

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

По поводу квантовых статистик для ансамблей  
с конечным числом частиц

Е.Д. Трифонов

*Известные квантовые распределения Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака можно рассматривать как стационарные решения кинетических уравнений для средних значений заселённости в идеальном газе, содержащем произвольное конечное число тождественных частиц.*

PACS numbers: 05.30.Jp, 74.40.+k

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107d.0747

## Содержание

1. Введение (747).
2. Кинетическое уравнение для средних чисел заполнения в большом каноническом ансамбле (747).
3. Доплеровское охлаждение (749).
4. Большой микроканонический ансамбль (749).
5. Заключение (750).

Список литературы (751).

## 1. Введение

В последнее время в связи с экспериментальными достижениями в области глубокого охлаждения разреженных газов [1–3] и осуществлением бозе–эйнштейновского конденсата [4, 5] возникла необходимость применения квантовых статистик к ансамблям, состоящим из сравнительно небольшого числа частиц (порядка 1000–1000000), когда использование термодинамического предела оказывается неоправданным и к тому же приходится учитывать дискретную структуру энергетических уровней [6–31].

Среднее число частиц в одном состоянии с энергией  $E_k$  в идеальном газе, находящемся в контакте с термостатом, определяется как

$$n_k = \frac{1}{\exp[(E_k - \mu)/T] \pm 1}, \quad (1)$$

где  $T$  — температура (в энергетических единицах),  $\mu$  — химический потенциал, определяемый из условия

$$\sum_k n_k = N. \quad (2)$$

Е.Д. Трифонов. Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена,  
Мойка 48, 191186 Санкт-Петербург, Российская Федерация  
E-mail: thphys@herzen.spb.ru

Статья поступила 16 марта 2010 г.,  
после доработки 27 мая 2011 г.

Здесь  $N$  — полное число частиц в системе, знак "+" относится к статистике Ферми, знак "–" — к статистике Бозе. Как известно, это распределение является асимптотически точным для канонического ансамбля в термодинамическом пределе, т.е. при  $N \rightarrow \infty$  (см., например, [32, 33]). Применительно к системам с конечным числом частиц оно является приближённым и соответствует модели большого канонического ансамбля, когда условие сохранения числа частиц в соответствии с (2) выполняется в среднем.

В данной методической заметке мы обращаем внимание на то, что распределение (1) является *стационарным решением кинетических уравнений для средних значений заселённости в идеальном газе с произвольным конечным числом частиц*. При этом мы не привлекаем общее кинетическое уравнение для матрицы плотности и ограничиваемся кинетическими (или балансными) уравнениями для средних значений заселённости. Отметим, что кинетические уравнения для матрицы плотности с учётом межчастичного взаимодействия применительно к квантовым статистикам уже многократно обсуждались (см., например, [35–42]), но для конечных систем в каноническом и, тем более, микроканоническом ансамблях их анализ до сих пор представляет собой чрезвычайно интересную открытую проблему. В нашей заметке мы не претендуем, конечно, на её решение и останавливаемся лишь на некоторых методических аспектах. Мы хотим не только проиллюстрировать общее утверждение о том, что равновесное распределение является стационарным решением кинетических уравнений (см., например, статью [34] и ссылки в ней), но и выявить соответствие между определённым приближением для этих распределений (конкретно — большими каноническим и микроканоническим ансамблями) и формой соответствующих кинетических уравнений.

2. Кинетическое уравнение  
для средних чисел заполнения  
в большом каноническом ансамбле

Как известно, факт установления термодинамического равновесия в системе не зависит от конкретного вида и интенсивности взаимодействия частиц с термостатом.

При этом, рассматривая идеальный газ, мы будем пренебрегать межчастичным взаимодействием.

Оператор взаимодействия идеального газа тождественных частиц с термостатом представим как сумму операторов взаимодействия для каждой частицы, причём одночастичные операторы будем считать одинаковыми.

