

PACS numbers: 05.40.-a, 05.45.Df, 89.65.Gh
 DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107k.0779

Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов*

М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко

1. Введение

Термин **эконофизика** был введен Юджином Стенли в 1995 г. для общего названия исследовательских работ, в которых методы статистической физики использовались для анализа поведения финансовых рынков. Появление подобных работ было связано, в первую очередь, с тем, что благодаря революции в компьютерных технологиях, к этому времени стали общедоступными огромные массивы финансовых данных, которые аккуратно накапливались начиная с середины 1980-х годов. В дальнейшем этот термин стал употребляться в более широком контексте, обозначая работы в области экономики и других социальных наук, написанные физиками. Начиная с 2002 г. такие работы стали регулярно публиковаться во всех главных общесоциальных журналах, таких как *Reviews of Modern Physics*, *Physical Review E*, *Physical Review Letters* и др. В настоящее время курс эконофизики читается на Западе в самых престижных университетах, а соответствующая секция стала неотъемлемой частью основных ежегодных международных и национальных конференций по социальным наукам (например, ESHIA (Economic Science with Heterogeneous Interacting Agents), AKSOE (Arbeitskreis Physik Sozio-Ökonomischer Systeme) и др.). В июне 2009 г. в Москве прошёл Первый всероссийский конгресс по эконофизике.

Первой эконофизической работой, получившей известность, далеко выходящую за рамки отдельной дисциплины, стала публикация в журнале *Nature* [1]. По существу, эта работа развивала достаточно старую идею Мандельброта, связанную с *полётом Леви* [2], в направлении её согласования с новыми эмпирическими данными.

Настоящая статья посвящена развитию в том же направлении другой основополагающей идеи Мандельброта, которая также впервые была высказана в статье [2] при исследовании финансовых временных рядов. В дальнейшем эта идея успешно применялась в самых различных областях физики [3].

Начиная ещё с 1950-х годов среди специалистов хорошо был известен тезис о том, что "движения цен большинства финансовых инструментов на разных масштабах времени и цены внешне похожи. По внешнему виду графика наблюдатель не может сказать, относятся ли данные к недельным, дневным или часовым изменениям" [3]. Указанное самоподобие на современном языке означает, что финансовые временные ряды являются *фракталами* [4]. Основной характеристикой таких структур, как известно, является фрактальная размерность D . В случае хаотических временных рядов этот показатель определяет индекс Хёрста H ($D = 2 - H$), который является показателем персистентности (способности

сохранять определённую тенденцию) временного ряда. Однако для надёжного вычисления D (так же, как и H) требуется слишком большой представительный масштаб, что исключает возможность использования D в качестве показателя, определяющего локальную динамику временного ряда.

В предлагаемой статье вводятся новые фрактальные показатели: *размерность минимального покрытия* и связанный с ней *индекс фрактальности*. Стого доказано, что в главном порядке по δ (здесь δ — минимальный масштаб разбиения временного ряда) при $\delta \rightarrow 0$ размерность минимального покрытия совпадает с D . На примере финансовых временных рядов показано, что минимальный масштаб, необходимый для определения введённых показателей с приемлемой точностью, содержит на два порядка меньше данных, чем соответствующий масштаб для определения показателя Хёрста H . Это даёт возможность рассматривать индекс фрактальности в качестве локального показателя стабильности временного ряда. На основе индекса фрактальности представлено эмпирическое обоснование концепции *равновесия* на финансовом рынке. Выявлен эффект увеличения крупномасштабных колебаний при подавлении мелкомасштабных, на основе которого построен индикатор сильных колебаний на глобальном финансовом рынке.

2. Фрактальные структуры

1. В конце XIX в. в математике впервые были обнаружены объекты (такие, как множество Кантора, функция Вейерштрасса, кривая Пеано и др.), для которых методы *классического* анализа оказались абсолютно непригодными. Все они строились по очень простым правилам с помощью итерационной процедуры, и все обладали масштабным самоподобием (состояли из частей, подобных целому). К началу XX в. таких объектов накопилось уже достаточно много, и для их анализа в 1919 г. Хаусдорф предложил своё определение размерности компактного множества в произвольном метрическом пространстве [5]. Хаусдорф заметил, что если указанные множества покрывать шарами радиусом δ , то минимальное число таких шаров $N(\delta)$ с уменьшением δ будет возрастать по степенному закону

$$N(\delta) \sim \left(\frac{1}{\delta} \right)^D. \quad (1)$$

Причём степенной показатель D обычно вычислялся точно. Этот показатель Хаусдорф и назвал размерностью¹. Если теперь прологарифмировать обе части этого выражения и переписать в виде равенства для D , то мы получим точное определение хаусдорфовой размерности:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)} \right]. \quad (2)$$

¹ Данную величину иногда называют предельной ёмкостью (см., например, [6]), понимая при этом под хаусдорфовой размерностью d_H критическое значение аргумента функции

$$m(p) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\{A_i^\varepsilon\}} \sum (\text{diam } A_i^\varepsilon)^p,$$

обладающее тем свойством, что при $p < d_H$ $m(p) = \infty$, а при $p > d_H$ $m(p) = 0$. Здесь A_i^ε — покрытие исходного множества семейством множеств A_i^ε с диаметром, меньшим ε . Такая размерность имеет более позднее происхождение и распространяется на неограниченное множество. Как правило $d_H = D$, но есть контрпримеры. В общем случае можно лишь утверждать, что $d_H \leq D$.

* Посвящается памяти Бенуа Мандельброта (20.11.1924 – 14.10.2010).

М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко. Управляющая компания "ИНТРАСТ", Московский инженерно-физический институт, Москва, РФ. E-mail: Dubovikov@intract.ru

Для привычных в классическом анализе множеств (например, гладких кривых или поверхностей) показатель D совпадает с топологической размерностью D_T , равной минимальному числу координат, необходимых для описания таких множеств (например, для описания линии достаточно одной координаты, для описания поверхности — двух, для описания тела — трёх координат²). Для указанных выше неклассических множеств оказалось, что размерность Хаусдорфа, являющаяся, как правило, дробным числом, всегда больше топологической размерности D_T . Последнее свойство позднее использовал Мандельброт для одного из возможных определений фрактала, согласно которому "фракталом называется множество, для которого $D > D_T$ " [3].

