

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Теория подобия в нейтронной кинетике и её использование для решения прикладных задач РФЯЦ – ВНИИЭФ

Н.Б. Бабичев, П.С. Бондарев, В.П. Незнамов

*Представлены точные соотношения подобия, вытекающие из кинетического уравнения для нейтронов. Получены некоторые решения задачи на собственные значения. Приведены аналитические решения стационарных и нестационарных вариантов задачи Милна.*

PACS numbers: 01.65. + g, 14.20.Dh

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201109b.0953

## Содержание

1. Введение (953).
2. Структура кинетического уравнения (954).
3. Некоторые следствия, вытекающие из свойства инвариантности точного кинетического уравнения относительно преобразования подобия (955).
4. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики и общее решение задачи на собственные значения (955).
  - 4.1. Элементы теории подобия нестационарных однородных систем.
  - 4.2. Общее решение задачи на собственные значения.
  - 4.3. Формулы подобия, справедливые в случае систем с зависящими от координат параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ .
  - 4.4. Частные решения задачи на главные собственные значения, применимые к профильным системам.
  - 4.5. Особенности протекания кинетических процессов в однородных системах с предельно большими оптическими толщинами.
5. Проблема Милна в теории переноса нейтронов (959).
  - 5.1. Стационарная задача Милна.
  - 5.2. Нестационарная задача Милна.
6. Заключение (963).  
Список литературы (963).

## 1. Введение

С момента открытия в 1938 г. Отто Ганном, Лизой Мейтнер и Фрицем Штрассманом [1, 2] эффекта деления ядер урана нейтронами в мировом научном сообществе активизировались работы по изучению физики деления атомных ядер и свойств нейтронов при их взаимодействии с разными веществами.

Н.Б. Бабичев, П.С. Бондарев, В.П. Незнамов. Российский федеральный ядерный центр Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, просп. Мира 37, 607188 Саров, Нижегородская обл., Российская Федерация  
Тел. (83130) 4-15-40, (83130) 2-07-42. Факс (83130) 4-51-40  
E-mail: neznamov@vniief.ru

Статья поступила 22 декабря 2010 г.,  
после доработки 25 февраля 2011 г.

В связи с Манхэттенским проектом в США и Атомным проектом в СССР нейтрон становится одним из главных объектов интенсивных теоретических и экспериментальных исследований.

После образования в 1946 г. КБ-11 (сейчас РФЯЦ – ВНИИЭФ) для таких исследований в институте достаточно быстро были построены и запущены экспериментальные установки для определения сечений взаимодействия нейтронов с делящимися и другими атомными ядрами. Первыми физиками-исследователями стали сотрудники лаборатории нейтронно-физических измерений, руководимой А.Н. Протопоповым.

В 1949 г. была спроектирована и введена в эксплуатацию установка ФКБН (физический "котел" на быстрых нейтронах) для определения критических параметров сборок из делящихся материалов, в том числе с различными отражателями нейтронов. Чтобы выполнить работы на этом стенде, была создана лаборатория под руководством Г.Н. Флерова (будущего академика АН СССР). Первыми сотрудниками лаборатории стали Ю.С. Замятнин, Д.П. Ширшов, А.А. Березин и др.

Вскоре удалось получить ценные экспериментальные данные, которые позволили проводить валидацию расчётно-теоретических исследований, направленных на выбор конструкций и обоснование показателей первых и последующих разработанных в СССР ядерных и термоядерных зарядов. Такие установки и стенды, модифицированные со временем, по-прежнему работают в РФЯЦ – ВНИИЭФ, поставляя важную экспериментальную информацию, необходимую для обеспечения надёжности и безопасности ядерного арсенала РФ в условиях действия Договора о всеобщем запрещении ядерных испытаний (ДВЗЯИ).

В расчётно-теоретические исследования, связанные с переносом нейтронов в слоистых и других системах, большой вклад внесли известные физики-теоретики и математики, привлечённые к Атомному проекту СССР. Среди них особо следует отметить работы Н.А. Дмитриева, работавшего в начальной стадии Атомного проекта в отделе Я.Б. Зельдовича.

Огромное значение имели работы по теоретической нейтронной кинетике, выполненные группой под руко-

водством члена-корреспондента АН СССР И.Е. Тамма. Группа была откомандирована в КБ-11 в 1950 г. в связи с разработкой первой термоядерной бомбы СССР (РДС-6С).

В группу И.Е. Тамма входили: А.Д. Сахаров — кандидат физико-математических наук; С.З. Беленький — доктор физико-математических наук; Ю.А. Романов — научный сотрудник; Н.Н. Боголюбов — академик Украинской АН; И.Я. Померанчук — доктор физико-математических наук; В.Н.Климов — научный сотрудник; Д.В. Ширков — научный сотрудник. В.Н. Климов и Д.В. Ширков работали под непосредственным руководством Н.Н. Боголюбова, основателя математической школы РФЯЦ – ВНИИЭФ. Позже к ним присоединились сначала Д.Н. Зубарев, а затем в 1951 г. Ю.А. Церковников и В.С. Владимиров.

Н.Н. Боголюбов и его группа, прежде всего, занимались созданием наиболее эффективных методов численного расчёта критических параметров многослойных сферически симметричных ядерных систем, постановкой расчётов их энерговыделения, определением вероятности неполного взрыва, вопросами замедления нейтронов и т.д. В случае многослойных систем известные тогда численные методы решения интегрального уравнения Пайерлса оказались непригодными. Ими были разработаны и внедрены в практику вычислений следующие новые методы численного решения уравнения переноса нейтронов, приспособленные для ручного счёта:

- метод характеристик (В.С. Владимиров, 1951 г.),
- метод факторизации (В.С. Владимиров, 1953 г.),
- метод сферических гармоник (В.С. Владимиров, Е.В. Малиновская),
- подходы к задачам по распространению и замедлению нейтронов (В.Н. Климов, Д.В. Ширков, В.С. Владимиров, И.А. Жернак, А.А. Бунатян),
- подходы к задачам энерговыделения для многослойных сферических систем (В.С. Владимиров, Е.В. Малиновская).

Н.Н. Боголюбов был одним из инициаторов широкого применения ЭВМ в решении проблем Атомного проекта и, в частности, в решении задач переноса нейтронов в слоистых системах. Готовясь к вводу первой в КБ-11 ЭВМ "Стрела", сотрудники группы Н.Н. Боголюбова заранее запрограммировали вычислительные алгоритмы, уже оправдавшие себя при ручном счёте.

Ю.А. Романов в 1951 г. на основе точных решений односкоростного кинетического уравнения разработал усовершенствованный метод решения диффузионных задач, который дал возможность проводить достаточно точные теоретические оценки критических масс систем, состоящих из различных делящихся материалов.

После первых успешных полигонных испытаний начался этап работ по созданию ядерных и термоядерных зарядов, обладающих повышенными, в том числе и новыми, физическими характеристиками. Эти работы сопровождались расчётно-теоретическими исследованиями, в частности по теории переноса нейтронов, в которые большой вклад внесли В.Г. Заграфов, В.Г. Морозов и другие физики-теоретики.

Данная работа посвящена некоторым теоретическим результатам работ по нейтронной кинетике, которые пересекаются с основным направлением деятельности РФЯЦ – ВНИИЭФ.

Основой теории переноса нейтронов являются кинетические уравнения. Они описывают изменение со временем пространственных и энергетических распределений частиц в различных системах.

Сейчас разработано множество разнообразных методов численного решения кинетического уравнения для нейтронов. Тем не менее аналитические методы исследований не утратили своей актуальности и по сей день. При этом особое место отводится точным аналитическим решениям кинетического уравнения. Конечно, такие решения удаётся получить в сравнительно редких случаях и лишь при определённых упрощающих предположениях. Но они позволяют детально выявить общие закономерности процессов нейтронной кинетики и осуществить верификацию математических методик. Поэтому ниже основное внимание уделяется точным соотношениям и аналитическим решениям.

## 2. Структура кинетического уравнения

Введём понятие функции распределения нейтронов  $\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{V})$  в фазовом пространстве векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{V}$ :  $\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) d\mathbf{r} d\mathbf{V}$  — это число нейтронов в момент времени  $t$  в окрестности точки  $\mathbf{r}$  объёма  $d\mathbf{r}$ , имеющих скорость  $\mathbf{V}$  с точностью до  $d\mathbf{V}$ .

