

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Градиентные акустические барьеры (точно решаемые модели)

А.Б. Шварцбург, Н.С. Ерохин

Обзор посвящён физическим основам и математическому аппарату задач о прохождении акустических волн через градиентные волновые барьеры, образованные непрерывными одномерными пространственными распределениями плотности и/или упругих параметров среды в слое конечной толщины. Физические основы таких процессов связаны с эффектами нелокальной (геометрической) нормальной и аномальной дисперсий, определяемых формой и геометрическими параметрами градиентного барьера. Математический аппарат основан на точно решаемых моделях градиентных барьеров, содержащих до четырёх свободных параметров, и методе вспомогательного барьера, позволяющего использовать найденные точно решаемые модели для построения новых, также точно решаемых моделей таких барьеров. Представлены спектры пропускания продольных и сдвиговых волн через рассматриваемые градиентные барьеры; зависимость этих спектров от градиента и кривизны распределений плотности и упругих параметров барьера показана с помощью общих формул, соответствующих нормальной и аномальной геометрической дисперсии. Исследованы случаи безотражательного туннелирования звука через градиентные барьеры, сформированные как распределениями упругих параметров в неоднородном слое, так и криволинейными границами однородного слоя. Отмечены возможности использования субволновых градиентных барьеров и состоящих из них периодических структур для создания элементов фононных кристаллов.

PACS numbers: 43.60.Vx, 51.40.+p, 62.60.+v, 68.35.Iv

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201106c.0627

Содержание

1. Введение. Неоднородные акустические среды (627).
2. Собственные частоты сдвиговых волн в градиентных слоях (629).
2.1. Струны с переменной плотностью: новый взгляд на старую проблему. 2.2. Собственные частоты слоя с переменным модулем сдвига.
3. Нелокальная дисперсия градиентных акустических барьеров: нормальная и аномальная дисперсия (631).
3.1. Прохождение продольной звуковой волны через слой с переменной плотностью. 3.2. Спектры отражения сдвиговых волн в слое с переменным модулем сдвига. Метод вспомогательного барьера.
4. Распространение звука через градиентные твердотельные структуры: комбинированные дисперсионные эффекты переменной плотности и упругости (636).

- 4.1. "Двойной" градиентный барьер: оптимальные параметры барьера при заданной дисперсии. 4.2. Спектры отражения волн сдвига в градиентном слое при согласованном распределении плотности и упругости.
 5. Туннелирование звука в среде с нелокальной дисперсией (639).
5.1. Безотражательное акустическое туннелирование через градиентные волновые барьеры. 5.2. Туннелирование продольного звука через однородную среду в канале с переменным сечением.
 6. Градиентные элементы фононных кристаллов (642).
6.1. Субволновые акустические барьеры. 6.2. Периодические градиентные структуры.
 7. Заключение (644).
- Список литературы (645).

1. Введение. Неоднородные акустические среды

Настоящий обзор посвящён рассмотрению физических основ и математического аппарата теории градиентных акустических барьеров. Такие барьеры формируются слоями неоднородной упругой среды с конечной толщиной и непрерывным распределением плотности и упругих модулей среды внутри слоя. Распространение упругих волн в неоднородных естественных средах традиционно привлекало внимание в задачах геофизики [1–3]. В последние годы появление искусственных материалов (метаматериалов [4–6]) и их интенсивные исследования стимулировали развитие на основе результатов этих исследований качественно новой концепции градиентных акустических барьеров. Эта концепция формируется сейчас в связи с задачами отражения и пропу-

А.Б. Шварцбург. Объединённый институт высоких температур РАН, ул. Ижорская 13/19, 127412 Москва, Российская Федерация
Факс (495) 485-99-22
Институт космических исследований РАН, ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 333-41-00. Факс (495) 333-12-48
E-mail: alex-s-49@yandex.ru
Н.С. Ерохин. Институт космических исследований РАН, ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 333-41-00
Факс (495) 333-12-48
E-mail: nerokhin@mx.iki.rssi.ru

Статья поступила 8 сентября 2010 г.,
после доработки 20 ноября 2010 г.

скания звука слоями неоднородных сплавов [7], композитных материалов [8] и пространственно ограниченных пористых структур [9], в частности, субволновых размеров. Акустические спектры таких слоёв могут кардинально отличаться от соответствующих спектров естественных и однородных сред.

1. Градиентным акустическим барьерам свойственны характерные частоты, определяемые формой пространственных профилей плотности и упругих свойств барьера и его толщиной; влияние этих частот на распространение волн приводит к эффектам сильной геометрической, или нелокальной, частотной дисперсии спектров отражения и пропускания барьера, создаваемой искусственно в заданном интервале частот. Значительные амплитудно-фазовые изменения структуры волнового поля внутри такого барьера могут формироваться на расстояниях, меньших длины волны (субволновые барьеры).

2. Искусственная дисперсия, контролируемая параметрами градиентного барьера, может быть как нормальной, так и аномальной. Для обеспечения нужной дисперсии в заданном диапазоне частот можно выбрать материал градиентного барьера и его толщину так, чтобы потери энергии волны в этом диапазоне частот были минимальными.

3. Эффекты искусственной геометрической дисперсии позволяют установить аналогии свойств градиентных волновых барьеров в акустике и оптике [10]. В частности, акустические барьеры с искусственной дисперсией волноводного типа открывают возможности безотражательного туннелирования продольных и поперечных звуковых волн.

Физические особенности рассматриваемых эффектов иллюстрируются в обзоре на примере задач взаимодействия звука с градиентными барьерами в простейшей геометрии. Предполагается, что плоская акустическая волна падает со стороны $z < 0$ нормально к границе изотропного слоя, совпадающей с плоскостью $z = 0$; другая граница слоя образуется плоскостью $z = d$. Как известно, при такой конфигурации в однородном слое могут распространяться в направлении z две акустические волны: продольная и поперечная моды, скорости v_l и v_t которых, а также волновые числа $k_{l,t}$ для каждой частоты ω определяются следующими выражениями [11]:

$$v_l^2 = \frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad v_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\mu)}, \quad k_{l,t} = \frac{\omega}{v_{l,t}}. \quad (1.1)$$

Здесь E — модуль Юнга, ρ — плотность среды, μ — коэффициент Пуассона. Дисперсия звука в среде (1.1) отсутствует.

В рассматриваемом градиентном слое плотность ρ и величины E и μ , в отличие от таковых в (1.1), зависят от координаты z . Такие зависимости удобно представить, вводя безразмерные дифференцируемые функции $F^2(z)$ и $W^2(z)$; так, для профиля плотности $\rho(z)$ полагаем

$$\rho(z) = \rho_0 F^2(z), \quad \rho|_{z=0} = \rho_0, \quad F|_{z=0} = 1. \quad (1.2)$$

Для описания сдвиговых волн удобно связать функцию $W^2(z)$ с координатно-зависимым модулем сдвига $G(z)$:

$$G(z) = G_0 W^2(z), \quad G_0 = \frac{E}{1+\mu}, \quad W|_{z=0} = 1. \quad (1.3)$$

Значения E , μ и G_0 в (1.3) соответствуют границе барьера $z = 0$. Для продольных волн функция $W^2(z)$ будет определена в разделах 3.1, 4.1, 4.2, 6.1.