Следует заметить, что если исходное множество погружено в евклидово пространство, то вместо покрытий этого множества шарами можно использовать другие его аппроксимации простыми фигурами (например, клетками) размером δ . При этом наряду с исходной сферической размерностью D появляются новые фрактальные размерности (клеточная, внутренняя и т.д.), которые как предельные значения при $\delta \rightarrow 0$ обычно совпадают. Однако скорости сходимости к этому пределу для таких размерностей могут заметно различаться.

Рассмотрим, например, ковёр Серпинского, который строится так. Берётся единичный квадрат, который на первом шаге делится на девять равных квадратов, из которых отбрасывается средний (рис. 1а). На следующем шаге эта процедура повторяется со всеми оставшимися квадратами и т.д. Множество, которое получается в пределе такой итерационной процедуры, называется ковром Серпинского (можно показать, что для этого объекта $D_T = 1$). Заметим, что на n -м итерационном шаге при построении модельных фракталов обычно возникает множество, состоящее из $N(\delta)$ простейших симплексов с линейным размером δ . Такое множество Мандельброт назвал предфракталом n -го поколения. Для ковра Серпинского указанное множество состоит из $N(\delta) = 8^n$ клеток со стороной $\delta = (1/3)^n$. Если теперь в определении (2) использовать предфракталы вместо покрытий шарами, то размерность D можно вычислить непосредственно. Действительно, переходя в нашем случае к пределу при $n \rightarrow \infty$, из формулы (2) получаем

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \ln 8}{n \ln 3} \right) = \frac{\ln 8}{\ln 3} (\approx 1.89).$$

Результат не изменится при использовании шаров вместо клеток. Однако характеристики алгоритмов прямого вычисления этих двух размерностей весьма различаются. Для того чтобы показать это, построим для каждой из размерностей график функции $N(\delta)$ при $\delta = (1/3)^n$ в двойном логарифмическом масштабе (рис. 1б). В таком масштабе все степенные функции являются линейными и показатель D определяется как тангенс угла наклона соответствующей графику линии регрессии. Для клеточ-

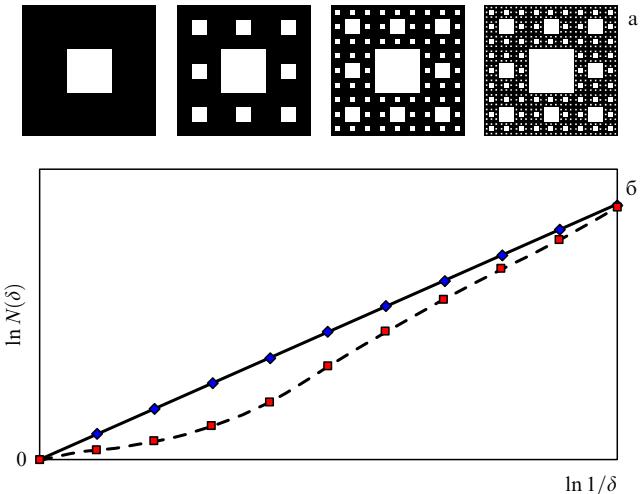


Рис. 1. Предфракталы четырёх поколений ковра Серпинского (а) и функция $N(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе (б) для клеточной (сплошная кривая) и хаусдорфовой (штриховая кривая) размерностей.

ных покрытий (предфракталов) все точки графика функции $N(\delta)$ будут находиться на одной прямой. Это означает, что функция $N(\delta)$ имеет *быстрый выход на степенной асимптотический режим* (1), что позволяет нам получить значение D уже на первом шаге итерации. Если для вычисления D вместо клеток использовать шары, то соответствующий график приближается к степенному закону (1) лишь асимптотически при $\delta \rightarrow 0$. Более глубокий анализ показывает, что указанное выше свойство функции $N(\delta)$ для предфракталов ковра Серпинского обусловлено тем, что клеточное покрытие является в определённом смысле минимальным покрытием на каждом шаге итерации. Таким образом, именно минимальность покрытий является причиной быстрого выхода на степенной асимптотический режим соответствующей функции, определяемой покрытиями, которая используется для вычисления размерности D . Как будет показано в разделе 3, этот принцип допускает прямое обобщение для случая хаотических временных рядов.

2. Долгое время объекты с нетривиальной хаусдорфовой размерностью рассматривались исключительно как плод изощрённого математического интеллекта. Теперь, во многом благодаря усилиям Мандельброта, мы знаем, что фракталы окружают нас повсюду. Некоторые из фракталов непрерывно изменяются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно береговым линиям, деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретённую в процессе эволюции. При этом реальный диапазон масштабов, в котором наблюдается фрактальная структура, простирается от расстояний между молекулами в полимерах до расстояний между скоплениями галактик во Вселенной.

Следует отметить основные особенности естественных фракталов, отличающие их от модельных. Во-первых, естественные фракталы не бывают строго симметричными. Свойство самоподобия для них выполняется лишь в среднем. Во-вторых, при вычислении размерности естественных фракталов всегда исключаются масштабы, меньшие некоторого минимального масштаба структуры d_0 . Это означает, что степенной закон (1) проявляет себя как "промежуточная асимптотика" (при $\delta \rightarrow 0$ рассматривается масштаб, который много меньше

² Этот подход допускает обобщение (например, для произвольного компакта) по крайней мере двумя способами [7]. Первый основан на том, что любые два замкнутых непересекающихся подмножества исходного множества, имеющего размерность $n+1$, можно разделить перегородкой размерностью n . Здесь размерность вводится по индукции. Второй способ основан на том, что минимальная кратность покрытия множества размерностью n замкнутыми множествами со сколь угодно малым диаметром равна $n+1$. Под кратностью здесь понимается максимальное число элементов покрытия, имеющих непустое пересечение.

некоторого характерного масштаба, но больше минимального масштаба δ_0). В-третьих, для естественных фракталов отсутствует система предфракталов. Поэтому система аппроксимаций симплексами, необходимая для построения функции $N(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$, является в общем случае достаточно произвольной. Это приводит к тому, что вычисление размерности D как тангенса угла наклона линии регрессии $N(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе требует большого количества данных, поскольку функция $N(\delta)$ обычно приближается к степенному закону (1) очень медленно.

В разделе 3 мы покажем, что для вычисления размерности фрактальных временных рядов, тем не менее, можно построить последовательность минимальных покрытий, сходную с последовательностью предфракталов ковра Серпинского.