Ограничимся переходами  $k \rightarrow k \pm 1$  между соседними состояниями отдельной частицы, обусловленными взаимодействием с термостатом, имеющим температуру  $T$ . Обозначим вероятности таких переходов в единицу времени через  $w_{k,k+1}$  и  $w_{k,k-1}$ . В соответствии с принципом детального равновесия

$$\exp\left[-\frac{E_k}{T}\right] w_{k,k-1} = \exp\left[-\frac{E_{k-1}}{T}\right] w_{k-1,k}. \quad (3)$$

Вероятности переходов в единицу времени между многочастичными состояниями

$$|\dots n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \dots\rangle \rightarrow |\dots n_{k-1} + 1, n_k - 1, n_{k+1}, \dots\rangle$$

с учётом симметрии волновой функции системы тождественных частиц можно представить как

$$W_{k,k-1} = w_{k,k-1} n_k (1 \mp n_{k-1}); \quad (4)$$

верхний знак относится к статистике Ферми–Дирака, нижний — к статистике Бозе–Эйнштейна.

Если в состоянии  $k$  находится  $n_k$  частиц, то вероятность того, что за время  $\Delta t$  их число увеличится на единицу, будет равна

$$(W_{k-1,k} + W_{k+1,k}) \Delta t. \quad (5)$$

Аналогично, вероятность того, что за время  $\Delta t$  число частиц в состоянии  $k$  уменьшится на единицу:

$$(W_{k,k-1} + W_{k,k+1}) \Delta t. \quad (6)$$

Поэтому среднее квантово-механическое значение изменения числа атомов в этом состоянии за время  $\Delta t$ :

$$\Delta n_k = -(W_{k,k-1} + W_{k,k+1}) \Delta t + (W_{k-1,k} + W_{k+1,k}) \Delta t. \quad (7)$$

В результате для производной по времени находим

$$\dot{n}_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta n_k}{\Delta t} = -(W_{k,k-1} + W_{k,k+1}) + (W_{k-1,k} + W_{k+1,k}). \quad (8)$$

Используя (4), получаем

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = & -w_{k,k-1} n_k (1 \mp n_{k-1}) - w_{k,k+1} n_k (1 \mp n_{k+1}) + \\ & + w_{k+1,k} n_{k+1} (1 \mp n_k) + w_{k-1,k} n_{k-1} (1 \mp n_k). \end{aligned} \quad (9)$$

Это уравнение для скорости изменения числа частиц в  $k$ -м состоянии справедливо при предположении, что в начальный момент времени система находилась в некотором состоянии с определёнными (целыми) числами заселённости. Далее мы будем предполагать возможным *независимое (статистическое)* усреднение правой части (9) по числам заселённости *различных* состояний,

что позволит рассматривать уравнения (9) как кинетические уравнения для *средних чисел* заселённости.

Суммируя левые и правые части уравнений (9), легко получить закон сохранения среднего числа частиц

$$\sum_k \dot{n}_k = 0. \quad (10)$$

Это означает, что уравнения (9) соответствуют модели большого канонического ансамбля.

Используя соотношение

$$1 \mp \frac{1}{n_k} = \mp \exp\left[\frac{E_k - \mu}{T}\right], \quad (11)$$

следующее из (1), нетрудно показать, что распределения (1) являются стационарным решением уравнений (9). В справедливости этого утверждения можно легко убедиться в результате подстановки (1) в правую часть уравнений (9). Представляется содержательным также обратное утверждение: кинетические уравнения, стационарные решения которых совпадают с распределениями (1), могут быть представлены в виде (9).