Следует подчеркнуть принципиальное отличие рассматриваемой здесь нелокальной акустической дисперсии в градиентных средах от локальной пространственной дисперсии звука в структурированных материалах, имеющих равномерно распределённые включения, упругие свойства которых отличны от упругих свойств основного материала [12, 13]. Упругие модули таких однородных структурированных материалов характеризуются двумя дополнительными, имеющими размерность длины константами, g и h , связанными с потенциальной и кинетической энергией включений в поле волны. Фазовые скорости продольных (V_l) и сдвиговых (V_t) волн, определяемые в рамках такого подхода, зависят от соответствующих волновых чисел k_l и k_t [14]:

$$V_{l,t} = v_{l,t} \sqrt{\frac{1 + g^2 k_{l,t}^2}{1 + h^2 k_{l,t}^2}}.$$

Здесь $v_{l,t}$ — фазовые скорости продольных и сдвиговых волн в отсутствие включений (1.1). Отмеченная локальная дисперсия фазовой скорости, обусловленная характерными размерами включений, представляет интерес для исследования этих размеров. Так, применение указанного подхода к акустике твёрдых пористых биоматериалов даёт для констант g и h оценку $g \approx h \approx 10^{-5}$ м [15].

Физической основой рассматриваемых градиентных акустических барьеров является геометрическая дисперсия звука, обусловленная профилями неоднородности плотности и упругих свойств материала и толщиной барьера. Математический аппарат, позволяющий выявить и оптимизировать вклад этих дисперсионных эффектов в спектральные характеристики барьера, основан на точных решениях уравнений градиентной акустики. Поскольку толщины акустических барьеров могут быть соизмеримыми с длиной волны или меньшими неё, то требуемые решения не связаны с допущениями о малости или медленности изменений параметров среды или волнового поля. Соответственно, приближение Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ), теория возмущений или асимптотические методы [16] в этих задачах не используются. Ряд точных решений в акустике неоднородных сред исследован в монографии [17], обобщающей результаты, известные к моменту её издания (1989 г.). В отличие от этого, в настоящем обзоре основное внимание уделяется новым аналитическим методам, выявляющим специфику дисперсии и туннелирования в субволновых градиентных акустических барьерах, созданных пространственными распределениями плотности и упругих модулей материала. Особенное внимание уделено методу вспомогательного барьера, представляющему собой стандартизованный алгоритм получения спектров отражения от новых барьеров на основе преобразования ранее известных аналитических решений.

Нашей задачей является нахождение законов нелокальной дисперсии и спектров отражения и пропускания волн в градиентных акустических барьерах, характеризующихся различными распределениями параметров $F^2(z)$ и $W^2(z)$. Раздел 2 посвящён сдвигам частот собственных колебаний твердотельных и жидких слоёв, обусловленным градиентами плотности и упругих модулей. Разделы 3 и 4 показывают влияние кривизны профилей

$F^2(z)$ и $W^2(z)$ на разнообразии спектров отражения продольных и сдвиговых волн от градиентных барьеров; в разделе 3 эффекты этих профилей рассматриваются по отдельности, а раздел 4 посвящён отражению от сложных барьеров, формируемых одновременно обоими профилями ("двойные барьеры"). В этих разделах метод вспомогательного барьера иллюстрируется с помощью несложного математического аппарата. Безотражательное туннелирование звука через градиентные барьеры при разных механизмах туннелирования рассмотрено в разделе 5. Примеры субволновых градиентных структур, в частности периодических, представляющих интерес для разработок фононных кристаллов, обсуждаются в разделе 6. В заключении (раздел 7) отмечен ряд актуальных задач этой формирующейся в последнее время теории, которые ждут своего решения.

2. Собственные частоты сдвиговых волн в градиентных слоях

Теоретические задачи о распространении звука в упругих средах рассматриваются на основе уравнений движения, связывающих смещение частиц среды \mathbf{u} с компонентами тензора напряжений σ_{ik} [11]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (2.1)$$

Здесь ρ — плотность среды, x_k — координаты; в градиентных средах плотность ρ и величины σ_{ik} непрерывно зависят от координат x_k . При анализе акустической распространяющейся в направлении z волны с частотой ω , характеризуемой смещением среды $u_x \exp(-i\omega t)$ в направлении $x \perp z$ (волна сдвига), учтём, что в уравнение (2.1) будет входить только одна компонента тензора напряжений — $\sigma_{xz}(z)$ [11]. Представляя эту компоненту с помощью функции $W^2(z)$ в виде

$$\sigma_{xz}(z) = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{du_x}{dz} W^2(z), \quad (2.2)$$

можно записать уравнение движения (2.1), обозначая $u_x = u$, следующим образом:

$$W^2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} F^2(z) u + 2WW_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$

Здесь $W_z = \partial W / \partial z$, скорость $v_0 = v_t$, где v_t (1.1) — скорость сдвиговой волны на границе слоя. Выбор модельных функций F и W в уравнении (2.3) до сих пор ограничен лишь условиями $F^2(0) = W^2(0) = 1$. Уравнение (2.3) используется в разделе 3 для решения ряда задач акустики градиентных слоёв. В разделах 2.1, 2.2 обсуждаются спектры частот собственных сдвиговых колебаний таких слоёв, определяемые распределениями как плотности, так и модуля сдвига.

2.1. Струны с переменной плотностью: новый взгляд на старую проблему

"Для математика натянутые струны всегда должны представлять особый интерес, ибо именно вокруг них разыгрывались споры Даламбера, Эйлера, Бернулли и Лагранжа, касающиеся решений дифференциальных уравнений в частных производных" — такими словами Рэлей определил в *Теории звука* [18] роль задачи о колебаниях упругой струны в становлении математиче-

ской физики. Эти слова оказались пророческими — в последующие годы уравнение упругих колебаний тонкой однородной струны стало эталонным для многих задач оптики, радиофизики и квантовой механики. Такое уравнение, следующее из (2.3) при $F = W = \text{const} = 1$, совпадает с одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.4)$$

описывающим изгибную волну, распространяющуюся со скоростью v вдоль тонкой струны с постоянным поперечным сечением S , натянутой силой T , где [11]

$$v^2 = \frac{T}{S\rho}. \quad (2.5)$$

Спектр собственных частот однородной струны Ω_n , натянутой между точками $z = 0$ и $z = d$ так, что смещения струны в этих точках обращаются в нуль, даётся классической формулой:

$$\omega_n = \frac{v_0 \pi n}{d}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

Расширяя пределы применимости полученных выражений для возмущений, Рэлей исследовал спектр колебаний "струны, у которой линейная плотность не вполне постоянна" [18]. Предполагая, что изменения плотности незначительны, и используя теорию возмущений, Рэлей нашёл малые поправки к спектру (2.6).

