

PACS numbers: 02.50.-r, 89.65.Gh
 DOI: 10.3367/UFN.0181.201107j.0774

Неклассические случайные блуждания и феноменология флуктуаций доходности ценных бумаг на фондовом рынке

П.В. Видов, М.Ю. Романовский

1. Введение. Экспериментальные факты, наблюдаемые при флуктуациях доходности ценных бумаг

Логарифмические доходности акций и фондовых индексов $S(\Delta t)$, измеренные на интервале времени Δt :

$$S(\Delta t) = \ln \frac{Y(t + \Delta t)}{Y(t)}, \quad (1)$$

систематически исследуются ещё со времён Л. Башелье [1] ($Y(t)$ — цена акции или значение индекса в момент t). Экспериментальные исследования доходности на международных финансовых рынках позволили установить несколько фактов.

Во-первых, кумулятивная функция распределения вероятности возникновения флуктуации большей, чем x , так же как и меньшей, чем $-x$, для акций крупнейших компаний США на временному интервале с 1994 г. по 1995 г. хорошо описывается степенной функцией вида [2]

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} x^{-3}, & S(\Delta t) > x, \\ -x^{-3}, & S(\Delta t) < -x. \end{cases} \quad (2)$$

Аналогичные результаты получены и для акций немецких [3], норвежских [4], французских, японских, швейцарских и английских [5] компаний, а также фондовых индексов [6].

Российские акции ("голубые фишки") демонстрируют аналогичное поведение (2). На рисунке 1 изображено кумулятивное распределение доходностей для положительных (тёмные символы) и отрицательных (светлые символы) флуктуаций акций Сбербанка. Прямой линией на рис. 1 обозначен закон x^{-3} . По оси ординат отложена кумулятивная функция распределения, по оси абсцисс — доходность, нормированная на соответствующую экспериментально вычисленную среднеквадратичную доходность. Аналогичные зависимости мы получили и для акций других российских компаний. На рисунке 2 представлена функция распределения флуктуаций российского индекса РТС. Хорошо видно, что все графики кумулятивных распределений похожи друг на друга. В то же время кривые для доходностей с большими Δt располагаются несколько выше графиков для доходностей с меньшими Δt (см. также [5]).

Во-вторых, распределение количества акций $Q(x)$, торгуемых в одной биржевой сделке (одном тике), определенно попадает в диапазон Леви, т.е. асимптотическая ("хвостовая") часть распределения хорошо описывается законом вида $x^{-\zeta}$, где $0 < \zeta < 2$, если рассматривать кумулятивную функцию распределения (см. [7] и обсуждение [8, 9]). Параметры $1,45 < \zeta < 1,63$ были

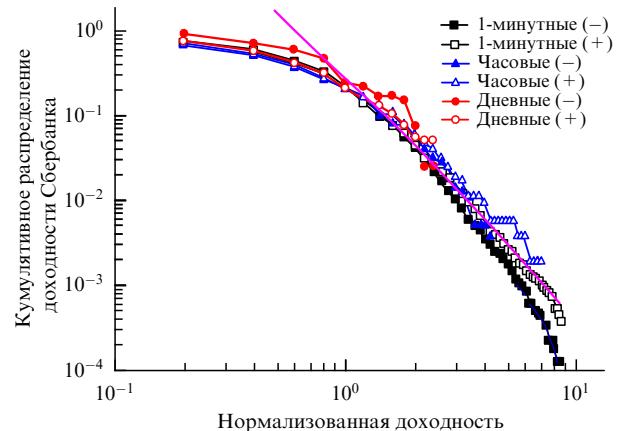


Рис. 1. Кумулятивные распределения нормированных доходностей (см. текст) обыкновенных акций Сбербанка для различных Δt . 1-минутные положительные флуктуации — светлые квадраты, 1-минутные отрицательные флуктуации — тёмные квадраты; часовые положительные флуктуации — светлые треугольники, часовые отрицательные флуктуации — тёмные треугольники; дневные положительные флуктуации — светлые кружки, дневные отрицательные флуктуации — тёмные кружки. Прямой жирной линией показана зависимость x^{-3} . 1-минутные, часовые и дневные данные получены по результатам торгов соответственно 10.01–10.02.2009 гг., 01.09.2008–30.09.2009 гг., 23.01.2006–30.09.2009 гг. на ММВБ.