При наличии вырождения энергетических уровней кинетические уравнения (9) могут быть модифицированы. Пусть кратность вырождения уровня  $E_k$  равна  $g_k$ . Складывая левые и правые части уравнений, относящиеся к одному значению энергии, получим

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = & \frac{1}{g_k} [-w_{k,k-1} n_k (1 \mp n_{k-1}) - w_{k,k+1} n_k (1 \mp n_{k+1}) + \\ & + w_{k+1,k} n_{k+1} (1 \mp n_k) + w_{k-1,k} n_{k-1} (1 \mp n_k)]. \end{aligned} \quad (9a)$$

Теперь индекс " $k$ " нумерует уровни энергии, но  $n_k$  по-прежнему обозначает заселённость одного состояния данного уровня. Уравнение (2) для определения химического потенциала в этом случае приобретает вид

$$\sum_k g_k n_k = N. \quad (2a)$$

Для оценки точности получаемых таким образом результатов приведём сравнение значений заселённости бозе-эйнштейновского конденсата для идеального газа в изотропной гармонической ловушке, состоящего из

**Таблица 1.** Сравнение значений заселённости основного состояния изотропной гармонической ловушки, вычисленных по методу большого канонического ансамбля ( $n_0$ ) точным рекуррентным методом ( $n_{0\text{rec}}$ ) и в приближении термодинамического предела ( $n_{0\text{cl}}$ ) для 1000 бозе-частиц

$T/T_c$	$n_0$	$n_{0\text{rec}}$	$n_{0\text{cl}}$
0,1	996,8	996,8	999
0,2	982,2	982,2	992
0,3	950,8	950,7	973
0,4	896,8	896,6	936
0,5	814,4	813,8	875
0,6	697,4	696,5	784
0,7	540,5	538,7	657
0,8	338,1	334,5	488
0,9	93,8	80,3	27,1
1,0	5,95	5,81	0
1,1	2,21	2,21	0
1,2	1,25	1,26	0
1,3	0,82	0,83	0

1000 бозе-частиц, вычисленных различными способами: в приближении большого канонического ансамбля (что соответствует стационарному решению кинетического уравнения), в приближении термодинамического предела и точным рекуррентным методом [30].

Здесь температура выражена в единицах критической температуры  $T_c$ , полученной в термодинамическом пределе. Напомним, что для изотропной гармонической ловушки  $E_k = (3/2 + k)\hbar\omega$ , где  $\omega$  — собственная частота гармонической ловушки,  $g_k = (k+1)(k+2)/2$ ,  $T_c \approx \hbar\omega(N/1,202)^{1/3}$ . В последнем столбце таблицы указано среднее значение заселённости бозе-эйнштейновского конденсата в термодинамическом пределе  $n_{0\text{пл}} = N(1 - T^3/T_c^3)$ .

### 3. Доплеровское охлаждение

Хорошо известным методом охлаждения газа является облучение газа монохроматическим светом, сдвинутым по частоте в красную сторону по отношению к резонансному переходу в атоме. Этот метод принято называть доплеровским охлаждением [1–3]. Покажем, что применение доплеровского охлаждения эквивалентно погружению газа в термостат с определённой температурой.

Рассмотрим модель одномерной гармонической ловушки.

Вероятность поглощения света (в единицу времени) атомом с изменением квантового колебательного числа  $k$  на единицу можно представить как

$$w_{k,k\pm 1} = \frac{a_{k,k\pm 1}}{(\omega_0 \pm \omega - \omega_L)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (12)$$

Здесь знак "+" соответствует увеличению  $k$  на единицу, знак "-" — уменьшению  $k$  на единицу;  $a_{k,k\pm 1} = a_{k\pm 1,k}$  — константы, пропорциональные интенсивности лазерного поля,  $\Gamma$  — радиационная ширина возбуждённого электронного состояния атома,  $\omega$  — собственная частота гармонической ловушки. Далее будем считать, что возвращение в основное электронное состояние происходит (в среднем) без изменения колебательного квантового числа. Если  $\Delta = \omega_0 - \omega_L > 0$ , т.е. частота лазера смещена в красную сторону по отношению к резонансной частоте, то вероятность поглощения с уменьшением квантового числа будет больше вероятности перехода с увеличением квантового числа. Поэтому в результате поглощения света будет происходить снижение колебательной энергии атома, т.е. охлаждение.