Для иллюстрации методов градиентной акустики представляется целесообразным заново рассмотреть эту классическую задачу и найти спектр колебаний струны с переменной плотностью без допущений о малых изменениях плотности. Полагая в уравнении (2.3) $W = \text{const} = 1$, можно переписать его в виде

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} F^2(z) u = 0. \quad (2.7)$$

Безразмерная функция $F^2(z)$ в (2.7) моделирует распределение плотности вдоль струны. Уравнение (2.7) можно формально рассматривать как волновое уравнение для среды, скорость волны в которой зависит от координаты как $v(z) = v_0/F(z)$; решения таких уравнений существенно зависят от вида функции $F^2(z)$. Рассмотрим для примера простую модель, имеющую точное решение в виде элементарных функций [15]:

$$F(z) = \left(1 + \frac{s_1 z}{L_1} + \frac{s_2 z^2}{L_2^2} \right)^{-1}, \quad s_1 = 0, \pm 1, \quad s_2 = 0, \pm 1. \quad (2.8)$$

Профиль (2.8) содержит четыре свободных параметра: характерные длины L_1, L_2 и s_1, s_2 . Значения $s_1 = -1, s_2 = 1$ соответствуют выпуклому профилю $F(z)$, а $s_1 = 1, s_2 = -1$ — вогнутому. Следует отметить, что при $s_2 = 0$ профиль (2.8) переходит в часто используемую в теории волн в градиентных средах модель Рэля [18]

$$F(z) = \left(1 \pm \frac{z}{L} \right)^{-1}, \quad (2.9)$$

описывающую монотонные изменения плотности; такая модель является частным случаем более гибкой модели (2.8), пригодной для описания как монотонных, так и немонотонных (выпуклых и вогнутых) распределений.

Рассмотрим вначале колебания струны длиной d с выпуклым симметричным профилем плотности $\rho(z)$

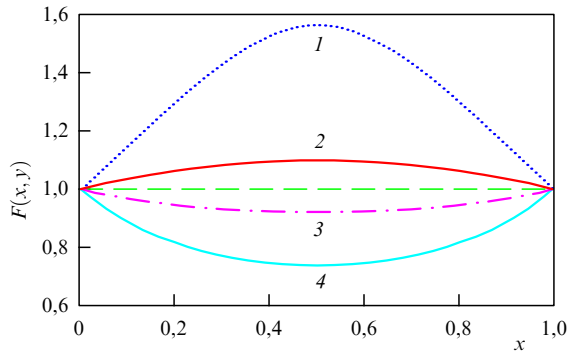


Рис. 1. Распределения $F(x)$ в градиентных барьерах (2.8); $x = z/d$ — нормированная толщина барьера. Распределения 1 и 2 соответствуют значениям $s_1 = -1, s_2 = 1$ (выпуклый профиль), а распределения 3, 4 — значениям $s_1 = 1, s_2 = -1$ (вогнутый профиль). Для кривых 2, 3 параметр $y = 0,3$, а для кривых 1, 4 — $y = 0,6$.

(рис. 1). В этом случае для функции $F(z)$ (2.8) выполняется условие $F(0) = F(d) = 1$, а максимум профиля ρ_{\max} находится в точке $z = 0,5d$. Неизвестные длины L_1 и L_2 в модели (2.8) определяются через толщину слоя d с помощью безразмерного параметра y :

$$y = \frac{L_2}{2L_1}, \quad L_2 = \frac{d}{2y}, \quad L_1 = \frac{d}{4y^2}, \quad (2.10)$$

а параметр y связан с максимумом профиля ρ_{\max} соотношением

$$\rho_{\max} = \frac{\rho_0}{(1-y^2)^2}, \quad y = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{\max}}}}. \quad (2.11)$$

Как видно из (2.11), $0 \leq y^2 < 1$.

Для решения волнового уравнения (2.7) целесообразно ввести функцию Ψ и переменную η :

$$u = \frac{\Psi}{\sqrt{F}}, \quad \eta(z) = \int_0^z F(z_1) dz_1. \quad (2.12)$$

При такой замене переменных уравнение (2.7) преобразуется в уравнение с постоянными коэффициентами в пространстве η [10]:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} + q^2 \Psi = 0, \quad q = \frac{\omega}{v_0} N_+, \quad N_+ = \sqrt{1 + S_1^2}, \quad S_1 = \frac{\Omega_1}{\omega}, \quad (2.13)$$

где Ω_1 — характерная частота, определяемая временем пробега волны со скоростью v_0 через градиентный слой толщиной d и геометрическими параметрами слоя (форм-фактором $\theta_1(y)$),

$$\Omega_1 = \frac{v_0}{d} \theta_1(y), \quad \theta_1(y) = 2y \sqrt{1 - y^2}, \quad (2.14)$$

$$\eta = \int_0^z F(z_1) dz_1 = \frac{L_2}{\sqrt{1 - y^2}} \arctan \frac{x \sqrt{1 - y^2}}{1 - xy}, \quad x = \frac{z}{L_2}. \quad (2.15)$$

Записывая линейно-независимые решения уравнения (2.13) в виде $\sin(q\eta)$ и $\cos(q\eta)$, можно представить решения уравнения (2.7), описывающие стоячие волны,

установившиеся на струне, в виде

$$u = \frac{\sin(q\eta)}{\sqrt{F(z)}}. \quad (2.16)$$

Частоты стоячих волн описываются решениями (2.16), обращающимися в нуль на концах струны, в точках $\eta = 0$ и $\eta(d)$; величина $\eta(d)$ вычисляется из (2.16):

$$\eta(d) = dA, \quad A = \left(2y \sqrt{1 - y^2}\right)^{-1} \arctan \frac{2y \sqrt{1 - y^2}}{1 - 2y^2}. \quad (2.17)$$

Подставляя значения q из (2.13) и $\eta(d)$ из (2.17) в условие $\sin(q\eta) = 0$ и учитывая выражение (2.14) для характерной частоты Ω_1 , найдём дискретный спектр собственных колебаний градиентной струны с "выпуклым" распределением плотности вдоль струны, заданным функцией (2.8) при $s_1 = -1, s_2 = 1$:

$$\Omega_{+n} = \omega_n D_n. \quad (2.18)$$

Здесь ω_n — собственная частота однородной струны (2.6), D_n — безразмерный поправочный коэффициент,

$$D_n = \sqrt{A^{-2} - \frac{4y^2(1 - y^2)}{\pi^2 n^2}}. \quad (2.19)$$

Спектр собственных частот струны с "вогнутым" профилем плотности (2.8) ($s_1 = 1, s_2 = -1$) определяется аналогично: из (2.13)–(2.15) получаем

$$q = \frac{\omega}{v_0} N_-, \quad N_- = \sqrt{1 - S_2^2}, \quad S_2 = \frac{\Omega_2}{\omega}, \quad (2.20)$$

$$\Omega_2 = \frac{v_0}{d} \theta_2(y), \quad \theta_2(y) = 2y \sqrt{1 + y^2}. \quad (2.21)$$

Параметр y связан, по аналогии с (2.11), с минимальной величиной плотности в слое ρ_{\min} ,

$$y = \sqrt{\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{\min}}} - 1}, \quad (2.22)$$

$$\eta(d) = dB, \quad B = [2y \sqrt{1 + y^2}]^{-1} \ln \frac{y_+}{y_-}, \quad (2.23)$$

$$y_{\pm} = \sqrt{1 + y^2} \pm y.$$

Спектр колебаний струны с "вогнутым" профилем плотности (2.8), Ω_{-n} , можно записать в виде (2.18), вводя поправочный коэффициент H_n :

$$\Omega_{-n} = \omega_n H_n, \quad H_n = \sqrt{B^{-2} + \frac{4y^2(1 + y^2)}{\pi^2 n^2}}. \quad (2.24)$$

