

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Прохождение света через композитные материалы, содержащие усиливающие слои

А.В. Дорофеев, А.А. Зябловский, А.А. Пухов,
А.А. Лисянский, А.П. Виноградов

Рассмотрено распространение света через единичный усиливающий слой и многослойные системы, содержащие усиливающие слои. Проведён сравнительный анализ результатов, основанных на применении формул Френеля и на суммировании рядов Эйри, а также результатов, полученных численным решением временной задачи для нелинейных уравнений Максвелла–Блоха методом конечных разностей (FDTD-методом). Рассмотрена задача о нормальном и наклонном прохождении волны через усиливающий слой и через пластину фотонного кристалла. Для задачи о фотонном кристалле обсуждаются случаи нахождения линии усиления как в разрешённой, так и в запрещённой зоне фотонного кристалла. Показано, что приближение плоской монохроматической волны в общем случае неприменимо к системе с усиливающими средами, что выражается в нарушении принципа причинности. Однако учёт структуры переднего фронта волны и конечной апертуры пучка делают постановку задачи физически осмысленной и позволяют получить корректные результаты во всех трёх подходах.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.70.Qs, 73.20.–r

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211b.1157

Содержание

1. Введение (1157).
2. Описание усиливающей среды при помощи диэлектрической проницаемости с отрицательной мнимой частью (1159).
3. Падение света по нормали к усиливающему слою (1160).
3.1. История вопроса. 3.2. Подходы Френеля и Эйри. 3.3. Временная задача о прохождении полубесконечного цуга волн через усиливающий слой.
4. Лазерная генерация в фотонных кристаллах (1167).
4.1. Ряд Эйри для фотонных кристаллов. 4.2. Лазерная генерация в разрешённой зоне фотонных кристаллов. 4.3. Лазерная генерация в запрещённой зоне фотонных кристаллов.
5. Падение света под углом к усиливающему слою (1171).
6. Заключение (1173).
- Список литературы (1174).

А.В. Дорофеев, А.А. Зябловский, А.А. Пухов, А.П. Виноградов.
Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН,
ул. Ижорская 13, 125412 Москва, Российская Федерация,
Московский физико-технический институт
(Государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 г. Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация
Тел. (968) 636-96-13, (495) 485-83-55
E-mail: alexandor7@gmail.com, zyaablovskiy@mail.ru,
pukhov@mail.ru, a-vinogr@yandex.ru

А.А. Лисянский, Physics Department, Queens College of the City
University of New York, Flushing, 11367, New York, USA
Tel. (718) 997-33-71. E-mail: alexander.lisyansky@qc.cuny.edu

Статья поступила 27 октября 2010 г.,
после доработки 16 июля 2012 г.

1. Введение

Задача о прохождении света через систему усиливающих слоёв имеет большое прикладное и фундаментальное значение. Прикладные задачи связаны с созданием полупроводниковых лазеров поверхностного излучения с вертикальным объёмным резонатором (vertical cavity surface-emitting lasers — VCSEL) [1–6]. Усиливающие многослойные системы часто используются в качестве модельных сред при изучении андерсоновской локализации света [7–17] и лазерной генерации в случайных средах [18–20]. В последнее время возрождение интереса к задачам о прохождении света через многослойные усиливающие системы стимулировано фундаментальными исследованиями метаматериалов [21–23]. Наряду с этим, данная задача обладает большим методическим значением, так как пренебрежение дифракционными явлениями и одномерность задачи позволяют получить аналитические ответы.

Выбор круга явлений, рассмотренных в данном обзоре, подразумевает дальнейшее применение полученных результатов для анализа свойств метаматериалов, содержащих слои с усиливающими элементами [23–27].

Уникальные свойства метаматериалов (отрицательные значения магнитной и диэлектрической проницаемостей) возникают благодаря плазмонному резонансу на металлических наночастицах-включениях. В рассматриваемых нами явлениях знаки импеданса и коэффициента преломления не имеют существенного значения, поэтому мы не будем сосредотачивать внимание на средах с отрицательным преломлением, отсылая интересующегося читателя к вышедшим в последнее время

обзорам [28, 29], где изложены различные подходы к решению этой проблемы.

Практически во всех предполагаемых применениях требуются метаматериалы с чрезвычайно низким уровнем потерь [30], достичь которого в настоящее время в пассивных системах не представляется возможным. Для уменьшения потерь было предложено сочетать метаматериалы с усиливающими средами (см. [23, 25, 26, 31–34], а также обзор [35] и приведённые там ссылки). В частности, в [23] было предложено чередовать слои метаматериалов со слоями усиливающей среды (схема Пендри–Рамакришны). В работах [33, 36] было предложено вводить усиливающие элементы непосредственно в матрицу метаматериала.

Задачей настоящего обзора является описание физической картины прохождения электромагнитной волны через многослойные системы, содержащие усиливающие слои. Основное внимание уделено линейной стадии взаимодействия с полем падающей волны, т.е. до начала лазерной генерации. Для этой цели мы описываем усиливающие среды при помощи диэлектрической проницаемости с отрицательной мнимой частью. Взаимодействие системы с волной рассчитывается двумя способами: исходя из граничных условий для суммарного поля (метод Френеля) и из анализа распространения волны как процесса переотражений (метод Эйри). Результаты контролируются путём сравнения с численным решением "честных" нелинейных уравнений Максвелла–Блоха, описывающих взаимодействие квантово-механической системы (атома, молекулы или квантовой точки) с инвертированной населённостью и классического электромагнитного поля [37]. Далее для определённости мы будем говорить о квантовой точке (КТ). Как показано в обзоре (см. также [24, 38, 39]), при отсутствии лазерной генерации, в пределе слабых полей распространение волны можно описывать уравнениями Максвелла, вводя отрицательную мнимую часть диэлектрической проницаемости, $\text{Im } \epsilon < 0$. Простота такого подхода делает его привлекательным для теоретических исследований усиливающих сред [40–44]. Кроме того, этот подход является основным при обработке эксперимента по метаматериалам [25, 26, 45].

Возможность описания прохождения электромагнитной волны через образец в терминах линейной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{gain}}(\omega)$, рассматриваемая нами в данном обзоре, чрезвычайно важна как с точки зрения приложений (это существенно облегчает конструирование конкретных устройств), так и с точки зрения трактовки эксперимента (существующие подходы характеризации электромагнитных свойств метаматериалов базируются на гипотезе о возможности введения эффективной диэлектрической проницаемости метаматериалов). Действительно, в большинстве исследований, посвящённых свойствам метаматериалов с усиливающими компонентами, предполагается, что эти метаматериалы являются линейными средами [27, 46–48]. Иными словами, в таких работах рассматриваются либо подпороговые режимы, либо переходные режимы до установления стационарной генерации. Этими случаями данный подход исчерпывается, так как установившаяся лазерная генерация превращает метаматериал с усилением в нелинейный объект.

Как правило, в эксперименте измеряются коэффициенты прохождения T и отражения R от слоя. Алго-

ритм получения из данных для R и T значений коэффициента преломления и импеданса или, альтернативно, диэлектрической и магнитной проницаемостей материала основан на использовании формул Френеля, точнее, на решении одномерного волнового уравнения [49–55]. В случае пассивных "правых" сред особых проблем не возникает. В случае "левых" сред, когда значения диэлектрической и магнитной проницаемостей отрицательны [22], процедура извлечения гомогенизированных значений эффективных проницаемостей $\epsilon_{\text{eff}}(\epsilon)$ и $\mu_{\text{eff}}(\epsilon)$ из $R(\epsilon)$ и $T(\epsilon)$ не является однозначной. Это связано с неоднозначностью выделения аналитической ветви корня квадратного от функции двух комплексных переменных [28]. В отличие от случая одного комплексного переменного [56], комплексный анализ не даёт однозначного рецепта выделения аналитической ветви функции двух комплексных переменных. Физически согласованный подход был разработан для пассивных сред: корень квадратный из произведения комплексных сомножителей, $\sqrt{Z_1 Z_2}$, определяется как произведение квадратных корней из каждого сомножителя, $\sqrt{Z_1} \sqrt{Z_2}$ [57]. Выбор "правильной" ветви квадратного корня осуществляется из физических соображений: действительная часть входного импеданса, $\text{Re } Z$, должна быть положительной [58]. При использовании усиливающих сред вопрос о знаке действительной части входного импеданса остаётся открытым [28], поскольку амплитуда отражённой волны может быть больше амплитуды падающей. Действительно, в работах [59, 60] при рассмотрении наклонного падения на усиливающую среду в условиях полного внутреннего отражения наблюдался коэффициент отражения, больший единицы. Сам по себе этот факт не является неожиданным, так как в условиях полного внутреннего отражения волна, прежде чем отразиться, частично заходит в усиливающую среду [61, 62]. Однако вопрос о том, может ли поток энергии исходить из образца навстречу падающей волне ($\text{Re } Z < 0$), в случае малых углов падения (в частности, в случае нормального падения) требует отдельного рассмотрения.

Описание усиливающей среды при помощи диэлектрической проницаемости вполне оправдано для схемы Пендри–Рамакришны, где области с усиливающим веществом и области, где находятся плазмонные наночастицы (НЧ), разделены. Однако при введении инвертированных КТ непосредственно в матрицу, окружающую металлические НЧ, возникает квантовая задача возбуждения инвертированной КТ поверхностного плазмона, локализованного на НЧ. Фактически, пара "НЧ плюс КТ" образует спазер [63], интенсивно изучающийся в последнее время. Решение задачи о взаимодействии системы спазеров, находящихся выше порога генерации, с проходящей по метаматериалу электромагнитной волной требует иных подходов, учитывающих как квантовые, так и нелинейные свойства спазера. В настоящем обзоре эти вопросы не рассматриваются, они проанализированы в работах [64–70].

Отметим, что интерпретация существующего к настоящему времени эксперимента [25, 71] затруднена тем, что в нём используются образцы, обладающие чертами обеих схем: как правило, инвертированные КТ нанесены на готовый образец метаматериала [71].

Интерес к режимам, предшествующим началу генерации, связан с тем, что для применения метаматериалов

одинаково губительными являются как потери, так и усиление. Действительно, приборы на основе метаматериалов, в частности суперлинза [21], при помощи которой предполагается превзойти дифракционный предел, как правило, являются ближнепольными устройствами. Передача энергии ближними полями (неоднородными волнами или эванесцентными модами) обладает известной спецификой [72, 73]: одна неоднородная волна энергии не передаёт, так как электрическое и магнитное поля в ней сдвинуты на четверть периода [74], и вектор Пойнтинга тождественно обращается в нуль. Для передачи энергии требуется вторая (отражённая) ближнепольная волна. Вклад в передачу энергии дают перекрёстные (интерференционные) члены, возникающие из-за перекрытия магнитного поля одной волны и электрического поля другой, причём для образования ненулевого потока энергии требуется наличие у этих волн разности фаз [72]. Верно и обратное: при возникновении потока энергии возникает сдвиг фазы у "интерферирующих" ближних полей. Наличие потерь или усиления создаёт в этой системе поток энергии. В результате в слое метаматериала возникает не предусмотренный "схемой без потерь" сдвиг фаз, как правило, зависящий от волнового числа эванесцентной гармоники. Возникающая деструктивная интерференция приводит к частичному или полному разрушению сверхизображения [75]. Таким образом, нужна точная компенсация потерь, и наиболее интересными представляются здесь именно подпороговые режимы. При этом есть надежда создать метаматериалы, в которых потери в металле скомпенсированы за счёт притока энергии от КТ ещё до развития спазерной генерации.

2. Описание усиливающей среды при помощи диэлектрической проницаемости с отрицательной мнимой частью

Прежде чем перейти к исследованию особенностей распространения света в усиливающей среде, рассмотрим возможность сведения изначально квантовой задачи к полуклассической, т.е. к использованию диэлектрической проницаемости с отрицательной мнимой частью, $\text{Im } \varepsilon_{\text{gain}}(\omega) < 0$. Наличие большого числа фотонов в рассматриваемых нами модах излучения позволяет пренебречь квантовыми флуктуациями и описать электромагнитное поле классическими уравнениями Максвелла [76, 77]. В то же время поведение двухуровневой системы, моделирующей КТ, требует квантово-механического рассмотрения. Такое приближение называется полуклассическим, а получающаяся система уравнений — уравнениями Максвелла–Блоха. Для одномерного случая, когда все физические величины зависят только от координаты z и времени и волна распространяется по нормали к слоям метаматериала, эти уравнения принимают вид [37, 39, 78–80]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_0(z)}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau_p} \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_0^2 P &= -\frac{2\omega_0 |\mu|^2 n E}{\hbar}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\tau_n} (n - n_0) &= \frac{2}{\hbar \omega_0} E \frac{\partial P}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь электрическое поле $E(z, t)$, поляризация $P(z, t)$, диэлектрическая проницаемость матрицы $\varepsilon_0(z)$ и инверсия населённости n верхнего и нижнего уровней квантовой точки предполагаются действительными величинами. Внешнее возбуждение стремится привести n к значению n_0 , а индуцированное излучение уменьшает величину n . Частота перехода квантовых точек обозначена как ω_0 , а недиагональный матричный элемент дипольного момента перехода квантовой точки — через μ ; τ_p и τ_n — характерные времена релаксации поляризации и инверсии населённости. Релаксация инверсии населённости, называемая также продольной релаксацией, определяется процессами передачи энергии возбуждения квантовых точек в фононы. Релаксация поляризации (поперечная релаксация) связана с теми же процессами, а также с упругими процессами, не меняющими инверсию населённости, но меняющими фазу поляризации. Поэтому время поперечной релаксации всегда меньше, чем продольной [79].

Первое уравнение системы (1) представляет собой волновое уравнение, получаемое из уравнений Максвелла для неоднородной среды. Два других получаются из уравнений для матрицы плотности КТ и описывают поляризацию и инверсную населённость КТ [78, 81, 82].

Переходя к фурье-представлению, правую часть последнего уравнения (1) надо записать в виде (см. [58])

$$\frac{1}{2\hbar\omega_0} \left(E^* \frac{\partial P}{\partial t} + E \frac{\partial P^*}{\partial t} \right).$$

При этом $n(z)$ перестаёт зависеть от времени. Переменные P и n можно исключить, получив одно уравнение для электрического поля:

$$\frac{\partial^2 E(z, \omega)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_{\text{gain}}(\omega) E(z, \omega) = 0. \quad (2a)$$

В этом случае усиливающая среда описывается эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{\text{gain}}(\omega) = \varepsilon_0 + \alpha \frac{\omega_0}{\omega} \frac{-i + (\omega^2 - \omega_0^2)/(2\omega/\tau_p)}{1 + \beta |E|^2 + [(\omega^2 - \omega_0^2)/(2\omega/\tau_p)]^2}, \quad (2b)$$

имеющей отрицательную мнимую часть при $n_0 > 0$ (см. также [39, 83–85]). Здесь $\alpha = 4\pi |\mu|^2 \tau_p n_0 / \hbar$, $\beta = |\mu|^2 \tau_n \tau_p / \hbar^2$.