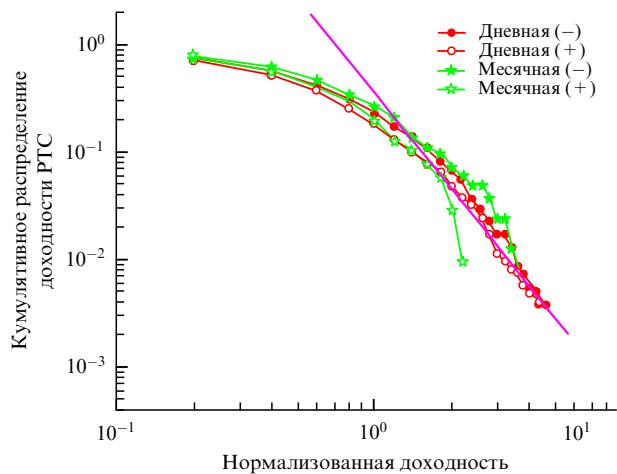


Рис. 2. Кумулятивные распределения нормированных доходностей (см. текст) индекса РТС для различных Δt : дневные положительные флуктуации — светлые кружки, дневные отрицательные флуктуации — тёмные кружки; месячные положительные флуктуации — светлые звёздочки, месячные отрицательные флуктуации — тёмные звёздочки. Прямой жирной линией показана зависимость x^{-3} . Дневные данные получены по результатам торгов 09.01.1995–27.06.2007 гг. на бирже РТС, месячные данные — по результатам торгов 09.01.1995–20.10.2010 гг.

получены с помощью различных статистических методов для одной и той же выборки акций крупнейших американских компаний (см. также [10]), $\zeta \approx 1,58$ для акций 85 крупнейших компаний, торгуемых на Лондонской фондовой бирже (LSE) в 2001–2002 гг., и $\zeta \approx 1,53$ для акций 13 компаний, входящих в индекс Парижской биржи CAC 40.

Для российских "голубых фишек" мы получили показатели в диапазоне $1,6 < \zeta < 1,7$ в зависимости от рассматриваемой ценной бумаги. На рисунке 3 показано кумулятивное распределение объёма торгов в одном тике для акций Сбербанка 21.11.2007 г.

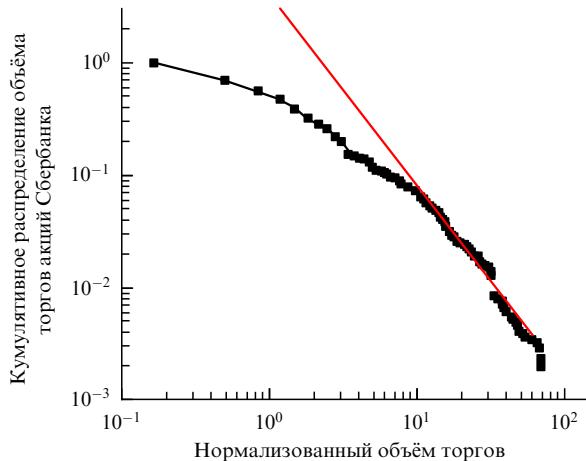


Рис. 3. Кумулятивное распределение объема торгов в одном тике для акций Сбербанка 21.11.2007 г. Прямой линией обозначена "хвостовая" зависимость $x^{-\zeta}$, где $\zeta = 1,7$.

Естественно, данные зависимости справедливы только для акций. Ситуация с доходностями индексов несколько сложнее. Очевидно, что доходности индекса могут зависеть от объема торгов акциями, входящими в индекс. Однако это предположение довольно сложно проверить экспериментально.

Наконец, известно, что процесс $S(t)$ является дельта-коррелированным во времени:

$$B(\Delta t) = \langle S(t) S(t + \Delta t) \rangle \sim \delta(\Delta t), \quad (3)$$

для всех акций [11]. Это утверждение проверялось для российских "голубых фишек" для различных Δt , включая самый малый из доступных нам интервалов — 1 мин. Во всех случаях был получен следующий результат: значение корреляционной функции (3) стремится к нулю на первой ненулевой измеренной точке Δt . Аналогичная корреляционная функция для индексов имеет вид $\sim \exp(-t/\tau_{\text{corr}})$ [6], где время корреляции для индекса S&P500 (одного из самых популярных индексов фондового рынка США) составляет порядка 4 мин [6], а для российского индекса РТС — 0,85 мин [12]. Таким образом, доходность акций и индексов напоминает случайный процесс с независимыми приращениями.