Следует подчеркнуть, что при вычислении спектра колебаний струны с переменной плотностью (2.8) предположение о малости изменений плотности не использовалось. Графики поправочных коэффициентов D_n и H_n для различных собственных частот показаны на рис. 2. В пределе исчезающей неоднородности ($y \rightarrow 0$) из (2.19) и (2.24) получим

$$\lim D_n|_{y \rightarrow 0} = 1, \quad \lim H_n|_{y \rightarrow 0} = 1, \quad (2.25)$$

$$\lim \Omega_{+n}|_{y \rightarrow 0} = \lim \Omega_{-n}|_{y \rightarrow 0} = \omega_n.$$

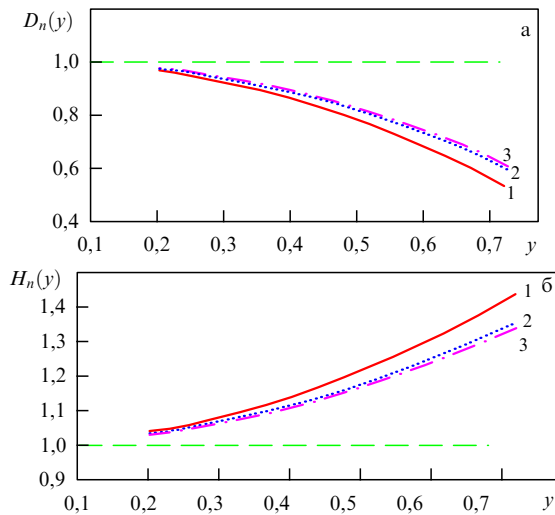


Рис. 2. Поправочные множители D_n (2.19) (а) и H_n (2.24) (б) для спектров собственных колебаний струн с неравномерным распределением плотности (2.8). Цифры 1, 2, 3 около кривых — номера мод.

Как и следовало ожидать, спектры градиентных струн (2.18) и (2.24) сводятся в этом пределе к классической формуле для однородной струны (2.6).

2.2. Собственные частоты слоя с переменным модулем сдвига

В отличие от колебаний, рассмотренных в разделе 2.1, здесь рассматриваются собственные колебания слоя, плотность которого постоянна, а модуль сдвига зависит от координаты. Такая модель используется, в частности, в геоакустике для описания распространения сейсмических волн сдвига [18] в слое осадочных пород на дне моря; при этом глубинными изменениями плотности пород пренебрегается ($\rho = \rho_0$, $F = \text{const} = 1$), а зависимость модуля сдвига $G(z)$ (1.3) от глубины z в слое ($0 \leq z \leq d$) даётся эмпирической формулой

$$W = \left(1 + \frac{z}{L}\right)^q, \quad 0 < q < 1. \tag{2.26}$$

Здесь L — некоторая характерная длина, q — безразмерный параметр, глубина z отсчитывается вниз от поверхности находящегося на дне моря слоя осадочной породы, лежащего на твёрдом основании.

Для решения уравнения (2.3) в модели (2.26) удобно ввести новые переменную x и функцию f [19]:

$$x = 1 + \frac{z}{L}, \quad u = x^{1/2-q} f. \tag{2.27}$$

Такая замена переменных приводит уравнение (2.3) к виду

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + f \left[\frac{\omega^2 L^2}{v_0^2 x^{2q}} - \frac{(1/2 - q)^2}{x^2} \right] = 0, \tag{2.28}$$

где v_0 — скорость сдвиговых волн на поверхности слоя $z = 0$. Для того чтобы решить уравнение (2.28), следует ввести новую переменную:

$$x = y^m, \quad m = \frac{2}{1 - q}, \tag{2.29}$$

Подстановка (2.29) переводит (2.28) в следующее уравнение:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{df}{dy} + 4f \left(p^2 y^2 - \frac{s^2}{y^2} \right) = 0, \tag{2.30}$$

$$p = \frac{\omega L}{v_0(1 - q)}, \quad s = \frac{q - 1/2}{1 - q},$$

которое при замене переменных $y^2 = u$ преобразуется в уравнение Бесселя. Смещение среды на глубине z в поле волны сдвига можно записать в виде стоячей волны:

$$u = \left(1 + \frac{z}{L}\right)^{1/2-q} J_s \left[p \left(1 + \frac{z}{L}\right)^{1-q} \right]. \tag{2.31}$$

Полагая смещение среды на дне водного слоя ($z = d$) равным нулю, можно определить собственные частоты рассматриваемого слоя через корни функций Бесселя $J_s(\chi_{sn}) = 0$ [17]:

$$\omega_n = \frac{v_0(1 - q)\chi_{sn}}{L(1 + d/L)^{1-q}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.32}$$

При типичных значениях [19] $v_0 = 100$ м с⁻¹, $q = 0,6$, $d = 200$ м, $L = 1$ м выражение (2.32) даёт резонансные частоты первых мод, лежащие в частотном интервале в несколько герц. В частном случае $q = 2/3$ из (2.30) следует $s = 0,5$; как известно, при полуцелых значениях параметра s функция Бесселя выражается через элементарные функции: так, например, $J_{0,5}(x) = x^{-0,5} \sin x$, в этом случае корни $\chi_{sn} = \pi n$, а спектр колебаний градиентного слоя (2.32) состоит из равноотстоящих частот.

Другим интересным примером собственных акустических частот, возникающих в газовых и жидких средах, плотность которых $\rho(z)$ неоднородна в поле тяжести с ускорением свободного падения g , являются частоты Вэйсяля – Брента Ω_{VB} (см., например, [20]):

$$\Omega_{VB}^2 = - \frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}. \tag{2.33}$$

Типичные значения Ω_{VB} в атмосфере составляют порядка 10^{-2} Гц, в океане — $10^{-3} - 10^{-4}$ Гц [20]. Внутренние гравитационные волны с такими частотами играют важную роль в динамике атмосферы и океана [20 – 22].

3. Нелокальная дисперсия градиентных акустических барьеров: нормальная и аномальная дисперсия

В отличие от раздела 2, в котором обсуждаются стоячие волны в упругих неоднородных средах, этот раздел посвящён рассмотрению взаимодействия бегущих акустических волн с градиентными твердотельными слоями. Акустика структурированных твёрдых тел, содержащих включения других материалов, рассмотрена в [13]; особенности ультразвуковых полей в таких структурах исследованы в [14]. Для произвольных частот спектры отражения и пропускания волн акустическими барьерами, сформированными градиентными изотропными субволновыми слоями, могут характеризоваться сильной частотной дисперсией, созданной в требуемом волновом диапазоне специально подобранными пространственными распределениями плотности $F^2(z)$ или упругих свойств $W^2(z)$ поперёк барьеров. Рассматриваются

примеры распределений $F^2(z)$ и $W^2(z)$, для которых волновое поле внутри барьера описывается точными аналитическими решениями уравнения (2.3) (точно решаемые модели). Искомые спектры рассчитываются из условий непрерывности смещений и напряжений на границах барьеров. При нормальном падении волн на границу $z = 0$ эти условия можно записать [8]:

$$а) \text{ как равенство смещений } u_i, \quad u_i|_{z=0} = u_i|_{z=+0}; \quad (3.1)$$

$$б) \text{ как равенство нормальных напряжений } \sigma_{iz}, \quad \sigma_{iz}|_{z=0} = \sigma_{iz}|_{z=+0}. \quad (3.2)$$

Ниже для простоты расчётов предполагается, что упругие среды слева и справа от барьера однородны и одинаковы. Точно решаемая модель такого барьера, плотность которого неоднородна, а упругие свойства постоянны, рассматривается в разделе 3.1 в рамках подхода, развитого в разделе 2.1. В отличие от этого, анализ противоположной ситуации — переменные упругие свойства при постоянной плотности среды — проведён в разделе 3.2 на основе специального метода "вспомогательного барьера", с помощью которого удаётся использовать решения, полученные в разделах 2.1 и 3.1. Хотя такое разделение свойств среды является условным, оно позволяет выработать подход к созданию градиентных акустических материалов с заданными спектрами отражения и пропускания.