Вследствие зависимости $\varepsilon_{\text{gain}}$ от E уравнение (2a) представляет собой нелинейное уравнение Гельмгольца, описывающее распределение поля гармоники $E(z, \omega)$ по z . Уменьшение мнимой части $\varepsilon_{\text{gain}}(\omega)$ с увеличением интенсивности поля $E(z, \omega)$ связано с подавлением инверсии населённости КТ за счёт индуцированного излучения. Однако при малой величине поля излучения,

$$|E|^2 \ll \frac{\hbar^2}{|\mu|^2 \tau_p \tau_n}, \quad (2b)$$

распространение по усиливающей среде можно описывать с помощью не зависящей от поля диэлектрической проницаемости, частотная дисперсия которой имеет вид "антирезонанса", а мнимая часть отрицательна:

$$\varepsilon_{\text{gain}}(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{2\alpha\omega_0/\tau_p}{-2i\omega/\tau_p + \omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2r)$$

Сразу отметим, что использование нелинейного уравнения Гельмгольца (2а) позволяет учесть влияние интенсивности поля на свойства среды лишь ниже порога генерации. Это связано с тем, что начало лазерной генерации наступает, как правило, на частоте, отличной от частоты падающей волны (см., например, [86]).

3. Падение света по нормали к усиливающему слою

3.1. История вопроса

Вопрос об отражении плоской волны, падающей по нормали на усиливающую среду, имеет долгую историю [40–44], полную противоречий и неясных мест. В частности, в [42] теоретически исследуется отражение волны от границы раздела двух сред, одна из которых является усиливающей. При этом сначала рассматривается прохождение волны через усиливающий слой конечной толщины, а коэффициент отражения находится из решения одномерного волнового уравнения с использованием максвелловских граничных условий [87]. Ниже такой подход будем называть подходом Френеля. Далее, в [42] осуществляется предельный переход к полубесконечному слою. Найденный таким образом коэффициент отражения R от усиливающего полупространства оказывается большим единицы. Это означает, что в полупространстве, заполненном усиливающей средой, распространяется только одна встречная волна, идущая из бесконечности и несущая энергию навстречу падающей волне, что находится в явном противоречии с принципом причинности.

Такое решение было подвергнуто критике в [41], где было отмечено, что волны, "возникающие при последовательных отражениях от границ слоя, образуют, при достаточно большом d , расходящийся ряд и решения просто нет". Фактически, это соответствует расходимости ряда парциальных волн Эйри [88, 89]. Налицо явное противоречие: подход Френеля даёт конечный результат, а ряд Эйри расходится. Заметим, что для диссипативных сред результат суммирования ряда Эйри всегда согласуется с предсказаниями подхода Френеля.

В [41] для разрешения этого парадокса вместо стационарной задачи о прохождении бесконечной плоской волны было предложено рассматривать прохождение импульса. Утверждалось, что если внутри слоя имеет место бесконечный рост амплитуды импульса со временем, то преобразование Фурье от амплитуды поля $E(z, \omega)$ не существует. Следовательно, и представление поля в виде суммы монохроматических волн в этом случае некорректно. Вместо этого было предложено раскладывать поле по волнам с экспоненциально возрастающей амплитудой (см. также [90]) в соответствии с обобщённым преобразованием Фурье [91, 92]. При этом контур интегрирования на комплексной плоскости частот в обратном преобразовании Фурье располагается выше всех полюсов подынтегральной функции. Как будет показано далее, полюсы, лежащие выше вещественной оси, дают экспоненциально растущую со временем поправку к обычному решению, полученному в рамках френелевского подхода.

В следующем разделе рассмотрено прохождение через усиливающий слой электромагнитной волны в виде полубесконечного цуга с конечным передним фрон-

том. Проведён сравнительный анализ результатов, получаемых из подхода Френеля, подхода Эйри и результатов численного решения уравнений Максвелла – Блоха методом FDTD.

3.2. Подходы Френеля и Эйри

Перейдём теперь непосредственно к рассмотрению задачи о нормальном падении полубесконечного синусоидального цуга с плавным фронтом на усиливающий слой конечной толщины d . Пусть, для определённости, цуг падает слева направо. Предполагая условие (2в) выполненным, пренебрежём на первом этапе нелинейностью, т.е. будем использовать диэлектрическую проницаемость вида (2г) в уравнении (2а). Линейность задачи позволяет перейти к фурье-представлению амплитуды $E(z, t)$. В этом случае наше рассмотрение сводится к задаче о прохождении плоской волны через однородный слой с отрицательной мнимой частью диэлектрической проницаемости, $\text{Im } \epsilon_{\text{gain}} < 0$, когда распределение поля $E(z, \omega)$ представляется в виде произведения распределения поля при единичной падающей волне $g(z, \omega)$ на амплитуду падающей волны. Вид функции $g(z, \omega)$ находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (2а) с использованием максвелловских граничных условий непрерывности полей (подход Френеля):

$$g(z, \omega) = \begin{cases} \exp(ik_0 z) + r(d) \exp(-ik_0 z), & z < 0, \\ a(d) \exp(ik_0 z \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) + b(d) \exp(-ik_0 z \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}), & 0 < z < d, \\ t(d) \exp(ik_0(z-d)), & z > d. \end{cases} \quad (3a)$$

Амплитуды $r(d)$, $a(d)$, $b(d)$, $t(d)$ находятся из сшивки тангенциальных компонент полей на границах слоя $z = 0$ и $z = d$ [58]:

$$\begin{aligned} r(d) &= -\frac{(Z_1^2 - Z_2^2)(\exp(-ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) - \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}))}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}})}, \\ t(d) &= \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}})}, \\ a(d) &= \frac{2Z_2(Z_1 + Z_2) \exp(-ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}})}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}})}, \\ b(d) &= \frac{2Z_2(Z_1 - Z_2) \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}})}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}})}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1/\sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}$ — характеристические импедансы вакуума и среды, а k_0 — волновое число в вакууме. Отметим, что поле волны в слое является суммой полей двух волн (рис. 1). Одна из них, имеющая положительную действительную часть волнового числа и положи-

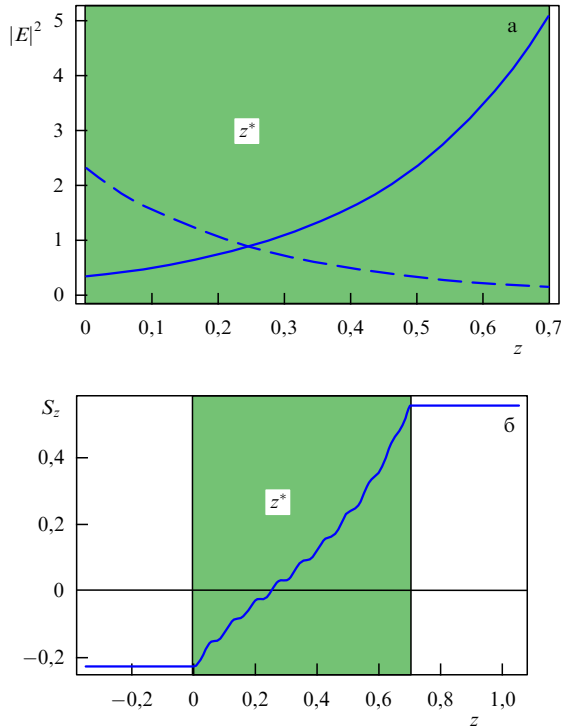


Рис. 1. (См. в цвете онлайн.) Результаты расчёта электрического поля $E(z, \omega)$ в рамках подхода Френеля. (а) Падающая (сплошная линия) и встречная (штриховая линия) волны. (б) Поток энергии S_z в слое толщиной $d > d_0$. Усиливающий слой закрашен. Частота падающей волны ω равна частоте перехода КТ ω_0 , диэлектрическая проницаемость, $\epsilon_{\text{gain}} = 2 - 0,182i$, получена из формулы (2г) при значениях параметров, характерных для усиливающих сред с полупроводниковыми КТ [24].

тельную z -компоненту вектора Пойнтинга, возрастает (усиливается) в глубь слоя. Эту волну будем называть "падающей", а вторую соответственно "встречной". Встречная волна убывает в глубь слоя и имеет отрицательную компоненту S_z вектора Пойнтинга. Отношение величин электрических полей этих двух волн на правой границе слоя, $z = d$, однозначно определяется импедансом прошедшей волны и, таким образом, не зависит от толщины слоя. Так как встречная волна (штриховая линия на рис. 1а), двигаясь справа налево, усиливается, то при достаточно большой толщине слоя на левой границе, $z = 0$, она по интенсивности превысит падающую (сплошная линия на рис. 1а)¹. Плоскость $z = z^*$, определяемая равенством интенсивностей прямой и обратной волн, характеризуется также нулевым потоком энергии, проходящим через эту плоскость. При $z < z^*$ поток энергии направлен влево, при $z > z^*$ — вправо. Расстояние d_0 от плоскости $z = z^*$ до правой границы слоя нетрудно получить из уравнений (3б) и

¹ Во всех численных расчётах мы использовали параметры, характерные для усиливающих сред с полупроводниковыми КТ [24]: $\omega_0 = 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $\tau_p = 3 \times 10^{-14} \text{ с}$, $\tau_n = 5 \times 10^{-13} \text{ с}$, $n_0 = 2,15 \times 10^{18} \text{ атомов см}^{-3}$, $|\mu|^2 = (1,5 \times 10^{-17})^2 \text{ дин см}^3$, $\epsilon_0 = 2$ в усиливающем слое ($0 < z < d$) и $\epsilon_0 = 1$ вне слоя. Далее для удобства сравнения результатов было проведено обезразмеривание системы (1), при котором время (t , τ_p , τ_n) измерялось в единицах τ_p , координата — в единицах $c\tau_p$, частота ω_0 — в единицах τ_p^{-1} , E и P — в единицах $\sqrt{\hbar n_0 / \tau_p}$, n — в единицах n_0 , $|\mu|^2$ — в единицах $\hbar / (n_0 \tau_p)$. В результате получаем значения безразмерных параметров $\omega_0 = 30$, $\tau_p = 1$, $\tau_n = 167$, $n_0 = 1$, $|\mu|^2 = 0,0145$, при этом константы c и $\hbar$ из уравнений исчезают.

условия равенства интенсивностей волн, движущихся в пластинке навстречу друг другу. Таким образом,

$$d_0 = \frac{1}{4k_0\kappa} \ln \left[\frac{(n_{\text{gain}} + 1)^2 + \kappa_{\text{gain}}^2}{(n_{\text{gain}} - 1)^2 + \kappa_{\text{gain}}^2} \right], \quad (4)$$

где $n_{\text{gain}} = \text{Re} \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}$ и $\kappa_{\text{gain}} = \text{Im} \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}$. Заметим, что d_0 зависит от уровня накачки κ_{gain} и для одного и того же образца может быть как меньше, так и больше толщины образца d .

В самом деле, выражение (4) для d_0 является приближённым. Оно найдено из условия равенства интенсивностей волн в пластинке. Но это условие не гарантирует равенства нулю потока энергии

$$S_z = \frac{c}{4\pi} \left[n_{\text{gain}} (a(d_0) a^*(d_0) - b(d_0) b^*(d_0)) + 2\kappa_{\text{gain}} \text{Im} (a(d_0) b^*(d_0)) \right].$$

Из последнего выражения видно, что при ненулевой мнимой части волнового числа, $\text{Im} k = \kappa_{\text{gain}}$, встречные волны при наличии разности фаз между ними создают интерференционный вклад в поток энергии [71]. Интерференционная поправка проявляется в виде мелкой ряби на рис. 1б, которая несколько смещает точку, где $S_z = 0$. Однако, как правило, это влияние незначительно.

Как указывалось выше, при толщине слоя, большей d_0 , внутри слоя появляется область, где поток энергии направлен навстречу падающей волне (рис. 1б). Из непрерывности потока энергии внутри слоя и его постоянства вне слоя следует, что при $d > d_0$ коэффициент отражения больше единицы. При дальнейшем увеличении толщины слоя подход Френеля предсказывает рост области, где преобладает встречная волна, убывающая слева направо и несущая энергию справа налево, навстречу падающей волне [42]. Энергия переносится слева направо лишь в слое толщиной d_0 , примыкающем к задней границе слоя. Важно отметить, что при увеличении толщины слоя подход Френеля (3б) предсказывает стремление коэффициента прохождения T к нулю, а коэффициента отражения R — к конечному значению (рис. 2). Таким образом, предельный переход к полупространству ($d/d_0 \rightarrow \infty$) даёт коэффициент отражения больше единицы и распространяющуюся по полупространству встречную волну (см. [42]).

В случае диссипативных сред результат расчёта распределения поля, использующий подход Френеля (3), совпадает с результатом суммирования парциальных волн ряда Эйри, возникающих при последовательных переотражениях волн от границ слоя [93, 94]. В случае усиливающего слоя результаты применения подходов Эйри и Френеля могут отличаться. Рассмотрим построение Эйри (рис. 3) подробнее. Падающая волна единичной амплитуды рассеивается на передней поверхности образца. В результате получается отражённая волна с амплитудой

$$r_\infty = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4a)$$

и прошедшая волна с амплитудой $t_{\infty 1} = 2Z_1 / (Z_1 + Z_2)$, где r_∞ и $t_{\infty 1}$ — коэффициенты отражения и прохождения в задаче о полупространстве. Обычно предполагается, что прошедшая волна должна быть падающей [41], т.е. иметь $\text{Re} Z_2 > 0$. Эта волна распространяется по образ-

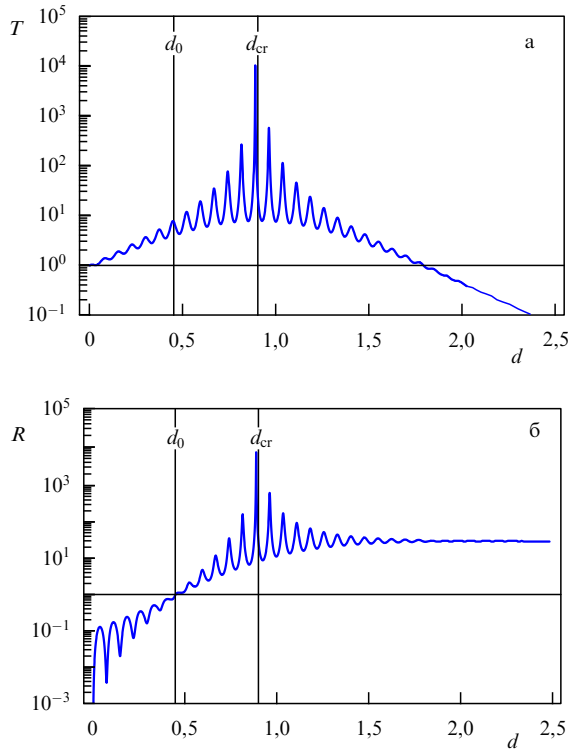


Рис. 2. (См. в цвете онлайн.) Коэффициенты (а) прохождения T и (б) отражения R (по интенсивности) от усиливающего слоя в зависимости от его толщины d , рассчитанные в рамках подхода Френеля. Параметры те же, что и на рис. 1.