3. Размерность минимального покрытия.

Индекс фрактальности

1. Важнейшим классом естественных фракталов являются *хаотические временные ряды*. Такие ряды, имеющие крайне нерегулярный характер поведения, возникают при наблюдении различных природных, социальных и технологических процессов. Среди них есть как традиционные (геофизические, экономические, медицинские), так и те, которые стали известными относительно недавно (ежедневные вариации уровня преступности или дорожно-транспортных происшествий в регионе, колебания количества просмотров определённых сайтов в Интернете и т.д.). Указанные ряды обычно порождаются сложными нелинейными системами самой различной природы. Однако все они имеют неизменный характер поведения на определённом интервале масштабов. Простейший способ исследования фрактальной структуры таких рядов основан на вычислении клеточной размерности D_c . Для нахождения D_c плоскость, на которой определён график временного ряда, разбивается на клетки размером δ . Затем при различных δ строится функция $N(\delta)$, равная числу клеток размером δ , в которых содержится хотя бы одна точка графика. Размерность D_c определяется по углу наклона линии регрессии $N(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе. Легко показать, что $D_c = D$. Особая важность фрактальной размерности для хаотических рядов обусловлена тем, что этот показатель оказывается тесно связанным с показателем Хёрста H , который обычно вычисляется методом нормированного размаха и, как известно, является показателем *персистентности* (способности к сохранению тенденций) временного ряда. При этом если $H > 0,5$, то ряд является персистентным (движение ряда в определённую сторону на некотором интервале, скорее всего, вызовет движение в ту же сторону на следующем интервале). Если $H < 0,5$, то ряд является *антисистемным* (движение ряда в определённую сторону на некотором интервале, скорее всего, вызовет движение в противоположную сторону на следующем интервале). Наконец, если $H \approx 0,5$, то ряд имеет *нулевую персистентность* (движение ряда на любом интервале не зависит от его движения на предшествующем интервале).

Вследствие важности этого показателя в дальнейшем было разработано более десяти различных алгоритмов для его вычисления [8–11]. Видимо, самый простой метод расчёта показателя H основан на использовании соотношения

$$\langle |f(t + \delta) - f(t)| \rangle \sim \delta^H \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (3)$$

где угловые скобки означают усреднение по временному интервалу, $f(t)$ — значение временного ряда в момент t . Показатель H определяется по соответствующей линии регрессии. Для гауссовых случайных процессов легко показать, что $H = 2 - D$. Однако мало кто сомневается, что это соотношение имеет более широкую область применимости, поскольку для всех наблюдаемых хаотических временных рядов в тех случаях, когда оба показателя определяются вполне точно, это соотношение подтверждается. При этом все трудности, связанные с вычислением размерности D , переносятся на алгоритмы для вычисления показателя H . В частности, для надёжного определения H требуется представительный масштаб, содержащий несколько тысяч данных. При таком масштабе временной ряд, как правило, меняет характер своего поведения много раз, что значительно обесценивает анализ временных рядов с помощью показателя Хёрста H . Как и в случае с размерностью D , указанная трудность связана с тем, что приближение соответствующей функции к степенному закону (3) при $\delta \rightarrow 0$ происходит крайне медленно. Для преодоления этой трудности, по аналогии с тем, как это делается в случае ковра Серпинского, можно определить последовательность аппроксимаций ряда, состоящую при любом фиксированном δ из минимальных покрытий. Действительно, если умножить обе части (1) на δ^2 , то определение размерности можно переписать в виде степенного закона для площади аппроксимаций $S(\delta)$:

$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (4)$$

Заметим, что такая форма, в отличие от (1), не требует, чтобы симплексы, из которых состоит каждая отдельная аппроксимация, были одинаковыми. Достаточно того, чтобы они имели один и тот же геометрический фактор δ . Именно это обстоятельство и позволяет нам использовать аппроксимации, которые являются минимальными покрытиями.

2. Действительно, пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(t)$, имеющая не более конечного числа точек разрыва первого рода: именно такие функции естественно рассматривать в качестве модельных, например, для финансовых временных рядов. Введём равномерное разбиение отрезка $\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b]$, где $t_i - t_{i-1} = \delta = (b - a)/m$, ($i = 1, 2, \dots, m$). Покроем график этой функции прямоугольниками таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади в классе покрытий прямоугольниками с основанием δ (рис. 2). Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, которая является разностью между максимальным и минимальным значениями функции $f(t)$ на этом отрезке. Введём величину

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(\delta). \quad (5)$$

Тогда полную площадь минимального покрытия $S_\mu(\delta)$ можно записать в виде $S_\mu(\delta) = V_f(\delta) \delta$. Поэтому из (4) следует, что

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (6)$$

где $\mu = D_\mu - 1$. Назовём размерность D_μ *размерностью минимального покрытия*. Чтобы соотнести D_μ с другими размерностями, в частности с клеточной размерностью D_c , построим клеточное разбиение плоскости графика функции $f(t)$, как показано на рис. 2. Пусть $N_i(\delta)$ — число клеток, покрывающих график $f(t)$ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$. Из

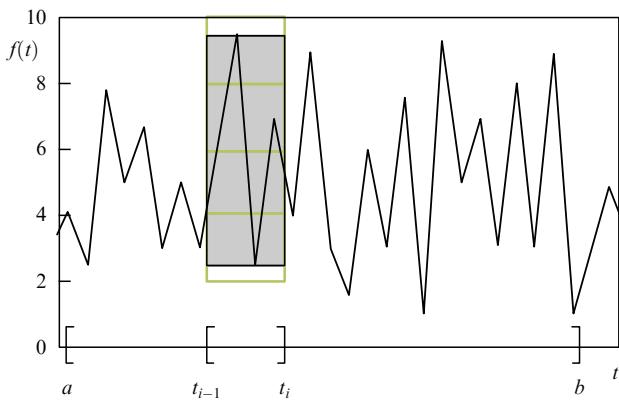


Рис. 2. Минимальное (тёмный прямоугольник) и клеточное (светлый прямоугольник) покрытия функции $f(t)$ на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ длиной δ .