В линейной теории переноса, о которой далее и пойдет речь, функция распределения подчиняется интегродифференциальному уравнению, которое без учета запаздывающих нейтронов имеет следующий вид<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial \psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{V})}{\partial t} + \left( \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) + \zeta(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) \psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) = \int_{(V')} \Gamma(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}'\mathbf{V}) \psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}') dV'. \quad (1)$$

Здесь  $\zeta(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) dt$  — вероятность взаимодействия нейтрона со скоростью  $\mathbf{V}$  и какого-либо ядра за время  $dt$ ;  $\Gamma(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}'\mathbf{V}) dt d\mathbf{V}$  — вероятность взаимодействия нейтрона, движущегося со скоростью  $\mathbf{V}'$ , за время  $dt$  с веществом, в результате которого появится нейтрон со скоростью  $\mathbf{V}$  в интервале от  $\mathbf{V}$  до  $\mathbf{V} + d\mathbf{V}$ .

В общем случае в правую часть уравнения (1) надо добавить источник  $q(t, \mathbf{r}, \mathbf{V})$ :  $q(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) dt d\mathbf{r} d\mathbf{V}$  — число нейтронов со скоростью  $\mathbf{V}$  (с точностью до  $d\mathbf{V}$ ), испущенных независимыми источниками за промежуток времени  $dt$  в элементарном объёме  $d\mathbf{r}$  около точки с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ .

Возможные каналы взаимодействия нейтронов с ядрами вещества характеризуются следующими элементарными (микроскопическими) сечениями взаимодействия:  $\sigma_c$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_s$  и  $\sigma_{in}$  — сечения захвата нейтронов, деления ядер, упругого и неупругого рассеяний,  $\sigma = \sigma_c + \sigma_f + \sigma_s + \sigma_{in}$  — полное элементарное сечение. Поэтому

$$\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_f + \Gamma_{in}, \quad (2)$$

$$\zeta = \zeta_s + \zeta_f + \zeta_{in} + \zeta_c, \quad (3)$$

где индексы обозначают то же, что и в выражениях для элементарных сечений.

В выражениях для слагаемых формул (2) и (3) входят соответствующие макроскопические сечения, например

<sup>1</sup> В данной работе рассматриваются быстрые импульсные системы, в которых запаздывающими нейтронами можно пренебречь.

$\alpha_{si} = n_{\text{nucl}} \sigma_{si}$ , где  $n_{\text{nucl}}$  — число частиц в единице объёма,  $\sigma_{si}$  — элементарное сечение упругого рассеяния нейтрона на ядре  $i$ -го сорта.

Получить точное решение уравнения (1) с соответствующими граничными и начальными условиями при рассмотрении прикладных задач невозможно из-за его сложности. Тем не менее некоторые общие выводы можно сделать, даже не зная явного вида функций  $\zeta(t, \mathbf{r}, \mathbf{V})$  и  $\Gamma(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}, \mathbf{V}')$ .

### 3. Некоторые следствия, вытекающие из свойства инвариантности точного кинетического уравнения относительно преобразования подобия

Поскольку плотность ядер  $n_{\text{nucl}}(\mathbf{r})$  пропорциональна плотности вещества  $\rho(\mathbf{r})$ ,

$$\Gamma \sim \rho, \quad \zeta \sim \rho.$$

Сначала рассмотрим случай постоянных плотности ядер и состава вещества. В кинетическом уравнении (1) произведём следующие замены переменных:

$$t \rightarrow t' = \frac{\rho}{\rho'} t, \quad (4)$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \frac{\rho}{\rho'} \mathbf{r}. \quad (5)$$

После перехода к новым переменным вид уравнения (1) относительно теперь уже штрихованной функции  $\psi'(t', \mathbf{r}', \mathbf{V})$  остается прежним. Это означает, что кинетическое уравнение (1) инвариантно по отношению к преобразованиям (4), (5), которые назовём преобразованиями подобия.

Далее будем изучать критические активные (включающие в себя делящиеся вещества) системы. В таких системах  $\partial\psi/\partial t = 0$  и уравнение (1) превращается в стационарное.

Пусть имеется произвольное по геометрической форме однородное критическое тело с некоторым характерным размером  $R = R_*$  (здесь и далее все критические параметры отмечаются звездочкой). Наряду с (5) в рассматриваемой задаче имеет место частное преобразование подобия

$$R'_* = \frac{\rho_* R_*}{\rho'_*}. \quad (6)$$

Объём любого тела можно записать в виде  $V_T = C_T R^3$ , где константа  $C_T$  определяется геометрической формой тела и выбором  $R$  в качестве характерного размера. Тогда масса тела  $m$  равна  $C_T \rho R^3$ , и из соотношения (6) получаем закон постоянства произведения критических массы  $m_*$  и квадрата плотности

$$m_* \rho_*^2 = \text{const}, \quad (7)$$

справедливый для произвольных по геометрии подобных тел.

Закон (7) для частного случая (однородный активный шар) на основе решения уравнения диффузии нейтронов был открыт очень давно американскими учёными (не позднее 1943 г., см. [3]).

Теперь рассмотрим общий случай произвольной зависимости плотности от координат  $\rho(\mathbf{r}) = \bar{\rho}\varphi(\xi)$ . Здесь  $\bar{\rho} = \int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} / \int d\mathbf{r}$  — средняя плотность произвольной по составу и геометрии активной системы,  $\xi = \mathbf{r}/R$  —

безразмерная координата,  $\varphi(\xi)$  — профильная функция, нормированная следующим образом:  $\int \varphi(\xi) d\xi / \int d\xi = 1$ .

Легко показать, что теперь кинетическое уравнение инвариантно относительно преобразований

$$t \rightarrow t' = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} \mathbf{r} \quad (8)$$

и справедливо условие подобия профильных критических систем с одинаковым профилем плотности

$$R'_* \bar{\rho}'^2 = R_* \bar{\rho}_*^2.$$

Эта точная связь между критическими размерами и средними значениями плотностей находится в соответствии со следующей приведенной без доказательства в [4] теоремой: "Если в любой критической системе равномерно понизить (повысить) плотность всех компонент, то, чтобы сделать систему снова критической, все линейные размеры должны быть увеличены (уменьшены) во столько же раз".

В классе рассмотренных подобных по геометрии систем справедлива формула

$$m_* \bar{\rho}_*^2 = \text{const}.$$

### 4. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики и общее решение задачи на собственные значения

Односкоростное приближение вполне оправдано при рассмотрении систем на быстрых нейтронах. К таким системам относятся конструкции из делящихся материалов, не содержащие в себе замедлителей нейтронов спектра деления. К системам на промежуточных и на тепловых нейтронах односкоростная теория неприменима.

В односкоростном приближении все нейтроны имеют одинаковую по величине скорость  $V$ . Примем также следующие упрощения: считается, что индикатриса упругого рассеяния нейтронов на ядрах изотропна и неупругие процессы отсутствуют.

Соответствующее сделанным упрощающим предположениям для функции распределения в фазовом пространстве векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{V}/V$  кинетическое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})}{\partial t} + \left( \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \psi(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \alpha \psi(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} n(t, \mathbf{r}). \quad (9)$$

В правую часть уравнения (9) входит плотность нейтронов

$$n(t, \mathbf{r}) = \int \psi(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}'.$$

В общем случае многокомпонентной среды, когда пространственные зависимости параметров  $\alpha(\mathbf{r})$  и  $\beta(\mathbf{r})$  определяются не только функцией  $\rho(\mathbf{r})$ , но и зависимостью концентраций ядер  $i$ -го сорта от координат  $\mu_i(\mathbf{r})$  справедливы формулы

$$\beta(\mathbf{r}) = n_{\text{nucl}}(\mathbf{r}) \sum_i \mu_i(\mathbf{r}) (\sigma_{si} + \nu_i \sigma_{fi}), \quad (10)$$

$$\alpha(\mathbf{r}) = n_{\text{nucl}}(\mathbf{r}) \sum_i \mu_i(\mathbf{r}) (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci}), \quad (11)$$

где плотность ядер

$$n_{\text{nucl}}(\mathbf{r}) = \frac{N_A \rho(\mathbf{r})}{\sum_i \mu_i(\mathbf{r}) A_i};$$

$A_i$  и  $\mu_i$  — массовое число  $i$ -го ядра и среднее количество вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра  $i$ -го сорта соответственно,  $N_A$  — число Авогадро.