2. Броуновское движение и гауссовы случайные блуждания

Случайные блуждания являются привлекательной наглядной моделью случайного процесса с независимыми приращениями. Формально задача о случайных блужданиях ставится следующим образом. Следует найти плотность вероятности того, что частица, испытав N прыжков от места старта (в качестве которого без ограничения общности можно взять начало координат) в пространстве с некоторой размерностью G , окажется в интервале от \mathbf{R} до $\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}$. Каждый i -й прыжок может быть произведен в интервале длин (в модельном G -мерном пространстве) от \mathbf{r}_i до $\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i$ с вероятностью $\tau(\mathbf{r}_i)$. Все прыжки являются независимыми случайными величинами.

Схема решения этой задачи известна (схема Чандрасекара [13]). Пусть

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i. \quad (4)$$

При наличии всех моментов у функции плотности вероятностей $\tau(\mathbf{r}_i)$ имеем

$$W_1(R) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi N\langle r^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{R^2}{2N\langle r^2 \rangle}\right). \quad (5)$$

Положив теперь $N\langle r^2 \rangle = Dt$ (D — коэффициент диффузии), получим обычное решение для классической одномерной диффузии броуновской частицы, при котором средний квадрат её смещения (дисперсия) из точки старта пропорционален $t^{1/2}$.

Важнейшим требованием в схеме Чандрасекара [13] является наличие всех моментов закона прыжков, хотя в (5) входит только второй. По-видимому, наиболее "слабо" спадающим на бесконечности законом прыжка, имеющим все конечные моменты, является распределение Субботина [14]: $p(x) \sim \exp(-x^\alpha)$, $\alpha > 0$ (на самом деле лишь немного больше).

3. Блуждания Леви

Изучим одномерные случайные блуждания с законом элементарного прыжка $\tau(\mathbf{r}_i)$, не дающего всех конечных моментов, но обладающего нормировкой. Наипростейшей аппроксимацией является степенной закон, в котором для малых прыжков (в нуле) предполагается ограниченность и гладкость:

$$\tau(\mathbf{r}_i) = \frac{C_1}{(z^2 + r_i^2)^\beta}. \quad (6)$$

Здесь C_1 — константа, определяемая требованием нормировки, $C_1 = 2\Gamma(\beta)z^{2\beta-1}/\pi^{1/2}\Gamma(\beta-1/2)$, где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера, $\beta > 1/2$, z — константа, имеющая смысл некоторой характерной длины прыжка. Таким образом, закон (6) является безмасштабным только для больших прыжков, $r \gg z$, тогда он сводится к закону типа Парето [15]: $\tau(r_i) \sim C_1/r_i^{2\beta}$. Функция распределения с законом прыжка (6) сводится к функции Леви:

$$W_1(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(KR) \times \\ \times \exp\left[-N(Kz)^{2\beta-1} \frac{\Gamma(3/2-\beta)}{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta+1/2)}\right] dK. \quad (7)$$

Требование одинаковости закона (6) для всех прыжков в принципе не нужно — величины z могут быть все различны (z_i), в этом случае величина $Nz^{2\beta-1}$ в (7) должна быть заменена выражением $\sum_i z_i^{2\beta-1}$.

Закон распределения блужданий Леви характеризуется медленно спадающей асимптотикой, т.е. значительным количеством больших флуктуаций. Действительно, асимптотикой (7) является

$$W_1(R \rightarrow \infty) \approx \frac{\Gamma(2\beta) \sin[(\pi/2)(2\beta-1)]}{\pi \rho^{2\beta}}, \quad \rho = \frac{R}{R_0}, \\ R_0 = \frac{z}{2} \left[N \frac{\Gamma(3/2-\beta)}{\Gamma(\beta+1/2)} \right]^{1/(2\beta-1)}, \quad (8)$$

т.е. асимптотика распределения Леви укладывается в диапазон от $1/\rho$ до $1/\rho^3$. Распределение Леви обладает одним интересным свойством. Если поделить асимптотику (8) на асимптотику закона прыжка (6), то получим:

$$\frac{W_1(R \rightarrow \infty)}{\tau(r \rightarrow \infty)} = \frac{Nr^2}{R^2}. \quad (9)$$

Это выражение означает, что большие флуктуации могут возникать в результате одного прыжка ($R = r$ при $N = 1$).