рисунка видно, что

$$0 < N_i(\delta) \delta^2 - A_i(\delta) \delta < 2\delta^2. \quad (7)$$

Разделим это соотношение на δ и просуммируем по i с учётом (5). В результате получим

$$0 < N(\delta) \delta - V_f(\delta) < 2(b-a), \quad (8)$$

где $N(\delta) = \sum N_i(\delta)$ — полное число клеток размером δ , покрывающих график функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, с учётом (6) получаем

$$N(\delta) \delta \sim V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} = \delta^{1-D_\mu}. \quad (9)$$

С другой стороны, согласно (4)

$$N(\delta) \delta = S_c(\delta) \delta^{-1} \sim \delta^{1-D_c}. \quad (10)$$

Следовательно, $D_c = D_\mu$. Заметим, однако, что, несмотря на это равенство, для реальных фрактальных функций минимальные и клеточные покрытия могут давать различные приближения величины $S(\delta)$ к асимптотическому режиму (4), причём это различие может быть весьма значительным. Далее, поскольку $D_c = D_\mu = D$, $\mu = D_\mu - 1$ и для одномерной функции $D_T = 1$, то $\mu = D - D_T$. Поэтому в данном случае индекс μ естественно называть *индексом фрактальности*. Далее при анализе финансовых временных рядов мы будем рассматривать его как основной фрактальный показатель.

4. Финансовые временные ряды.

Задачи идентификации и прогноза

1. Наиболее популярными представителями фрактальных временных функций являются финансовые временные ряды (в первую очередь, ряды цен акций и курсов валют). Существует надёжное численное подтверждение фрактальной структуры таких рядов [12, 13]. Теоретически фрактальность обычно связывают с тем, что для устойчивости рынка на нём должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и приводит к масштабной инвариантности (отсутствию выделенного масштаба) ценовых рядов на соответствующем временному интервале [14, 15].

В качестве примера исследовалась база данных, которая включала в себя ценовые ряды акций тридцати

компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index, DJI) с 1970 г. по 2002 г. Каждый ряд содержал около восьми тысяч записей. Каждая запись соответствовала одному торговому дню, включая в себя четыре значения: информацию о минимальной и максимальной ценах, а также о ценах открытия и закрытия. В литературе финансовые ряды обычно изображают с использованием японских свечей. Фрагмент такого ряда для компании "Coca-Cola" представлен на рис. 3а. Для простоты анализа рассматривались только последние $2^{12} = 4096$ записей для каждой компании. При вычислении индекса μ использовалась последовательность t вложенных разбиений ω_m для $m = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, 12$). Каждое разбиение состояло из 2^n интервалов, содержащих 2^{12-n} торговых дней. Для каждого разбиения ω_m вычислялось значение $V_f(\delta)$ (6). Здесь $A_i(\delta)$ равна разности между максимальной и минимальной ценами на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ (в частности, если $\delta = \delta_0$, то $A_i(\delta)$ равна разности максимальной и минимальной цен за день). Типичный пример поведения $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе для компании "Microsoft" представлен на рис. 4. Видно, что данные с удивительной точностью ложатся на прямую линию, кроме двух последних точек, в которых линейный режим имеет излом. Для нахождения значения μ по этим данным следует исключить две последние точки и определить линию регрессии. При уровне надёжности $\alpha = 0,95$ в приведённом примере $\mu = 0,472 \pm 0,008$, $R^2 = 0,999$. Здесь R^2 — коэффициент детерминации для линии регрессии. Сравнение такого алгоритма вычисления D ($D = \mu + 1$) и соответственно H ($H = 2 - D = 1 - \mu$) со стандартными алгоритмами вычисления этих индексов показывает, что результаты с приемлемой точностью совпадают. Однако значения $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе заметно точнее ложатся на прямую линию (кроме двух последних точек), чем значения, соответствующие другим алгоритмам, что позволяет также определить характерный масштаб, на котором происходит излом.

Далее, следует отметить, что для каждой из 30 компаний график $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе почти так же хорошо ложится на прямую линию и на всех меньших представительных интервалах, вплоть до 32 дней, а иногда даже и до 16 дней. При этом на интервалах, меньших, чем 500 дней, излом линейной части графика, как правило, исчезает.

Типичный пример поведения функции $V_f(\delta)$ на участке финансового временного ряда длиной в 32 дня (рис. 3б) представлен на рис. 3б. При $\alpha = 0,95$ получаем $\mu = 0,571 \pm 0,071$, $R^2 = 0,992$. На рисунке 3в для сравнения представлен пример поведения функции $\langle |C(t+\delta) - C(t)| \rangle$ на том же участке (здесь используется $32 + 1 = 33$ цены закрытия $C(t)$ и усреднение происходит по непересекающимся интервалам длиной $\delta = 2^n$, где $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). В этом случае $H = 0,229 \pm 0,405$, $R_H^2 = 0,382$. Отсюда сразу становится ясно, что вычисление показателя H на таком интервале просто не имеет смысла.

Таким образом, быстрый выход величины $V_f(\delta)$ на степенной асимптотический режим позволяет вполне надёжно вычислять индекс фрактальности μ и на малых интервалах. Дальнейшие исследования показали, что степенной закон для функции $V_f(\delta)$ выполняется с удивительной точностью на интервале масштабов от нескольких минут до нескольких лет. Как оказывается, это позволяет существенно продвинуться в решении двух основных задач анализа временных рядов — задачи идентификации и задачи прогноза.

