiometer) [143] с помощью вейвлетов Добеши (Daubechies), позднее — с помощью сферических вейвлетов Хаара (Spherical Haar Wavelet — SHW) [144]. Особенно чувствительными к проявлениям негауссости являются сферические вейвлеты типа "мексиканская шляпа" (Spherical Mexican Hat Wavelet — SMHW) [145–147].

SMHW может быть построен с помощью евклидова вейвлета типа "мексиканская шляпа" (Mexican Hat Wavelet — MHW) с применением стереографической проекции, предложенной в [148]. SMHW зависит от трёх параметров: общего масштаба  $R$  и координат  $(\theta, \phi)$  точки на сфере, играющей роль полюса, относительно которого осуществляется стереографическая проекция. Для каждого выбора центра вейвлета удобно ввести новую (координаты которой будем помечать штрихами) систему координат, в которой центр является северным полюсом. Тогда явный вид вейвлета SMHW выражается как

$$\Psi_S(y, R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} N(R)} \left[ 1 + \left( \frac{y}{2} \right)^2 \right]^2 \left[ 2 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right] \exp \left( -\frac{y^2}{2R^2} \right), \quad (24)$$

$N(R)$  — нормировочный множитель,

$$N(R) = R \left( 1 + \frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{4} \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Расстояние на касательной плоскости задаётся величиной  $y$ , которая соотносится с полярным углом как

$$y = 2 \tan \frac{\theta'}{2},$$

где  $\theta'$  — полярный угол в штрихованной системе координат. Разложение флюктуаций температуры по вейвлетам имеет стандартный вид:

$$w(R; \theta, \phi) = \int \sin \theta' d\theta' d\phi' \Psi_S(R; \theta') \Delta T(\theta', \phi'),$$

где предполагается, что температура пересчитана в штрихованную систему координат (именно поэтому  $w$  зависит от  $\theta$  и  $\phi$ ). На практике для каждого масштаба  $R$  выбирают конечное число центров вейвлетов, т.е. ограничиваются конечным числом коэффициентов вейвлетного разложения  $w_i(R) \equiv w(R; \theta_i, \phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, N_R$ .

Коэффициенты вейвлетного разложения  $w_i(R)$  линейным образом выражаются через флюктуации температуры. Поэтому для гауссова сигнала CMB эти коэффициенты также должны иметь гауссову статистику. Для поиска отклонений от гауссости на заданном масштабе  $R$  можно определить несколько величин. Виельва и др. [83] использовали два простых эстиматора негауссости: коэффициенты асимметрии (skewness)  $S(R)$  и эксцесса (kurtosis)  $K(R)$ :

$$S(R) = \frac{1}{N_R} \sum_{i=1}^{N_R} \frac{w_i^3(R)}{\sigma^3(R)}, \quad (26)$$

$$K(R) = \frac{1}{N_R} \sum_{i=1}^{N_R} \frac{w_i^4(R)}{\sigma^4(R)} - 3, \quad (27)$$

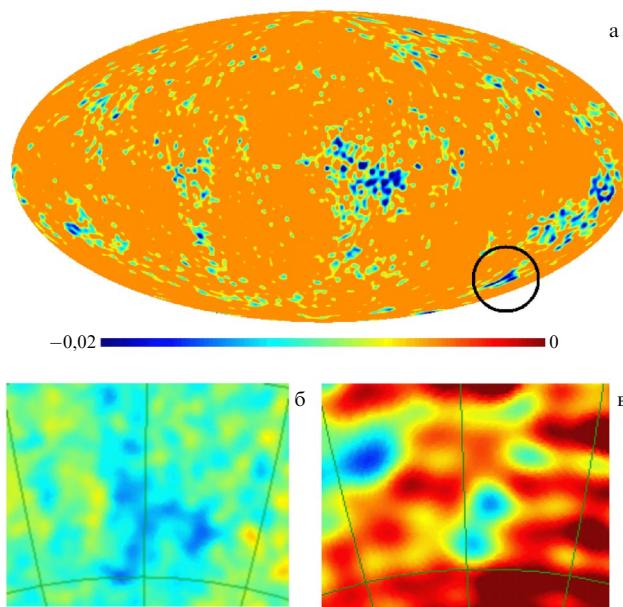
где  $N_R$  — число вейвлетных коэффициентов на масштабе  $R$ ,  $\sigma(R)$  — дисперсия вейвлетных коэффициентов на этом масштабе:

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{N_R} \sum_{i=1}^{N_R} w_i^2(R). \quad (28)$$