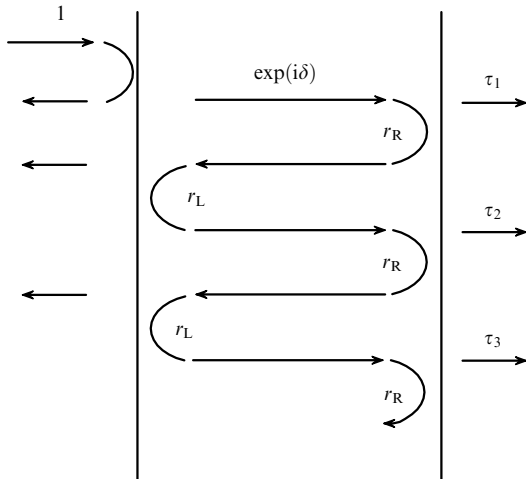


Рис. 3. Процедура Эйри для нахождения коэффициентов отражения и прохождения от пластинки как последовательность переотражений. В случае однородного слоя $r_L = r_R = -r_\infty$.

цу, и на правой границе ($z = d$) её амплитуда приобретает множитель $\exp(i\delta)$, $\delta = k_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}$. После этого она проходит через правую границу с коэффициентом $t_{\infty 2} = 2Z_2/(Z_1 + Z_2)$, так что амплитуда первой прошедшей через образец волны равна

$$\tau_1 = t_{\infty 1} t_{\infty 2} \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}).$$

Часть волны отражается от правой границы образца с коэффициентом отражения $-r_\infty$, превращаясь во встреч-

ную волну. Затем она проходит по образцу справа налево, отражается от левой границы с коэффициентом отражения $-r_\infty$, превращается в падающую и движется слева направо до границы образца. При прохождении этой падающей волной границы возникает вторая прошедшая парциальная волна с амплитудой $\tau_2 = \tau_1 q$, где

$$q = r_\infty^2 \exp(2ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) = r_\infty^2 \exp(2i\delta). \quad (46)$$

Амплитуда каждой последующей парциальной волны получается умножением на множитель q (знаменатель геометрической прогрессии). В результате полный коэффициент прохождения даётся рядом

$$\begin{aligned} t(d) &= t_{\infty 1} t_{\infty 2} \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) (1 + r_\infty^2 \exp(2i\delta) + \dots) = \\ &= t_{\infty 1} t_{\infty 2} \exp(ik_0 d \sqrt{\epsilon_{\text{gain}}}) \sum_{n=0}^{\infty} (r_\infty^2 \exp(2i\delta))^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Просуммировав прогрессию (5), приходим к выражению (36).

Заметим, что прогрессия (5) сходится только при $|q| < 1$. Это условие соответствует либо отсутствию усиления, либо, при его наличии, малой толщине слоя, $d < d_{\text{cr}}$. При $d = d_{\text{cr}}$ модуль q обращается в единицу. При $d < d_{\text{cr}}$ ослабление волны за счёт выхода её из образца превышает усиление за счёт прохода по усиливающей среде. Величина d_{cr} ровно в два раза превышает величину d_0 и определяется выражением

$$d_{\text{cr}} = 2d_0 = \frac{1}{2k_0 \kappa_{\text{gain}}} \ln \left[\frac{(n_{\text{gain}} + 1)^2 + \kappa_{\text{gain}}^2}{(n_{\text{gain}} - 1)^2 + \kappa_{\text{gain}}^2} \right]. \quad (6a)$$

При $d > d_{\text{cr}}$ ряд Эйри (5) расходится, а подход Френеля (3) даёт для амплитуды прошедшей волны конечный результат.

Таким образом, при $d > d_{\text{cr}}$ подходы Френеля и Эйри дают разные результаты. Поэтому нами было проведено численное FDTD-моделирование решения уравнений Максвелла–Блоха (1), корректно описывающих усиливающую среду. Рассматривалась временная задача о нормальном падении на усиливающий слой полубесконечного синусоидального пучка с плавным передним фронтом. Для сравнения с подходами Френеля и Эйри находилось стационарное распределение поля, возникающее после окончания переходного процесса.

Из рисунка 4а видно, что в области значений параметров задачи, для которых ряд Эйри (5) сходится ($d < d_{\text{cr}}$), имеется согласие результатов численных и обоих аналитических подходов. При толщинах $d_{\text{cr}} < d < d_{\text{las}}$ ряд Эйри (5) расходится, но подход Френеля и результаты численного моделирования дают совпадающие результаты (рис. 4б). При толщинах, больших некоторого значения d_{las} , начинается лазерная генерация и значения поля, полученные в ходе численного эксперимента, начинают превышать величину, полученную с использованием подхода Френеля (рис. 4в). Это связано с нарушением условия (2в), и установившееся решение не описывается в линейном приближении, т.е. по Френелю².

Построение ряда Эйри (5) весьма наглядно описывает прохождение полубесконечного пучка волн через слой

² Область значений d вблизи d_{cr} будет рассмотрена ниже.

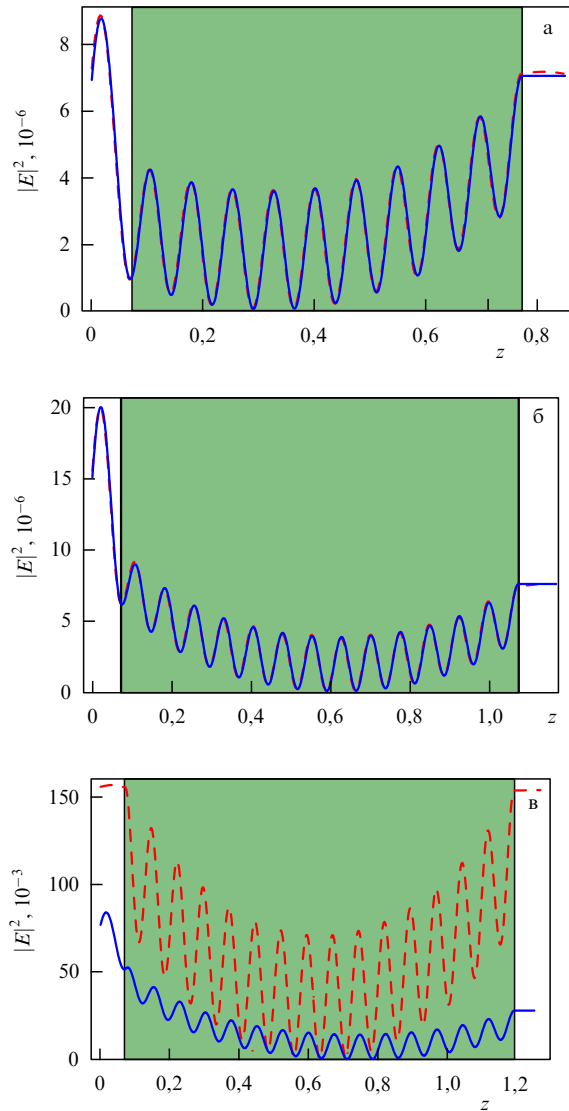


Рис. 4. (См. в цвете онлайн.) Интенсивность электрического поля, рассчитанная в рамках подхода Френеля (3) (сплошные линии) и по уравнениям Максвелла – Блоха (1) (штриховые линии) при прохождении волны (а) через слой толщиной $d = 0,7$, меньшей критического значения $d_{cr} \approx 0,905$, (б) через слой толщиной $d = 1$, большей критического значения, когда генерация всё ещё отсутствует, и (в) через слой толщиной $d = 1,2$, когда возникает лазерная генерация. Частота падающей волны ω равна частоте перехода КТ ω_0 , а дипольный момент КТ $|\mu|^2 = 0,0145$, интенсивность падающей волны равна (а) 10^{-6} , (б) 10^{-6} , (в) 10^{-3} в безразмерных единицах (см. сноску 1).

вещества. Однако для усиливающей среды оно должно проводиться по-разному для случаев $d < d_{cr}$ и $d > d_{cr}$. Действительно, по построению r_∞ — это коэффициент отражения в задаче об отражении плоской волны от полупространства. Величина r_∞ зависит от того, с какой волной в слое "сшивается" падающая из вакуума волна.

Если брать, как это обычно делается для диссипативных сред [95], волну, переносящую энергию в глубь слоя, то при $d < d_{cr}$ модуль знаменателя геометрической прогрессии $q = r_\infty^2 \exp(2i\delta)$, где $\delta = k_0 d \sqrt{\epsilon_{gain}}$, оказывается меньше единицы, $|q| < 1$, и ряд Эйри по падающим волнам сходится к выражению (36), получаемому из подхода Френеля.

Если же в процедуре Эйри считать, что решение в полубесконечной среде является встречной волной [42],

несущей энергию к границе $z = 0$ из бесконечности, то величины импеданса Z_2 и комплексной фазы δ меняют знак. В результате знаменатель прогрессии (5) становится равным $1/q$. Формально это означает, что при $d > d_{cr}$ ряд Эйри по встречным волнам сходится, причём к результату расчёта по Френелю (36).

Проведённый анализ показывает, что результат (36), полученный в рамках подхода Френеля, можно рассматривать как аналитическое продолжение суммы ряда Эйри (5) в область $d > d_{cr}(\omega)$ на плоскости комплексных частот. Иными словами, при $d < d_{cr}$ нужно использовать ряд Эйри по падающим волнам, а при $d > d_{cr}$ — по встречным волнам. Заметим, что при $d = d_{cr}$ ($|q| = 1$) ни один из этих рядов не сходится. Если $q \neq 1$, то предел $d \rightarrow d_{cr} + 0$ суммы ряда (5) по встречным волнам совпадает с пределом $d \rightarrow d_{cr} - 0$ суммы ряда (5) по падающим волнам. Напомним, что лазерной генерации пока ещё нет. Использование ряда по встречным волнам эквивалентно продолжению функции $1/(1 - q)$ за радиус её сходимости. Действительно, [56]:

$$\frac{1}{1 - q} = -\frac{1/q}{1 - 1/q} = -\frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n. \quad (66)$$

Таким образом, мы получаем полное соответствие между рядами Эйри и результатом френелевского подхода во всех рассмотренных случаях.

3.3. Временная задача о прохождении полубесконечного пуга волн через усиливающий слой

Чтобы выяснить причину несоответствия, казалось бы, надёжного френелевского подхода (рис. 4в) результатам численного решения системы Максвелла – Блоха, рассмотрим временную задачу о прохождении полубесконечного пуга волн через усиливающий слой. Пусть передний фронт пуга $E_0(z, t)$ достигает точки $z = 0$ в момент времени $t = 0$, а форма пуга задаётся выражением

$$E_0(z = 0, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\sigma}\right)\right) \exp(-i\Omega t), & t > 0, \end{cases}$$

где Ω — несущая частота пуга, σ — ширина фронта.

Корректное нахождение спектра такого импульса,

$$e_0(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) \exp(i\omega t) dt, \quad (7a)$$

требует определённой аккуратности [96], поскольку $E_0(z = 0, t)$ не является финитной функцией (она не убывает при $t \rightarrow +\infty$). Здесь можно использовать стандартный приём [92], когда находится спектр произведения $E_0(z = 0, t) \exp(-\gamma t)$, а затем γ устремляется к нулю. В результате получается выражение

$$e_0(\omega) = -\frac{1}{2\pi\sigma(\omega - \Omega)(\omega - \Omega + i/\sigma)}. \quad (7б)$$

В отсутствие слоя, в соответствии с линейным уравнением Гельмгольца (2а), (2г), каждая гармоника $e_0(\omega) \exp(-i\omega t)$ поля, заданного в точке $z = 0$, создаёт сразу во всём пространстве бегущую направо плоскую волну $e_0(\omega) \exp(-i\omega t) \exp(i\omega z/c)$. Сумма этих плоских

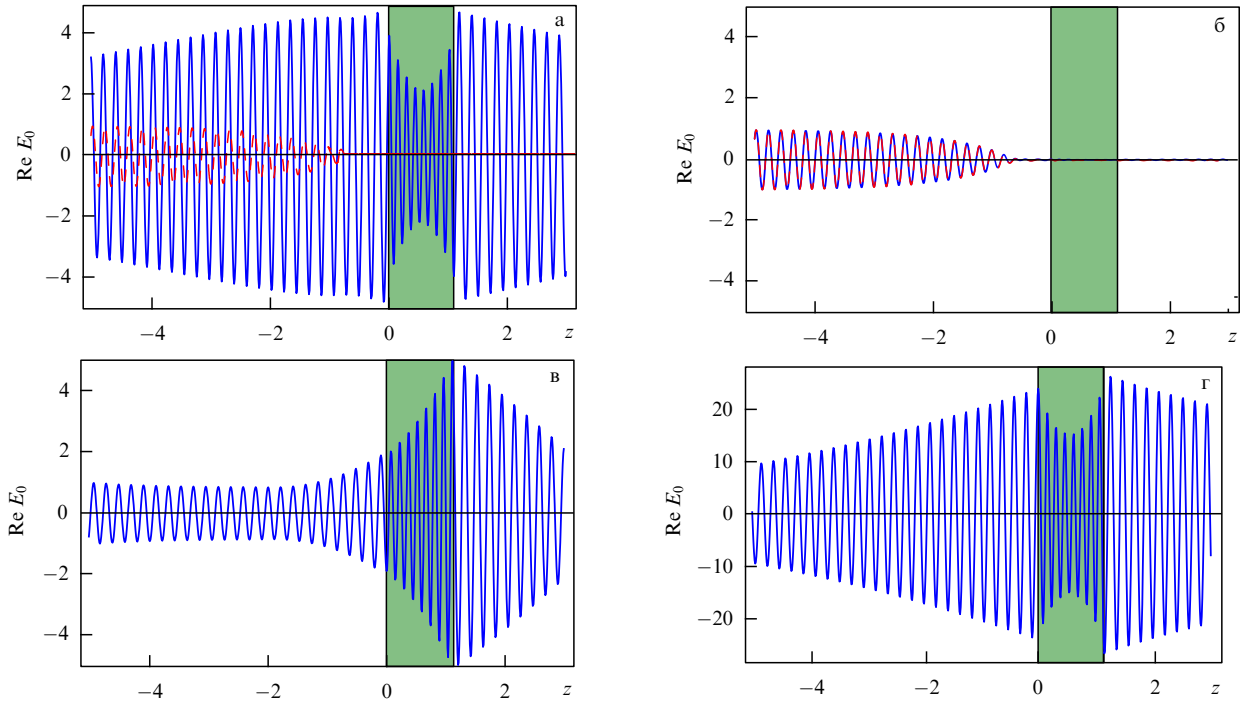


Рис. 5. (См. в цвете онлайн.) Результат расчёта распределения поля в пуге, падающем на слой усиливающей среды. (а) Подход Френеля. Момент времени $t = 0$, когда передний фронт пуга не дошёл до слоя. Сплошной линией показано распределение поля, найденное по формуле (8), пунктирной линией показано истинное распределение поля в пуге; (б) то же, рассчитанное по модифицированному подходу Френеля; (в) усиление поля пуга (модифицированный френелевский расчёт) при $t = 5,5$; (г) поле пуга в более поздний момент времени, $t = 15,5$, выходящее на локализованное собственное состояние с комплексной частотой. Параметры те же, что и в подписи к рис. 1.

волн,

$$E_0(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) \exp(-i\omega t) \exp\left(\frac{i\omega z}{c}\right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) d\omega = E_0\left(0, t - \frac{z}{c}\right),$$

равна полю пуга, распространяющегося с течением времени направо без изменения его формы (пунктирная кривая на рис. 5а). Заметим, что $E_0(z, t) = 0$ при $z/c > t$, что согласуется с принципом причинности.