4. Усечённые блуждания Леви

Главным отличием усечённых блужданий Леви [16, 17] от гауссовых случайных блужданий является наличие толстых хвостов, т.е. большого количества сильных флуктуаций R . Закон прыжка для усечённого распределения Леви — тот же закон (6), в котором теперь $\beta > 3/2$ (по-прежнему рассматриваем одномерные блуждания). При данных условиях этот закон имеет, как минимум, второй момент. При небольших флуктуациях, до $R \sim 10z$, эти распределения хорошо аппроксимируются соответствующей гауссовой функцией:

$$W_1^G(R) = \sqrt{\frac{\beta - 3/2}{\pi Nz^2}} \exp\left(-\frac{\beta - 3/2}{Nz^2} R^2\right). \quad (10)$$

Этот факт является выражением центральной предельной теоремы (ЦПТ) для таких случайных процессов [18]: гауссова функция описывает флуктуации вплоть до величин $(N \ln N)^{1/2}$, больших характерной средней величины z [19]. Иногда этот результат называют теоремой Чебышева, он справедлив для любых $\beta \geq 2$ [20].

Для определения поведения усечённых распределений Леви в области больших флуктуаций, $R \geq (N \ln N)^{1/2}z$, следует найти ранее точно не известную асимптотику функции распределения. Можно показать точно, что асимптотическое поведение плотности распределения усечённых блужданий Леви может быть описано для любого β законом (рис. 4)

$$W_1(R) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} \frac{2^\beta z^{2\beta-1} N}{\pi(2\beta-3)R^{2\beta}}. \quad (11)$$

Кроме того, (11) описывает не только бесконечно делимый [21], но и устойчивый процесс. Для усечённых распределений большие флуктуации R вследствие одного прыжка (9) возможны только при $\beta = 2$, в отличие от флуктуаций в случае функции Леви, которые возможны для любого $1/2 < \beta < 3/2$.

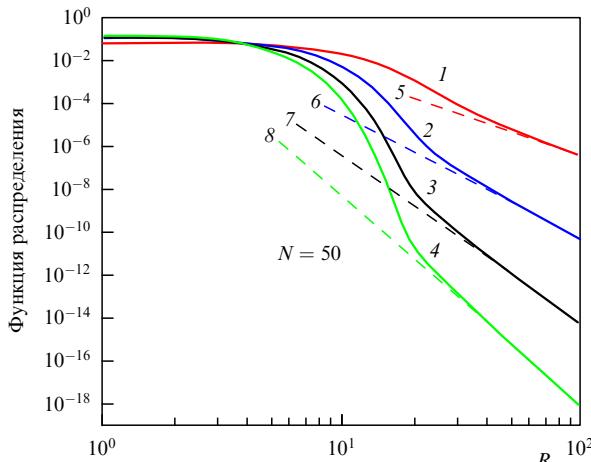


Рис. 4. Точные нормированные функции распределения при $\beta = 2$ (кривая 1), $\beta = 3$ (кривая 2), $\beta = 4$ (кривая 3), $\beta = 5$ (кривая 4) в зависимости от длины прыжков R , нормированной на z . Штриховые линии 5–8 — соответствующие асимптоты при больших R .