Используя данный подход, авторы [83] получили избыток эксцесса  $K(R)$  на двух последовательных масштабах,  $R_8 = 4,17^\circ$  и  $R_9 = 5^\circ$ , в данных CMB WMAP. Величина эксцесса на  $R_8 = 4,17^\circ$  реализуется только в 40 случаях из 10000 при моделировании методом Монте-Карло, что авторы принимают как показатель негауссости карты WMAP. Аналогичный результат справедлив и для масштаба  $R_9$ . Виельва и др. обнаружили негауссов сигнал во всём частотном диапазоне миссии WMAP (от 23 ГГц до 94 ГГц) и продемонстрировали его частотную независимость. Также было показано, что после добавления загрязняющего сигнала в виде переоценённого фона к модельным гауссовым картам CMB, негауссов сигнал не обнаруживается. Исходя из последнего факта, авторы [83] заключают, что добавление галактического фона к моделям CMB не приводит к возникновению негауссости при поиске с помощью вейвлет-анализа и галактические фоновые компоненты не являются источником обнаруженной негауссости карты ILC CMB. Кроме того, в результате применения метода показано, что сигнал на северной полусфере соответствует гауссовой модели, в то время как на южной полусфере, так же как и на полной сфере, в данных CMB наблюдается негауссость.

### 9.2. Холодное пятно

Применяя вейвлеты типа SMHW, Круз и др. [142] выделили в микроволновом фоне холодную область

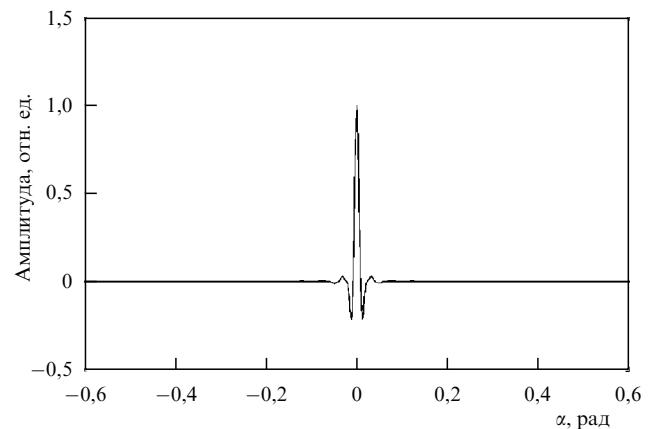


**Рис. 12.** (а) Положение негауссова Холодного пятна на сфере в галактических координатах. (б) Холодное пятно на карте ILC WMAP крупным планом. (в) Зона Холодного пятна на карте в частотном канале 408 МГц 1982 г. [149].

(рис. 12), имеющую сложную структуру. Наличием этой области они и объясняют негауссовость сигнала на южной полусфере. Галактические координаты области, названной Холодным пятном (Cold Spot — CS), следующие:  $b = -57^\circ$ ,  $l = 209^\circ$ . Вероятность соответствия гауссовой модели распределения сигнала при использовании SMHW составляет около 0,2 % [142]. Частотная зависимость сигнала в области CS аналогична другим пятнам CMB. Авторы также обнаружили, что в случае удаления данной зоны при SMHW-анализе оставшийся массив данных соответствует гауссовым предположениям.

Следует отметить, впрочем, что выводы Круза и др. [142] критиковались Жангом и Хутерером [150] на основании того, что использование весовых функций, отличающихся от SMHW (в частности, гауссовых весов с изменяемой шириной), не приводит к обнаружению негауссовой сигнала. Таким образом, вопрос о статистической значимости CS до конца не решён.

После получения указания на негауссовость сигнала в Холодном пятне, а также сообщения о пониженной плотности источников [151] в сглаженных картах радиообзора NVSS (NRAO (National Radio Astronomy Observatory) VLA (Very Large Array) Sky Survey) [152] (которая тоже, однако, вызвала сомнения [153]) было выдвинуто несколько гипотез о происхождении Холодного пятна, связанных с гигантским эффектом Сакса – Вольфа [151], топологическим дефектом [39], артефактом анализа данных [154], простым случайным отклонением [155, 156]. Отметим, что такое пятно на карте CMB WMAP не уникально [154, 155], а его свойства определяются в основном низкими гармониками ( $2 \leq \ell \leq 20$ ). Статистика внегалактических объектов в области CS в разных диапазонах длин волн в рамках погрешности не отличается от статистики других областей в данной полосе галактических широт [157]. Имеются и другие пятна, негауссовые свойства которых также определяются низкими  $\ell$  [158]. Кроме того, следует отметить другой



**Рис. 13.** Пример нидлета с  $B = 2$  и  $j = 8$  в пиксельном пространстве [162];  $z$  — угол выноса из максимума функции.

интересный, приведённый в [154], момент, заключающийся в том, что CS обнаруживается и в данных 1982 г. на картах низкочастотного обзора (408 МГц) [149] (см. рис. 12), где большой вклад в фон даёт синхротронное излучение.