Используя выражение (12) для вероятности, получаем

$$\frac{w_{k+1,k}}{w_{k,k+1}} = \frac{(\Delta + \omega)^2 + \Gamma^2/4}{(\Delta - \omega)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (13)$$

При  $\omega \ll \Delta$

$$\begin{aligned} \frac{w_{k+1,k}}{w_{k,k+1}} &= \frac{(\Delta + \omega)^2 + \Gamma^2/4}{(\Delta - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \approx \frac{\Delta^2 + \Gamma^2/4 + 2\Delta\omega}{\Delta^2 + \Gamma^2/4 - 2\Delta\omega} \approx \\ &\approx 1 + \frac{4\Delta\omega}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \approx \exp\left[\frac{4\Delta\omega}{\Delta^2 + \Gamma^2/4}\right] = \exp\left[\frac{\hbar\omega}{T_{\text{эфф}}}\right], \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$T_{\text{эфф}} = \hbar \frac{\Delta^2 + \Gamma^2/4}{4\Delta}. \quad (15)$$

Соотношение (14) выражает принцип детального равновесия при температуре  $T_{\text{эфф}}$ . Минимальное значение

температуры получается при расстройке  $\Delta = \Gamma/2$ :  $T_{\text{мин}} = \hbar\Gamma/4$ . При этом сам процесс установления равновесия описывается уравнениями (9). Можно сказать, что, подвергая систему облучению с частотой, сдвинутой в красную сторону по отношению к резонансу, мы помещаем её в термостат с температурой (15). Этот термостат и представляет собой реализацию так называемой оптической патоки [2]. Заметим, что для доплеровского охлаждения газа в ловушке не требуется в принципе действие встречных пучков, как это обычно используется в эксперименте.

### 4. Большой микроканонический ансамбль

Покажем теперь, что распределения (1) могут быть получены как стационарные решения соответствующих кинетических уравнений и для изолированной системы, состоящей из произвольного конечного числа частиц. Для того чтобы изложение сделать менее громоздким, мы ограничимся статистикой Бозе–Эйнштейна. Доказательство этого утверждения для статистики Ферми–Дирака полностью аналогично.

Установление термодинамического равновесия в изолированной системе определяется взаимодействием между частицами. Вид взаимодействия произволен, важно лишь, чтобы в результате последовательности переходов взаимодействие связывало любые пары состояний системы. Считая межчастичное взаимодействие слабым, мы будем пренебрегать его влиянием на изменение квантовых состояний и уровней энергии.

В связи с тем, что в изолированной системе при взаимодействии между частицами должен выполняться закон сохранения энергии, мы рассмотрим специальную модель — одномерную гармоническую ловушку, эквидистантность уровней которой позволит это осуществить достаточно простым и наглядным образом. Оператор межчастичного взаимодействия можно выбрать также в гармоническом приближении в виде недиагональной квадратичной формы по координатам частиц. Такое взаимодействие (в первом порядке теории возмущений) будет описывать переходы, при которых одна из частиц переходит на соседний верхний (нижний) уровень, тогда как другая переходит на соседний нижний (верхний) уровень. Предлагаемая модель должна быть, конечно, дополнена наличием поперечной релаксации рассматриваемых состояний. Система кинетических уравнений, которая описывает такой процесс, при упрощённой записи (мы считаем матричные элементы недиагональной квадратичной формы одинаковыми и соответствующим образом выбираем масштаб времени) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{n}_k &= -n_k(n_{k-1} + 1)k \sum_{p=1, p \neq k, p \neq k+1, p \neq k-1} n_{p-1}(n_p + 1) \times \\ &\times p - n_k(n_{k+1} + 1)(k + 1) \sum_{p=0, p \neq k, p \neq k+1, p \neq k-1} n_{p+1}(n_p + 1) \times \\ &\times (p + 1) + n_{k+1}(n_k + 1)(k + 1) \sum_{p=1, p \neq k, p \neq k+1, p \neq k+2} n_{p-1} \times \\ &\times (n_p + 1)p + n_{k-1}(n_k + 1)k \sum_{p=0, p \neq k, p \neq k-1, p \neq k-2} n_{p+1} \times \\ &\times (n_p + 1)(p + 1). \quad (16) \end{aligned}$$