При наличии слоя, расположенного в области $z \notin [0, d]$, полное (падающее плюс рассеянное) поле пуга также должно подчиняться принципу причинности, т.е. рассеянная волна должна отсутствовать до достижения фронтом пуга левой границы слоя $z = 0$. При $t < 0$ полное поле должно быть равно $E_0(0, t - z/c)$.

Фурье-гармоника полного поля при наличии слоя равна произведению амплитуды падающей гармоники $e_0(\omega)$ на передаточную функцию $g(z, \omega)$ из уравнения (3а). Напомним, что эта функция была найдена в рамках подхода Френеля. Она выражает распределение поля в системе вакуум – слой – вакуум при нормальном падении на неё плоской волны единичной амплитуды.

Временная зависимость поля при этом находится обратным преобразованием Фурье:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (8)$$

В случае диссипативного слоя или усиливающего слоя толщиной $d < d_{cr}$ указанная процедура действительно даёт правильную форму исходного импульса:

$E(z, t) = E_0(0, t - z/c)$. Однако при $d > d_{las} \geq d_{cr}$, где d_{las} — толщина, при которой начинается лазерная генерация, получается отличное распределение поля (сплошная линия на рис. 5а). Как видно из рис. 5а, рассеянная волна появляется до того, как передний фронт пуга дошёл до слоя, т.е. имеется явное нарушение принципа причинности. Это нарушение указывает на необходимость модификации подхода Френеля.

Как известно, принцип причинности определяет аналитические свойства передаточной функции $g(z, \omega)$ (которая по своей природе является функцией отклика) как функции комплексной частоты ω [58]. Функция $g(z, \omega)$ имеет особенности в виде полюсов на плоскости ω в точках $\omega_j = \text{Re } \omega_j + i \text{Im } \omega_j$, $j = 1, 2, \dots$, соответствующих собственным модам слоя как открытого резонатора [97, 98]. Положение полюсов на плоскости ω определяется из условия обращения в нуль знаменателей, одинаковых для всех амплитуд поля (3б):

$$\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}(\omega)} + 1} \right)^2 \exp\left(2i \frac{\omega}{c} d \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}(\omega)}\right) = 1, \quad (9)$$

что равносильно условию $q = 1$.

В отсутствие усиления (диссипативный слой) все полюсы функции $g(z, \omega)$ располагаются в нижней полуплоскости комплексной частоты ω (рис. 6а). В этом случае обратное преобразование Фурье (8) даёт физически осмысленный результат.

В случае усиливающего слоя, в соответствии с (9), образуются дополнительные полюсы (рис. 6б), которые при увеличении накачки (параметр α в формуле (2б)) переходят в верхнюю полуплоскость комплексной частоты ω (рис. 6г), что впервые происходит при $d = d_{las}(\alpha)$.

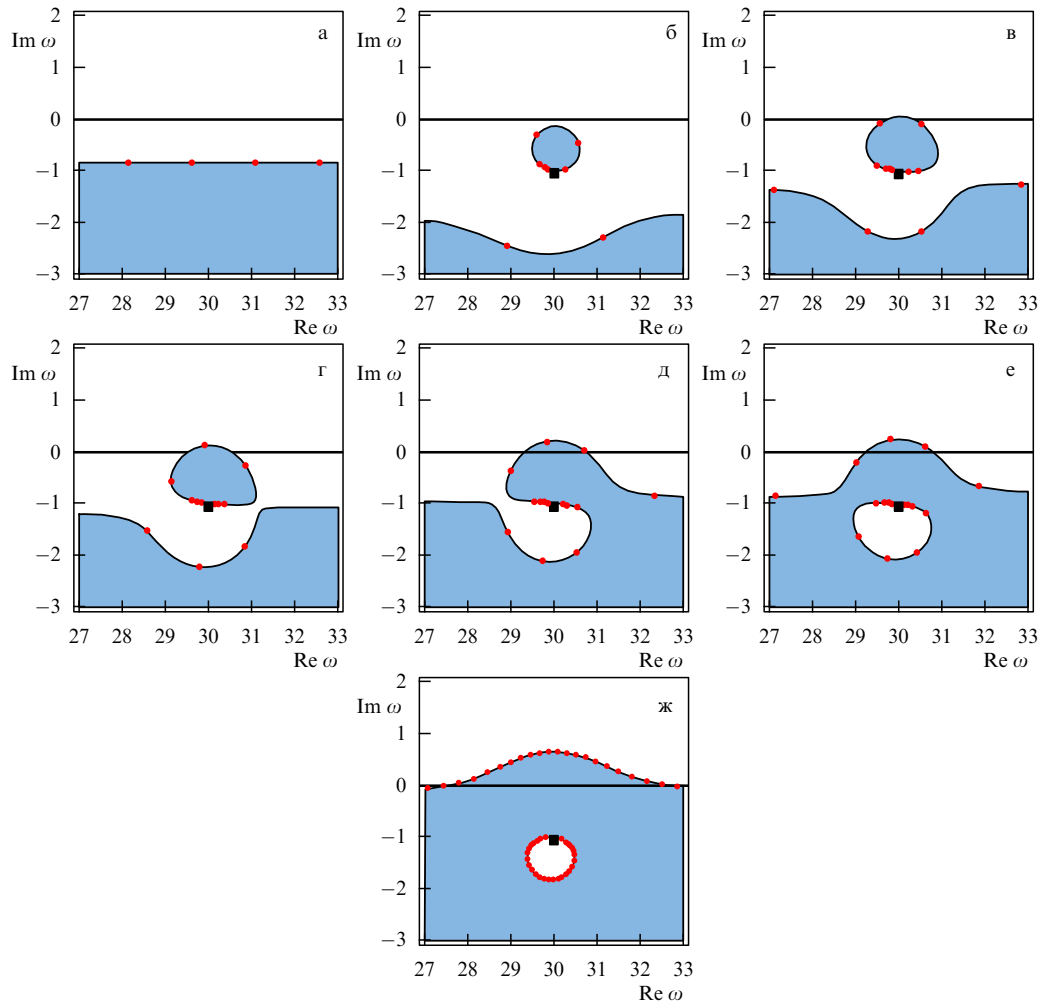


Рис. 6. (См. в цвете онлайн.) Полюсы функции отклика $g(z, \omega)$ (обозначены точками), полюс диэлектрической проницаемости (обозначен квадратиком). Области $d > d_{cr} \approx 0,905$ затемнены; (а) квантовые точки отсутствуют ($|\mu|^2 = 0$), толщина слоя $d = 1,5$; (б–ж) квантовые точки присутствуют, $|\mu|^2 = 0,0145$, толщина слоя (б) $d = 0,7$; (в) $d = 1,0$; (г) $d = 1,12$; (д) $d = 1,5$; (е) $d = 2,0$; (ж) $d = 7,0$. Параметры соответствуют таковым в подписи к рис. 1.

Как правило, касание оси $\text{Im } \omega = 0$ линией $|q| = 1$ происходит при $d = d_{cr} < d_{las}$. В случае $d_{cr} < d < d_{las}$ существует диапазон действительных частот, когда ряд Эйри расходится, но лазерной генерации нет (рис. 6в), и, как следствие, ряд Эйри по встречным волнам и расчёты с использованием формул Френеля дают правильный результат.

Если делать обратное преобразование Фурье обычным образом (8) [58], то появление полюсов в верхней полуплоскости приводит к нарушению принципа причинности. В этом случае выражение (8) должно быть модифицировано [41, 90], исходя из того что передаточная функция $g(z, \omega)$ по своей природе является функцией отклика. Чтобы получить временное представление функции отклика

$$G(z, t) = (2\pi)^{-1} \int_C g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

удовлетворяющей принципу причинности ($G(z, t) = 0$ при $t < 0$), контур интегрирования C в обратном преобразовании Фурье,

$$E(z, t) = \int_C e_0(\omega) g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (10)$$

должен быть проведён выше всех имеющихся полюсов. Далее он может быть деформирован таким образом, что выражение (10) принимает вид суммы интеграла по вещественной оси и всех вычетов в полюсах [41, 90]:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega - 2\pi i \sum_j \text{res}[g(\omega_j, z)] e_0(\omega_j) \exp(-i\omega_j t). \quad (11)$$

Заметим, что интеграл по вещественной оси ω в выражении (11) совпадает с результатом, полученным в рамках стандартного подхода Френеля (8). Как мы видели выше (рис. 5а), само по себе первое слагаемое в (11) приводит к нарушению принципа причинности. Интегрирование же по новому контуру добавляет вычеты в дискретном наборе частот ω_j в виде растущих со временем слагаемых $\sim \exp(-i \text{Re } \omega_j t) \exp(\text{Im } \omega_j t)$ [41, 90, 99]. Добавление этих дискретных мод согласует схему расчёта с принципом причинности, т.е. до момента достижения фронтом пуга границы слоя отражённая волна отсутствует (рис. 5б). Будем называть далее модифицированным френелевским подходом расчёт поля волны с учётом описанных выше дискретных мод.

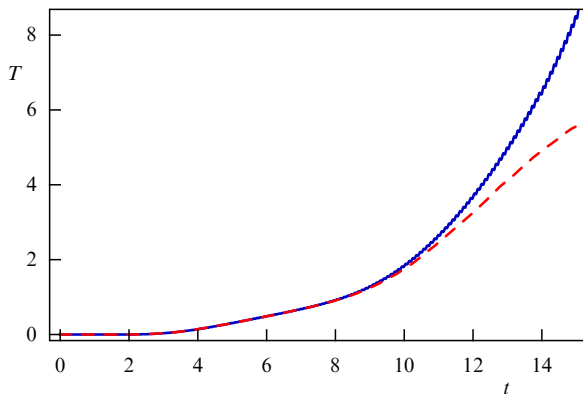


Рис. 7. Зависимость коэффициента прохождения, рассчитанного модифицированным методом Френеля (сплошная линия) и полученного численным решением уравнений Максвелла – Блоха (штриховая линия), от времени при падении полубесконечного синусоидального пучка на усиливающий слой. Интенсивность падающей волны равна 10^{-6} в безразмерных единицах (см. сноску 1).

Каждое собственное решение в (11), возникающее на частоте одного из полюсов, представляет собой экспоненциально возрастающее со временем поле, локализованное в слое, и экспоненциально убывающее при удалении от него (рис. 5г) [41, 90, 99]. Это убывание связано с тем, что вне усиливающего слоя мнимая часть волнового числа положительна, $\text{Im}(\omega/c) > 0$. Таким образом, пренебрежение вкладом дискретного спектра полюсов в (11) является источником ошибок, возникающих во френелевском подходе. Именно корректный учёт вклада этих полюсов обеспечивает выполнение принципа причинности при анализе задачи.

Поскольку модифицированный френелевский подход был получен из линеаризованных уравнений Максвелла – Блоха, он вполне корректно описывает поведение поля на линейной стадии развития генерации, когда поле удовлетворяет критерию малости (2в) (рис. 7). Однако с течением времени поле неограниченно возрастает. При этом в основном усиливается прошедшая через слой (рис. 5в), а не отражённая волна, как предсказывает расчёт в рамках стандартного подхода Френеля [42]. Однако получение стационарных значений поля возможно только в рамках нелинейного подхода.

Важно отметить связь между полюсами функции отклика и критической толщиной слоя. Положение полюсов определяется уравнением (9), а критическая толщина (6а) определяется нарушением условия сходимости ряда Эйри, т.е. фактически тем же равенством (9), но взятым по модулю. Следовательно, все полюсы лежат на кривых, определяемых условием $d = d_{\text{cr}}(\omega)$, где ω принимает комплексные значения (см. рис. 6). При достаточно большой толщине слоя (или достаточно сильной накачке, определяемой коэффициентом α в уравнении (2г)) на вещественной оси частот появляется область, где $d > d_{\text{cr}}(\omega)$. В этой области ряд Эйри перестаёт сходиться (пересечение закрашенной области с осью абсцисс на рис. 6в), но френелевский подход (8) всё ещё даёт ответ, совпадающий с численным расчётом решения уравнений (1) (рис. 6в). Лазерная генерация возникает при несколько большей толщине слоя d_{las} (или величине накачки), когда один из полюсов переходит в верхнюю полуплоскость (рис. 6г), и только тогда подход Френеля даёт неправильный ответ. Таким обра-

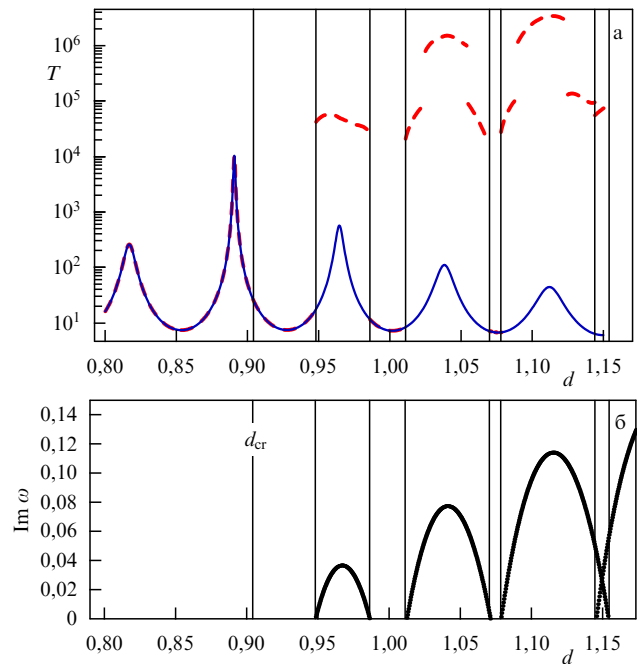


Рис. 8. (См. в цвете онлайн.) (а) Коэффициент прохождения через слой, рассчитанный по методу Френеля (сплошная линия) и найденный из численного решения уравнений Максвелла – Блоха (штриховая линия), в зависимости от толщины слоя. (б) Положение полюсов, имеющих $\text{Im} \omega > 0$, в зависимости от толщины слоя. Интенсивность падающей волны равна 10^{-6} .

зом, условие расходимости ряда Эйри является необходимым, но не достаточным для начала лазерной генерации и может использоваться только в качестве приближённой оценки условия возникновения генерации.

Интересной особенностью задачи является движение полюсов по комплексной плоскости с увеличением толщины слоя. Полюсы движутся вдоль кривой $d = d_{\text{cr}}(\omega)$, при этом они могут выходить в верхнюю полуплоскость и снова возвращаться в нижнюю полуплоскость. В результате по мере увеличения d генерация то возникает, то пропадает. Таким образом, может существовать целый набор толщин d_{las} , с максимальным значением d_{th} . При толщинах, больших d_{th} , в верхней полуплоскости всегда оказывается не менее одного полюса, после этого генерация с возрастанием толщины слоя уже не исчезает.

Как указывалось выше, пока генерации нет, стандартный френелевский подход даёт тот же результат, что и решение нелинейных уравнений Максвелла – Блоха. Данное утверждение проиллюстрировано на рис. 8а, где изображена зависимость стационарного значения коэффициента прохождения T от толщины слоя при некоторой фиксированной частоте. Видно, что отклонение распределения поля, полученного путём решения уравнений Максвелла – Блоха, от стандартного френелевского³ происходит при таких значениях d , когда в верхней полуплоскости комплексной частоты ω появляются полюсы.