### 9.3. Нидлеты

В заключение этого раздела упомянем о втором поколении сферических вейвлетов — нидлетах, которые были введены в функциональный анализ в работах [159, 160] (рис. 13). Сферический нидлет определяется как [161]

$$\psi_{jk}(\theta, \phi) = \sqrt{\lambda_{jk}} \sum_{\ell} b\left(\frac{\ell}{B^j}\right) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta_k, \phi_k), \quad (29)$$

где  $(\theta, \phi)$  — координаты на сфере,  $j$  — номер нидлет-гармоники,  $\lambda_{jk}$  — нормировочный множитель. Точки  $(\theta_k, \phi_k)$  — вершины нидлетов — могут быть совмещены с центрами пикселов в заданной схеме пикселизации. Число  $B$  задаёт такой базис нидлетов, в который включены только мультиполи из диапазона  $\ell \in [B^{j-1}, B^{j+1}]$ , т.е. функция  $b(\ell/B^j)$  соответствует функции окна и равняется нулю вне диапазона  $[B^{j-1}, B^{j+1}]$  [162].

Подход с нидлетами использовался для оценки первичной негауссости, характеризуемой параметром  $f_{NL}$ , с помощью нидлет-биспектра [161]. Преимущество такого подхода над обычным подходом, использующим гармонический биспектр (7), состоит в более адекватной работе с областями, закрытыми маской. Оценка величины  $f_{NL}$ , полученная в работе [161] с учётом влияния точечных источников:  $f_{NL} = 84 \pm 40$ .

## 10. Угловой спектр мощности

Одним из замечательных проявлений негауссовых свойств карты CMB WMAP является асимметрия чётности, на которую обратили внимание Ким и Насельский [97]. Простота предложенного ими подхода связана с возможностью использования лишь углового спектра мощности CMB  $C_{\ell}$ , без привлечения карт и индивидуальных гармоник  $a_{\ell m}$ . Для гауссова случайного поля первичных возмущений  $\Phi(\mathbf{k})$  с плоским спектром мощности ожидается наличие плато в угловом спектре мощности CMB на низких мультиполях, обусловленного эффектом Сакса – Вольфа, а именно  $\ell(\ell + 1)C_{\ell} \approx \text{const}$ . Сфери-

ческие гармоники при отражении координат изменяются как  $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(-\hat{\mathbf{n}})$ . Поэтому асимметрия в угловом спектре мощности для чётных и нечётных гармоник может рассматриваться как асимметрия мощности чётных и нечётных компонент карт. Авторы [97] обнаружили, что мощность нечётных мультиполей систематически превышает мощность чётных при небольших  $\ell$ , и назвали этот феномен "асимметрией чётности". Для того чтобы количественно описать такую асимметрию, предлагается рассмотреть следующие величины:

$$P^+ = \sum_{\text{Чётные } \ell < \ell_{\max}} \frac{\ell(\ell+1)C_\ell}{2\pi},$$

$$P^- = \sum_{\text{Нечётные } \ell < \ell_{\max}} \frac{\ell(\ell+1)C_\ell}{2\pi}.$$

Используя данные спектра мощности WMAP и результаты моделирования методом Монте-Карло, авторы [97] рассчитали отношение  $P^+/P^-$  для диапазонов мультиполей  $2 \leq \ell \leq \ell_{\max}$ , где  $\ell_{\max}$  лежит между 3 и 23. Сравнивая  $P^+/P^-$  для данных WMAP с аналогичным отношением, полученным для модельных карт, можно оценить величину  $p$ , равную доле модельных спектров, в которых значение  $P^+/P^-$  меньше или равно значению для карты WMAP. Было обнаружено, что нижней границы  $p$  достигает при  $\ell_{\max} = 18$ , где  $p$  равняется 0,004 и 0,001 для данных пяти и трёх лет наблюдений миссии WMAP соответственно. Этот факт означает, что существует предпочтение для нечётных мультиполей ( $2 \leq \ell \leq 18$ ) в данных WMAP на уровне достоверности 99,6 % с наложенной экранирующей маской в данных и 99,76 % — без маски. Авторы предполагают, что низкая амплитуда квадруполя СМВ WMAP может быть частью той же аномалии, что и асимметрия чётности. С учётом асимметрии мощности сигнала СМВ на северной и южной полусферах, сильнее проявляющейся на мультиполях с  $2 \leq \ell \leq 19$ , чем на мультиполях с  $20 \leq \ell \leq 40$  [86], авторы [97] также предполагают общее происхождение аномалий в области малых  $\ell$  (таких, как асимметрия мощности на полусферах, низкая амплитуда квадруполя и асимметрия чётности), которое может иметь как космологическое объяснение, так и объяснение, связанное с наличием систематических ошибок в наблюдениях, не выявленных и/или дополнительно внесённых при анализе данных миссии WMAP.