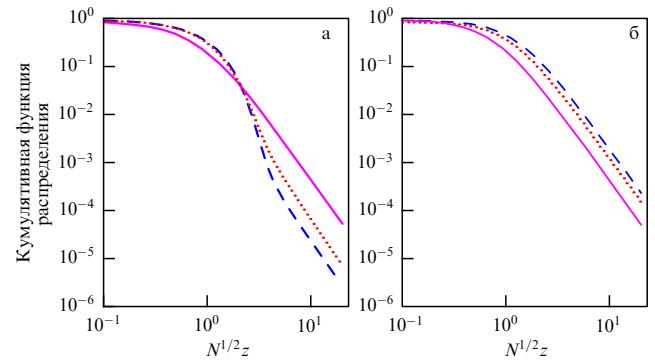


Рис. 5. (а) Кумулятивная функция распределения усечённых блужданий Леви при $\beta = 2$, нормированная на $R = N^{1/2}z$. Сплошная кривая — $N = 1$, штриховая кривая — $N = 60$, пунктирная кривая — $N = 450$. Количество прыжков соответствует отношению между 10-минутными, часовыми и дневными доходностями. (б) Кумулятивная функция распределения при $\beta = 2$, нормированная на R с $\delta = 2,7$. Сплошная кривая — $N = 1$, штриховая кривая — $N = 60$, пунктирная кривая — $N = 450$. Количество прыжков соответствует отношению между 10-минутными, часовыми и дневными доходностями.

Проследим теперь зависимость среднеквадратичного отклонения от времени. Получим:

$$\langle R^2 \rangle = \frac{Nz^2}{2\beta - 3}. \quad (12)$$

Закон усечённых блужданий Леви (асимптотики (10, 11)) может быть нормирован на средний квадрат R (12). В этом случае все гауссовые асимптоты (для малых R) при любом β становятся одинаковыми. В то же время асимптоты (11) становятся $\sim N^{-1/2}$. На рисунке 5 показана кумулятивная функция распределения усечённых блужданий Леви при $\beta = 2$. Хорошо видна разница между кривыми для разных значений N . Кумулятивные распределения при любых β ведут себя аналогичным образом.

5. Сравнение с экспериментальными данными

Таким образом, форма распределения усечённого блуждания Леви, получающегося в результате реализации схемы с законом единичного прыжка (6), при $\beta = 2$ соответствует выражению (1), однако в этом случае имеются различия для разных значений N , чего не наблюдается в действительности (см. введение). Для устранения этого несоответствия схему следует скорректировать. Сначала рассмотрим вопрос о том, что в эксперименте соответствует единичной сделке — так называемому тику. Нам необходимо ответить на вопрос: является ли тик единичным прыжком в схеме случайных блужданий?

Дисперсия при $\beta = 2$ просто равна $N^{1/2}z$. Так как экспериментально $N \sim t$, где t — частота фиксации значений доходности, должно существовать минимальное время t , которое соответствует минимально возможному интервалу фиксации доходности, т.е. времени между двумя последовательными тиками. С одной стороны, этот интервал является случайной величиной. Экспериментально можно легко определить её среднее значение. С другой стороны, это среднее значение должно соответствовать средней тиковой доходности, т.е. значению z , с точки зрения модели (см. раздел 4). Можно построить зависимость средних доходностей для различных временных интервалов t . Теоретически эта зависи-

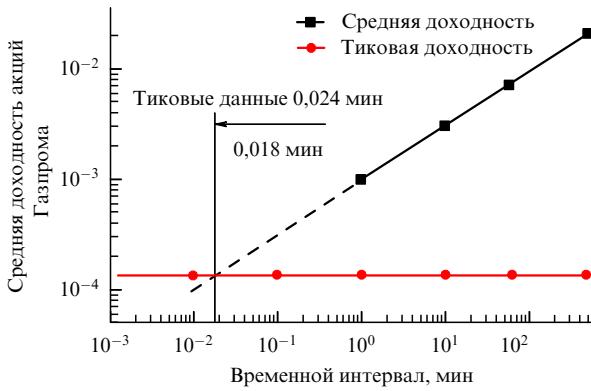


Рис. 6. Средняя доходность акций Газпрома для нескольких t (квадраты, соединённые сплошной линией). По оси абсцисс отложены временные интервалы фиксации значений доходности. Штриховая линия — экстраполяция зависимости до малых значений. Горизонтальная сплошная линия определяет значение среднеквадратичной тиковой доходности. Пересечение графиков даёт значение $t = 0,018$ мин, среднее время между двумя последовательными тиками 0,024 мин, разница составляет 33 %. Тиковые данные получены по результатам торгов 15.01.2008 г. на бирже ММВБ; 1-минутные, 10-минутные, часовые и дневные данные получены по результатам торгов 10.01–10.02.2009 г., 07.01–30.09.2009 г., 01.09.2008–30.09.2009 гг. и 23.01.2006–30.09.2009 гг. соответственно.