Записанная выше система уравнений обеспечивает закон сохранения среднего числа частиц и закон сохранения средней энергии, т.е. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к большому микроканоническому ансамблю. Проверим выполнение закона сохранения среднего числа частиц

$$\sum_s \dot{n}_s = 0. \quad (17)$$

Каждому члену типа  $-n_k(n_{k+1} + 1)n_p(n_{p-1} + 1)$  в уравнении для  $\dot{n}_k$  можно сопоставить такой же член, но со знаком "+" в уравнении для  $\dot{n}_{p-1}$ . Поэтому сумма  $\sum_s \dot{n}_s$  равна нулю.

Закон сохранения средней энергии может быть записан в форме

$$\sum_s s \dot{n}_s = 0. \quad (18)$$

Проверим его выполнение. Член типа

$$(k+1)n_k(n_{k+1} + 1)p n_p(n_{p-1} + 1) \quad (19)$$

встретится только в четырёх слагаемых этой суммы: в слагаемом, содержащем  $\dot{n}_k$  с множителем  $-k$ ; в слагаемом, содержащем  $\dot{n}_{k+1}$  с множителем  $(k+1)$ ; в слагаемом, содержащем  $\dot{n}_p$  с множителем  $-p$ ; в слагаемом, содержащем  $\dot{n}_{p-1}$  с множителем  $p-1$ . Складывая эти множители, получаем нуль, что доказывает справедливость уравнения (18).

Покажем, что стационарным решением уравнений (16) будет, как и в случае большого канонического ансамбля, распределение Бозе–Эйнштейна

$$n_k = \frac{1}{\exp[(k-\mu)/T] - 1}. \quad (20)$$

Здесь температура  $T$  и химический потенциал  $\mu$  выражены в единицах  $\hbar\omega$ , где  $\omega$  — собственная частота гармонической ловушки. При этом значение химического потенциала будем отсчитывать от энергии основного состояния.

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{k,k-1} &= k \sum_{p=1, p \neq k, p \neq k+1, p \neq k-1} n_{p-1}(n_p + 1)p, \\ \tilde{w}_{k,k+1} &= (k+1) \sum_{p=0, p \neq k, p \neq k+1, p \neq k-1} n_{p+1}(n_p + 1)(p+1), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\tilde{w}_{k+1,k} = (k+1) \sum_{p=1, p \neq k, p \neq k+1, p \neq k+2} n_{p-1}(n_p + 1)p,$$

$$\tilde{w}_{k-1,k} = k \sum_{p=0, p \neq k, p \neq k-1, p \neq k-2} n_{p+1}(n_p + 1)(p+1),$$

уравнения (16) можно представить в следующем виде, аналогичном (9):

$$\begin{aligned} \dot{n}_k &= -n_k(n_{k-1} + 1)\tilde{w}_{k,k-1} - n_k(n_{k+1} + 1)\tilde{w}_{k,k+1} + \\ &+ n_{k+1}(n_k + 1)\tilde{w}_{k+1,k} + n_{k-1}(n_k + 1)\tilde{w}_{k-1,k}. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя (20) и (21), нетрудно показать что связь между коэффициентами  $\tilde{w}_{k,k-1}$  и  $\tilde{w}_{k-1,k}$  такая же, как

между коэффициентами  $w_{k,k-1}$  и  $w_{k-1,k}$  в уравнениях (9):

$$\tilde{w}_{k-1,k} = \tilde{w}_{k,k-1} \exp\left(-\frac{1}{T}\right). \quad (23)$$

Этого достаточно, как было показано в разделе 3, чтобы утверждать, что распределение (20) является стационарным решением кинетических уравнений (16). При наличии вырождения уровней кинетические уравнения (16) могут быть модифицированы аналогично уравнениям (9а).