## 11. Заключение

В данной статье мы описали некоторые тесты, интенсивно используемые в последнее десятилетие для поиска и изучения негауссности и статистической анизотропии данных СМВ, имеющих различную природу.

Необходимо сделать несколько общих замечаний относительно описанных методов.

- Как было показано для различных диапазонов мультиполей в большом числе работ, в данных СМВ WMAP имеются указания на отклонения от гауссовой, обнаруживаемые с помощью методов фазового анализа, кросскорреляций с галактическими фоновыми компонентами, сферических вейвлетов, функционалов Минковского, угловых спектров мощности и др.

- Различные методы тестирования негауссовых свойств чувствительны к различным типам проявления

негауссности. Например, фазовый анализ "видит" остаточные проявления галактических фоновых компонент (или систематических ошибок) в очищенном сигнале СМВ, в то время как биспектр и схожие методы не чувствительны к этому типу негауссости.

- Низкие мультиполи данных WMAP СМВ демонстрируют отклонение от гауссовой и/или статистической изотропии, практически независимо от того, какой из методов тестирования этого феномена используется.

- Уровень первичной негауссости некоторых типов, например такого, который описывается параметром  $f_{NL}$ , оценивается методами, нечувствительными к остаточному сигналу галактического фона. Например, "сдвинув" пятна фона без изменения размера, можно получить карту с гауссовой статистикой распределения сигнала, оцениваемой по распределению температуры, но со связанными фазами разных мультиполей.

- Моделирование в рамках представления о гауссовых и статистически изотропных первичных возмущениях и стандартной  $\Lambda$ CDM-космологии служит важным инструментом для понимания процесса наблюдений, анализа данных и оценки уровня достоверности. Полезно и моделирование с негауссовыми и/или статистически анизотропными первичными возмущениями при тех или иных конкретных предположениях об их свойствах. Однако если СМВ имеет негауссовые свойства другой, ещё невыясненной, природы, отличной от заложенной в модели, применение последнего подхода может ограничить нас в интерпретации данных.

- У нас имеется единственная реализация данных реального СМВ, характеристики которого точно не известны, так как истинный СМВ-сигнал скрыт галактическим фоном, слажен негауссовой диаграммой направленности, сложен с шумом. Для единственной, даже гауссовой, реализации СМВ в принципе можно подобрать тест, который выявит её "ложную" негауссость, хотя бы в силу того что, во-первых, наблюдения дают ограниченный набор данных и, во-вторых, эти данные получены из исходного массива, явно содержащего негауссовые систематические погрешности и вклады фоновых излучений. Вопрос о корректной оценке статистической достоверности особенностей, обнаруженных *a posteriori*, до сих пор дебатируется.

Перспективы развития направления, затронутого в этой статье, связаны с повышением точности экспериментов и ещё более аккуратной оценкой загрязняющих факторов, снижающими нашу зависимость от априорной информации в процессе моделирования методом Монте-Карло. Эксперименты с хорошей чувствительностью, такие как миссия Planck, покрывающие широкий диапазон частот и имеющие лучшее разрешение, позволяют проверить результаты, полученные миссией WMAP, и, возможно, уточнят результаты поиска первичной негауссости.

**Благодарности.** Автор благодарен своим коллегам А.Г. Дорошкевичу и П.Д. Насельскому за плодотворное обсуждение работ по теме негауссости. Отдельную признательность автор выражает В.А. Рубакову за прочтение рукописи, дискуссии и замечания, благодаря которым был значительно улучшен текст статьи, существенно расширен ряд разделов, особенно разделы 1 и 6, а также список литературы и дополнительно написан раздел 7. В работе использовался открытый архив

наблюдений миссии WMAP NASA; для анализа данных и построения изображения CMB применялся пакет GLESP (Gauss-Legendre Sky Pixelization)<sup>5</sup> [163, 164]. Автор признателен Фонду некоммерческих программ Дмитрия Зимина "Династия" и РФФИ (грант 09-02-00298) за поддержку исследований по данной тематике.