мость должна иметь вид $\sim t^{1/2}$ в силу (12). График этой зависимости определённо должен начинаться с уровня тиковой доходности. Экспериментально можно сравнить теоретический минимальный временной интервал, определяемый точкой пересечения графика среднеквадратичных доходностей и уровня среднеквадратичной тиковой доходности (рис. 6) со средним временным интервалом между двумя последовательными тиками. Разница между теоретически определённым минимальным временным интервалом и экспериментально измеренным средним временем между двумя тиками для акций Газпрома велика, по сравнению с разницей для акций других компаний на российском рынке, — 33 %. Минимальное различие данных величин наблюдается для акций Сбербанка и составляет всего 3 %.

По всей видимости, тик является единичным прыжком в схеме случайных блужданий. Первая возможность модификации модели — это попытка применения схемы случайных блужданий с непрерывным временем (Continuous Time Random Walk, CTRW) [22]. В самом деле, временные интервалы между двумя последовательными тиками могут варьироваться в широком диапазоне. Распределение этих временных интервалов для американского рынка известно [23], его функция спадает с уменьшением Δt как $(\Delta t)^{4.4}$. По-видимому, учёт времени между транзакциями не позволяет получить новые результаты в силу наличия математического ожидания величины временного интервала между тиками.

Другой возможностью для модификации схемы усечённых случайных блужданий Леви является использование связи стандартного отклонения z и среднего объёма сделки в виде степенного закона. Наша модификация ограничивается предположением о том, что каждое стандартное отклонение z в схеме (см. закон прыжка (6)) является случайной величиной z_i , пропорциональной объёму сделки в i -й транзакции (i -м тике). Мы возвращаемся ко второму экспериментально выявленному свойству, описанному во введении. Практически мы используем широко распространённое биржевое правило: "объём торгов движет цену" [24, 25].

Данная модификация означает, что мы вводим зависимость функции распределения вероятности единичных флуктуаций $\tau_i(r_i)$ от другой случайной величины, z_i . В данном случае схема снова напоминает модель CTRW. Проблема прямого применения CTRW состоит в том, что конечная функция распределения для R будет зависеть от набора случайных величин $\{z_i\}$. Например, функция распределения усечённых случайных блужданий Леви для $\beta = 2$ получается в виде

$$W_{\beta=2, z_i}(R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dK \exp(iKR) \prod_{i=1}^N \exp(-Kz_i)(1+Kz_i). \quad (13)$$

Так как все величины $\{z_i\}$ имеют функцию распределения $\sim x^{-\delta}$ при больших z_i , где $\delta \sim 2.5-2.7$ ($\delta = \zeta - 1$), то возможно усреднение (13) по каждой z_i . Тем не менее этот результат будет неверным, поскольку конечный вид усреднённой таким образом функции (13) не будет соответствовать экспериментально наблюдаемым данным, а именно не будет пропорционален R^{-4} при больших R .

По-видимому, применение простой схемы CTRW возможно, по крайней мере для асимптотических значений (13), так как при больших R имеем

$$W_{\beta=2, z_i}(R) = \frac{4 \sum z_i^3}{\pi R^4}, \quad (14)$$

и набор случайных величин $\{z_i\}$ даёт только одну случайную величину: $\sum z_i^3$. К сожалению, функция распределения плотности вероятностей данной величины на хвостах имеет вид $\sim x^{-2/3-\delta/3}$. Эта функция не имеет математического ожидания, которое необходимо для применения схемы CTRW [22]. На самом деле величины $\{z_i\}$ входят в явном виде в выражение (13) в различных комбинациях: $\sum z_i^2$, $\sum z_i^3$ и т.д. Каждая из таких комбинаций сама является случайной величиной. Так как асимптотическая функция распределения зависит от суммы кубов z_i , можно сделать вывод о том, что сумма сходится к распределению Леви (см. [13]). Только это условие обеспечивает устойчивость величины $\sum z_i^3$ при добавлении новых членов в сумму.