3.1. Прохождение продольной звуковой волны через слой с переменной плотностью

Распространение продольной звуковой волны, падающей в направлении z нормально на слой с переменной плотностью, можно исследовать с помощью уравнений движения (2.1) и (2.3), полагая $u = u_z$, $\rho(z) = \rho_0 F^2(z)$, $W = 1$. При такой геометрии задачи единственная компонента тензора напряжений σ_{zz} , входящая в правую часть (2.1), и скорость v_0 , равная в этом случае скорости продольной волны v_1 в однородной среде, определяются известными выражениями [8]:

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad v_0^2 = v_1^2 = \frac{E(1-\mu)}{\rho_0(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad (3.3)$$

а уравнение (2.3) принимает вид (2.7).

Из уравнения (2.7) можно найти спектр отражения продольной волны, падающей из однородной среды ($z \leq 0$) в направлении оси z на градиентный волновой барьер — слой с переменной плотностью. Ряд свойств таких спектров удобно исследовать в рамках точно решаемой модели (2.8), допускающей решение в виде элементарных функций.

Рассмотрим вначале нормальное падение волны на слой толщиной d с выпуклым симметричным профилем плотности $\rho(z)$ (см. рис. 1). В этом случае для функции $F(z)$ выполняется условие $F(0) = F(d) = 1$, а максимум профиля ρ_{\max} находится в точке $z = 0,5d$. Поскольку дифференциальное уравнение, описывающее прохождение продольной звуковой волны через слой, в этом случае формально совпадает с (2.7), можно использовать результаты анализа этого уравнения, приведённые в разделе 2.1, а также свести (2.7) к простому волновому уравнению с постоянными коэффициентами в η -пространстве (2.13). Параметры этого уравнения опреде-

лены в (2.14), (2.15), однако решение уравнения (2.13) нужно искать не в виде стоячей волны (2.16), а в виде суперпозиции прямых и обратных монохроматических волн $\exp(\pm iq\eta)$ с волновыми числами q , бегущих по "оси" η в противоположные стороны:

$$u = \frac{A_r [\exp(iq\eta) + Q \exp(-iq\eta)]}{\sqrt{F(z)}}. \quad (3.4)$$

Здесь A_r — амплитуда волнового поля, формируемого интерференцией прямой и обратной волн; при падении волны на границу слоя $z = 0$ величина Q характеризует вклад волны, отражённой от задней границы слоя $z = d$, в волновое поле, а переменная η , определяемая при подстановке (2.8) в (2.12), выражается в виде (2.15).

Спектр отражения волны от градиентного слоя находится с помощью условий непрерывности (3.1), (3.2) на границах слоя $z = 0$ и $z = d$. Представляя продольную волну, падающую из однородной среды ($z \leq 0$, плотность ρ_1 , скорость волны v_1) на границу слоя $z = 0$ в виде $u = A_i \exp[i\omega(z/v_1 - t)]$ и вводя комплексный коэффициент отражения R , можно записать эти граничные условия как

$$A_i(1 + R) = A_r(1 + Q), \quad (3.5)$$

$$i\omega\rho_1 v_1(1 - R)A_i = A_r \rho_0 v_0^2 \left[-\frac{1+Q}{2L_1} + iq(1-Q) \right]. \quad (3.6)$$

Из соотношений (3.5), (3.6) найдём R :

$$R = \frac{i\alpha + \gamma/2 - iN_+(1-Q)(1+Q)^{-1}}{i\alpha - \gamma/2 + iN_+(1-Q)(1+Q)^{-1}}. \quad (3.7)$$

В (3.7) параметр α — отношение акустических импедансов $I_{1,2}$ граничащих сред ($I = \rho v$), γ — безразмерный параметр,

$$\alpha = \frac{\rho_1 v_1}{\rho_0 v_0}, \quad \gamma = \frac{v_0}{\omega L_1} = \frac{2Sy}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (3.8)$$

Величина Q в выражении (3.7), характеризующая амплитуду обратной волны, находится из граничных условий, аналогичных (3.1), (3.2) на поверхности $z = d$. Принимая для простоты, что среда в области $z \geq d$ та же, что и в области $z \leq 0$, можно записать выражение для Q :

$$Q = -\frac{\exp(2iq\eta_0)(\gamma/2 - i\alpha + iN_+)}{\gamma/2 - i\alpha - iN_+}, \quad \eta_0 = \eta(d). \quad (3.9)$$

Наконец, подставляя (3.9) в (3.7), получим явное выражение для комплексного коэффициента отражения $R = |R| \exp(i\phi_r)$:

$$R = \frac{\tan(q\eta_0)(\alpha^2 + \gamma^2/4 - N_+^2) + \gamma N_+}{\tan(q\eta_0)(\alpha^2 - \gamma^2/4 + N_+^2) - \gamma N_+ + 2i\alpha[N_+ + (\gamma/2) \tan(q\eta_0)]}, \quad (3.10)$$

$$\tan \phi_r = \frac{2\alpha[N_+ + (\gamma/2) \tan(q\eta_0)]}{\gamma N_+ - (\alpha^2 - \gamma^2/4 + N_+^2) \tan(q\eta_0)}, \quad (3.11)$$

$$\eta_0 = \eta(d) = \frac{L_2}{\sqrt{1-y^2}} \arctan \frac{2y\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}, \quad (3.12)$$

$$q\eta_0 = \frac{N_+}{S} \arctan \frac{2y\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}.$$

Формулы (3.10)–(3.12) решают задачу об отражении монохроматической продольной волны от градиентного слоя (2.8) с выпуклым профилем плотности (см. рис. 1, кривая 1); при этом зависимость $q = q(\omega)$, заданная в (2.13), соответствует нормальной дисперсии.

Спектры отражения продольных волн $|R(S)|^2$ при аномальной и нормальной нелокальной дисперсиях градиентных барьеров приведены соответственно на рис. 3а и б, вариант при значении импеданса $\alpha = 1,25$ показан на рис. 3в. На рисунке 3г представлена фаза $\phi_r(S)$ коэффициента отражения $R(S) = |R| \exp[i\phi_r(S)]$ для $\alpha = 0,3$, $y = 0,45$ при $m = 1$ (кривая 1) и $m = 3$ (кривая 2), где m — число барьеров. На рисунке 3д показан спектр пропускания $|T(S)|^2$ при $m = 1$ (кривая 1), $m = 3$ (кривая 2), $m = 6$ (кривая 3) в случае $\alpha = 0,3$, $y = 0,45$ (аномальная дисперсия). Как видно из рис. 3д, с увеличением числа градиентных барьеров существенно возрастает количество частот волны, на которых реализуется почти 100%-ное прохождение волны через многослойную периодическую структуру.