## Список литературы

1. Старобинский А А *Письма в ЖЭТФ* **30** 719 (1979) [Starobinskii A A *JETP Lett.* **30** 682 (1979)]
2. Sato K *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **195** 467 (1981)
3. Guth A H *Phys. Rev. D* **23** 347 (1981)
4. Albrecht A, Steinhardt P J *Phys. Rev. Lett.* **48** 1220 (1982)
5. Linde A D *Phys. Lett. B* **108** 389 (1982)
6. Муханов В Ф, Чибисов Г В *Письма в ЖЭТФ* **33** 549 (1981) [Mukhanov V F, Chibisov G V *JETP Lett.* **33** 532 (1981)]
7. Hawking S W *Phys. Lett. B* **115** 295 (1982)
8. Starobinsky A A *Phys. Lett. B* **117** 175 (1982)
9. Guth A H, Pi S-Y *Phys. Rev. Lett.* **49** 1110 (1982)
10. Bardeen J M, Steinhardt P J, Turner M S *Phys. Rev. D* **28** 679 (1983)
11. Allen T J, Grinstein B, Wise M B *Phys. Lett. B* **197** 66 (1987)
12. Linde A, Mukhanov V *Phys. Rev. D* **56** R535 (1997)
13. Bernardeau F, Uzan J-P *Phys. Rev. D* **66** 103506 (2002)
14. Dvali G, Gruzinov A, Zaldarriaga M *Phys. Rev. D* **69** 023505 (2004); astro-ph/0303591
15. Kofman L, Report CITA-03-12; astro-ph/0303614
16. Barnaby N, Cline J M *Phys. Rev. D* **75** 086004 (2007); astro-ph/0611750
17. Falk T, Rangarajan R, Srednicki M *Astrophys. J.* **403** L1 (1993)
18. Maldacena J *JHEP* (05) 013 (2003)
19. Salopek D S, Bond J R *Phys. Rev. D* **42** 3936 (1990)
20. Bartolo N, Matarrese S, Riotto A *JHEP* (04) 006 (2004); astro-ph/0308088
21. Bartolo N et al. *Phys. Rep.* **402** 103 (2004); astro-ph/0406398
22. Komatsu E et al. *Astrophys. J. Suppl.* **180** 330 (2009); arXiv: 0803.0547
23. Gümrükcüoğlu A E, Contaldi C R, Peloso M, in *On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories. Proc. of the 11th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, 23–29 July 2006, Berlin, Germany* (Eds H Kleinert, R T Jantzen) (Singapore: World Scientific, 2008) p. 1641; astro-ph/0608405
24. Gümrükcüoğlu A E, Contaldi C R, Peloso M *JCAP* (11) 005 (2007); arXiv:0707.4179
25. Ackerman L, Carroll S M, Wise M B *Phys. Rev. D* **75** 083502 (2007); "Erratum" *Phys. Rev. D* **80** 069901(E) (2009); astro-ph/0701357
26. Watanabe M, Kanno S, Soda J *Phys. Rev. Lett.* **102** 191302 (2009); arXiv:0902.2833
27. Dimopoulos K, Karčiauskas M, Wagstaff J M *Phys. Rev. D* **81** 023522 (2010); arXiv:0907.1838
28. Watanabe M, Kanno S, Soda J *Prog. Theor. Phys.* **123** 1041 (2010)
29. Dulaney T R, Gresham M I *Phys. Rev. D* **81** 103532 (2010); arXiv:1001.2301
30. Gümrükcüoğlu A E, Himmetoglu B, Peloso M *Phys. Rev. D* **81** 063528 (2010); arXiv:1001.4088
31. Starobinsky A A *Письма в ЖЭТФ* **57** 606 (1993) [*JETP Lett.* **57** 622 (1993)]; gr-qc/9305019
32. de Oliveira-Costa A, Smoot G F, Starobinsky A A *Astrophys. J.* **468** 457 (1996); astro-ph/9705125
33. Inoue K T, Tomita K, Sugiyama N *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **314** L21 (2000); astro-ph/9906304
34. Dineen P, Rocha G, Coles P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **358** 1285 (2005); astro-ph/0404356
35. Kunz M et al. *Phys. Rev. D* **77** 023525 (2008)
36. Turok N *Phys. Scripta* **T36** 135 (1991)
37. Turok N, Spergel D *Phys. Rev. Lett.* **64** 2736 (1990)
38. Durrer R *New Astron. Rev.* **43** 111 (1999)
39. Cruz M et al. *Science* **318** 1612 (2007); arXiv:0710.5737
40. Jaffe T R et al. *Astrophys. J.* **629** L1 (2005); astro-ph/0503213
41. Demiański M, Doroshkevich A G *Phys. Rev. D* **75** 123517 (2007)
42. Durrer R, Kahnashvili T, Yates A *Phys. Rev. D* **58** 123004 (1998); astro-ph/9807089
43. Mack A, Kahnashvili T, Kosowsky A *Phys. Rev. D* **65** 123004 (2002); astro-ph/0105504
44. Naselsky P D, Chiang L-Y, Olesen P, Verkhodanov O V *Astrophys. J.* **615** 45 (2004); astro-ph/0405181
45. Kahnashvili T, Ratra B *Phys. Rev. D* **71** 103006 (2005); astro-ph/0503709