Величина  $h = \beta/\alpha$  называется активностью среды. В случаях инертной среды, размножающей и поглощающей нейтроны сред,  $h = 1$ ,  $h > 1$ ,  $h < 1$  соответственно.

К кинетическому уравнению надо добавить ещё начальное и граничное условия:

$$\psi(t = 0, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}),$$

$$\psi|_S = 0, \quad \text{если } (\mathbf{\Omega} \mathbf{N}_S) < 0,$$

где  $\mathbf{N}_S$  — единичная нормаль к поверхности системы, направленная в сторону вакуума. Принятое нами граничное условие отсутствия потока нейтронов из пустоты в вещество сужает рассматриваемые ниже системы до класса односвязных объектов со всюду невогнутыми внешними поверхностями.

#### 4.1. Элементы теории подобия нестационарных однородных систем

Следя работе [5], параметры  $\alpha$  и  $\beta$  будем считать постоянными и введём новые безразмерные аргументы

$$\mathbf{z} = \beta \mathbf{r} = h \alpha \mathbf{r}, \quad \tau = h \alpha V t.$$

Тогда для функции распределения в фазовом пространстве векторов  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  вместо выражения (9) получаем

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \right] \psi(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) + \frac{1}{h} \psi(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{\Omega}' \psi(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}') \quad (12)$$

с соответствующими начальным и граничным условиями

$$\psi(\tau = 0, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) = \psi_0(\mathbf{z}, \mathbf{\Omega}),$$

$$\psi|_S = 0 \quad \text{при } (\mathbf{\Omega} \mathbf{N}_S) < 0,$$

где  $\mathbf{N}_S$  — направленная в сторону пустоты нормаль к поверхности системы в  $\mathbf{z}$ -пространстве.

*Теорема подобия.* Произведение экспоненты  $\exp(\tau/h)$  и функции распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  не зависит от ядерно-физических свойств вещества, из которого состоит система и определяется лишь граничным и начальным условиями.

*Доказательство.* Решение уравнения (12) будем искать в виде

$$\psi(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) = f(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) \exp\left(-\frac{\tau}{h}\right). \quad (13)$$

Подстановка выражения (13) в (12) приводит к интегро-дифференциальному уравнению

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \right] f(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{\Omega}' f(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}') \quad (14)$$

с начальным и граничным условиями

$$f(\tau = 0, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) = \psi_0(\mathbf{z}, \mathbf{\Omega}), \quad (15)$$

$$f|_S = 0 \quad \text{при } (\mathbf{\Omega} \mathbf{N}_S) < 0. \quad (16)$$

Кинетическое уравнение (14) и условия (15), (16) не содержат в себе параметров  $h$  и  $\alpha$ . Поэтому решение  $f(\tau, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega})$  не зависит от ядерно-физических свойств среды. Это и требовалось доказать.

Обратим внимание на то, что после перехода к обычным переменным  $t$  и  $\mathbf{r}$  из уравнения (14) получается кинетическое уравнение для функции  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$

$$\left[ \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} + \left( \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} \int d\mathbf{\Omega}' f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}'),$$

которое инвариантно относительно преобразований подобия

$$t \rightarrow t' = \frac{\beta}{\beta'} t,$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \frac{\beta}{\beta'} \mathbf{r}.$$

На основе диктуемого граничным условием критерия подобия двух однотипных по геометрии систем

$$\beta_2 R_2 = \beta_1 R_1 \quad (17)$$

в работе [5] получено точное соотношение между функциями  $\psi_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  и  $\psi_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ .

#### 4.2. Общее решение задачи на собственные значения

Известно (см., например, [6]), что в случае систем с конечными размерами общим решением кинетического уравнения для нейтронов (9) является следующая суперпозиция

$$\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \sum_m a_m \exp(\lambda_m t) \psi_m(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (18)$$

в которую входят собственные значения  $\lambda = \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 \dots$  и соответствующие им собственные функции  $\psi_m$ . Если  $t \gg t_0 = 1/\lambda_0$ , то функция распределения (18) будет иметь вид

$$\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \exp(\lambda t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (19)$$

где  $\lambda = \lambda_0$  — главное собственное значение (ГСЗ);  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  — главная собственная функция (ГСФ).

Функцию распределения вида (19), когда в решении можно выделить временную и пространственную части, будем в дальнейшем называть равновесной.

В случае (19) справедливо стационарное кинетическое уравнение

$$\left( \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \left[ \alpha + \frac{\lambda}{V} \right] \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} \int d\mathbf{\Omega}' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}'), \quad (20)$$

которое в  $\mathbf{z}$ -пространстве переходит в следующее:

$$\left( \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \psi(\mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) + E \psi(\mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{\Omega}' \psi(\mathbf{z}, \mathbf{\Omega}'), \quad (21)$$

где  $E = (\alpha + \lambda/V)/\beta$  — новое главное собственное значение. В уравнение (21), кроме величины  $E$ , не входят никакие другие параметры, а соответствующее граничное условие содержит в себе характерный размер системы.

Из однотипных по геометрии систем с характерным размером  $R$  выделим те, у которых одинаково произведение  $\beta R$ . Такие системы в  $\mathbf{z}$ -пространстве имеют не только одинаковую геометрическую форму, но и один и тот же характерный размер  $Z = \beta R$ . Условие подобия (17) систем в  $\mathbf{r}$ -пространстве после перехода к безразмерным переменным вырождается в равенство характерных размеров

$$Z_2 = Z_1.$$

В случае фиксированного типа геометрии объекта каждому  $Z$  будет соответствовать свое, и притом единственное, число  $E$ . Таким образом, существует универсальная функция  $E = E(\beta R)$ , явный вид которой определяется геометрической формой объекта.

Используя связь между  $E$  и  $\lambda$ , находим зависимость ГСЗ от характеристик системы

$$\lambda = \beta V \left[ E(\beta R) - \frac{1}{h} \right] = \alpha V [hE(\beta R) - 1].$$

При стремлении оптической толщины  $p = \alpha R$  объекта к бесконечности утечкой нейтронов из среды можно пренебречь, и  $\lambda \rightarrow \lambda_\infty = (\beta - \alpha) V = (h - 1) \alpha V$ , где  $\lambda_\infty$  — известная для случая бесконечной однородной среды величина. Таким образом,

$$\lim_{\alpha R \rightarrow \infty} E(h\alpha R) = \lim_{\beta R \rightarrow \infty} E(\beta R) = 1.$$

Кроме этого, для любых критических систем  $\lambda = 0$  и

$$E(\beta_* R_*) = \frac{1}{h}.$$

При  $E = 0$  кинетическое уравнение (21) вырождается, т.е. переходит в следующее:

$$\left( \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \psi(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int d\boldsymbol{\Omega}' \psi(\mathbf{z}, \boldsymbol{\Omega}').$$

Для систем с произвольными  $h$ , находящимися в вырожденном состоянии,  $\lambda = -\alpha V$ . В случае систем, оптическая толщина которых меньше, чем у вырожденных, функция  $E(\beta R)$  отрицательна.

Из общего решения задачи на ГСЗ легко получать формулы подобия. Например, воспользовавшись условием  $E(\beta' R') = E(\beta'' R'')$ , имеем для подобных систем с размерами  $R', R'' = (\beta'/\beta'') R'$

$$\lambda'' = \left[ \frac{h''}{h'} \left( 1 + \frac{\lambda'}{\alpha' V'} \right) - 1 \right] \alpha'' V''.$$

Приведённые выше формулы были получены для ГСЗ  $\lambda = \lambda_0$ . В работе [7] показано, что в случае собственного значения с номером  $m$  имеет место формула

$$\lambda_m = \beta V \left[ E_m(\beta R) - \frac{1}{h} \right].$$

Следует отметить, что представленные выше формулы для собственных значений (СЗ) столь же точны,

сколь и односкоростное кинетическое уравнение, на основе которого они были получены. Эти формулы дают наглядное представление о том, от каких величин и каким образом зависят СЗ.