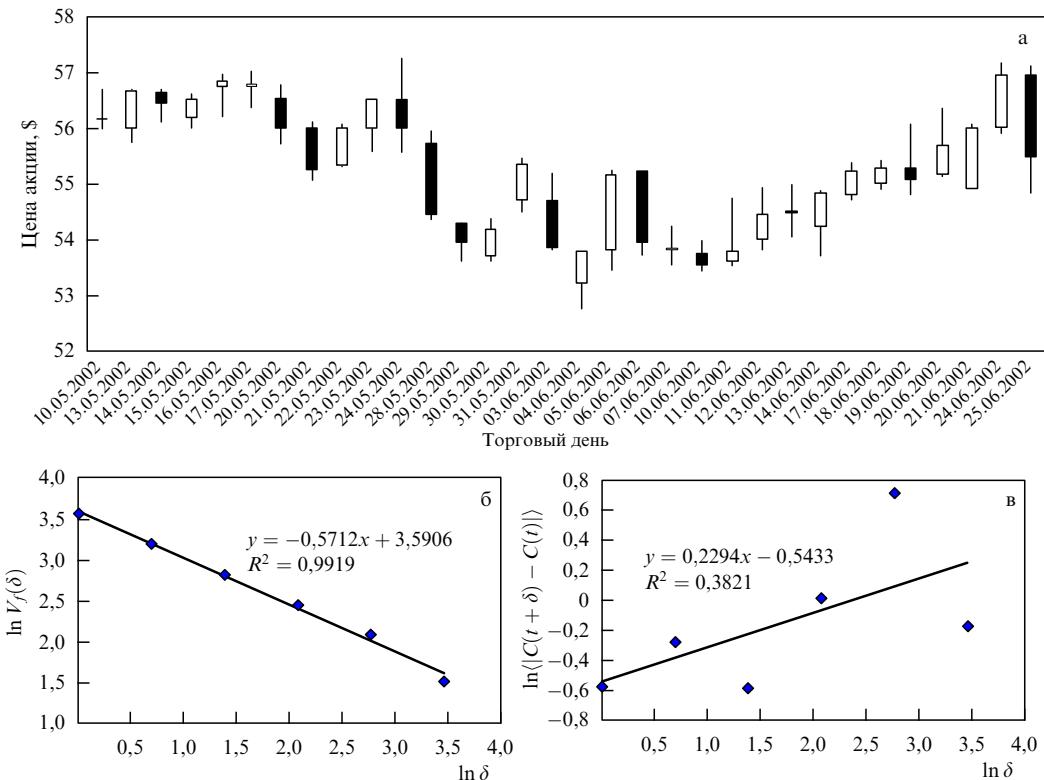


Рис. 3. (а) Типичный финансовый ряд на интервале 32 дня (использован график цен акций компании "Coca-Cola") в виде японских свечей. Каждый из прямоугольников (называемых телом свечи) с двумя штрихами сверху и снизу (называемыми тенями свечи) изображает колебания цен в течение дня. Верхняя точка верхней тени показывает максимум цены за день, нижняя точка нижней тени — минимум цены за день. Верхняя и нижняя границы тела свечи показывают цены открытия и закрытия торгов. При этом если тело свечи белого (чёрного) цвета, то цена закрытия выше (ниже) цены открытия. (б) Результат вычисления $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе для представленного ряда. Зависимость $y = ax + b$ построена методом наименьших квадратов; здесь $\mu = -a$. (в) Результат вычисления $(|C(t+\delta) - C(t)|)$ для этого же ряда и соответствующая зависимость $y = ax + b$, где $H = a$.

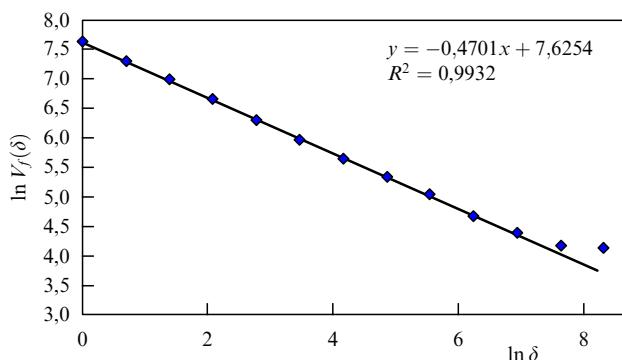


Рис. 4. Результат вычисления $V_f(\delta)$ и соответствующая зависимость $y = ax + b$ для временного ряда цен акций компании "Microsoft" на интервале 4096 дней.

2. Задача идентификации обычно заключается в определении состояния системы (макросостояния временного ряда) на основе наблюдаемых значений ряда на некотором локальном интервале. Для финансовых временных рядов специалисты выделяют три типа локальных состояний: тренд (направленное движение вверх или вниз), флэт (относительно стабильное состояние), случайное блуждание (промежуточное состояние между трендом и флетом). Для того чтобы соотнести значение μ с состояниями финансового временного ряда, введём функцию $\mu(t)$ как такое значение μ , которое ещё может быть вычислено с приемлемой точностью на минимальном, предшествующем t интервале τ_μ . В случае непрерывного аргумента t в качестве такого интервала можно

было бы взять произвольно малый интервал. Однако поскольку на практике временной ряд всегда имеет минимальный масштаб (в нашем случае он равен одному дню), то τ_μ имеет конечную длину (в нашем случае мы берём $\tau_\mu = 32$ дня). Такая функция $\mu(t)$ была построена для каждой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса.

На рисунке 5 представлен типичный фрагмент цено-вого ряда одной из таких компаний вместе с вычисленной для этого фрагмента функцией $\mu(t)$. Достаточно беглого взгляда на рис. 5, чтобы понять, что индекс μ имеет прямое отношение к состояниям временного ряда. Действительно, на интервале между 1-м и 39-м днём, где цены ведут себя относительно стабильно (флэт), $\mu(t) > 0,5$. Далее, одновременно с развитием тренда на графике цен, $\mu(t)$ резко падает до значений, меньших 0,5, и, наконец, после 56-го дня, когда цены находятся в промежуточном состоянии между трендом и флетом, $\mu(t)$ возвращается к значению $\mu \approx 0,5$. Таким образом, исходный ряд оказывается тем стабильнее, чем больше μ . При этом если $\mu > 0,5$, то наблюдается флэт, если $\mu < 0,5$, то наблюдается тренд. Наконец, если $\mu \approx 0,5$, то ряд находится в состоянии случайного блуждания, которое является промежуточным между трендом и флетом. Такая корреляция между значением μ и характером поведения исходного временного ряда наблюдалась для всех изученных рядов. Теоретическое обоснование указанной корреляции приведено, например, в [16]. Далее будет показано, как функция $\mu(t)$ может быть использована для обоснования классической теории финансов.

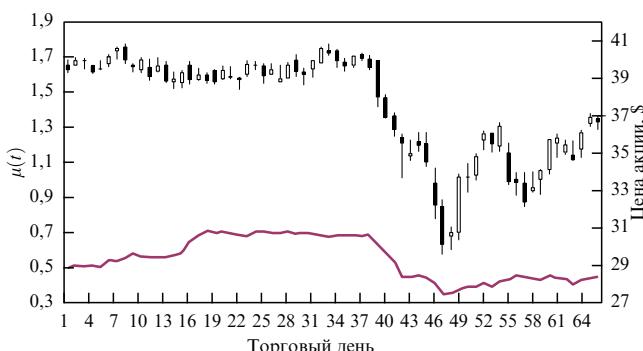


Рис. 5. Ежедневные цены акций компании "Exxon Mobil Corporation" (японские свечи, правая шкала) и график функции $\mu(t)$ (сплошная кривая, левая шкала).