46. Kahnashvili T, Lavrelashvili G, Ratra B *Phys. Rev. D* **78** 063012 (2008); arXiv:0807.4239
47. Tauber J A et al. *Astron. Astrophys.* **520** A1 (2010)
48. Naselsky P D, Novikov D I, Novikov I D *The Physics of the Cosmic Microwave Background* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006)
49. Горбунов Д С, Рубаков В А *Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория* (М.: КРАСАНД, 2010) [Gorbunov D S, Rubakov V A *Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory* (Singapore: World Scientific, 2011)]
50. Лукаш В Н, Михеева Е В *Физическая космология* (М.: Физматлит, 2010)
51. Kim J, Naselsky P *Phys. Rev. D* **79** 123006 (2009)
52. Yadav A P S, Wandelt B D *Adv. Astron.* **2010** 565248 (2010); arXiv:1006.0275
53. Bartolo N, Matarrese S, Riotto A *Adv. Astron.* **2010** 157079 (2010); arXiv:1001.3957
54. Komatsu E et al., Astro2010: The Astronomy and Astrophysics Decadal Survey. Science White Papers, No. 59; arXiv:0902.4759
55. Komatsu E *Class. Quantum Grav.* **27** 124010 (2010)
56. Libanov M, Ramazanov S, Rubakov V *JCAP* (06) 010 (2011); arXiv:1102.1390
57. Libanov M, Mironov S, Rubakov V *Phys. Rev. D* **84** 083502 (2011); arXiv:1105.6230
58. Creminelli P et al. *JCAP* (02) 006 (2011); arXiv:1011.3004
59. Verde L et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **313** 141 (2000)
60. Lesgourgues J et al. *Phys. Rev. D* **71** 103514 (2005); astro-ph/0412551
61. Lewis A, Challinor A, Hanson D *JCAP* (03) 018 (2011); arXiv: 1101.2234
62. Semenova T A, Pariiskii Yu N, Bursov N N *Astron. Rep.* **53** 1 (2009)
63. Komatsu E, Spergel D N *Phys. Rev. D* **63** 063002 (2001); astro-ph/0005036
64. Seljak U, Zaldarriaga M *Astrophys. J.* **469** 437 (1996)
65. Lyth D H, Wands D *Phys. Lett. B* **524** 5 (2002); hep-ph/0110002
66. Moroi T, Takahashi T *Phys. Lett. B* **522** 215 (2001); "Erratum" *Phys. Lett. B* **539** 303 (2002); hep-ph/0110096
67. Creminelli P et al. *JCAP* (05) 004 (2006); astro-ph/0509029
68. Senatore L, Smith K M, Zaldarriaga M *JCAP* (01) 028 (2010); arXiv:0905.3746
69. Bennett C L et al. *Astrophys. J. Suppl.* **192** 17 (2011); arXiv: 1001.4758
70. Komatsu E et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148** 119 (2003); astro-ph/0302223
71. Spergel D N et al. *Astrophys. J. Suppl.* **170** 377 (2007); astro-ph/0603449
72. Komatsu E et al. *Astrophys. J. Suppl.* **192** 18 (2011); arXiv: 1001.4538
73. Slosar A et al. *JCAP* (08) 031 (2008)
74. Bennett C L et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148** 1 (2003); astro-ph/0302207
75. Bennett C L et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148** 97 (2003); astro-ph/0302208
76. Spergel D N et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148** 175 (2003); astro-ph/0302209
77. Hinshaw G et al. *Astrophys. J. Suppl.* **170** 288 (2007); astro-ph/0603451
78. Hinshaw G et al. *Astrophys. J. Suppl.* **180** 225 (2009); arXiv: 0803.0732
79. Jarosik N et al. *Astrophys. J. Suppl.* **192** 14 (2011); arXiv:1001.4744
80. Chiang L-Y, Naselsky P D, Verkhodanov O V, Way M J *Astrophys. J.* **590** L65 (2003); astro-ph/0303643
81. Naselsky P D, Doroshkevich A G, Verkhodanov O V *Astrophys. J.* **599** L53 (2003); astro-ph/0310542
82. Coles P et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **350** 989 (2004)
83. Vielva P et al. *Astrophys. J.* **609** 22 (2004); astro-ph/0310273
84. Park C-G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **349** 313 (2004)
85. Eriksen H K et al. *Astrophys. J.* **612** 64 (2004); astro-ph/0401276
86. Eriksen H K et al. *Astrophys. J.* **605** 14 (2004)
87. Hansen F K et al. *Astrophys. J.* **607** L67 (2004)
88. Larson D L, Wandelt B D *Astrophys. J.* **613** L85 (2004)