С помощью общих формул для  $\lambda$  можно проводить тестирование аналитических решений задачи на СЗ, а также результатов численных решений по математическим методикам. Выражения для СЗ могут оказаться полезными при построении интерполяционных соотношений и для экстраполяции известных данных в неисследованную область изменений физических параметров.

#### 4.3. Формулы подобия, справедливые в случае систем с зависящими от координат параметрами $\alpha$ и $\beta$

Рассмотрим общий случай (см. формулы (10), (11)), когда пространственная зависимость величин  $\alpha$  и  $\beta$  определяется не только функций  $\rho(\mathbf{r})$ , но также и концентрациями различных ядер  $\mu_i = \mu_i(\mathbf{r})$ .

Введём безразмерную переменную  $\xi = \mathbf{r}/R$  и формулы (10), (11) запишем в виде  $\alpha = \bar{\alpha} A(\xi)$ ,  $\beta = \bar{\beta} B(\xi)$ , где  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$  — средние по объёму величины, а профильные функции нормированы следующим образом

$$\frac{\int d\xi A(\xi)}{\int d\xi} = \frac{\int d\xi B(\xi)}{\int d\xi} = 1.$$

Кинетическое уравнение (20) при этом будет иметь вид

$$\left( \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \psi(\xi, \boldsymbol{\Omega}) + \left[ A(\xi) + \frac{\lambda}{\bar{\alpha} V} \right] \bar{\alpha} R \psi(\xi, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\bar{\beta} R B(\xi)}{4\pi} \int d\boldsymbol{\Omega}' \psi(\xi, \boldsymbol{\Omega}').$$

Если оно решено для произвольной исходной системы "1", то переход к любой подобной системе "2" не приведёт к изменению ГСФ, т.е.

$$\psi_2 \left( \frac{\mathbf{r}}{R_2}, \boldsymbol{\Omega} \right) = \psi_1 \left( \frac{\mathbf{r}}{R_1}, \boldsymbol{\Omega} \right),$$

при соблюдении условий

$$\left[ A_2(\xi) + \frac{\lambda_2}{\bar{\alpha}_2 V} \right] \bar{\alpha}_2 R_2 = \left[ A_1(\xi) + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right] \bar{\alpha}_1 R_1, \quad (22)$$

$$\bar{\beta}_2 R_2 B_2(\xi) = \bar{\beta}_1 R_1 B_1(\xi). \quad (23)$$

Интегрируя выражения (22) и (23) по безразмерному объёму, получим

$$\left[ 1 + \frac{\lambda_2}{\bar{\alpha}_2 V} \right] \bar{\alpha}_2 R_2 = \left[ 1 + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right] \bar{\alpha}_1 R_1, \quad (24)$$

$$\bar{\beta}_2 R_2 = \bar{\beta}_1 R_1. \quad (25)$$

откуда следует формула для ГСЗ

$$\lambda_2 = \bar{\alpha}_2 V \left[ \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V} \right) - 1 \right].$$

Для профильных функций  $A_2(\xi)$  и  $B_2(\xi)$  с учётом (24), (25) имеем

$$A_2(\xi) = 1 + \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1} [A_1(\xi) - 1], \quad (26)$$

$$B_2(\xi) = B_1(\xi). \quad (27)$$

Функции  $A_1(\xi)$  и  $B_1(\xi)$ , относящиеся к исходной системе, могут быть кусочно-непрерывными и иметь любое число точек разрыва (скачков).

Следует подчеркнуть, что в классе рассматриваемых новых подобных систем параметр  $\beta_2 = \bar{\beta}_2 B_2$  при фиксированном характерном размере  $R_2$  полностью определяется формулами (25) и (27). При выборе  $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2 A_2$  только профильная функция  $A_2$  должна удовлетворять условию (26), величину  $\bar{\alpha}_2$  можно выбрать произвольной.

В частном случае для критических систем ( $\lambda_2 = = \lambda_1 = 0$ ) справедливы равенства

$$\bar{\alpha}_{*2} R_{*2} = \bar{\alpha}_{*1} R_{*1},$$

$$\bar{\beta}_{*2} R_{*2} = \bar{\beta}_{*1} R_{*1}.$$

Представленными выше формулами можно пользоваться при рассмотрении слоистых систем. В работе [8] это продемонстрировано на конкретных примерах.

**4.4. Частные решения задачи на главные собственные значения, применимые к профильным системам**

Временно откажемся от односкоростного приближения и будем опираться на результаты второго раздела. Исходя из точного уравнения (1), рассмотрим конечные по размерам неоднородные системы, в которых от координат зависит, и притом одинаковым образом, лишь плотность вещества  $\rho(\mathbf{r}) = \bar{\rho}u(\mathbf{r})$ , где  $\bar{\rho}$  — средняя плотность вещества,  $u(\mathbf{r})$  — профильная функция,  $\int d\mathbf{r} u(\mathbf{r}) = 1$ .

Решим задачу на ГСФ  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{V})$  и ГСЗ  $\lambda$ . Положив в кинетическом уравнении (1)  $\psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) = \exp(\lambda t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{V})$ , имеем

$$\lambda \psi(\mathbf{r}, \mathbf{V}) + \left( \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{V}) + \zeta(\mathbf{r}, \mathbf{V}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{V}) = \int_{(V')} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{V}', \mathbf{V}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{V}') dV'. \tag{28}$$

Уравнение (28) должно быть инвариантно относительно преобразования координат  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \bar{\rho}\mathbf{r}/\bar{\rho}'$ , поэтому справедливо равенство

$$\lambda' = \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} \lambda. \tag{29}$$

Инвариантом преобразования (8) является произведение средней плотности вещества  $\bar{\rho}$  и характерного размера системы  $R$ . Поэтому решение задачи на ГСЗ в рассмотренном случае имеет следующий общий вид:

$$\lambda = \bar{\rho} F(\bar{\rho} R). \tag{30}$$

Размерная функция  $F(\bar{\rho} R)$  определяется геометрией объекта.

**4.5. Особенности протекания кинетических процессов в однородных системах с предельно большими оптическими толщинами**

Сначала зададимся вопросом о том, какие типы физических решений можно получить, исходя из записанного в  $\mathbf{r}$ -пространстве неоднородного кинетического уравнения с постоянными  $\alpha$  и  $\beta$

$$\frac{\partial \psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega})}{\partial t} + V \left( \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \alpha V \psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\beta V}{4\pi} n(t, \mathbf{r}) + q(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}). \tag{31}$$

После интегрирования (31) по углам  $\mathbf{\Omega}$ , а затем по объёму системы соответственно получим

$$\frac{\partial n(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) + \alpha V n(t, \mathbf{r}) = \beta V n(t, \mathbf{r}) + \int d\mathbf{\Omega} q(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}),$$

$$\frac{dN}{dt} = \lambda(t) N(t) + Q(t), \tag{32}$$

$$\lambda(t) = (h - 1) \alpha V - W(t),$$

$$W(t) = \frac{\Pi(t)}{N(t)} = \frac{\int \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) d\mathbf{S}}{\int n(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r}},$$

где  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = V \int \mathbf{\Omega} \psi(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega}$  — векторный поток нейтронов,  $Q(t)$  — число нейтронов, испускаемых внешним источником в единицу времени,  $N(t)$  — полное число нейтронов в системе,  $\Pi(t) = \int \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) d\mathbf{S}$  — скорость утечки нейтронов в пустоту,  $W(t)$  — вероятность вылета нейтронов из системы в единицу времени.

Пусть рассматриваемый объект имеет характерный размер  $R$ . Вероятность утечки обратно пропорциональна отношению поверхности системы к ее объёму, т.е.  $W \sim 1/R$  (в  $\mathbf{z}$ -пространстве  $W \sim 1/\beta R = 1/h\rho$ ).

Рассмотрим уравнение (32). Предположим, что источник постоянный  $Q(t) = Q_0$ , и перейдём к пределу  $p = \alpha R \rightarrow \infty$ . В этом случае утечкой нейтронов из системы можно пренебречь и

$$\lambda(t) \rightarrow \lambda_\infty = (h - 1) \alpha V.$$

Таким образом, для функции  $N(t)$  получаем уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda_\infty N(t) + Q_0 \tag{33}$$

с начальным условием  $N(t = 0) = N_0$ .