Для иллюстрации применения распределения Бозе–Эйнштейна к изолированной системе с конечным числом частиц найдём зависимость от температуры химического потенциала и заселённости основного состояния (бозе-эйнштейновского конденсата) для одного миллиона бозе-частиц в изотропной гармонической ловушке. Уравнение (2а) в данном случае приобретает вид

$$\sum_{k=0,1,2,\dots} \frac{(1/2)(k+1)(k+2)}{\exp[(k-\mu)/T] - 1} = N. \quad (24)$$

Полученные с помощью легко реализуемого численного решения уравнения (24) результаты приведены в табл. 2.

**Таблица 2.** Температурная зависимость химического потенциала и заселённости основного состояния для большого микроканонического ансамбля из  $10^6$  бозе-частиц в изотропной гармонической ловушке

$T$	$\mu$	$n_0$	$\varepsilon - 1/2$
50	-0,000 059 3	843400	6,916
80	-0,000 217	368600	44,89
90	-0,000 864	104100	71,60
93	-0,007 334	12680	81,49
94	-1,293	72,178	83,71
95	-3,530	26,416	85,04
100	-15,793	5,845	91,16

В последнем столбце таблицы приводится среднее значение энергии, приходящееся на одну степень свободы, которое вычислялось как

$$\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{3N} \sum_{k=0,1,2,\dots} \frac{(1/2)k(k+1)(k+2)}{\exp[(k-\mu)/T] - 1}. \quad (25)$$

Сопоставление первого и последнего столбцов этой таблицы можно использовать для определения установившейся температуры изолированной системы при задании начального значения энергии.

## 5. Заключение

Выполненное рассмотрение позволяет интерпретировать распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна для идеального газа с произвольным конечным числом частиц как стационарные решения предложенных кинетических уравнений.

Отметим ещё раз, что наши кинетические уравнения носят приближённый характер, поскольку при их выводе проводится независимое усреднение по числам заселения различных состояний. Это приближение соответствует моделям большого канонического и большого микроканонического ансамблей. В то же время сравнение с точным результатом для канонического ансамбля даже

при относительно небольшом числе (1000) бозе-частиц (см. табл. 1) демонстрирует хорошую точность получаемых стационарных решений при заметном отклонении от приближения термодинамического предела.

Решая кинетические уравнения (9) или (21) с произвольными начальными условиями, можно демонстрировать эволюцию процесса установления термодинамического равновесия и, в частности, образование бозе-эйнштейновского конденсата (в случае бозе-газа). Ещё более адекватная картина установления термодинамического равновесия может быть получена с помощью метода статистических испытаний (метода Монте-Карло) при использовании вероятностей переходов типа (4) без усреднения по числам заполнения.

Автор выражает благодарность В.Л. Гуревичу, Вл.В. Кочаровскому, Вит.В. Кочаровскому, М.М. Местечкину, А.С. Трошину, А.К. Щёкину и В.И. Юкалову за обсуждение работы и полезные комментарии, С.Н. Загуляеву за предоставление данных по заселённости БЭК, полученных рекуррентным методом.