Поэтому метод CTRW необходимо обобщить для случая отсутствия условного среднего (случайной величины $\sum z_i^3$ в (14)) (см. [26]). Как и в случае распределения Леви (7), выражение (13) может быть исследовано на наличие зависимости от N , т.е. перенормировки. Если перенормировать величину R в (13) или соответствующее асимптотическое кумулятивное распределение

$$\Phi_{\beta=2, z_i}(R) \simeq \frac{4 \sum z_i^3}{3\pi R^3} \quad (15)$$

на стандартное отклонение $(\sum z_i^2)^{1/2}$, что мы делаем во всех экспериментах, то возникает скейлинговая зависимость выражения (15) в виде $N^{-1/2}$ в случае $\sum z_i^3 \sim N$ (см. (11) и рис. 5а). В то же время зависимость $\sum z_i^3$ от N имеет другой вид, так как функция распределения случайной величины $\sum z_i^3$ сходится к распределению Леви (см. выше). Конечный результат для функции распределения Леви $\sum z_i^3 \sim N^{3/(\delta-1)}$ и конечная наблюдаемая зависимость (15) от N после перенормировки реальной доходности R на экспериментально полученное стандартное отклонение имеет вид

$$\Phi_{\beta=2, z_i}^{\text{renorm}} \left(\frac{R}{\sqrt{\sum z_i^2}} \right) \sim N^{3/(\delta-1)-3/2}. \quad (16)$$

При $\delta \sim 2.5-2.7$ получаем зависимости (16) в диапазоне от $N^{0.5}$ до $N^{0.27}$ (рис. 5б). Видно, что стандартная

экспериментальная перенормировка обеспечивает слабую зависимость всех функций распределения доходности от количества прыжков (тиков) N . Отметим, что такие зависимости (16) от N аналогичны экспериментальным результатам [6] и нашим результатам, полученным для российского рынка, на котором имеются слабые зависимости от N : доходности растут при увеличении N , в отличие от того, что наблюдается на рис. 5а для простой схемы усечённых случайных блужданий Леви.

Отметим, что установленная зависимость от N имеет место только в случае доходности акций. Возможная зависимость доходностей индекса от объёма торгов акциями, входящими в индекс, может иметь другой вид (по сравнению с законом $x^{-\zeta}$). Если этот закон не попадает в диапазон Леви $0 < \zeta < 2$ и ζ больше (ненамного) 2, то кумулятивное распределение доходностей индекса на больших временных интервалах (16 дней, как в [6], положительные месячные доходности индекса РТС на рис. 2: последние две точки) может сходиться к гауссову (см. (16) при $\delta \sim 3-4$). Эти распределения будут выглядеть аналогично показанным на рис. 5а при больших N , а не так, как эти же кривые на рис. 5б.

6. Заключение

Введение закона прыжка типа (6) позволяет единым аналитическим образом рассмотреть как обычные, так и усечённые блуждания Леви. Усечённые блуждания Леви асимптотически проявили те же свойства устойчивости и масштабируемости, что и обычные. Для усечённых блужданий получены аналитические асимптоты и выяснены законы масштабирования. Оказалось, что асимптотические усечённые блуждания Леви имеют типично безмасштабное распределение $\sim R^{-2\beta}$, которое характерно и для асимптот "чистых" блужданий Леви, но, в отличие от последних, спадают с ростом R быстрее. Таким образом, усечённые блуждания Леви вместе с "чистыми" перекрывают весь класс распределений Парето [15].

Можно предположить, что закон $\sim 1/x^3$ для кумулятивной функции распределения флуктуаций акций и индексов является универсальным. Такое распределение может быть получено с помощью схемы случайных блужданий (прыжков) с законом единичного прыжка (6) только при $\beta = 2$. Это означает, что закон прыжка при таком значении β ,

$$\tau_i(r) = \frac{4z_i^3}{\pi(z_i^2 + r^2)^2}, \quad (17)$$

также является универсальным. Здесь значение z_i представляет собой некоторую характерную доходность, использующуюся для нормировки. Этот результат можно считать доказательством существования микроскопического закона флуктуаций доходностей на фондовом рынке. Таким образом, цены всех акций (индексы представляют собой, по сути, корзины акций и их поведение аналогично) совершают "прыжки" на различные "дистанции" с постоянными вероятностями. Микроскопический закон (17) объясняет феноменологию закона $\sim 1/x^3$ [2].