Прежде чем перейти к анализу этого результата, целесообразно рассмотреть сходную задачу об отражении от слоя с вогнутым профилем плотности, описываемым (2.8), при $s_1 = 1, s_2 = -1$ (см. рис. 1, кривая 2). Схема вычисления коэффициентов отражения в обоих случаях одинакова: решение волнового уравнения (2.13) для вогнутого профиля вновь представляется в виде (3.4), где "волновое число" q определено, в отличие от такового в (2.13), формулами (2.20), соответствующими аномальной дисперсии. Характерным частотам Ω_2 и Ω_1 соответствуют различные формфакторы, определяемые (вместе с самими частотами) в (2.21) и (2.14). Параметр y связан с минимальной величиной плотности в слое ρ_{\min} (2.22). Координата η (2.15) для рассматриваемой геометрии профиля вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{L_2}{2\sqrt{1+y^2}} \ln \frac{1+xy_+}{1-xy_-}, \quad x = \frac{z}{L_2}, \quad (3.13)$$

$$y_{\pm} = \sqrt{1+y^2} \pm y, \quad y_+y_- = 1.$$

Наконец, коэффициент отражения от вогнутого профиля плотности находится по аналогии с (3.10):

$$R = \frac{\tan(q\eta_0)(\alpha^2 + \gamma^2/4 - N_-^2) - \gamma N_-}{\tan(q\eta_0)(\alpha^2 - \gamma^2/4 + N_-^2) + \gamma N_- + 2i\alpha[N_- - (\gamma/2) \tan(q\eta_0)]}. \quad (3.14)$$

В выражении (3.14) параметры γ и $q\eta_0$ определяются формулами

$$\gamma = \frac{2Sy}{\sqrt{1+y^2}}, \quad q\eta_0 = \frac{N_-}{S} \ln \frac{y_+}{y_-}. \quad (3.15)$$

Если коэффициент отражения R известен, то энергетический коэффициент пропускания волны через градиентный барьер определяется как

$$|T|^2 = 1 - |R|^2. \quad (3.16)$$

Следует отметить, что при замене скорости продольной волны $v_0 = v_l$ (3.3) скоростью сдвиговой волны $v_0 = v_t$ (1.1) формулы (3.10) и (3.14) можно использовать для расчётов коэффициентов отражения волн сдвига. Описанный здесь подход к анализу продольных звуковых волн в градиентном слое является эталонным для ряда

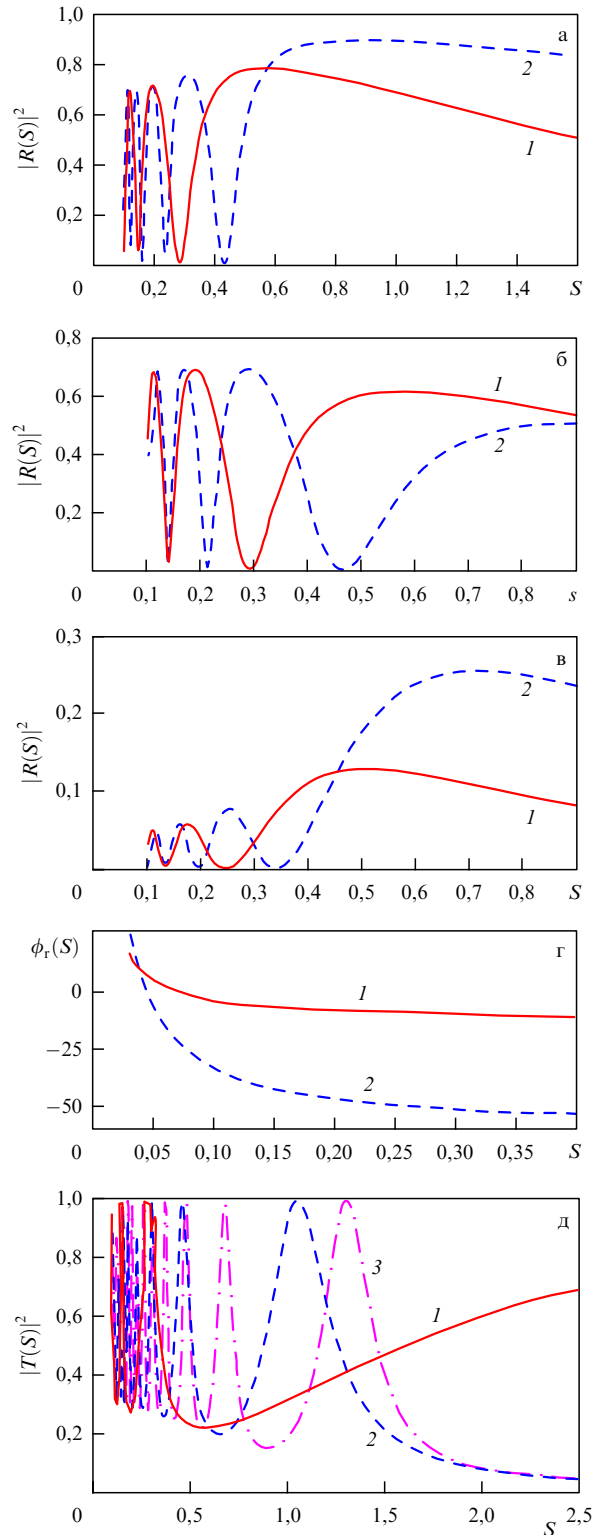


Рис. 3. Спектры отражения продольных волн $|R(S)|^2$ при различной дисперсии градиентных барьеров, образованных распределениями плотности: (а) аномальная дисперсия при параметрах $\alpha = 0,3$, $y = 0,45$ (кривая 1) и $y = 0,7$ (кривая 2); (б) нормальная нелокальная дисперсия при $\alpha = 0,3$, $y = 0,45$ (кривая 1) и $y = 0,7$ (кривая 2); (в) вогнутый профиль. (г) Фаза $\phi_r(S)$ коэффициента отражения $R(S) = |R| \exp[i\phi_r(S)]$ для $\alpha = 0,3$, $y = 0,45$; $m = 1$ — кривая 1, $m = 3$ — кривая 2. (д) Спектры пропускания $|T(S)|^2$ при $\alpha = 0,3$, $y = 0,45$ (аномальная дисперсия) для числа барьеров $m = 1$ (кривая 1), $m = 3$ (кривая 2) и $m = 6$ (кривая 3).

рассматриваемых в разделах 3.2, 4–6 задач акустики градиентных сред.

3.2. Спектры отражения сдвиговых волн в слое с переменным модулем сдвига.

Метод вспомогательного барьера

Отражение сдвиговых волн от среды с пространственно распределённым модулем сдвига можно исследовать на основе уравнения (2.3). Для того чтобы выделить эффекты, обусловленные этим распределением, предположим, что плотность среды не зависит от координат ($\rho = \rho_0$), и рассмотрим нормальное падение излучения на границу слоя $z = 0$. В этом случае единственная компонента тензора напряжений, входящая в уравнение (2.3), записывается как

$$\sigma_{xz} = \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \right]_0 W^2(z) \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (3.17)$$

а само уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} \frac{u}{W^2(z)} = -\frac{2W_z}{W} \frac{du}{dz}, \quad (3.18)$$

причём скорость сдвиговой волны v_0 в (3.18) равняется, согласно (1.1), поперечной скорости, $v_0 = v_t$. Уравнение (3.18) отличается от уравнения задачи для среды с переменной плотностью (2.13) правой частью, поэтому для решения (3.18) используется специальный алгоритм, основанный на методе вспомогательного барьера. Указанный метод включает в себя следующие этапы.