Отметим, что на частотах, отличных от частоты лазерной генерации, френелевский подход предсказывает плавное изменение стационарной интенсивности

³ Отметим, что нарушение условия сходимости ряда Эйри не всегда приводит к отклонению фактического распределения поля от френелевского.

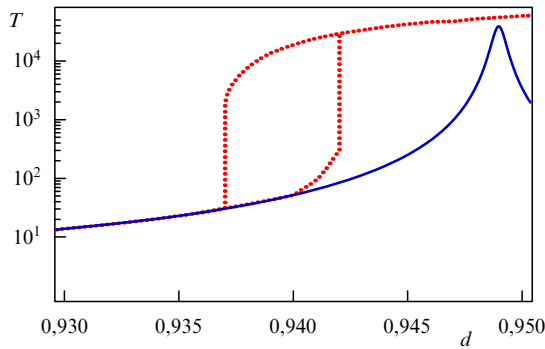


Рис. 9. Коэффициент прохождения электромагнитной волны через усиливающий слой в зависимости от толщины усиливающего слоя. Интенсивность падающей волны равна 10^{-2} .

прошедшей волны от толщины. При некоторых значениях толщины наблюдаются максимумы интенсивности прошедшей волны (рис. 8а). Нелинейные же уравнения Максвелла – Блоха предсказывают в этой зависимости скачки интенсивности (рис. 8а) даже в случае бесконечно малой интенсивности падающей волны. Однако эти скачки наблюдаются отнюдь не на тех толщинах, где находятся пики интенсивности, а на каждой толщине, где начинается или заканчивается лазерная генерация. В этой точке происходит выход полюса в верхнюю полуплоскость (начинается лазерная генерация) или уход полюса в нижнюю полуплоскость (прекращается лазерная генерация).

На частотах падающей волны, близких к частоте генерации, при приближении к d_{las} френелевский подход даёт бесконечно большое увеличение поля. Нелинейные же уравнения Максвелла – Блоха предсказывают конечные значения поля, причём в нелинейном режиме лазерной генерации зависимость интенсивности прошедшей волны от толщины образца имеет явно выраженный гистерезисный характер (рис. 9), что связано с бистабильностью слоя в режиме лазерной генерации (наиболее просто физика этого явления описывается в рамках модели мода поля – двухуровневый атом [78]).

При частоте падающей волны, отличной от частоты генерации, возможность начала генерации и переход в нелинейный режим связаны с наличием у падающего пуга переднего фронта, содержащего все частотные гармоники. Контроль амплитуды несущей волны даст совпадение с френелевским подходом вплоть до толщины d_{las} и последующий скачок интенсивности (рис. 8б) при превышении этой толщины.

4. Лазерная генерация в фотонных кристаллах

До сих пор мы рассматривали прохождение света через единичный усиливающий слой. Рассмотрим теперь прохождение света через конечную периодическую многослойную систему, в которой усиливающие слои чередуются с "нормальными". Такая система называется также одномерным фотонным кристаллом (ФК). Задача о падении волны на ФК имеет особенности, связанные, прежде всего, с наличием разрешённых и запрещённых зон, определяющих поведение поля на масштабе в несколько элементарных ячеек ФК. Меняется также распределение интенсивности поля в пределах одной

ячейки, так как энергия поля концентрируется в определённых областях ячейки ФК в зависимости от частоты (эффект Бормана [74]), и интенсивность поля в усиливающих слоях может превосходить интенсивность поля в одиночном слое при одинаковых амплитудах падающих волн. Кроме того, сама зонная структура ФК меняется при включении накачки в силу изменения частотной дисперсии диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\text{gain}}(\omega)$. Эти особенности проявляются уже в самом простом случае, когда ФК представляет собой последовательность усиливающих слоёв, разделённых слоями вакуума, с толщинами d_1 и d_2 и диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_{\text{gain}}(\omega)$ ($\text{Im } \epsilon_{\text{gain}}(\omega) < 0$) и $\epsilon_2 = 1$ соответственно.

Простейшим способом нахождения коэффициентов прохождения и отражения для ФК является метод T -матриц [95]. Применительно к ФК метод T -матриц эквивалентен подходу Френеля для однородного слоя. Подход Эйри тоже можно обобщить, заменяя плоские волны блоховскими.

При достаточно большой толщине усиливающего ФК в нём может начаться лазерная генерация. В данном обзоре мы ограничились рассмотрением линейной стадии распространения волн по ФК, так как мы интересуемся в основном подпороговыми явлениями. Нелинейная же оптика ФК в настоящее время является бурно развивающейся областью, для которой изложение результатов требует отдельного рассмотрения (см. [84, 100, 101]).

4.1. Ряд Эйри для фотонных кристаллов

В разделе 3.2 подход Эйри был подробно проанализирован для единичного однородного слоя, когда распространение волны рассматривается как последовательность переотражений внутри слоя. Обобщим этот метод на случай произвольного числа слоёв. В ФК есть два собственных решения, которые являются блоховскими волнами, $E^{\pm} = f^{\pm}(z) \exp(\pm i k_B z)$. Для построения ряда Эйри по блоховским волнам достаточно знать блоховское волновое число k_B и импедансы $Z^{\pm}$ (или адмиттансы $\zeta^{\pm} = 1/Z^{\pm}$) этих волн⁴. Заметим, что, в отличие от блоховского волнового числа k_B , определённого с точностью до вектора обратной решётки, импеданс волны $Z^{\pm}$ в данной точке определён однозначно, хотя и меняется внутри элементарной ячейки. Учитывая связь между магнитным и электрическим полями в волне, $H = -i/k_0(\partial E/\partial z)$, находим

$$\zeta^{\pm} = \pm \frac{k_B}{k_0} - \frac{i}{k_0} \frac{\partial \ln f^{\pm}}{\partial z}.$$

Второе слагаемое является периодической функцией z и соответствует вкладу предэкспоненты блоховской волны.

В отсутствие потерь и усиления импеданс $Z^{\pm}$ принимает комплексные значения в разрешённой зоне и чисто мнимые — в запрещённой [29]. Соответственно волновое число k_B принимает вещественные и комплексные значения. Этим и определяется основное отличие разрешённой и запрещённой зон. Появление мнимой части диэлектрической проницаемости размывает гра-

⁴ Далее будем предполагать, что предэкспоненциальные функции нормированы так, что они равны единице при $z = 0$. О связи $\zeta^{\pm}$ с k_B подробнее см. [29].

ницы зон, но качественно основные закономерности сохраняются.

Процесс переотражений (ряд Эйри) конструируется следующим образом. Падающая из вакуума и отражённая волны, имеющие импедансы $+1$ и -1 , порождают внутри ФК блоховскую волну, имеющую импеданс $Z^+ = 1/\zeta^+$ и амплитуду электрического поля $t_L = 2/(\zeta^+ + 1)$ (см. рис. 3). Эта волна затем распространяется по ФК, приобретая в конце образца ФК множитель $\exp(i\delta)$, $\delta = k_B N(d_1 + d_2)$. Затем она отражается от правой границы, причём отражённая волна имеет импеданс $Z^- = 1/\zeta^-$, а прошедшая $Z = 1$. Коэффициент прохождения волны E^+ в вакуум равен $t_R = (\zeta^- - \zeta^+)/(\zeta^- - 1)$, так что амплитуда первой прошедшей парциальной волны равна $\tau_1 = t_L t_R \exp(i\delta)$. При этом происходит отражение от правой границы с коэффициентом $r_R = (1 - \zeta^+)/(\zeta^- - 1)$. Затем происходит прохождение волны E^- через слой ФК и её отражение от левой границы с коэффициентом $r_L = -(1 + \zeta^-)/(1 + \zeta^+)$. Отражённая волна E^+ вновь проходит через слой ФК, так что вторая парциальная волна, вышедшая из ФК, имеет амплитуду $\tau_2 = q\tau_1$, где

$$q = r_R r_L \exp(2i\delta). \quad (12)$$

Далее итерации проводятся аналогично, так что n -я парциальная волна имеет амплитуду $\tau_n = q^{n-1}\tau_1$. В результате коэффициент прохождения можно представить в виде ряда:

$$t = t_L t_R \exp(i\delta) \sum_{n=0}^{\infty} q^n. \quad (12a)$$

Формально суммируя ряд, получаем выражение

$$t = \frac{t_L t_R \exp[ik_B N(d_1 + d_2)]}{1 - r_L r_R \exp[2ik_B N(d_1 + d_2)]}, \quad (12б)$$

которое, как легко убедиться, тождественно совпадает с результатом применения метода T -матриц (при условии выбора волны E^+ в качестве прошедшей из вакуума в ФК, т.е. "падающей" по терминологии, введённой в разделе 3.2).

В дальнейшем наблюдается полная аналогия со случаем единичного усиливающего слоя: расходимость на какой-либо частоте ряда Эйри по падающим волнам не является достаточным условием для лазерной генерации. Более того, как будет показано в дальнейшем, это условие является необходимым лишь в том случае, если частота линии накачки ω_0 лежит в разрешённой зоне ФК. В случае же, когда частота линии накачки лежит в запрещённой зоне, необходимое условие начала лазерной генерации связано с расходимостью ряда Эйри по встречным волнам.

4.2. Лазерная генерация в разрешённой зоне фотонных кристаллов

В разрешённой зоне знаки действительной и мнимой частей k_B противоположны. Падающая волна усиливается при прохождении по ФК. Граница сходимости ряда Эйри, на которой расположены все полюсы передаточной функции, определяется, как и в случае единичного усиливающего слоя, условием $|q| = 1$ (q находится по формуле (12)).

Отметим принципиальное отличие случая слоя, состоящего из одной ячейки ФК, от случая однородного

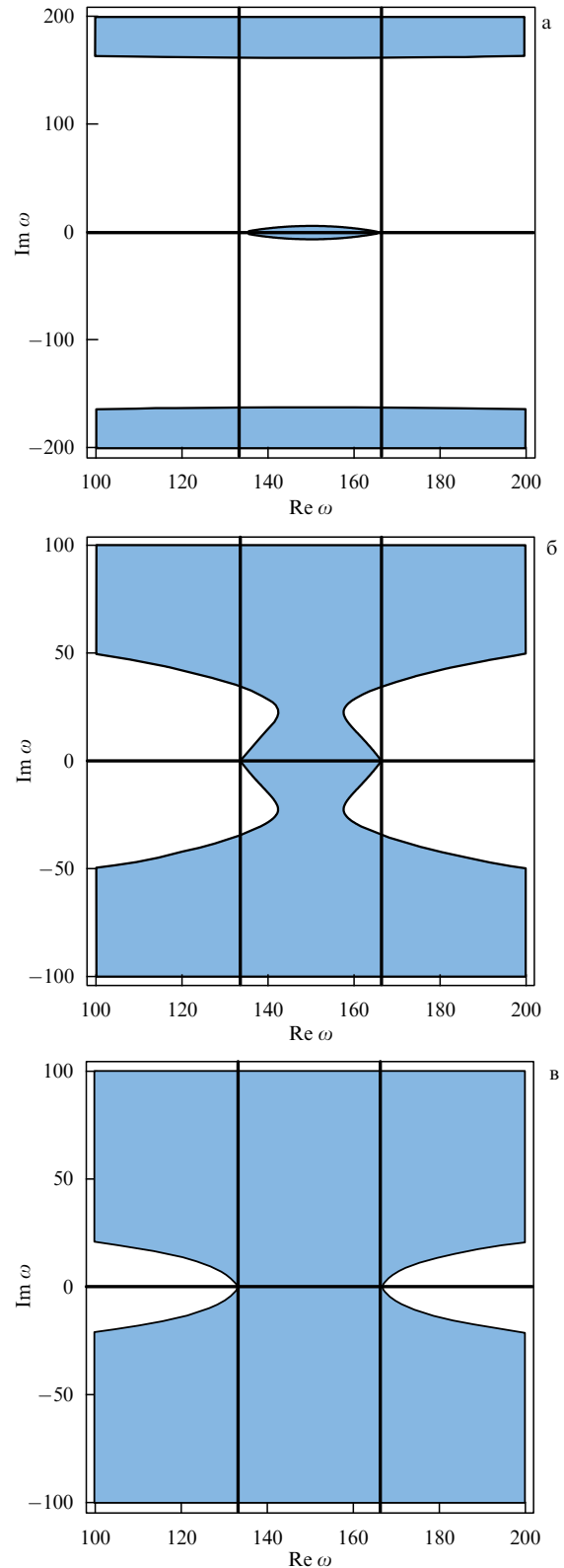


Рис. 10. (См. в цвете онлайн.) Образование запрещённой зоны ФК: (а) одна ячейка, (б) две ячейки, (в) четыре ячейки. Усиление и потери отсутствуют.

слоя. Если накачка отсутствует и мы пренебрегаем потерями, то вместо зависимости, показанной на рис. 6а, мы имеем зависимость, показанную на рис. 10а. Области, где ряд Эйри по падающим волнам расходится, затемнены. Для одной ячейки существуют три таких области.

Одна окружает область действительных частот, соответствующих запрещённой зоне ФК. Появляется также область в верхней полуплоскости. Увеличение числа слоёв ведёт к смыканию этих областей и к заполнению области с действительной частью частоты, принадлежащей запрещённой зоне (рис. 10в). Однако, как и в случае одного слоя, все полюсы лежат в нижней полуплоскости.

Поскольку величина q (12) увеличивается с ростом числа слоёв N , то условие расходимости ряда Эйри можно представить как превышение числом слоёв критического значения, $N > N_{cr}$, по аналогии с критической толщиной однородного слоя. Действительно, при $N < N_{cr}$ метод Эйри по падающим волнам и метод Френеля (метод T -матриц) дают одинаковый результат, при $N > N_{cr}$ расчёт методом T -матриц даёт конечный результат, а ряд Эйри по падающим волнам расходится. Функция $N_{cr}(\omega)$, будучи вещественной функцией комплексной переменной ω , задаёт кривую на комплексной плоскости частот $|q(N_{cr}(\omega))| = 1$.

Накачка изменяет не только мнимую, но и действительную часть диэлектрической проницаемости. Это ведёт к деформации кривой $|q(\omega)| = 1$, но качественно динамика движения полюсов в зависимости от толщины (числа ячеек) напоминает таковую в случае единичного усиливающего слоя (рис. 11).

Особенности возникают лишь вблизи границы с запрещённой зоной. Как и ожидалось, критическое число слоёв, $N_{cr}(\omega)$, уменьшается в разрешённых зонах вблизи их границ из-за уменьшения групповой скорости блоховских волн. Причём этот эффект сильнее проявляется на нижней границе запрещённой зоны из-за концентрации энергии электрического поля в усиливающих слоях, имеющих большие значения ε (эффект Бормана [74]), так что вблизи нижней границы запрещённой зоны проще получить генерацию (рис. 12).

4.3. Лазерная генерация

в запрещённой зоне фотонных кристаллов

Если частота накачки лежит в запрещённой зоне, то, в отличие от случая разрешённой зоны, зависимость порога генерации от числа ячеек ФК носит немонотонный характер (рис. 13). Это связано с тем, что запрещённая зона существует лишь в бесконечном ФК. Формирование свойств запрещённой зоны происходит по мере увеличения числа ячеек ФК. При малых толщинах зависимость от толщины напоминает таковую в случае разрешённой зоны (см. раздел 4.2). Ниже под разрешённой и запрещённой зонами мы понимаем не только множества действительных частот, но и соответствующие им полосы на комплексной области частот.