3. Базовой моделью финансовых временных рядов является модель случайного блуждания³. В результате переосмысливания этой модели возникла концепция эффективного рынка (*Effective Market Hypothesis*, EMH), на котором цена в полной мере отражает всю доступную информацию. Для существования такого рынка достаточно предположить, что на нём действует большое число полностью информированных, рациональных агентов, имеющих однородные предпочтения, которые мгновенно корректируют цены, приводя их в состояние равновесия. Естественно, что основной моделью такого рынка является модель случайного блуждания. Следует отметить, что все основные результаты классической теории финансов (портфельная теория, модель CAPM (Capital Asset Pricing Model), модель Блэка – Шоулза и др.) были получены в рамках именно такого подхода. В настоящее время "концепция эффективного рынка продолжает играть доминирующую роль и в финансовой теории, и в финансовом бизнесе" [20].

Однако уже к началу 60-х годов прошлого века эмпирические исследования показали, что сильные изменения ряда доходностей происходят значительно чаще, чем следовало бы ожидать, исходя из нормального распределения (проблема "толстых хвостов"), причём такие изменения обычно следовали друг за другом (эффект кластеризации волатильности). Одним из первых, кто подверг указанную концепцию всесторонней критике, был Мандельброт [2]. Действительно, если вычислить значение показателя H (в нашем случае $H = 1 - \mu$) для какой-либо акции, то это значение (см. начало раздела), скорее всего, будет отлично от $H = 0,5$, которое соответствует модели случайного блуждания.

Напомним, что в основе этой модели лежат два постулата. Во-первых, приращения цены⁴ на любом интервале времени имеют нормальное (гауссово) распределение, которое следует из центральной предельной теоремы и получается как результат суммирования

достаточно большого числа независимых случайных слагаемых с конечной дисперсией. Во-вторых, эти приращения на непересекающихся интервалах являются статистически независимыми. Именно отказ от первого постулата при сохранении второго привёл Мандельброта к рассмотрению случайного процесса, который он назвал полётом Леви (*Levi flight*) [2]. Отказ от второго постулата при сохранении первого привёл его к введению понятия обобщённого броуновского движения (*Fractional Brownian Motion*) [21].

Поведение временного ряда, для которого $H \neq 0,5$, можно описать с помощью любого из этих процессов. При этом в качестве идеологической базы обычно используют концепцию фрактального рынка (*Fractal Market Hypothesis*, FMH), которую принято рассматривать в качестве альтернативы EMH. Эта концепция предполагает, что на рынке имеется широкий спектр агентов с разными инвестиционными горизонтами и, следовательно, с разными предпочтениями. Эти горизонты изменяются от одной минуты для *внутридневных* трейдеров до нескольких лет для банков и корпораций. Устойчивым положением равновесия на таком рынке является режим, при котором "средняя доходность не зависит от масштаба, если не считать умножения на соответствующий масштабный коэффициент" [2]. Поскольку указанный коэффициент имеет неопределённый степенной показатель, то речь фактически идёт о целом классе режимов, каждый из которых определяется своим значением показателя H . При этом значение $H = 0,5$ оказывается вполне равноправным с любым другим значением ($0 < H < 1$). Близкие соображения стали поводом для серьёзных сомнений (см., например, [20–24]) относительно существования действительного равновесия на фондовом рынке, а следовательно, и относительно обоснованности современной теории финансов.

Исследование функции $\mu(t)$ на основе исходной базы (см. начало раздела), а также российских (входящих в индекс ММВБ) и американских (входящих в DJP) компаний вместе с соответствующими индексами за последние десять лет позволяет с очевидностью показать выделенность значения $H = 0,5$.

На рисунке 6 представлены типичные распределения вероятности значений индекса μ для временного ряда одной из акций, входящей в DJP, на участках с различной длительностью (от 8 до 256 дней). Все распределения являются асимметричными. Это означает, что в среднем значение индекса фрактальности для этой акции на соответствующих интервалах отлично от значения $\mu = 0,5$. Однако все указанные распределения имеют главную моду именно при таком значении μ .

В первом приближении общая картина, наблюдаемая во всех рядах, оказывается следующей. Функция $\mu(t)$ совершает квазипериодические колебания около положения $\mu = 0,5$ между значениями $\mu < 0,5$ и $\mu > 0,5$. При этом временной ряд непрерывно изменяет свой режим, переходя из тренда через состояние случайного блуждания во флет и обратно. Время от времени для каждого ряда появляются и исчезают состояния с относительно стабильными значениями μ (см. рис. 5). Среди таких состояний режим $\mu = 0,5$ занимает явно привилегированное положение. Для каждого временного ряда он является самым длительным на всех интервалах, содержащих 8 и более точек.

Следует отметить, что агентно-ориентированная интерпретация указанных колебаний может сильно различаться на разных масштабах. Так, например, на малых масштабах внутри дня, когда более 50 % сделок

³ Первая модель случайного блуждания [17] была построена Луисом Башелье в 1900 г. (за пять лет до модели броуновского движения, предложенной Эйнштейном) и использована им для описания поведения цен акций на Парижской фондовой бирже. При этом многие относящиеся к этой модели результаты, которые позднее были получены другими авторами (уравнение Чепмена – Колмогорова, теория мартингала, уравнение Блэка – Шоулза), в работе Башелье уже присутствовали.

⁴ В различных модификациях модели Башелье [18, 19] вместо приращений цены обычно рассматривают логарифмы приращений. Для нас здесь указанное различие не является существенным.

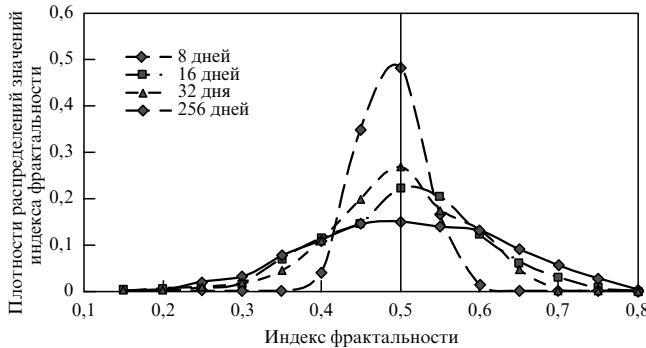


Рис. 6. Распределения вероятностей значений индекса μ для ряда дневных изменений цены акций компании "Ford" за период с 03.01.2000 г. по 30.11.2010 г. (всего 2745 записей торговых дней, содержащих информацию о ценах открытия и закрытия, а также о максимальной и минимальной ценах за каждый день). Функция $\mu(t)$ рассчитывалась по предшествующим интервалам, содержащим от 8 до 256 значений, затем строились эмпирические плотности распределения по значениям μ в каждом случае.