1. В уравнении (3.18) дифференцирование по z заменяется дифференцированием по новой переменной η , которая теперь, в отличие от (2.12), определена соотношением

$$d\eta = \frac{dz}{W^2(z)}. \quad (3.19)$$

Переход к переменной η позволяет исключить правую часть в уравнении (3.18):

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} W^2(z) u = 0. \quad (3.20)$$

Смещение u в уравнении (3.20) зависит от двух переменных (z и η); для того чтобы решить это уравнение, нужно задать функцию $W^2(z)$ и выразить её через переменную η . В частности, уравнение (3.20) сводится к ранее решённому уравнению (2.13) с помощью введения вспомогательного барьера $F^2(\eta)$ в пространстве переменной η :

$$W^2(z) = F^2(\eta). \quad (3.21)$$

Функция $F^2(\eta)$ в (3.21) может быть выбрана произвольно. Однако если выбрать эту функцию в виде (2.8), заменяя там z переменной η , то можно будет воспользоваться далее готовым решением (2.13). Запишем выбранную таким образом функцию $F^2(\eta)$, соответствующую, например, выпуклому профилю ($s_1 = -1, s_2 = 1$), в виде

$$F^2(x) = (1 - 2yx + x^2)^{-2}, \quad x = \frac{\eta}{L_2}. \quad (3.22)$$

В выражении (3.22) неизвестны ни характерные длины L_1, L_2 , ни параметр y .

2. Подставляя выражения (3.22) и (3.21) в (3.19) и пользуясь следующим из (3.22) условием $\eta|_{z=0} = 0$,

можно найти, интегрируя (3.19), зависимость z от x :

$$\frac{z(x)}{L_2} = \frac{1}{2(1-y^2)^{3/2}} \left\{ \arctan \frac{x-y}{\sqrt{1-y^2}} + \arctan \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1-y^2} \left[y + \frac{x-y}{1-y^2+(x-y)^2} \right] \right\}. \quad (3.23)$$

Чтобы определить величину y в (3.23), заметим, что, согласно (3.21), выпуклому профилю $F^2(x)$ соответствует выпуклый профиль $W^2(z)$; при этом максимуму выпуклого профиля $F_{\max}^2 > 1$ соответствует максимум профиля $W_{\max}^2 = F_{\max}^2$. Подставляя из (2.15) значение $F_{\max}^2 = (1-y^2)^{-2}$, найдём параметр y :

$$y = \sqrt{1 - \frac{1}{W_{\max}}}. \quad (3.24)$$

Параметр x в (3.23) можно найти, подставляя (3.22) в (3.21), решая полученное уравнение относительно x и заменяя y по формуле (3.24):

$$x(W) = \sqrt{1 - \frac{1}{W_{\max}}} \pm \sqrt{\frac{1}{W} - \frac{1}{W_{\max}}}. \quad (3.25)$$

Выражения (3.23)–(3.25) определяют в неявном виде координатную зависимость модуля сдвига внутри барьера $W^2(z)$; переменная x , как видно из (3.22), изменяется в интервале $0 \leq x \leq 2y$, при этом $z(0) = 0$, а ширина барьера d , определяемая расстоянием между точками $W(0) = 1$ и $W(2y) = 1$, связана с характерным размером L_2 :

$$d = L_2 z(2y) = 2L_2 B_1, \quad (3.26)$$

$$B_1 = \frac{1}{(1-y^2)^{3/2}} \left(y\sqrt{1-y^2} + \arctan \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right). \quad (3.27)$$

Таким образом, зная ширину d и высоту W_{\max} барьера $W^2(z)$, заданного в неявном виде, можно найти параметры вспомогательного барьера, заданного в явном виде, $F^2(\eta)$ (3.22). Высота этого вспомогательного барьера равна W_{\max} , ширина — d_1 , а характерные длины L_1 и L_2 определяются через ширину d и параметр y :

$$d_1 = 2yL_2 = \frac{yd}{B_1}, \quad L_1 = \frac{d}{4yB_1}, \quad L_2 = \frac{d}{2y}. \quad (3.28)$$

Выпуклый барьер $W^2(z)$ и соответствующий вспомогательный барьер (3.23), характеризующиеся аномальной дисперсией, показаны на рис. 4а.

3. Для того чтобы вычислить коэффициент отражения от барьера $W^2(z)$, требуется найти поле внутри барьера, описываемое уравнением (3.20). При условии (3.21) $W^2(z) = F^2(\eta)$ уравнение (3.20) формально совпадает с (2.13). Вводя по аналогии с (2.12) переменную τ :

$$\tau(\eta) = \int_0^\eta F(\eta_1) d\eta_1, \quad (3.29)$$

можно записать решение уравнения (3.20) в форме, аналогичной (3.4):

$$u = \frac{A_r [\exp(iq\tau) + Q \exp(-iq\tau)]}{\sqrt{F(\eta)}}. \quad (3.30)$$

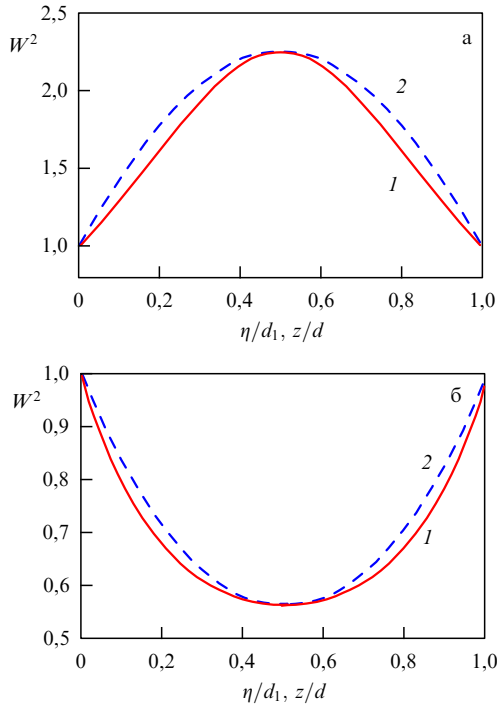


Рис. 4. Градиентные барьеры, образованные распределениями модуля сдвига, заданными в параметрической форме (кривые 2), и соответствующие вспомогательные барьеры (кривые 1): (а) $s_1 = 1, s_2 = -1$, (б) $s_1 = -1, s_2 = 1$. Барьеры (3.23) на рис. а характеризуются аномальной дисперсией, а барьер (3.33) на рис. б — нормальной. По горизонтальным осям расстояния η, z нормированы соответственно на d_1 и d .