При достаточно больших толщинах ФК, когда меняется зависимость порога от толщины, меняется и топология областей сходимости рядов Эйри. Теперь на частотах запрещённой зоны граница сходимости ряда Эйри окружает область сходимости ряда по падающим волнам (белая область I на рис. 14а). Одновременно существует и область сходимости того же ряда в разрешённой зоне (область II). Вне этих областей ряд Эйри по падающим блоховским волнам (12б) расходится. Однако при малой накачке лазерная генерация не наступает, так как все полюсы передаточной функции лежат ниже вещественной оси частот, в окрестности полюса диэлектрической проницаемости ε_{gain} (рис. 14а).

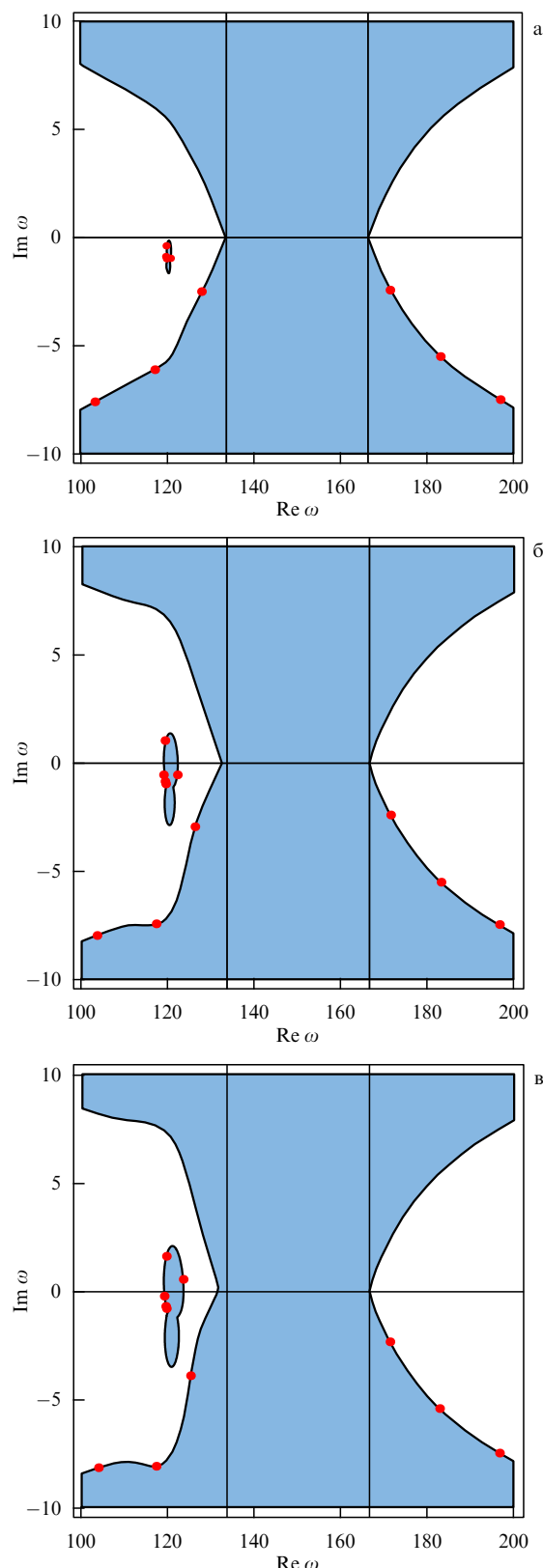


Рис. 11. (См. в цвете онлайн.) Положение кривой $|q| = 1$ в комплексной плоскости частот (сплошная кривая) и положения полюсов (обозначены точками) при значениях диэлектрической проницаемости усиливающей среды: (а) $2 - 0,05i$, (б) $2 - 0,12i$, (в) $2 - 0,18i$.

С ростом накачки область I увеличивается (рис. 14б), так что её граница рано или поздно пересекает действительную ось, и один из полюсов выходит в верхнюю

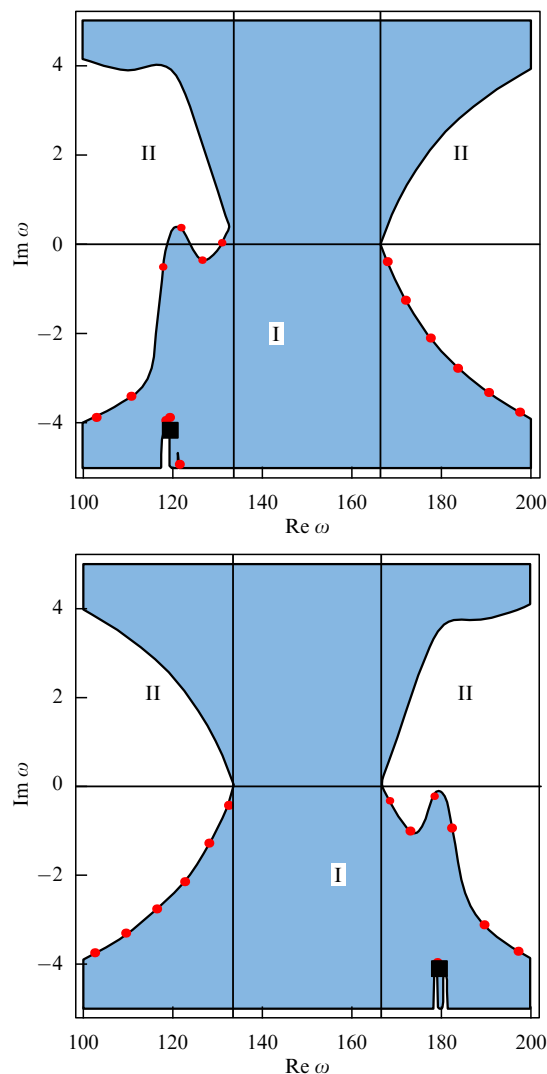


Рис. 12. (См. в цвете онлайн.) Расположение полюсов функции отклика ФК на комплексной плоскости частот при частотах накачки на нижней (а) и верхней (б) границах запрещённой зоны. Тёмным и светлым отмечены области сходимости ряда Эйри по падающим и встречным волнам соответственно.

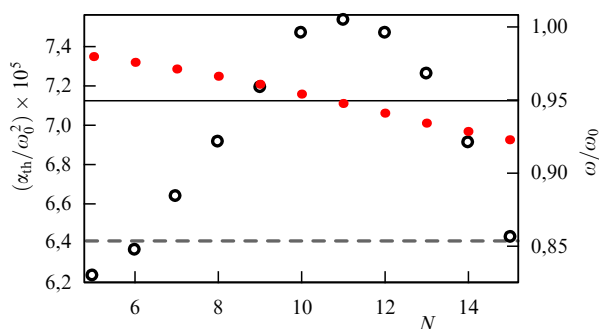


Рис. 13. Пороговое значение α_{th} (окружности) и частота генерации ω , нормированная на частоту центра запрещённой зоны ω_0 (тёмные кружки) в зависимости от числа слоёв N . Штриховой линией отмечена граница запрещённой зоны.

полуплоскость. Возникает лазерная генерация на некоторой частоте из запрещённой зоны (рис. 14б). При этом указанная область сходимости может как остаться обособленной, так и объединиться с аналогичной об-

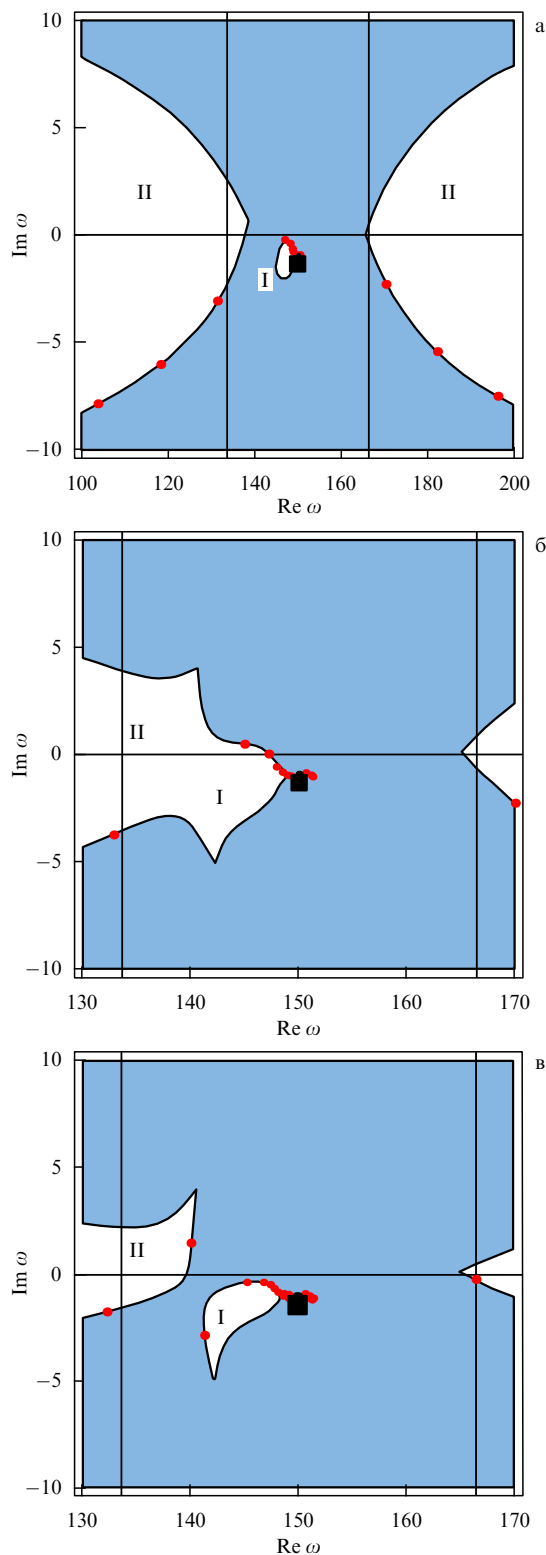


Рис. 14. (См. в цвете онлайн.) Расположение полюсов функции отклика ФК на комплексной плоскости частот (отмечено точками) при различном числе слоёв. Квадратиком отмечен полюс диэлектрической проницаемости. В незакрашенных областях сходится ряд Эйри по падающим волнам; закрашены области, где этот ряд расходится: (а) 10 ячеек ФК, (б) 12 ячеек ФК, (в) 14 ячеек ФК.

ластью, существующей в разрешённой зоне (рис. 14б). Во втором случае возможен переход полюсов из запрещённой зоны в разрешённую. Однако при увеличении числа слоёв вновь происходит обособление областей

(рис. 14в). При дальнейшем увеличении числа слоёв полюсы, находящиеся на границе области I, движутся вниз, а полюсы, находящиеся на границе области II, движутся вверх. При большом числе слоёв генерация возможна лишь на границе области II.

Переход полюса из зоны I в зону II приводит к немонотонной зависимости пороговой накачки от числа слоёв (см. рис. 13). Пока полюс находится на границе области I, рост числа слоёв приводит к росту α_{th} (окружности на рис. 13). Но после перехода полюса в область II (тёмные кружки на рис. 13) поведение меняется на обратное. При этом частота генерации монотонно смещается в сторону нижней границы запрещённой зоны.

Таким образом, когда линия усиления находится в области I, генерация возможна лишь при малом числе слоёв, $N < N_{cr}$. Однако увеличение числа слоёв в конце концов приводит лишь к генерации на частотах области II. Это возможно из-за конечной ширины линии усиления.

В частности, при достаточно малой ширине линии усиления области I и II (рис. 14а) не объединяются. Тогда полюсы из области I не могут перейти в область II, и рост числа слоёв подавляет генерацию. Тем не менее в разрешённой зоне с ростом числа слоёв генерация рано или поздно наступает из-за конечной ширины линии усиления.

Заметим, что область II захватывает как разрешённую, так и запрещённую зону. Это связано с тем, что увеличение параметра усиления α меняет диэлектрическую проницаемость ε_{gain} (см. формулу (2г)). Таким образом, возникновение лазерной генерации в той части области II, которая лежит в запрещённой зоне, можно интерпретировать как изменение зонной структуры ФК. Действительно, когда мы меняем параметр усиления α , меняется не только мнимая, но и действительная часть $\varepsilon_{gain}(\alpha)$. Если рассмотреть вспомогательный ФК, усиливающий слой в котором заменён на слой с диэлектрической проницаемостью $\text{Re } \varepsilon_{gain}(\alpha)$, то запрещённая зона этого вспомогательного ФК оказывается уже, чем у исходного ФК с $\alpha = 0$ (рис. 15). При этом область II целиком лежит в разрешённой зоне вспомогательного ФК.

Таким образом, при $N < N_{th}(\alpha)$ в верхней полуплоскости всегда есть хотя бы один полюс, так что наблюдается лазерная генерация. При $N_{th} < N < N_{las}(\alpha)$ полюсы

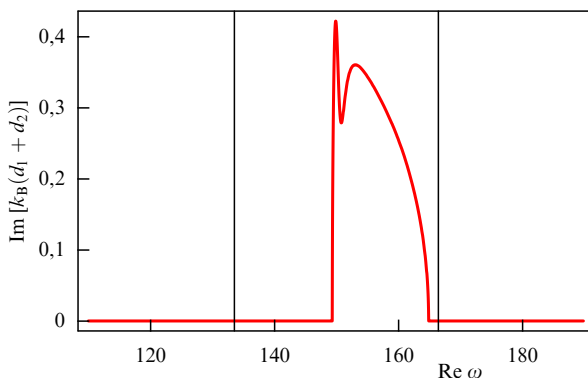


Рис. 15. (См. в цвете онлайн.) Зависимость мнимой части k_B вспомогательного ФК от несущей частоты падающего суга. Вертикальными линиями отмечены границы запрещённой зоны для ФК без усиления.

передаточной функции могут заходить и выходить из верхней полуплоскости, при этом лазерная генерация то начинается, то прекращается. При $N_{las} < N < N_{cr}(\alpha)$ ряд Эйри по падающим волнам не сходится (кривая (12) касается действительной оси частот снизу), но полюсов в верхней полуплоскости нет, лазерная генерация не наблюдается. При $N > N_{cr}(\alpha)$ ряд Эйри по падающим волнам сходится (кривая (12) не касается действительной оси частот снизу).

5. Падение света под углом к усиливающему слою

Рассмотрим теперь случай наклонного падения волны на усиливающий слой, окружённый средой с диэлектрической проницаемостью ε_e . Формулы Френеля (3) и ряды Эйри (4), (5), полученные нами для случая нормального падения, будут иметь тот же вид, если произвести замену

$$\sqrt{\varepsilon_{gain}} \rightarrow \sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi}$$

и

$$Z_2 \rightarrow \sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi}, \quad Z_1 \rightarrow \sqrt{\varepsilon_e} \cos \phi$$

для s-поляризации и

$$Z_2 \rightarrow \frac{\sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi}}{\varepsilon_{gain}}, \quad Z_1 \rightarrow \frac{\cos \phi}{\sqrt{\varepsilon_e}}$$

для p-поляризации, где ϕ — угол падения.