В зависимости от знака  $\lambda_\infty$  уравнение (33) будет иметь различные типы решений.

1.  $\lambda_\infty = 0$  (инертная среда  $h = 1$ ). В этом случае полное число нейтронов линейно возрастает со временем

$$N(t) = N_0 + Q_0 t$$

при наличии источника ( $Q_0 \neq 0$ ) или остаётся постоянным  $N(t) = N_0$  без него.

2.  $\lambda_\infty > 0$  (надкритическая система  $h > 1$ ). Полное число нейтронов в такой системе экспоненциально возрастает со временем

$$N(t) = \left[ N_0 + \frac{Q_0}{\lambda_\infty} \right] \exp(\lambda_\infty t) - \frac{Q_0}{\lambda_\infty} = \left[ N_0 + \frac{Q_0}{\lambda_\infty} (1 - \exp(-\lambda_\infty t)) \right] \exp(\lambda_\infty t). \tag{34}$$

При  $t \gg 1/\lambda_\infty$  решение (34) выходит на равновесный экспоненциальный закон

$$N(t) = \left( N_0 + \frac{Q_0}{\lambda_\infty} \right) \exp(\lambda_\infty t)$$

независимо от наличия или отсутствия источника нейтронов.

3.  $\lambda_\infty < 0$  ( $h < 1$ ). Для полного числа нейтронов в этом случае справедлив закон (34), где  $\lambda_\infty = -|\lambda_\infty|$ . Если действует источник  $Q_0$ , то через некоторое время  $t \gg 1/|\lambda_\infty|$  полное число нейтронов не будет меняться со

временем (стационарное решение)

$$N = \frac{Q_0}{|\lambda_\infty|}.$$

Если уравнение (33) однородное ( $Q_0 = 0$ ), то  $N(t)$  экспоненциально убывает со временем

$$N(t) = N_0 \exp(-|\lambda_\infty|t).$$

*Предельная теорема подобия.* Если выполняется условие  $p = \alpha R \rightarrow \infty$ , то пространственное равновесное распределение нейтронов  $\psi(\mathbf{z}, \Omega)$  внутри однородной системы в фазовом пространстве векторов  $\mathbf{z} = h\mathbf{r}$ ,  $\Omega$  не зависит от ядерно-физических свойств веществ, из которых она состоит.

В работе [9] эта теорема была доказана двумя способами. Приведём один из них.

Отбросим источник  $q$  в уравнении (31) (это не умаляет общности доказательства). После выхода решения на равновесное функция распределения и нейтронная плотность будут иметь вид

$$\psi(t, \mathbf{z}, \Omega) = C \exp[(h-1)\alpha Vt] \psi(\mathbf{z}, \Omega), \tag{35}$$

$$n(t, \mathbf{z}) = C \exp[(h-1)\alpha Vt] n(\mathbf{z}). \tag{36}$$

Подставляем (35) и (36) в (31) и получаем уравнение относительно функции  $\psi(\mathbf{z}, \Omega)$

$$\left(1 + \Omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) \psi(\mathbf{z}, \Omega) = \frac{n(\mathbf{z})}{4\pi}. \tag{37}$$

Кинетическое уравнение (37) и граничное условие (отсутствие потока извне, см. выше) не содержат в себе характеристик среды, откуда следует утверждение теоремы.

Сделаем ряд замечаний.

Доказанная теорема справедлива в классе произвольных односвязных систем, ограниченных всюду невогнутыми поверхностями.

В пустоте за пределами системы с произвольной оптической толщиной имеет место кинетическое уравнение

$$\left(\Omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \psi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, \Omega) + \frac{\lambda}{V} \psi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, \Omega) = 0.$$

Второе слагаемое в левой части этого уравнения в случае  $\lambda > 0$  ответственно за  $\lambda$ -поглощение нейтронов. Поэтому нейтронная плотность в пустоте представляет собой убывающую функцию. Если же  $\lambda < 0$ , то возникает  $\lambda$ -источник нейтронов.

При  $p \rightarrow \infty$  в вакууме справедливо уравнение

$$\left(\Omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) \psi_{\text{ex}}(\mathbf{z}, \Omega) + \frac{h-1}{h} \psi_{\text{ex}}(\mathbf{z}, \Omega) = 0.$$

### 5. Проблема Милна в теории переноса нейтронов

Нейтронно-кинетическая проблема Милна, получившая свое название благодаря сходству с соответствующей известной астрофизической задачей, стала известной в середине прошлого столетия в период создания первой атомной бомбы. В то время учёным, привлечённым к атомным проектам СССР и США, требовалось решить

целый ряд совершенно новых и сложных научно-технических задач, одной из которых являлась задача Милна о точном аналитическом решении уравнения переноса нейтронов в различных полубесконечных средах, разделённых плоской границей. Решить эту задачу в ту пору было необходимо из-за скудности знаний о нейтронно-кинетических эффектах, присутствующих в разрабатываемых атомных зарядах. Дело в том, что вычислительная техника тогда отсутствовала и имевшаяся в распоряжении элементарная диффузионная теория не могла обеспечить достоверные оценки критических масс делящихся материалов, не говоря уже об исследованиях пространственных распределений нейтронов в простейших системах. Использование точных аналитических решений уравнения переноса в таких системах могло существенно повысить надёжность расчётно-теоретических работ по выбору конструкции атомного заряда. Поэтому решить задачу Милна стремились физики-теоретики, работавшие в разных странах в период создания первых ядерных зарядов. Им удалось получить искомые решения стационарного кинетического уравнения. Благодаря этому проблема Милна была закрыта, несмотря на то что в случае сред, размножающих нейтроны, найденные ими формальные математические стационарные решения противоречат физическому смыслу. Размножающая среда представляет собой надкритическую систему, для описания нейтронной кинетики в которой требуется решить нестационарное кинетическое уравнение.

Наряду со стационарными решениями ниже приведены явные решения нестационарной задачи Милна. Авторами данной работы показано, что в случае надкритической системы найденное ими полное физическое решение нестационарной задачи Милна в удалённой от границы асимптотической области приводит к линейной зависимости плотности нейтронов от координаты  $n(x) \sim x + x_0$  внутри активной или наиболее активной среды соответственно в однообластной и двухобластной задачах. Такого результата в опубликованных литературных источниках авторами не обнаружено.

Следует отметить, что перенос нейтронов лишь одно из многих физических явлений, описываемых линеаризованным уравнением Больцмана. К таким явлениям можно отнести распространение излучения в звёздных атмосферах, перенос частиц в газовых разрядах, прохождение рентгеновских лучей через рассеивающие среды и др. Некоторые фундаментальные проблемы, возникшие в теории переноса нейтронов, рассматривались и были частично решены астрофизиками (Шварцшильд, Милн, Хопф и др.) еще до того, как был открыт нейтрон. Соответствующие ссылки представлены в монографиях [6, 10].

#### 5.1. Стационарная задача Милна

Рассмотрим сначала стационарную однообластную задачу Милна, приняв для определённости, что справа от плоской границы полубесконечное пространство заполнено однородным веществом, а слева полупространство пустое (вакуум).

Требуется решить для плоского случая стационарное кинетическое уравнение

$$\mu \frac{\partial \psi(y, \mu)}{\partial y} + \psi(y, \mu) = \frac{h}{2} n(y) \tag{38}$$

с граничным условием

$$\psi(0, \mu) = 0 \text{ при } \mu > 0, \tag{39}$$

где  $\mu$  — косинус угла между осью абсцисс и направлением полета нейтрона в точку наблюдения,  $y = \alpha x$  — безразмерная координата,  $n(y) = \int_{-1}^1 \psi(y, \mu) d\mu$  — плотность нейтронов. В случаях поглощающей ( $h < 1$ ) и размножающей ( $h > 1$ ) сред предполагалось наличие постоянного потока нейтронов из бесконечности.

Сначала остановимся на известных результатах, которые относятся к случаю инертной среды ( $h = \beta/\alpha = 1$ ).