<sup>5</sup> <http://www.glesp.nbi.dk>

89. Schwarz D J et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 221301 (2004)
90. de Oliveira-Costa A et al. *Phys. Rev. D* **69** 063516 (2004)
91. Land K, Magueijo J *Phys. Rev. Lett.* **95** 071301 (2005)
92. Cruz M et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **369** 57 (2006)
93. Насельский П Д, Верходанов О В, Нильсен М Т В *Астрофиз. бюлл.* **63** 231 (2007) [Naselsky P D, Verkhodanov O V, Nielsen M T B *Astrophys. Bull.* **63** 216 (2007)]; arXiv:0707.1484
94. Copi C J et al. *Phys. Rev. D* **75** 023507 (2007)
95. Rakic A, Schwarz D J *Phys. Rev. D* **75** 103002 (2007)
96. Hoftuft J et al. *Astrophys. J.* **699** 985 (2009); arXiv:0903.1229
97. Kim J, Naselsky P *Astrophys. J.* **714** L265 (2010)
98. Hansen M et al. *Phys. Rev. D* **83** 103508 (2011); arXiv:1103.6135
99. Gold B et al. *Astrophys. J. Suppl.* **192** 15 (2011); arXiv:1001.4555
100. Leach S M et al. *Astron. Astrophys.* **491** 597 (2008); arXiv:0805.0269
101. Doroshkevich A, Verkhodanov O *Phys. Rev. D* **83** 043002 (2011); arxiv:1008.4094
102. Kim J, Naselsky P, Christensen P R *Phys. Rev. D* **79** 023003 (2009)
103. Stolyarov V et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **336** 97 (2002)
104. Tegmark M, de Oliveira-Costa A, Hamilton A J S *Phys. Rev. D* **68** 123523 (2003)
105. Reichardt C L et al. *Astrophys. J.* **694** 1200 (2009)
106. Brown M L et al. *Astrophys. J.* **705** 978 (2009)
107. Bardeen J M et al. *Astrophys. J.* **304** 15 (1986)
108. Bond J R, Efstathiou G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **226** 655 (1987)
109. Watts P, Coles P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **338** 806 (2003)
110. Coles P, Chiang L-Y *Nature* **406** 376 (2000)
111. Chiang L-Y, Naselsky P D, Coles P *Astrophys. J.* **602** L1 (2004); astro-ph/0208235
112. Naselsky P D, Doroshkevich A G, Verkhodanov O V *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **349** 695 (2004); astro-ph/0310601
113. Fisher N I *Statistical Analysis of Circular Data* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
114. Хабибуллина М Л, Верходанов О В, Париjsкий Ю Н *Астрофиз. бюлл.* **63** 101 (2008) [Khabibullina M L, Verkhodanov O V, Parijskij Yu N *Astrophys. Bull.* **63** 95 (2008)]
115. Насельский П Д, Верходанов О В *Астрофиз. бюлл.* **62** 218 (2007) [Naselsky P D, Verkhodanov O V *Astrophys. Bull.* **62** 203 (2007)]
116. Naselsky P D, Verkhodanov O V *Int. J. Mod. Phys. D* **17** 179 (2008); astro-ph/0609409
117. Chiang L-Y et al. *JCAP* (01) 021 (2007); astro-ph/0608421
118. Верходанов О В, Хабибуллина М Л, Майорова Е К *Астрофиз. бюлл.* **64** 272 (2009) [Verkhodanov O V, Khabibullina M L, Majorova E K *Astrophys. Bull.* **64** 263 (2009)]; arXiv:0912.3073
119. Верходанов О В, Хабибуллина М Л *Астрофиз. бюлл.* **65** 413 (2010) [Verkhodanov O V, Khabibullina M L *Astrophys. Bull.* **65** 390 (2010)]
120. Верходанов О В и др. *Астрофиз. бюлл.* **65** 252 (2010) [Verkhodanov O V et al. *Astrophys. Bull.* **65** 238 (2010)]; arXiv: 1009.3720
121. Найден Я В, Верходанов О В *Астрофиз. бюлл.* **66** 372 (2011) [Naiden Ya V, Verkhodanov O V *Astrophys. Bull.* **66** 345 (2011)]
122. Copi C J, Huterer D, Starkman G D *Phys. Rev. D* **70** 043515 (2004); astro-ph/0310511
123. Copi C J et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **367** 79 (2006); astro-ph/0508047
124. Maxwell J C *A Treatise on Electricity and Magnetism* Vol. 1, 3rd ed. (Oxford: Clarendon Press, 1892)
125. Pullen A R, Kamionkowski M *Phys. Rev. D* **76** 103529 (2007); arXiv:0709.1144
126. Hanson D, Lewis A *Phys. Rev. D* **80** 063004 (2009); arXiv:0908.0963
127. Groeneboom N E, Eriksen H K *Astrophys. J.* **690** 1807 (2009); arXiv:0807.2242
128. Groeneboom N E et al. *Astrophys. J.* **722** 452 (2010); arXiv: 0911.0150
129. Minkowski H *Math. Ann.* **57** 447 (1903)
130. Mecke K R, Buchert T, Wagner H *Astron. Astrophys.* **288** 697 (1994)
131. Schmalzing J, Buchert T *Astrophys. J.* **482** L1 (1997)
132. Дорошкевич А Г *Астрофизика* **6** 581 (1970) [Doroshkevich A G *Astrophysics* **6** 320 (1970)]
133. Gott J R (III) et al. *Astrophys. J.* **352** 1 (1990)