Из формул Френеля следует, что для усиливающего или диссипативного слоя при увеличении его толщины d коэффициент прохождения T стремится к нулю, а коэффициент отражения R — к отличной от нуля константе. В полубесконечной усиливающей или диссипативной среде остаётся только одна убывающая от границы волна. Различие между диссипативной и усиливающей средой состоит в направлении вектора Пойнтинга: в первом случае он направлен от границы в глубь полупространства, во втором — к границе.

Как и в случае нормального падения, формулы Френеля становятся неверными при возникновении лазерной генерации, т.е. при наличии полюсов функции отклика в верхней полуплоскости комплексной частоты. Положение полюсов определяется уравнением

$$q = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} - \sqrt{\varepsilon_e} \cos \phi}{\sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} + \sqrt{\varepsilon_e} \cos \phi} \right)^2 \times \exp \left(\frac{2i\omega d}{c} \sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} \right) = 1. \quad (13)$$

Полюсы функции отклика расположены на кривой, определяемой из амплитудных условий лазерной генерации:

$$|r_\infty|^2 \exp \left(\frac{2\omega d}{c} \text{Im} \sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} \right) = 1, \quad (14)$$

$$r_\infty = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

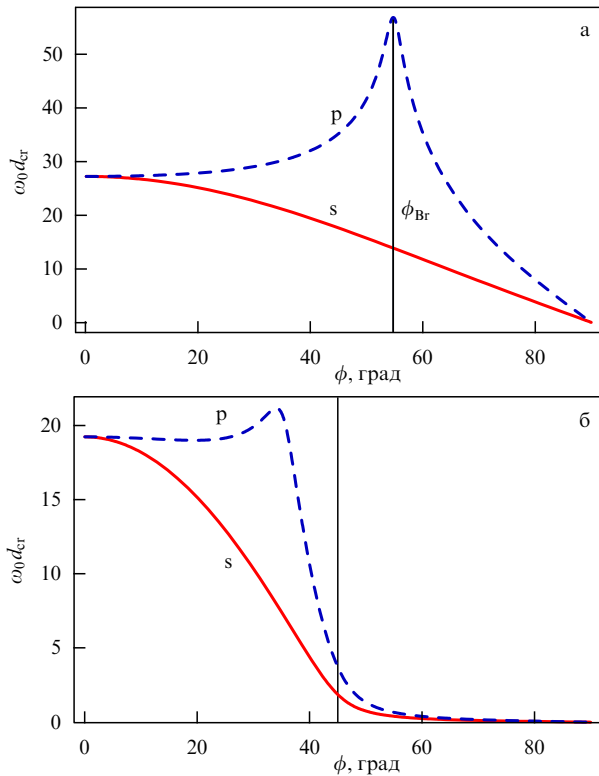


Рис. 16. Зависимость критической толщины слоя от угла для s- (сплошные линии) и p- (штриховые линии) поляризаций. (а) Нерезонансная часть диэлектрической проницаемости слоя $\varepsilon_0 = 2$ (см. уравнение (2г)), слой находится в вакууме. (б) Слой с $\varepsilon_0 = 1$ в диэлектрике с $\varepsilon_c = 2$.

Для того чтобы определить, при какой толщине усиливающего слоя, $d_{las}(\phi)$, начинается лазерная генерация,

удобно проследить за эволюцией кривой (14) на комплексной плоскости частот при изменении толщины слоя. В отличие от нормального падения, при падении под углом существуют два принципиально различных случая.

Если усиливающая среда окружена оптически менее плотной средой, $\text{Re } \varepsilon_{\text{gain}} > \varepsilon_c$, то ситуация полностью аналогична случаю нормального падения. При $d < d_{cr}(\phi)$ ряд Эйри по падающим волнам сходится, а при $d > d_{cr}(\phi)$ не сходится, и полюсы передаточной функции могут переходить в верхнюю полуплоскость. Критическая толщина слоя, при которой начинается лазерная генерация, зависит от угла падения. Для р-поляризации $d_{las}(\phi) \rightarrow \infty$ при падении под углом Брюстера ϕ_{Br} (рис. 16а). Это связано с тем, что при точном выполнении условия Брюстера отсутствует отражение и слой перестаёт быть резонатором. Из-за наличия усиления диэлектрическая проницаемость слоя имеет мнимую часть, а следовательно, и отличный от единицы импеданс. Поэтому $d_{las}(\phi_{Br})$ остаётся конечной величиной.

Если же слой находится в оптически более плотном диэлектрике, $\text{Re } \varepsilon_{\text{gain}} < \varepsilon_c$, то появляется область полного внутреннего отражения (правее вертикальной линии на рис. 16б). В этой области величина d_{cr} уменьшается с ростом угла падения, но это не означает, что область $\phi > \phi_{TIR}$ (ϕ_{TIR} — угол полного внутреннего отражения) благоприятствует лазерной генерации, так как это только амплитудное условие, а требуется ещё и фазовое (переход полюса).

При углах падения ϕ , меньших ϕ_{TIR} , кривая (14) и полюсы функции отклика ведут себя аналогично таковым в случае нормального падения (рис. 17).

При углах падения, больших критического, области сходимости и расходимости ряда Эйри меняются местами (рис. 17д). С увеличением толщины слоя область,

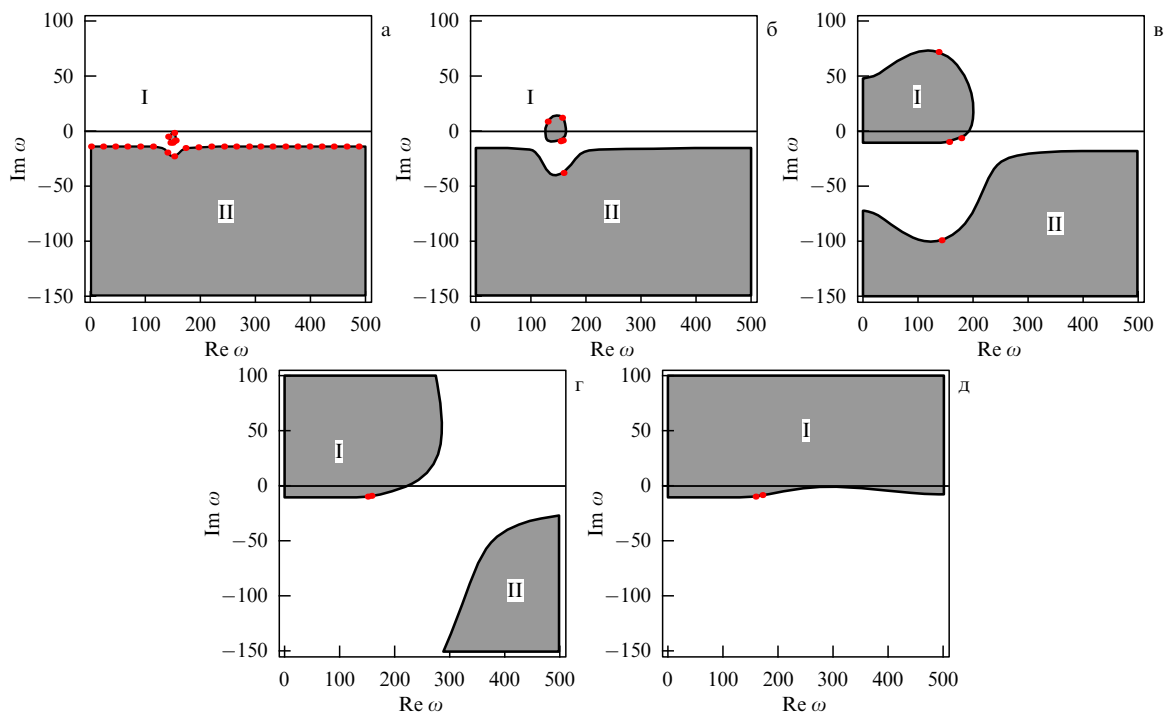


Рис. 17. (См. в цвете онлайн.) Положение полюсов передаточной функции в комплексной плоскости при различных углах падения. Серым цветом выделена область расходимости ряда Эйри по падающим волнам при нормальном падении: (а) нормальное падение, $\phi = 0$, (б) угол падения $\phi = 0,9 \phi_{TIR}$, (в) $\phi = 0,99 \phi_{TIR}$, (г) $\phi = 0,999 \phi_{TIR}$, (д) угол падения больше угла полного внутреннего отражения, $\phi = 1,01 \phi_{TIR}$.

где ряд Эйри по возрастающим волнам сходится, уменьшается, поэтому теперь кривая (14), лежащая между областями сходимости, с увеличением толщины слоя опускается в комплексной плоскости частот. Таким образом, при углах падения, больших угла полного внутреннего отражения, лазерная генерация возможна лишь при малой толщине усиливающего слоя и исчезает с увеличением толщины слоя, аналогично случаю запрещённой зоны в ФК. Полюсы, расположенные на кривой (14), с увеличением угла падения движутся по ней по часовой стрелке (см. рис. 17) [100], и при $\phi \rightarrow \phi_{\text{TIR}}$ оказываются вблизи частоты перехода ω_0 .

Интересно отметить, что угол, при котором меняются местами области сходимости, в точности равен углу полного внутреннего отражения в отсутствие усиления: $\phi_{\text{cr}} = \phi_{\text{TIR}} = \arcsin \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_{\text{e}}}$. Здесь ε_0 — действительная часть диэлектрической проницаемости без учёта дисперсии (см. уравнение (2г)). Такое значение критического угла было получено в работах [41, 100] и на первый взгляд кажется странным. Более ожидаемой была бы величина $\phi_{\text{cr}} = \arcsin \sqrt{\text{Re } \varepsilon_{\text{gain}}(\omega)/\varepsilon_{\text{e}}}$. Однако заметим, что инверсия областей сходимости ряда Эйри (см. рис. 17) определяется свойствами системы при $\omega \rightarrow \infty$, где из-за конечности линии усиления $\varepsilon_{\text{gain}} \rightarrow \varepsilon_0$. При этом падающая волна усиливаться не будет, и при углах, больших угла полного внутреннего отражения ($\varepsilon_0 - \varepsilon_{\text{e}} \sin^2 \phi < 0$, при действительных частотах сходится ряд по убывающим волнам [41, 100].

Таким образом, при $\phi < \phi_{\text{cr}}$ лазерная генерация начинается с увеличением толщины усиливающего слоя, а при $\phi > \phi_{\text{cr}}$ лазерная генерация возможна только при малой толщине усиливающего слоя. Угол, при котором происходит переход от одного типа поведения к другому, $\phi_{\text{cr}} = \phi_{\text{TIR}} = \arcsin \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_{\text{e}}}$, определяется значением диэлектрической проницаемости без учёта дисперсии [41].

6. Заключение

В настоящем обзоре акцентировано внимание на том, что пока в слоистой системе, содержащей усиливающие слои, отсутствует лазерная генерация, применимо описание с использованием эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\text{gain}}$ с отрицательной мнимой частью.

Существует иерархия толщин усиливающего слоя, $d_0 < d_{\text{cr}} < d_{\text{las}} < d_{\text{th}}$. Во всех рассмотренных в обзоре случаях существует толщина усиливающего слоя d_0 или число элементарных ячеек ФК N_0 , начиная с которых коэффициент отражения от слоя становится больше единицы. Далее, по мере роста толщины системы, достигается критическая толщина d_{cr} усиливающего слоя, при превышении которой ряд Эйри по падающим волнам расходится. При толщинах, меньших d_{cr} , ряд Эйри сходится к результату, полученному в рамках подхода Френеля (решение линейного волнового уравнения), который, в свою очередь, совпадает с решением, получаемым из численного решения уравнений Максвелла–Блоха.

Иная ситуация возникает при превышении толщиной порогового значения d_{las} , когда начинается лазерная генерация. Вместо линейного режима, предсказываемого френелевским подходом, возникает нелинейное стационарное решение (рис. 4в). В этом случае, даже если интенсивность поля во френелевском решении достаточно мала и, казалось бы, можно не учитывать

изменение инверсной населённости под действием поля, уравнения Максвелла–Блоха (1) дают решение с большой амплитудой, при которой указанная нелинейность становится определяющей. Точным условием возникновения лазерной генерации является выход полюсов линейной функции отклика $g(\omega)$ (3) в верхнюю полуплоскость комплексных частот ω .

Построение ряда Эйри весьма наглядно описывает прохождение полубесконечного пуга волн через слой вещества. Однако для усиливающей среды оно должно проводиться по-разному для случаев $d < d_{\text{cr}}$ и $d > d_{\text{cr}}$. Действительно, при построении ряда Эйри используется величина r_{∞} — коэффициент отражения в задаче об отражении плоской волны от полупространства. Величина r_{∞} зависит от того, с какой волной в слое "сшивается" падающая из вакуума волна. Если брать, как это обычно делается для диссипативных сред [88], волну, переносящую энергию в глубь слоя, т.е. падающую волну, то при $d < d_{\text{cr}}$ модуль знаменателя геометрической прогрессии $q = r_{\infty}^2 \exp(2i\delta)$ оказывается меньше единицы, и ряд Эйри по падающим волнам сходится к выражению (3б), получаемому из подхода Френеля.

Если же строить ряд из предположения, что решение в полубесконечной среде является встречной волной [42], то величины импеданса Z_2 и комплексной фазы δ в уравнениях (4а), (4б) меняют знак. В результате знаменатель прогрессии становится равным $1/q$, и при $d > d_{\text{cr}}$ уже ряд Эйри по встречным волнам (6б) сходится, причём к результату расчёта френелевским методом.

Проведённый в работе анализ показывает, что результат, полученный в рамках подхода Френеля (3б), можно рассматривать как аналитическое продолжение суммы ряда Эйри (5) в область $d > d_{\text{cr}}(\omega)$ на плоскости комплексных частот (закрашенные участки на рис. 6). Иными словами, при $d < d_{\text{cr}}$ нужно использовать ряд Эйри по падающим волнам, а при $d > d_{\text{cr}}$ — по встречным волнам. Заметим, что при $d = d_{\text{cr}} (|q| = 1)$ ни один из рядов не сходится, но если $q \neq 1$, то пределы сверху и снизу при $d \rightarrow d_{\text{cr}} \pm 0$ совпадают.

Переход от ряда Эйри по падающим волнам к ряду Эйри по встречным волнам эквивалентен аналитическому продолжению функции $1/(1-q)$ из окрестности $q = 0$, где

$$\frac{1}{1-q} = \sum_n q^n,$$

в окрестность $|q| = \infty$, где [56]

$$\frac{1}{1-q} = -\frac{1/q}{1-1/q} = -\frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n.$$

Таким образом, мы получаем полное соответствие между рядами Эйри и результатом френелевского подхода: ответ, полученный в подходе Френеля, является той же аналитической функцией, разложение которой в ряд представляет собой ряды Эйри. По аналогии с модифицированным подходом Френеля, к ряду Эйри по встречным волнам необходимо добавить сумму вычетов в полюсах, определяемых условием $q(\omega) = 1$. Это прибавляет бесконечно растущие во времени слагаемые в тех областях параметров, где есть лазерная генерация.