совершается (на рынках США) торговыми роботами, поведение агентов, видимо, является очень близким к рациональному. Тогда как на масштабах от нескольких дней до нескольких месяцев существенную роль играет социальная психология, которая всегда содержит иррациональный элемент. Между тем неизменный характер указанных колебаний воспроизводится на всех масштабах, начиная от самых малых. Последнее наводит на мысль о том, что в основе природы таких колебаний лежит, видимо, общий механизм запаздывания, сопутствующий самому способу принятия решений. При этом основным состоянием является, тем не менее, именно случайное блуждание, которое остаётся главным режимом притяжения на всех масштабах.

4. Задача прогноза в общем случае ставит своей целью определение каких-либо качественных или количественных параметров будущего поведения временного ряда на основе всего массива исторических данных. При этом особый интерес представляет задача определения ранних предвестников критического поведения ряда. Рассмотрим один из подходов к решению этой задачи. На основе (5) введём среднюю амплитуду $A(\delta)$ по формуле

$$A(\delta) \equiv \langle A_i(\delta) \rangle = m^{-1} V_f(\delta). \quad (11)$$

Умножая (5) на $m^{-1} \sim \delta$ и подставляя в (6), получим

$$A(\delta) \sim \delta^{H_\mu} \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (12)$$

где $H_\mu \equiv 1 - \mu$. Сопоставляя H_μ с рис. 5, мы получаем визуальное подтверждение того, что этот индекс является показателем персистентности ряда (см. пункт 3 этого раздела) и прямым обобщением показателя Хёргста H для случая малых интервалов. В пункте 3 этого раздела мы видели, что индекс μ , по существу, задаёт определённый способ функционального интегрирования по временным рядам, при котором оказывается, что ряды, соответствующие случайному блужданию, получают наибольший вес. Это даёт возможность строить различные, в том числе условные, распределения по μ . Как выясняется, особую роль здесь играет эффект увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных. Этот эффект является результатом того, что, во-первых, степенной закон для функции $A(\delta)$ (так же, как и для функции $V_f(\delta)$) выполняется на огромном интервале масштабов (от нескольких минут до нескольких лет). Во-вторых, степенная функция обла-

дает особым свойством: чем медленнее она уменьшается (по сравнению с функцией с другим степенным показателем) при $\delta \rightarrow 0$, тем быстрее она возрастает при $\delta \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что изменение режима системы, связанное с резким уменьшением μ (увеличением показателя H_μ), приводит в дальнейшем к подавлению мелкомасштабных колебаний и одновременно к увеличению крупномасштабных колебаний ряда. Это означает, что резкое уменьшение мелкомасштабных колебаний в настоящем при определённых условиях может стать предвестником сильных крупномасштабных колебаний в будущем. Как показало тестирование по всей указанной выше базе финансовых данных, этот эффект проявляется себя с вероятностью примерно 70–80 %. Причём в тех случаях, в которых удается свести до минимума влияние внешних факторов, этот процент оказывается ещё выше.

На рисунке 7 представлен индикатор (штриховая кривая), который был построен на основе этого эффекта в Управляющей компании "Интраст" в 2007 г. В качестве исходного ряда (сплошная линия) рассматривается агрегированный индекс, включающий в себя фондовые индексы как развитых, так и развивающихся стран (по одному от страны)⁵. Такой подход исключает фактор влияния фондовых рынков различных стран друг на друга, который связан с перетоком капитала на глобальном финансовом рынке. Из рисунка 7 видно, что индикатор показал резкое уменьшение мелкомасштабных флюктуаций начиная с 2001 г. — в два раза. Первый раз — в декабре 2004 г., затем через полгода последовал бурный рост всех индексов, который продолжался около двух лет. Второй раз — в апреле 2008 г., после чего также примерно через полгода в связи с кризисом произошло резкое падение всех индексов. Кроме того, из рисунка видно, что в настоящий момент (08.11.2010) активно идет формирование нового сигнала, который является предвестником сильных колебаний фондового рынка в среднесрочной перспективе⁶ (от полугода до одного года). И хотя индикатор ничего не говорит о том, в какую сторону произойдёт сильное движение, полученной информации может оказаться вполне достаточно, например, для построения успешной стратегии управления активами на фондовом рынке.

В завершение этого раздела скажем несколько слов относительно эффекта увеличения крупномасштабных колебаний при уменьшении мелкомасштабных. По существу, указанный эффект означает, что тенденции в сложных системах (природных, социальных, технологических), формирующиеся очень медленно и незаметно, но имеющие повышенную неуклонность, со временем часто становятся глобальными, определяя основной вектор развития таких систем. Заметим, что хорошо известный *эффект затишья* (подавление высокочастотной компоненты шума), который обычно предшествует природным катастрофам (например, землетрясениям), является частным проявлением указанного эффекта. Таким образом, многие глобальные тенденции в своей эволюции в действительности напоминают *горчичное зерно* из евангельской притчи, "которое, хотя меньше всех семян, но, когда вырастет, бывает больше всех злаков и становится деревом, так что прилетают птицы небесные и укрываются в ветвях его". (Евангелие от Матфея, 13: 32).

⁵ США, Германия, Франция, Япония, Россия, Бразилия, Китай, Корея.

⁶ Этот прогноз находится в явном противоречии с общепринятым прогнозом "медленного выхода из рецессии".