134. Naselsky P D, Novikov D I *Astrophys. J.* **444** L1 (1995)
135. Novikov D, Schmalzing J, Mukhanov V F *Astron. Astrophys.* **364** 17 (2000); astro-ph/0006097
136. Novikov D I et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **10** 245 (2001)
137. Schmalzing J, Gorski K M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **297** 355 (1998)
138. Winitzki S, Kosowsky A *New Astron.* **3** 75 (1998)
139. Novikov D, Colombi S, Doré O *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **366** 1201 (2006); astro-ph/0307003
140. Hikage C et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **389** 1439 (2008); arXiv:0802.3677
141. Yadav A P S, Wandelt B D *Phys. Rev. Lett.* **100** 181301 (2008)
142. Cruz M et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **356** 29 (2005)
143. Pando J, Valls-Gabaud D, Fang L-Z *Phys. Rev. Lett.* **81** 4568 (1998)
144. Barreiro R B et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **318** 475 (2000)
145. Cayón L et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **326** 1243 (2001)
146. Martínez-González E et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **336** 22 (2002); astro-ph/0111284
147. Cayón L et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **339** 1189 (2003)
148. Antoine J-P, Vandergheynst P *J. Math. Phys.* **39** 3987 (1998)
149. Haslam C G T et al. *Astron. Astrophys. Suppl.* **47** 1 (1982)
150. Zhang R, Huterer D *Astropart. Phys.* **33** 69 (2010); arXiv:0908.3988
151. Rudnick L, Brown S, Williams L R *Astrophys. J.* **671** 40 (2007); arXiv:0704.0908
152. Condon J J et al. *Astron. J.* **115** 1693 (1998)
153. Smith K M, Huterer D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **403** 2 (2010); arXiv:0805.2751
154. Насельский П Д и др. *Астрофиз. бюлл.* **65** 107 (2010) [Naselsky P D et al. *Astrophys. Bull.* **65** 101 (2010)]; arXiv:0712.1118
155. Верходанов О В и др. *Астрофиз. бюлл.* **63** 389 (2008) [Verkhodanov O V et al. *Astrophys. Bull.* **63** 366 (2008)]; arXiv:0902.0281
156. Smith K M, Huterer D *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **403** 2 (2010); arXiv:0805.2751
157. Соловьев Д И, Верходанов О В *Астрофиз. бюлл.* **65** 128 (2010) [Solov'ev D I, Verkhodanov O V *Astrophys. Bull.* **65** 121 (2010)]
158. Верходанов О В, Басова А А *Астрофиз. бюлл.* **66** 436 (2011) [Verkhodanov O V, Basova A A *Astrophys. Bull.* **66** 407 (2011)]
159. Narcowich F J, Petrushev P, Ward J D *SIAM J. Math. Analysis* **38** 574 (2006)
160. Narcowich F, Petrushev P, Ward J J *Funct. Anal.* **238** 530 (2006)
161. Rudjord Ø et al. *Astrophys. J.* **701** 369 (2009); arXiv:0901.3154
162. Marinucci D et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **383** 539 (2008)
163. Doroshkevich A G et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **14** 275 (2005); astro-ph/0305537
164. Doroshkevich A G et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **20** 1053 (2011); arXiv: 0904.2517

### Searching for non-Gaussianity in the observational cosmic microwave background data

**O.V. Verkhodanov**

*Special Astrophysical Observatory, Russian Academy of Sciences,  
369167 Nizhniy Arkhyz, Zelenchukskii region, Karachaevo-Cherkesskaya Respublika, Russian Federation  
E-mail: vo@sao.ru*

Methods of searching for non-Gaussianity in the WMAP data are reviewed, and the associated problems related to the cosmic microwave background (CMB) data analysis are discussed. Evidence for non-Gaussianity has to date been obtained by various methods and from a number of multipole ranges. Different approaches to searching for non-Gaussian CMB data are sensitive to different manifestations of non-Gaussianity, which sometimes are due to the primordial non-Gaussianity and sometimes, to galactic foregrounds and/or hard-to-take-into-account systematic residuals remaining after the data analysis.

PACS numbers: **95.75.-z, 98.70.Vc, 98.80.-k**

Bibliography — 164 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **182** (11) 1177–1193 (2012)

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211d.1177

Received 13 July 2011, revised 1 December 2011

*Physics – Uspekhi* **55** (11) (2012)