Физическим параметром, определяющим условие начала генерации, является путь, проходимый лучом по

слою. При падении под углом этот путь отличается от толщины слоя. В результате модам, распространяющимся под углом, соответствуют меньшие значения толщин d_0 , d_{cr} , d_{las} , d_{th} . В частности, при стремлении угла падения к $\pi/2$ эти величины стремятся к нулю (см. рис. 17). В случае пучка с конечной апертурой в его разложении по плоским волнам всегда присутствуют волны с углами падения, близкими к $\pi/2$. Для таких волн необходимо учитывать, что их путь ограничен шириной пучка или поперечным размером системы. Действительно, накачка осуществляется не во всей плоскости, а в ограниченной области слоя, как в случае лазеров поверхностного излучения с вертикальным объёмным резонатором (VCSELs) [1–6]. Выходя за пределы этой области, волны попадают в область поглощения.

При падении электромагнитной волны под углом существенными оказываются явления Брюстера и полного внутреннего отражения. При ненулевой мнимой части ε_{gain} угол Брюстера и угол полного внутреннего отражения будут комплексными. Однако оказывается, что в случае полного внутреннего отражения существует действительный критический угол ϕ_{cr} , равный углу полного внутреннего отражения ϕ_{TIR} в отсутствие накачки, выше и ниже которого поведение системы качественно отличается. Для углов падения, меньших этого угла, зависимости всех величин от толщины слоя аналогичны таковым в случае нормального падения на слой или на ФК в разрешённой зоне, а именно, существуют характерные толщины d_0 , d_{cr} , d_{las} , d_{th} . При падении под углами, большими критического, все зависимости от толщины аналогичны зависимостям от толщины в ФК на частотах запрещённой зоны: d_0 существует всегда, d_{cr} и d_{las} существуют не при всех уровнях накачки, а d_{th} отсутствует. Увеличение толщины слоя рано или поздно приводит к срыву генерации.

Авторы признательны А.Н. Лагарькову, В.Н. Киселю и Ю.Е. Лозовику за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 10-02-91750-АФ, 11-02-92475-МНТИ, 12-02-01093), а также гранта PSC-CUNY.

Список литературы

1. Iga K *IEEE J. Selected Topics Quantum Electron.* **6** 1201 (2000)
2. Botez D, Scifres D R (Eds) *Diode Laser Arrays* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005)
3. Kawai S (Ed.) *Handbook of Optical Interconnects* (Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis Group, 2005)
4. Yu S F *Analysis and Design of Vertical-Cavity Surface Emitting Lasers* (Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2003)
5. Wilmsen C W, Temkin H, Coldren L A (Eds) *Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers: Design, Fabrication, Characterization, and Applications* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999)
6. Cheng J, Dutta N K (Eds) *Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers: Technology and Applications* (Amsterdam: Gordon & Breach, 2000)
7. Asatryan A A et al. *Phys. Rev. B* **57** 13535 (1998)
8. Bulgakov S A, Nieto-Vesperinas M *Waves Random Media* **10** 373 (2000)
9. Frank R, Lubatsch A, Kroha J *Phys. Rev. B* **73** 245107 (2006)
10. Heinrichs J *Phys. Rev. B* **56** 8674 (1997)
11. Jiang X, Li Q, Soukoulis C M *Phys. Rev. B* **59** R9007 (1999)
12. Joshi S K, Jayannavar A M *Phys. Rev. B* **56** 12038 (1997)
13. Nam C-K, Zhang Z-Q *Phys. Rev. B* **66** 073101 (2002)
14. Paasschens J C J, Misirpashaev T Sh, Beenakker C W J *Phys. Rev. B* **54** 11887 (1996)
15. Ramakrishna S A et al. *Phys. Rev. B* **62** 256 (2000)
16. Yamilov A et al. *Phys. Rev. B* **71** 092201 (2005)
17. Datta P K *Phys. Rev. B* **59** 10980 (1999)
18. Dowling J P et al. *J. Appl. Phys.* **75** 1896 (1994)
19. Jiang X, Soukoulis C M *Phys. Rev. Lett.* **85** 70 (2000)
20. Feng Y, Ueda K *Opt. Express* **12** 3307 (2004)
21. Pendry J B *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966 (2000)
22. Веселого В Г *УФН* **92** 517 (1967) [Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)]
23. Ramakrishna S A, Pendry J B *Phys. Rev. B* **67** 201101(R) (2003)
24. Fang A, Koschny T, Soukoulis C M *J. Opt.* **12** 024013 (2010)
25. Xiao S et al. *Nature* **466** 735 (2010)
26. Cai W, Shalae V *Optical Metamaterials. Fundamentals and Applications* (New York: Springer, 2010)
27. Wuestner S et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 127401 (2010)
28. Виноградов А П, Дорофеев А В, Зухди С *УФН* **178** 511 (2008) [Vinogradov A P, Dorofeenko A V, Zouhdi S *Phys. Usp.* **51** 485 (2008)]
29. Виноградов А П, Дорофеев А В, Мерзлякин А М, Лисянский А А *УФН* **180** 249 (2010) [Vinogradov A P, Dorofeenko A V, Merzlikin A M, Lisyansky A A *Phys. Usp.* **53** 243 (2010)]
30. Шатров А Д *Радиотехника и электроника* **52** 1430 (2007) [Shatrov A D *J. Commun. Technol. Electron.* **52** 1324 (2007)]
31. Mozjerin I et al. *Opt. Lett.* **35** 3240 (2010)
32. Sarychev A K, Pukhov A A, Tartakovsky G *PIERS Online* **3** 1264 (2007)
33. Sarychev A K, Tartakovsky G *Phys. Rev. B* **75** 085436 (2007)
34. Gabitov I R, Kennedy B, Maimistov A I *IEEE J. Selected Topics Quantum Electron.* **16** 401 (2010)
35. Лагарьков А Н и др. *УФН* **179** 1018 (2009) [Lagarkov A N et al. *Phys. Usp.* **52** 959 (2009)]
36. Noginov M A et al. *Opt. Express* **16** 1385 (2008)
37. Ханин Я И *Основы динамики лазеров* (М.: Физматлит, 1999)
38. Hu X et al. *Phys. Rev. B* **77** 205104 (2008)
39. Solimeno S, Crosignani B, DiPorto P *Guiding, Diffraction, and Confinement of Optical Radiation* (Orlando: Academic Press, 1986) [Солимено С, Крозиньяни Б, Ди Порто П *Дифракция и волновое распространение оптического излучения* (М.: Мир, 1989)]
40. Колоколов А А *УФН* **169** 1025 (1999) [Kolokolov A A *Phys. Usp.* **42** 931 (1999)]
41. Вайнштейн Л А *УФН* **118** 339 (1976) [Vainshtein L A *Sov. Phys. Usp.* **19** 189 (1976)]
42. Колоколов А А *Письма в ЖЭТФ* **21** 660 (1975) [Kolokolov A A *JETP Lett.* **21** 312 (1975)]
43. Романов Г Н, Шахиджанов С С *Письма в ЖЭТФ* **16** 298 (1972) [Romanov G N, Shakhidzhanov S S *JETP Lett.* **16** 210 (1972)]
44. Бойко Б Б, Петров Н С *Отражение света от усиливающих и нелинейных сред* (Минск: Наука и техника, 1988)
45. Dolling G et al. *Opt. Lett.* **31** 1800 (2006)
46. Wegener M et al. *Opt. Express* **16** 19785 (2008)
47. Meinzer N et al. *Opt. Express* **18** 24140 (2010)
48. Dong Z-G et al. *Appl. Phys. Lett.* **96** 044104 (2010)
49. Fang A et al. *Phys. Rev. B* **79** 241104(R) (2009)
50. Fang A, Koschny Th, Soukoulis C M *Phys. Rev. B* **82** 121102(R) (2010)
51. Chen X et al. *Phys. Rev. E* **70** 016608 (2004)
52. Smith D R et al. *Phys. Rev. E* **71** 036617 (2005)
53. Menzel C et al. *Phys. Rev. B* **77** 195328 (2008)
54. Franceschetti G *Alta Frequenza* **36** 757 (1967)
55. Smith D R, Schurig D *Phys. Rev. Lett.* **90** 077405 (2003)
56. Лаврентьев М А, Шабат Б В *Методы теории функций комплексного переменного* (М.: Наука, 1965)
57. Lagarkov A N, Kissel V N *Phys. Rev. Lett.* **92** 077401 (2004)
58. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2003) [Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
59. Лебедев С А, Волков В М, Коган Б Я *Оптика и спектроскопия* **35** 976 (1973)
60. Коган Б Я, Волков В М, Лебедев С А *Письма в ЖЭТФ* **16** 144 (1972) [Kogan B Ya, Volkov V M, Lebedev S A *JETP Lett.* **16** 100 (1972)]
61. Goos F, Hänchen H *Ann. Physik* **436** 333 (1947)
62. Goos F, Lindberg-Hänchen H *Ann. Physik* **440** 251 (1949)
63. Bergman D J, Stockman M I *Phys. Rev. Lett.* **90** 027402 (2003)

64. Andrianov E S et al. *Opt. Express* **19** 24849 (2011)
65. Andrianov E S et al. *Opt. Lett.* **36** 4302 (2011)
66. Andrianov E S et al. *Phys. Rev. B* **85** 165419 (2012)
67. Andrianov E S et al. *Phys. Rev. B* **85** 035405 (2012)
68. Lisyansky A A et al. *Phys. Rev. B* **84** 153409 (2011)
69. Stockman M I *Phil. Trans. R. Soc. A* **369** 3510 (2011)
70. Андрианов Е С, Пухов А А, Дорофеенко А В, Виноградов А П *Радиотехника и электроника* **57** 114 (2012) [Andrianov E S, Pukhov A A, Dorofeenko A V, Vinogradov A P *J. Commun. Technol. Electron.* **57** 106 (2012)]
71. Plum E et al. *Opt. Express* **17** 8548 (2009)
72. Колоколов А А, Скродский Г В *УФН* **162** (12) 165 (1992) [Kolokolov A A, Skrotskii G V *Sov. Phys. Usp.* **35** 1089 (1992)]
73. Виноградов А П, Дорофеенко А В *Радиотехника и электроника* **50** 1246 (2005) [Vinogradov A P, Dorofeenko A V *J. Commun. Technol. Electron.* **50** 1153 (2005)]
74. Vinogradov A P et al. *Phys. Rev. B* **80** 235106 (2009)
75. Vinogradov A P, Dorofeenko A V *Opt. Commun.* **256** 333 (2005)
76. Mandel L, Wolf E *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Мандель Л, Вольф Э *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000)]
77. Heitler W *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford: Clarendon Press, 1954) [Гайтлер В *Квантовая теория излучения* (М.: ИЛ, 1956)]
78. Ораевский А Н *Квантовая электроника* **29** (11) 137 (1999) [Oraevsky A N *Quantum Electron.* **29** 975 (1999)]
79. Pantell R H, Puthoff H E *Fundamentals of Quantum Electronics* (New York: Wiley, 1969) [Пантел Р, Путхофф Г *Основы квантовой электроники* (М.: Мир, 1972)]
80. Scully M O, Zubairy M S *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997) [Скалли М О, Зубайри М С *Квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2003)]
81. Lukš A, Peřinová V *Quantum Aspects of Light Propagation* (Dordrecht: Springer, 2009)
82. Erneux T, Glorieux P *Laser Dynamics* (New York: Cambridge Univ. Press, 2010)
83. Zyablovsky A A, Dorofeenko A V, Vinogradov A P, Pukhov A A *Photon. Nanostruct. Fundament. Appl.* **9** 398 (2011)
84. Kivshar Y S, Agrawal G P *Optical Solitons: from Fibers to Photonic Crystals* (Amsterdam: Academic Press, 2003)
85. Зябловский А А, Дорофеенко А В, Пухов А А, Виноградов А П *Радиотехника и электроника* **56** 1142 (2011) [Zyablovsky A A, Dorofeenko A V, Pukhov A A, Vinogradov A P *J. Commun. Technol. Electron.* **56** 1139 (2011)]
86. Yariv A *Quantum Electronics* (New York: Wiley, 1975) [Ярив А *Квантовая электроника* (М.: Сов. радио, 1980)]
87. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1962) [Джексон Д *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)]
88. Airy G B *Philos. Mag.* **2** 20 (1833)
89. Sturrock P A *Phys. Rev.* **112** 1488 (1958)
90. Skaar J *Phys. Rev. E* **73** 026605 (2006)
91. Владимиров В С *Обобщенные функции в математической физике* (М.: Наука, 1979)
92. Владимиров В С *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1981) [Vladimirov V S *Equations of Mathematical Physics* (Moscow: Mir, 1984)]
93. Сивухин Д В *Общий курс физики Т. 4 Оптика* (М.: Физматлит, МФТИ, 2002)
94. Бутиков Е И *Оптика* (М.: Высшая школа, 1986)
95. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1969) [Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1970)]
96. Sommerfeld A *Vorlesungen über theoretische Physik Bd. 4 Optik* (Wiesbaden: Dieterich, 1950) [Lectures on Theoretical Physics Vol. 4 *Optics* (New York: Academic Press, 1954); Зоммерфельд А *Оптика* (М.: ИЛ, 1953)]
97. Ваганов Р Б, Каценеленбаум Б З *Основы теории дифракции* (М.: Наука, 1982)
98. Вайнштейн Л А *Открытые резонаторы и открытые волноводы* (М.: Сов. радио, 1966) [Weinstein L A *Open Resonators and Open Waveguides* (Boulder, Colo.: Golem Press, 1969)]
99. Bahloul H et al. *Phys. Rev. B* **72** 094304 (2005)
100. Манцызов Б И *Когерентная и нелинейная оптика фотонных кристаллов* (М.: Физматлит, 2009)
101. Kurizki G et al., in *Progress in Optics* Vol. 42 (Ed. E Wolf) (Amsterdam: North-Holland, 2001) p. 93; nlin/0007007

Light propagation in composite materials with gain layers

A.V. Dorofeenko, A.A. Zyablovsky, A.A. Pukhov, A.P. Vinogradov

Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics, Russian Academy of Sciences, ul. Izhor'skaya 13, 125412 Moscow, Russian Federation,

Moscow Institute of Physics and Technology (State University),

Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

Tel. + 7 (968) 636 96 13, + 7 (495) 485 83 55

E-mail: alexandor7@gmail.com, zyablovskiy@mail.ru, pukhov@mail.ru, a-vinogr@yandex.ru

A.A. Lisyansky

Physics Department, Queens College of the City University of New York, Flushing, 11367, New York, USA

Tel. (718) 997 33 71. E-mail: alexander.lisyansky@qc.cuny.edu

Light propagation through a single gain layer and a multilayer system with gain layers is studied. Results from the Fresnel formulas, Airy's series summation and the numerical solution of the nonlinear Maxwell – Bloch equations by the finite difference time domain (FDTD) method are analyzed and compared. Normal and oblique propagation of a wave through a gain layer and a slab of a photonic crystal are examined. For the latter problem, the gain line may be situated in either the pass or stop band of the photonic crystal. It is shown that the monochromatic plane wave approximation is generally inapplicable for active media because it leads to results that violate causality. However, the problem becomes physically meaningful and correct results can be obtained for all three approaches once the structure of the wavefront and the finite aperture of the beam are taken into account.

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.70.Qs, **73.20.-r**

DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211b.1157

Bibliography — 101 references

Received 27 October 2010, revised 16 July 2012

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **182** (11) 1157 – 1175 (2012)

Physics – Uspekhi **55** (11) (2012)