Плачек и Зейдель в совместной статье [11] методом Винера и Хопфа получили угловое распределение нейтронов на границе  $\psi(0, \mu)$  и лаплас-образ  $\Phi_0(s)$  функции  $n(y)$ :

$$\psi(0, \mu) = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \mu) \tau_- \left( -\frac{1}{\mu} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \mu) \times \exp \left\{ -\frac{\mu}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln [\sin^2 u / (1 - u \cot u)]}{1 - (1 - \mu^2) \sin^2 u} du \right\}, \mu < 0. \tag{40}$$

$$\Phi_0(s) = \frac{\sqrt{3}(s+1) \tau_-(s)}{s^2}. \tag{41}$$

Для  $s > 0$

$$\ln \tau_-(s) = \frac{s}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln [\sin^2 u / (1 - u \cot u)]}{\sin^2 u + s^2 \cos^2 u} du.$$

Решение задачи Милна для плотности нейтронов можно представить в виде суперпозиции  $n(y) = n_{as}(y) + \varepsilon(y)$ , где  $n_{as}(y)$  — асимптотическая часть решения,  $\varepsilon(y)$  — сравнительно малая, быстро убывающая с ростом  $y$  поправка.

Из разложения в ряд Лорана функции  $\Phi_0(s)$  в точке  $s = 0$

$$\Phi_0(s) = \frac{\sqrt{3} \tau_-(0)}{s^2} + \frac{\sqrt{3} [\tau_-(0) + \tau'_-(0)]}{s} + \dots$$

авторы [11] сделали вывод о том, что асимптотическая часть функции  $n(y)$  является линейной функцией по  $y$

$$n_{as}(y) = 3(y + y_0), \tag{42}$$

где  $y_0$  — константа, которая равна

$$y_0 = 1 + \frac{\tau'_-(0)}{\tau_-(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{3}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - x \cot x} \right] dx \approx 0,7104.$$

В работе [12] Плачек привел формулу (40) к более удобной для вычисления форме и затабулировал функцию  $\varphi(\mu) = \psi(0, -\mu)/\sqrt{3}$  в интервале  $0 \leq \mu \leq 1$  с шагом  $\Delta\mu = 0,01$ .

Точная формула для нейтронной плотности в инертной полубесконечной среде, включающая асимптотическую часть и поправку, приведена в работе Марка. В его статье [13] показано, как выбрать контур для обратного преобразования Лапласа функции  $\Phi_0(s)$  (41), и получено выражение

$$n_M(y) = 3 \left\{ y + y_0 - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\exp(-y/\mu) d\mu}{(\psi(0, -\mu) [(1 - \mu \operatorname{artanh} \mu)^2 + \pi^2 \mu^2 / 4])} \right\}. \tag{43}$$

Из статьи Ле Кейн [14] известно, что стационарная задача Милна в случаях поглощающей ( $h < 1$ ) и размножающей ( $h > 1$ ) нейтроны сред была впервые решена Марком и Адлером. Однако их результаты не были опубликованы.

Ю.А. Романов тоже получил решение задачи Милна при произвольном значении  $h$ . Приведём некоторые результаты его работы [15].

При  $h < 1$  асимптотическая плотность нейтронов экспоненциально зависит от безразмерной координаты  $y$

$$n_{as}(y) = \sqrt{\frac{2(1-k^2)}{k^2-1+h}} \sinh k(y + y_0),$$

где  $k$  — коэффициент, который находится из трансцендентного уравнения

$$h \frac{\operatorname{artanh} k}{k} = 1, \tag{44}$$

$y_0 = y_0(h)$  — константа, которую с хорошей точностью можно найти по формуле

$$y_0(h) \approx \frac{0,71}{h}.$$

Для размножающей нейтроны среды ( $h > 1$ ) трансцендентное уравнение (44) имеет два чисто мнимых корня, и асимптотическое решение имеет вид

$$n_{as}(y) = A \sin k(y + y_0), \tag{45}$$

где  $A$  — нормировочная константа,  $k$  — модуль корня уравнения (44).

Решение (45) противоречит физическому смыслу, так как оно приводит к возникновению областей с отрицательной нейтронной плотностью.

Кроме однообластной задачи Милна Ю.А. Романовым (см. [15]) решена стационарная задача двух сред, т.е. задача об определении нейтронного поля в двух полубесконечных пространствах, однородно заполненных разными веществами, которые соприкасаются на плоской границе раздела. Математическая постановка этой задачи следующая. Решается система уравнений в  $y = \alpha x$ -пространстве

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi_1(y, \mu)}{\partial y} + \psi_1(y, \mu) &= \frac{h_1}{2} n_1(y) \text{ при } y < 0, \\ \mu \frac{\partial \psi_2(y, \mu)}{\partial y} + \psi_2(y, \mu) &= \frac{h_2}{2} n_2(y) \text{ при } y > 0, \end{aligned} \tag{46}$$

с граничным условием  $\psi_2(0+, \mu) = \psi_1(0-, \mu)$ .

Если для определённости предположить, что поток нейтронов идет из среды 1 в среду 2, то плотность частиц  $n(y)$  для случая поглощающих сред ( $h_1 < 1, h_2 < 1$ ) определяется по формулам

$$\begin{aligned} n_1(y) &= \exp(-k_1 y) + A \exp(k_1 y) + \varepsilon_1(y) = \\ &= n_{1as}(y) + \varepsilon_1(y), \quad y < 0, \end{aligned} \tag{47}$$

$$n_2(y) = B \exp(-k_2 y) + \varepsilon_2(y) = n_{2as}(y) + \varepsilon_2(y), \quad y > 0,$$

где  $n_{1as}(y)$  и  $n_{2as}(y)$  — асимптотические плотности, функции  $\varepsilon_1(y)$  и  $\varepsilon_2(y)$  отличны от нуля только вблизи границы раздела сред.



Заметим, что при  $h_1 > 1$  и  $h_2 > 1$  параметры  $k_1$  и  $k_2$  чисто мнимые, а решения (47) периодические.

Константы  $A$  и  $B$  находятся из граничных условий для асимптотических плотностей:

1) непрерывность логарифмических производных в точках  $y_1$  и  $y_2$

$$\frac{n'_{1as}(y_1)}{n_{1as}(y_1)} = \frac{n'_{2as}(y_2)}{n_{2as}(y_2)},$$

2) скачок плотностей в точках  $y_1$  и  $y_2$

$$\frac{n_{1as}(y_1)}{\gamma(h_1)} = \frac{n_{2as}(y_2)}{\gamma(h_2)},$$

где

$$\gamma(h) = \sqrt{\frac{2k^2(1-k^2)}{3h(k^2-1+h)}}, \quad k = k(h)$$

(см. (44)).

Положение точек  $y_1$  и  $y_2$  определяется численно по формулам

$$y_1 = f(k_1, k_1) - f(k_2, k_1),$$

$$y_2 = f(k_1, k_2) - f(k_2, k_2),$$

$$\cosh sf(k, s) = \sqrt{\frac{h(s)(k^2 - s^2)}{h(s) - h(k)}} \int_0^1 \frac{\mu \varphi(k, \mu)}{1 - s^2 \mu^2} d\mu. \quad (48)$$

Входящая в равенство (48) функция  $\varphi(k, \mu)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^1 \frac{\mu_0 \varphi(k, \mu_0)}{\mu_0 + \mu} d\mu_0 = \frac{h}{2\varphi(k, \mu)(1 - k^2 \mu^2)}.$$

В задаче двух сред асимптотические плотности на границе претерпевают разрыв, причем нейтронная плотность всегда больше в среде, где значение  $h$  больше. Функция  $n(y)$  непрерывна и имеет на границе бесконечную производную. Качественная зависимость плотности нейтронов от координаты для случая  $h_1 < 1$ ,  $h_2 < 1$  приведена на рис. 1.

Другой метод решения однообластной и двухобластной задач с помощью разложения по сингулярным собственным функциям характеристического уравнения переноса приведен в работе К. Кейза и П. Цвайфеля [10]. Авторами этой работы получена зависимость нейтронной плотности не только от координаты, но и от угловой переменной  $\mu$ , а также рассмотрена нестационарная задача Милна.

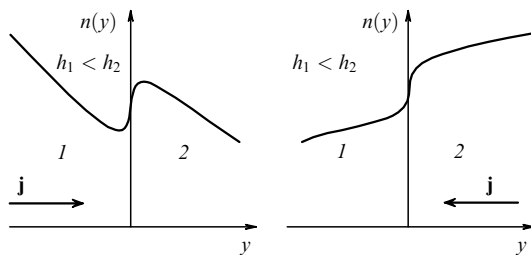


Рис. 1. Характер поведения функции  $n(y)$  вблизи границы в случае стационарной задачи двух сред с двумя поглотителями (справа — поток нейтронов идет из среды 2 в среду 1, слева — из 1 в 2).