## Список литературы

- Phillips W D *Rev. Mod. Phys.* **70** 721 (1998); Филипс В *УФН* **169** 305 (1999)
- Chu S *Rev. Mod. Phys.* **70** 685 (1998); Чу С *УФН* **169** 274 (1999)
- Cohen-Tannoudji C N *Rev. Mod. Phys.* **70** 707 (1998); Коэн-Тануджи К Н *УФН* **169** 292 (1999)
- Кеттерле В *УФН* **173** 1339 (2003)
- Корнелл Э А, Виман К Э *УФН* **173** 1320 (2003)
- Ketterle W, van Druten N J *Phys. Rev. A* **54** 656 (1996)
- Kristen K, Toms D J *Phys. Rev. A* **54** 4188 (1996)
- Kagan Yu, Svistunov B V *Phys. Rev. Lett.* **79** 3331 (1997)
- Haugerud H, Haugset T, Pavndal F *Phys. Lett. A* **225** 18 (1997)
- Pathria R K *Phys. Rev. A* **58** 1490 (1998)
- Kocharovskiy V V, Kocharovskiy V I V, Scully M O *Phys. Rev. Lett.* **84** 2306 (2000)
- Kocharovskiy V V, Kocharovskiy V I V, Scully M O *Phys. Rev. A* **61** 053606 (2000)
- Kocharovskiy V V et al. *Phys. Rev. A* **61** 023609 (2000)
- Davis M J, Morgan S A, Burnett K *Phys. Rev. Lett.* **87** 160402 (2001)
- Yan Z *Eur. J. Phys.* **22** 233 (2001)
- Xiong H et al. *Phys. Rev. A* **65** 033609 (2002)
- Davis M J, Morgan S A *Phys. Rev. A* **68** 053615 (2003)
- Sinantra A, Lobo C, Castin Y *Phys. Rev. Lett.* **87** 210404 (2001)
- Sinantra A, Lobo C, Castin Y *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **35** 3599 (2002)
- Goral K, Gajda M, Rzazewski K *Opt. Express* **8** 92 (2001)
- Brewczyk M, Gajda M, Rzażewski K *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **40** R1 (2007)
- Ketterle W *Rev. Mod. Phys.* **74** 1131 (2002)
- Cornell E A, Wieman C E *Rev. Mod. Phys.* **74** 875 (2002)
- Pitaevskii L, Stringari S *Bose–Einstein Condensation* (Oxford: Clarendon Press, 2003)
- Kocharovskiy V V et al. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **53** 291 (2006); cond-mat/0605507
- Yukalov V I *Laser Phys. Lett.* **4** 632 (2007)
- Yukalov V I *Laser Phys.* **19** 1 (2009)
- Glaum K, Kleinert H, Pelster A *Phys. Rev. A* **76** 063604 (2007)
- Бугрий А И, Локтев В М *ФНТ* **35** 983 (2009) [Bugrij A I, Loktev V M *Low Temp. Phys.* **35** 770 (2009)]
- Трифонов Е Д, Загуляев С Н *УФН* **180** 89 (2010) [Trifonov E D, Zagulyaev S N *Phys. Usp.* **53** 83 (2010)]
- Kocharovskiy V V, Kocharovskiy V I V *Phys. Rev. A* **81** 033615 (2010)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Ч. 1* (М.: Наука, 1995) [Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics Vol. 1* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
- Леонтович М А *Введение в термодинамику. Статистическая физика* (М.: Наука, 1983)
- Gust E, Reichl L E *Phys. Rev. E* **81** 061202 (2010)
- Eckern U *J. Low Temp. Phys.* **54** 333 (1984)
- Kirkpatrick T R, Dorfman J R *J. Low Temp. Phys.* **58** 301, 399 (1985)
- Proukakis N P, Burnett K, Stoof H T C *Phys. Rev. A* **57** 1230 (1998)
- Walser R et al. *Phys. Rev. A* **59** 3878 (1999)
- Imamović-Tomasović M, Griffin A *Phys. Rev. A* **60** 494 (1999)
- Imamovic-Tomasovic M, Griffin A *J. Low Temp. Phys.* **122** 617 (2001)
- Wachter J et al. *Phys. Rev. A* **64** 053612 (2001)
- Kocharovskiy V V, Kocharovskiy V I V *Laser Phys.* **17** 700 (2007)

## On the types of quantum statistics for ensembles of a finite number of particles

E.D. Trifonov

Herzen State Pedagogical University of Russia,  
Moika 48, 191186 St. Petersburg, Russian Federation  
E-mail: thphys@herzen.spb.ru

The well-known Bose–Einstein and Fermi–Dirac distributions can be considered as stationary solutions of kinetic equations for the mean occupation numbers in an ideal gas of an arbitrary finite number of identical particles.

PACS numbers: 05.30.Jp, **74.40.+k**

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107d.0747

Bibliography — 42 references

Received 16 March 2010, revised 27 May 2011

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **181** (7) 747–751 (2011)

*Physics–Uspekhi* **54** (7) (2011)