По всей видимости, существование строгих законов единичного прыжка (16) возможно по двум причинам. Во-первых, распределения вероятности флуктуаций доходности должны обладать вторым моментом, т.е. дисперсией. Это требование обусловлено в конечном счёте ограниченностью количества денег. Во-вторых, функция распределения должна иметь ту же асимпто-

тику, что и закон прыжка, т.е. должна существовать вероятность возникновения больших флуктуаций в результате одного прыжка. Все функции Леви удовлетворяют второму требованию, но не первому. Только функция распределения (12) при $\beta = 2$ удовлетворяет обоим условиям.

Простое определение величины z_i как некоторой характерной величины прыжка не позволяет дать точного объяснения зависимости нормированных функций распределения и кумулятивных распределений от N . Модификация схемы случайных блужданий обеспечивается за счёт введения зависимости $\{z_i\}$ от количества акций, торгуемых в одной сделке (тике), так как факт соответствия одного тика одному прыжку проверен экспериментально (см. также [12]). В этом случае функция распределения величины $\sum z_i^3$ сходится к функции Леви с индексом Леви $(\beta - 1)/3$. Конечная зависимость кумулятивных функций распределения от количества тиков (прыжков) попадает в диапазон от $N^{0.5}$ до $N^{0.27}$. Российские акции демонстрируют более слабые зависимости по сравнению с акциями из США и акциями, торгуемыми на LSE и на Парижской бирже. Таким образом, конечная схема случайных блужданий выглядит как схема CTRW при отсутствии условного среднего (для величины $\sum z_i^3$).

Работа частично поддержана (М.Ю.Р.) грантом РФФИ 10-07-00202.

Список литературы

1. Bachelier L, Thèses Fac. Sci. Paris Le Grade de Docteur Sci. Math. (Paris: Gauthier-Villars, 1900); *Ann. Sci. École Normale Supérieure* **3** (17) 21 (1900); *Theory of Speculation* (Princeton: Princeton Univ. Press, 2006)
2. Gopikrishnan P et al. *Eur. Phys. J. B* **3** 139 (1998)
3. Lux T *Appl. Financ. Econ.* **6** 463 (1996)
4. Skjeltorp JA *Physica A* **283** 486 (2000)
5. Loretan M, Phillips PC B J. *Empirical Finance* **1** 211 (1994)
6. Gopikrishnan P et al. *Phys. Rev. E* **60** 5305 (1999)
7. Plerou V, Stanley H E *Phys. Rev. E* **76** 046109 (2007)
8. Rácz É, Eisler Z, Kertész J *Phys. Rev. E* **79** 068101 (2009)
9. Plerou V, Stanley H E *Phys. Rev. E* **79** 068102 (2009)
10. Gopikrishnan P et al. *Phys. Rev. E* **62** R4493 (2000)
11. Mantegna R N, Stanley H E *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance* (New York: Cambridge Univ. Press, 2000)
12. Романовский М Ю, Видов П В, Пыркин В А *Компьютер. исслед. и моделирование* **2** 219 (2010)
13. Chandrasekhar S *Rev. Mod. Phys.* **15** 1 (1943)
14. Subbotin M T *Матем. сб.* **31** (2) 296 (1923)
15. Pareto V *Cours d'Economie Politique* (Lausanne: F. Rouge, 1886, 1897)
16. Koponen I *Phys. Rev. E* **52** 1197 (1995)
17. Mantegna R N, Stanley H E *Phys. Rev. Lett.* **73** 2946 (1994)
18. Feller W *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (New York: Wiley, 1970, 1971) [Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* (М.: Мир, 1984)]
19. Bouchaud J-P, Potters M *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: from Statistical Physics to Risk Management* 2nd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
20. Vidov P V, Romanovsky M Yu *Phys. Wave Phenomena* **17** 218 (2009)
21. Khintchine A *Матем. сб.* **2(44)** (1) 79 (1937)
22. Scher H, Montroll E W *Phys. Rev. B* **12** 2455 (1975)
23. Gopikrishnan P et al. *Physica A* **287** 362 (2000)
24. Karhoff J M J. *Finance* **41** 1069 (1986)
25. Brailsford T J *Accounting Finance* **36** 89 (1996)
26. Sokolov I M *Phys. Rev. E* **63** 011104 (2000)