### 5.2. Нестационарная задача Милна

В первую очередь остановимся на однообластной нестационарной задаче Милна, решение которой можно получить, исходя из кинетического уравнения

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, x, \mu)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi(t, x, \mu)}{\partial x} + \alpha \psi(t, x, \mu) = \frac{h\alpha}{2} n(t, x).$$

Воспользуемся предельной теоремой подобия, которая в разделе 3 доказана в общем случае произвольных однородных систем с бесконечной оптической толщиной, граничные поверхности которых не имеют вогнутых участков. Согласно этой теореме, решение нестационарной однообластной задачи в  $z = h\alpha x$ -пространстве в нашем случае имеет следующий вид:

$$n(t, z) = C_1 \exp[(h-1)\alpha V t] n(z); \quad (49)$$

и его пространственная часть  $n(z)$  не зависит от ядерно-физических свойств среды, т.е. от  $h$ .

Полученное в работах [11, 13] стационарное решение для инертной среды ( $h = 1$ ) является частным случаем (49). Поэтому искомая функция  $n(z)$  получается простой заменой  $y = \alpha x$  на  $z = h\alpha x$  в выражении (43) для  $n_M(y)$ . Функция  $n_M(z)$  представляет собой зависимость нейтронной плотности от координаты  $z$  в среде с произвольным значением параметра  $h$ .

В третьем разделе было показано, что справедливы стационарные решения задачи с  $h = 1$  без источника и задачи с  $h < 1$  с источником (постоянный нейтронный поток в бесконечно удаленной точке). В случае отсутствия источника при  $h < 1$  существует нестационарное решение (49). Для надкритической системы ( $h > 1$ ) единственным физическим решением задачи Милна является

$$n(t, z) = C \exp[(h-1)\alpha V t] n_M(z), \quad (50)$$

асимптотическая часть которого линейно возрастает с ростом  $z$ :  $n_{as}(z) \sim z + z_0$ , где  $z_0 = 0,7104$ .

Экстраполированной длиной  $x_0$  называется расстояние от поверхности среды, на котором асимптотический поток нейтронов обращается в нуль.

Фейнман в своей очень интересной теоретической работе 1946 г. [16] затронул вопрос о зависимости экстраполированной длины  $x_0$  от свойств среды. Опираясь на известные в то время решения задачи Милна, он пришёл к следующему результату

$$x_0 = \frac{0,7104g(h)}{h\alpha}.$$

Входящая в эту формулу функция  $g(h)$  обращается в единицу при  $h = 1$ . Фейнман, располагая известным в то время решением соответствующей стационарной задачи Милна, считал, что при  $h > 1$  зависимость  $g(h)$  существует и поэтому она была затабулирована с помощью численных расчётов.

Сейчас, зная физическое решение (50), можно утверждать, что  $g(h \geq 1) = 1$ . Качественные зависимости  $n(x)$  и  $n_{as}(x)$  для веществ с  $h \geq 1$  приведены на рис. 2.

Следует отметить, что с помощью приведённых выше решений стационарных и нестационарных вариантов задачи Милна, а также представленных в третьем разделе результатов теории подобия нестационарных однородных систем была осуществлена верификация

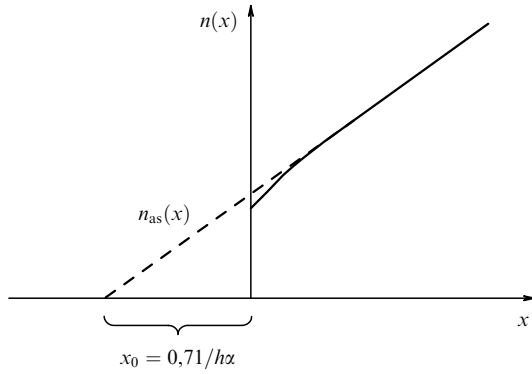


Рис. 2. Поведение функций  $n(x)$  и  $n_{as}(x)$  вблизи границы.

одной из математических методик численного решения уравнения переноса (см. [17, 18]).

Как на наиболее интересной среди двухобластных нестационарных задач Милна остановимся на задаче, в которой хотя бы одна полубесконечная среда размножает нейтроны.

Постановка этого варианта задачи Милна представлена в работе [19]. В ней же показано, что асимптотическая часть решения в среде с наибольшей активностью  $h > 1$  представляет собой линейную по  $z$  функцию, возрастающую по мере удаления от границы. Полное решение данной задачи было получено П.С. Бондаревым (в настоящее время работа готовится к печати). Приведём некоторые промежуточные выкладки и итоговый результат этой работы.

Решается система из двух интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial \psi_1(t, x, \mu)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi_1(t, x, \mu)}{\partial x} + \alpha_1 \psi_1(t, x, \mu) &= \\ &= \frac{\beta_1}{2} n_1(t, x), \quad x < 0, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{\partial \psi_2(t, x, \mu)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi_2(t, x, \mu)}{\partial x} + \alpha_2 \psi_2(t, x, \mu) &= \\ &= \frac{\beta_2}{2} n_2(t, x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Если хотя бы одна из двух рассматриваемых полубесконечных сред размножает нейтроны, то эволюция функции распределения во времени подчиняется экспоненциальному закону

$$\psi(t, x, \mu) = \exp(\lambda t) \psi(x, \mu). \tag{52}$$

Параметр  $\lambda$  определяется тем веществом, для которого разность параметров Пайерлса  $\beta - \alpha$  имеет наибольшее значение. Для определённости предположим, что  $\beta_1 - \alpha_1$  больше, чем  $\beta_2 - \alpha_2$ .

Подставляем зависимость функции распределения в виде (52) в систему (51) с заменой в первом уравнении

$$x = \frac{z_1}{\alpha_1 + (\lambda/V)} = \frac{z_1}{\beta_1}, \tag{53}$$

а во втором —

$$x = \frac{z_2}{\alpha_2 + (\lambda/V)} = \frac{z_2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1}. \tag{54}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi_1(z_1, \mu)}{\partial z_1} + \psi_1(z_1, \mu) &= \frac{H_1}{2} n_1(z_1), \\ \mu \frac{\partial \psi_2(z_2, \mu)}{\partial z_2} + \psi_2(z_2, \mu) &= \frac{H_2}{2} n_2(z_2), \end{aligned} \tag{55}$$

где

$$\begin{aligned} H_1 &= 1, \\ H_2 &= \frac{\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1}. \end{aligned} \tag{56}$$

В уравнениях системы (55)  $z_1$  и  $z_2$  — новые безразмерные переменные, которые в дальнейшем будем обозначать просто  $z$ . При любых параметрах  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  значение  $H_2$  всегда меньше единицы при условии, что хотя бы одна из двух сред активна ( $\lambda > 0$ ).

Таким образом, нестационарная задача двух сред свелась к стационарной задаче с параметрами  $H_1 = 1, H_2 < 1$ , которую можно решить, например, методом Винера и Хопфа.

Явное решение рассматриваемой задачи Милна в  $z$ -пространстве имеет следующий вид:

$$n_1(z) = -z + z_0 - \varepsilon_1(z), \quad z < 0, \tag{57}$$

$$n_2(z) = A \exp(-K_2 z) + \varepsilon_2(z), \quad z > 0, \tag{58}$$

где

$$\varepsilon_1(z) = \frac{\sqrt{1-H_2}}{2\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\exp(z/\mu)}{\xi(\mu)} \frac{d\mu}{[(1-\mu \operatorname{artanh} \mu)^2 + \pi^2 \mu^2/4]},$$

$$\varepsilon_2(z) = \frac{\sqrt{1-H_2}}{2\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\xi(\mu) \exp(-z/\mu) d\mu}{[(1-h_2 \mu \operatorname{artanh} \mu)^2 + h_2^2 \pi^2 \mu^2/4]},$$

$$A = \sqrt{\frac{1-H_2}{3}} \frac{2(1-K_2^2)}{H_2(1+K_2^2)(H_2-1+K_2^2)} \xi(K_2),$$

$$\begin{aligned} \xi(\mu) &= (1+K_2\mu) \exp \left[ \frac{\mu}{\pi} \int_0^{\pi/2} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\ln(1/(1+K_2^2 \cot^2 x)(1-H_2 x \cot x)/(1-x \cot x))}{\mu^2 \sin^2 x + \cos^2 x} dx \right], \end{aligned}$$

$$z_0 = \frac{1}{K_2} + z_{01} - z_{02},$$

$$z_{01} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{3}{\sin^2 x} - \frac{1}{x \cot x} \right] dx \approx 0,7104,$$

$$z_{02} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{3+K_2^2 \cot^2 x}{\sin^2 x + K_2^2 \cos^2 x} - \frac{1+(1-H_2) \cot^2 x}{1-H_2 x \cot x} \right] dx,$$

$K_2 = K_2(H_2)$  (см. (44)). С помощью замен, обратных сделанным ранее (53) и (54), легко получить функцию  $n(x)$ .