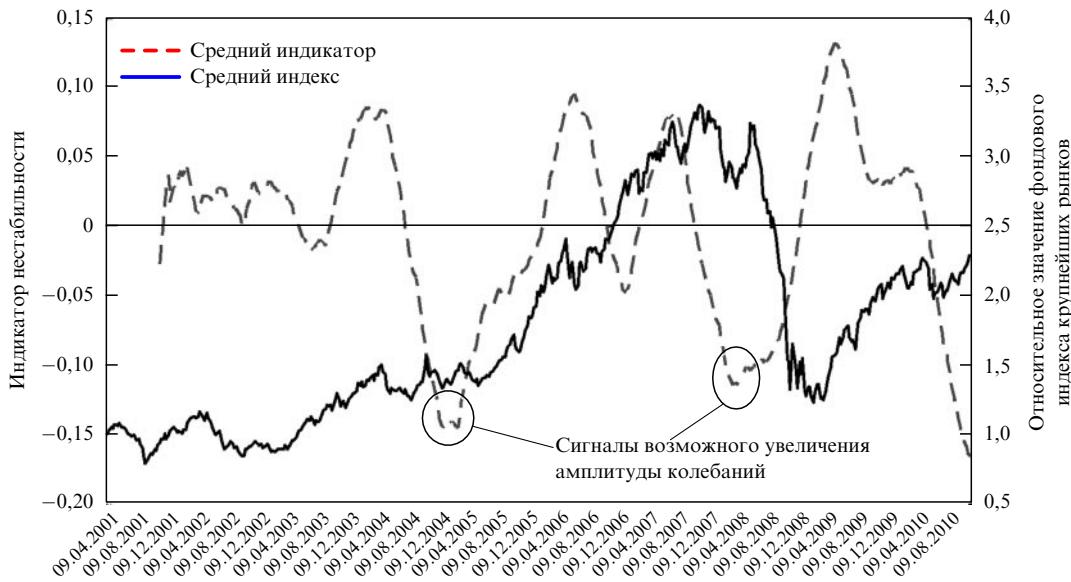


Рис. 7. Агрегированный индекс в относительных единицах (сплошная кривая, правая шкала) и соответствующий индикатор нестабильности, центрированный относительно среднего значения (штриховая кривая, левая шкала).

5. Заключение

Итак, для одномерной фрактальной функции $f(t)$ были предложены новые фрактальные показатели: размерность D_μ и связанный с ней индекс μ . Как предельное значение при $\delta \rightarrow 0$ размерность D_μ совпадает с обычной фрактальной размерностью D . Численные расчёты, выполненные для ценовых рядов акций, показали, что использование минимальных покрытий приводит к быстрому выходу на степенной асимптотический режим по δ функции $V_f(\delta)$. По этой причине представительный масштаб, необходимый для определения указанных показателей с приемлемой точностью, содержит на два порядка меньше данных, чем, например, масштаб для определения показателя Хёрста H . Это позволяет рассматривать индекс μ как локальную характеристику и ввести функцию $\mu(t)$, которая является индикатором локальной стабильности временного ряда: чем больше μ , тем стабильнее ряд. На большом эмпирическом материале показано, что индекс фрактальности, по существу, определяет некоторый естественный способ интегрирования по всем возможным ценовым траекториям (начиная от самых коротких). При этом оказывается, что наибольший вес имеют траектории, соответствующие случайному блужданию. Этот факт вполне можно рассматривать в качестве обоснования современной теории финансов. И наконец, на основе эффекта увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных был построен ранний предвестник сильных колебаний на фондовых рынках.

Бенуа Мандельброт, которого следует считать одним из главных предшественников эконофизики, имел славу "ниспровержателя основ", вызывая среди экономистов явно неоднозначное к себе отношение. С момента возникновения современной финансовой теории, основанной на концепции общего равновесия, он был одним из главных её критиков и до конца жизни пытался найти ей приемлемую альтернативу. Аналогичным образом, но уже в рамках всей экономической теории, эконофизика пытается предложить альтернативу концепции общего равновесия. Однако именно Мандельброт разработал систему понятий, которая при соответствующей модификации, как было показано, позволяет не только построить эффективный прогноз, но и предложить,

видимо, единственное на данный момент эмпирическое обоснование классической теории финансов.

В заключение авторы пользуются случаем выразить сердечную благодарность В.М. Полтеровичу за постоянную поддержку, полезные советы и ценные замечания.

Список литературы

1. Mantegna R N, Stanley H E *Nature* **376** 46 (1995)
2. Mandelbrot B J. *Business* **36** 394 (1963)
3. Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: W.H. Freeman, 1982)
4. Mandelbrot B *Les objets fractals* (Paris: Flammarion, 1975) [*Fractals* (San Francisco: W.H. Freeman, 1977)]
5. Hausdorff F *Math. Ann.* **79** 157 (1919)
6. Малинецкий Г Г, Потапов А Б, Подлазов А В *Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды* (М.: УРСС, 2006)
7. Александров П С, Пасынков Б А *Введение в теорию размерности* (М.: Наука, 1973)
8. Brown J et al, "Working Papers in Economics 08/13" (Christchurch, New Zealand: Univ. of Canterbury, Department of Economics and Finance, 2008)
9. Clegg R *Int. J. Simulation: Syst., Sci. Technol.* **7** (2) 3 (2006)
10. Mishura Y *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes* (New York: Springer, 2007)
11. Brodu N, nlin/0511041
12. Kantz H, Schreiber T *Nonlinear Time Series Analysis* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997)
13. Abarbanel H D I *Analysis of Observed Chaotic Data* (New York: Springer, 1996)
14. Peters E E *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics* (New York: J. Wiley, 1994) [Петэрс Э *Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике* (М.: Интернет-трейдинг, 2004)]
15. Peters E E *Chaos and Order in the Capital Markets* (New York: Wiley, 1996) [Петэрс Э *Хаос и порядок на рынках капитала* (М.: Мир, 2000)]
16. Dubovikov M M, Starchenko N S, Dubovikov M S *Physica A* **339** 591 (2004)
17. Bachelier L, in *The Random Character of Stock Market Prices* (Ed. P H Cootner) (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1964) p. 17
18. Kendall M G J. R. *Statistical Soc.* **96** 11 (1953)
19. Samuelson P A *Industrial Management Rev.* **6** 13 (1965)
20. Ширяев А Н *Основы стохастической финансовой математики* Т. 1 (М.: Фазис, 1998)
21. Mandelbrot B B, Van Ness J W *SIAM Rev.* **10** 422 (1968)
22. Ширяев А Н *Теория вероятностей и ее применения* **39** 5 (1994) [*Shiryayev A N Theor. Probab. Appl.* **39** (1) 1 (1994)]
23. Ширяев А Н *Обзорение приклад. и промыш. мат.* **1** 780 (1994)
24. Полтерович В М *Экономическая наука современной России* (1) 46 (1998)