Заметим, что решения, полученные в  $z$ -пространстве для какого-то фиксированного параметра  $H_2$ , подходят для бесконечного множества систем, для которых

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1} = \frac{h_2}{1 + (h_1 - 1) \alpha_1 / \alpha_2} = H_2 < 1.$$

На рисунке 3 приведена зависимость нейтронной плотности  $n$  (57), (58) от безразмерной координаты  $z$  для некоторых значений параметра  $H_2$ . При  $H_2 \rightarrow 1$  (случай однородной бесконечной среды,  $h_1 \rightarrow h_2, \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ ) решение выходит на константу.

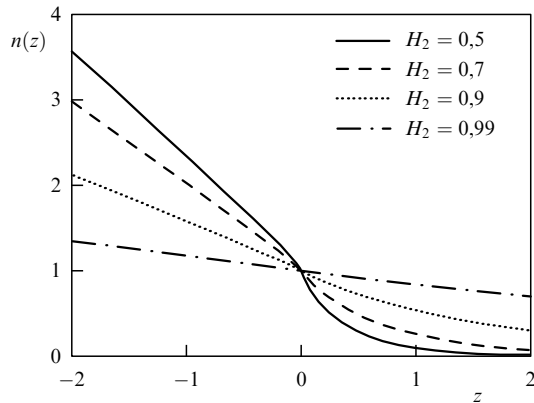


Рис. 3. График нейтронной плотности  $n(z)$  для некоторых значений  $H_2$ .

## 6. Заключение

Свойство инвариантности кинетического уравнения относительно преобразований подобия дает возможность выявить общие закономерности нейтронно-кинетических процессов, протекающих в различных средах и системах. Благодаря использованию этой возможности удалось подтвердить некоторые известные результаты и получить новые. Для краткости остановимся только на тех, которые справедливы только в односкоростном приближении.

1. Разработана теория подобия нестационарных однородных систем с произвольной геометрической формой. Показано, что нестационарную задачу для систем, состоящих из различных веществ, можно свести к задаче с одним веществом. Это позволяет осуществлять верификацию математических методик численного решения нестационарного кинетического уравнения. Кроме того, были получены формулы подобия, выражающие точные связи между функциями распределения нейтронов в подобных по геометрии нестационарных системах.

2. В случае произвольных по геометрии и составу однородных систем определено общее решение задачи на собственные значения, которое наглядно показывает, каким образом собственные значения зависят от свойств среды.

3. Получены формулы подобия для случая систем, в которых макроскопические сечения взаимодействия нейтронов с ядрами зависят от координат.

4. Доказана справедливая для однородных систем предельная теорема подобия, из которой следует, что в случае экспоненциальной временной зависимости  $\psi(t, \mathbf{z}, \mathbf{\Omega}) = \exp(\lambda t) \psi(\mathbf{z}, \mathbf{\Omega})$  функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов  $\mathbf{z} = h\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{V}/V$  при стремлении оптической толщины  $p = \alpha R$  к

бесконечности перестает зависеть от ядерно-физических свойств веществ. Эта теорема имеет непосредственное отношение к проблеме Милна в теории переноса нейтронов.

5. Показано, что кроме известных решений стационарной однообластной задачи Милна существуют также решения ее нестационарных вариантов. Более того, вместо имевшегося ранее формального математического решения стационарного варианта задачи Милна, которое в случае среды, размножающей нейтроны, противоречит физическому смыслу, получено точное нестационарное решение. На основе всей совокупности точных аналитических решений была выполнена верификация нескольких математических методик.

6. Получено полное физическое решение нестационарного варианта двухобластной задачи Милна, в которой хотя бы одна из полубесконечных сред размножает нейтроны.

## Список литературы

- Hahn O, Strassmann F *Naturwissenschaften* **27** 11 (1939)
- Meitner L, Frisch O R *Nature* **143** 239 (1939)
- Serber R *The Los Alamos Primer: The First Lectures on How to Build Atomic Bomb* (Berkeley, Calif.: Univ. of California Press, 1992)
- Soodak H (Ed.) *Reactor Handbook: U.S. Atomic Energy Commission* (New York: McGraw Hill, 1955) [Судэк Г (Ред.) *Материалы комиссии по использованию атомной энергии США: ядерные реакторы (статистика реактора; теория и общие результаты)* (М.: ИЛ, 1956)]
- Бабичев Н Б, Лутиков И В, Севастьянов А А *Вопр. атомной науки и техн. Сер. Теоретическая и прикладная физика* (2) 18 (2008)
- Davison B *Neutron Transport Theory* (Oxford: Clarendon Press, 1957) [Дэвисон Б *Теория переноса нейтронов* (М.: Атомиздат, 1960)]
- Бабичев Н Б и др. *Вопр. атомной науки и техн. Сер. Теоретическая и прикладная физика* (3) 68 (2009)
- Бабичев Н Б, Лутиков И В, Незнамов В П *Вопр. атомной науки и техн. Сер. Теоретическая и прикладная физика* (1) 56 (2008)
- Бабичев Н Б, Лутиков И В, Незнамов В П *Вопр. атомной науки и техн. Сер. Теоретическая и прикладная физика* (1) 21 (2008)
- Case K M, Zweifel P F *Linear Transport Theory* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1967) [Кейз К, Цвайфель П *Линейная теория переноса* (М.: Мир, 1972)]
- Placzek G, Seidel W *Phys. Rev.* **72** 550 (1947)
- Placzek G *Phys. Rev.* **72** 556 (1947)
- Mark C *Phys. Rev.* **72** 558 (1947)
- LeCaine J *Can. J. Res.* **28** 242 (1950)
- Романов Ю А, в сб. *Исследования критических параметров реакторных систем* (Науч. ред. П А Гаврилов) (М.: Госатомиздат, 1960) с. 3
- Feynman R P "A theorem and its application to finite tampers", Report LA-608 Ser. B (Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory, 1946)
- Бабичев Н Б и др. *Вопр. атомной науки и техн. Сер. Теоретическая и прикладная физика* (2) 1 (2009)
- Бабичев Н Б, Лутиков И В, Севастьянов А А *Вопр. атомной науки и техн. Сер. Теоретическая и прикладная физика* (2) 35 (2009)
- Бабичев Н Б, Бондарев П С *Вопр. атомной науки и техн. Сер. Теоретическая и прикладная физика* (1) 17 (2009)

## Similarity theory in neutron kinetics and its implications for RFNC–VNIIEF applied research

N.B. Babichev, P.S. Bondarev, V.P. Neznamov

Russian Federal Nuclear Center — All-Russian Institute of Experimental Physics,  
prosp. Mira 37, 607188 Sarov, Nizhny Novgorod region, Russian Federation  
Tel. (7-83130) 4-15 40, (7-83130) 2-07 42. Fax (7-83130) 4-51 40. E-mail: neznamov@vniief.ru

Exact similarity correlations resulting from the neutron kinetic equation are presented. A number of eigenvalue problem solutions are obtained. Analytical solutions for the stationary and nonstationary formulations of the Milne problem are given.

PACS numbers: 01.65.+g, 14.20.Dh

Bibliography — 19 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (9) 953–963 (2011)

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201109b.0953

Received 22 December 2010, revised 25 February 2011

Physics – Uspekhi **54** (9) (2011)