Продолжая аналогию, можно найти коэффициент отражения R от неоднородности модуля сдвига внутри барьера (3.23), полученного преобразованием профиля $F^2(x)$ (2.8). Этот коэффициент выражается той же формулой (3.10), что и коэффициент отражения от неоднородности плотности $F^2(z)$ (2.8), при этом характерная частота Ω_1 , входящая в параметр S , отличается от (2.14) другим выражением для формфактора $\theta_1(y)$, обусловленным отношением ширин барьеров,

$$\theta_1(y) = \frac{2}{1-y^2} \left(y\sqrt{1-y^2} + \arctan \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right). \quad (3.31)$$

4. Отражение от вогнутого профиля $W^2(z)$, характеризующего минимумом W_{\min} , можно исследовать, выбирая вогнутый профиль вспомогательного барьера $F^2(x)$ при $s_1 = 1, s_2 = -1$. Повторяя анализ (3.21)–(3.25), найдём параметр

$$y = \sqrt{W_{\min}^{-1} - 1} \quad (3.32)$$

и неявное выражение для профиля модуля сдвига внутри барьера

$$\frac{z(x)}{L_2} = \frac{1}{(1+y^2)^{3/2}} \left\{ \operatorname{artanh} \frac{x-y}{\sqrt{1+y^2}} + \operatorname{artanh} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \sqrt{1+y^2} \left[y + \frac{x-y}{1+y^2 - (x-y)^2} \right] \right\}, \quad (3.33)$$

$$x(W) = \sqrt{\frac{1}{W_{\min}} - 1} \pm \sqrt{\frac{1}{W_{\min}} - \frac{1}{W}}. \quad (3.34)$$

Ширину вспомогательного барьера d_2 и характерные длины L_1 и L_2 выразим, по аналогии с (3.28), через ширину d барьера $W^2(z)$ и параметр y (3.32):

$$d_2 = \frac{yd}{B_2}, \quad L_1 = \frac{d}{4yB_2}, \quad L_2 = \frac{d}{2y}, \quad (3.35)$$

$$B_2 = \frac{1}{(1+y^2)^{3/2}} \left(y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{artanh} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right). \quad (3.36)$$

Вогнутый барьер $W^2(z)$ и соответствующий вспомогательный барьер (3.33), характеризующийся нормальной дисперсией, показаны на рис. 4б.

Коэффициент отражения от вогнутого барьера вычисляется по формуле (3.14), где параметр y определён в (3.32), а частота Ω_2 даётся выражением (2.21), но с иным формфактором $\theta_2(y)$:

$$\theta_2(y) = \frac{2}{1+y^2} \left(y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{artanh} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right). \quad (3.37)$$

Следует отметить, что коэффициенты отражения, полученные в разделе 3.2 для сдвиговых волн, можно применить и для нормального падения продольных волн, полагая во всех выражениях $v_0 = v_1$, где v_1 — скорость продольной волны (1.1).

I. Основными результатами этого раздела являются формулы для коэффициентов отражения продольных и сдвиговых волн от неоднородных волновых барьеров, образованных пространственными распределениями плотности и упругих свойств. Эти формулы получены на основе точных аналитических решений волнового уравнения для градиентной среды без использования каких-либо предположений о малости или медленности изменений поля и среды. Найденные выражения учитывают вклад в отражение звука, обусловленный не только разницей акустических импедансов (параметр α в (3.10) и (3.14)), но и градиентом и кривизной нормированного профиля плотности $F^2(z)$, зависящих от характерных длин L_1 и L_2 . При ослаблении неоднородности ($L_1 \rightarrow \infty, L_2 \rightarrow \infty$) параметры y, γ и характерные частоты Ω_1, Ω_2 стремятся к нулю, а выражения (3.10) и (3.14) переходят в известную формулу для отражения звука от однородного слоя при нормальном падении:

$$R = \frac{\tan \delta(\alpha^2 - 1)}{\tan \delta(\alpha^2 + 1) + 2i\alpha}, \quad \delta = \frac{\omega d}{v_0}. \quad (3.38)$$

II. Существенно, что при анализе задач отражения от градиентных барьеров появились характерные частоты Ω_1, Ω_2 , определяемые временами пробега волн со скоростями v_0 через градиентный барьер с шириной d и геометрическими параметрами слоя (факторы $\theta_1(y), \theta_2(y)$). Эти частоты, входящие в выражения для N_+ (2.13) и N_- (2.20), структура которых напоминает показатели преломления в электродинамике диэлектриков с аномальной и нормальной (волноводной) дисперсией, характеризуют нелокальную дисперсию акустической среды.

Нелокальный характер искусственной дисперсии, формируемый геометрическими параметрами барьера, позволяет выбрать спектральный диапазон для заданной полосы частот вдали от естественной полосы поглощения акустической среды.

III. Метод вспомогательных барьеров позволяет в рамках единого подхода выявить сходство и различие в

спектрах отражения, обусловленных физически различными градиентными структурами (например, неоднородности плотности и упругих параметров среды). При таком подходе спектры отражения акустических волн от барьеров с нормальной и аномальной нелокальной дисперсией описываются общими выражениями (3.10), (3.14), справедливыми при подстановке соответствующих значений параметра y и формфакторов $\theta_{1,2}(y)$. Эта общность может быть распространена, как будет показано в разделе 4, и на другие классы акустических барьеров.

4. Распространение звука через градиентные твердотельные структуры: комбинированные дисперсионные эффекты переменной плотности и упругости

В отличие от дисперсии звука под влиянием распределений либо плотности $F^2(z)$, либо упругих параметров $W^2(z)$, рассмотренной в разделе 3, дисперсия обсуждаемых здесь градиентных барьеров зависит одновременно от пространственных распределений как плотности среды, так и её упругих параметров. Такие комбинированные зависимости привлекают внимание в акустике органических материалов [23], биологических микроструктур [24], композитных и гранулированных метаматериалов [25, 26]. Совместное действие указанных механизмов приводит к конкурирующим эффектам дисперсии в спектрах отражения и пропускания звука градиентными барьерами. Имея в виду одновременные проявления обоих эффектов в одном барьере, можно говорить о "двойных" барьерах и их усложнённых спектрах. Некоторые характерные тенденции формирования таких спектров можно выделить, рассматривая две следующие качественно различные задачи:

1) найти спектр отражения от барьера, у которого нет формальной связи между распределениями плотности $F^2(z)$ и упругих модулей $W^2(z)$, входящими в уравнение (2.3); более того, тенденции изменения $F^2(z)$ и $W^2(z)$ внутри барьера могут быть различными и даже противоположными;

2) найти спектральные характеристики градиентного барьера, у которого распределения $F^2(z)$ и $W^2(z)$ функционально связаны; при согласованном подборе этих распределений возникают возможности оптимизации параметров барьера, обеспечивающего требуемый спектр отражения.

Эти задачи рассматриваются в разделах 4.1, 4.2.

4.1. "Двойной" градиентный барьер:

оптимальные параметры барьера при заданной дисперсии
Рассматривая сдвиговую волну внутри градиентного слоя в рамках уравнения (2.3) и вводя новую переменную η по формуле (3.19), перепишем уравнение (2.3) в виде

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} F^2(z) W^2(z) u = 0. \quad (4.1)$$

Описывая распределения $F^2(z)$ и $W^2(z)$ внутри барьера шириной d с помощью характерных длин l_1 и l_2 ,

$$W(z) = 1 + \frac{z}{l_1}, \quad F(z) = \frac{1}{1 + z/l_2}, \quad (4.2)$$

можно в общем виде исследовать эффекты, связанные как с возрастанием, так и с уменьшением плотности и упругих параметров внутри "двойного" барьера, рассматривая в (4.2) независимо как положительные, так и отрицательные значения длин l_1 и l_2 . Чтобы отличать эти длины, относящиеся к моделям разных физических величин, от длин L_1 и L_2 , характеризующих распределение одной величины, например плотности в модели (2.8), в моделях (4.2) они записываются строчными буквами.

Выражая переменную η через z в явном виде с помощью (3.19),

$$\eta = \frac{z}{1 + z/l_1}, \quad (4.3)$$

и представляя функции $W(z)$ и $F(z)$ (4.2), используя (4.3), как функции от η , найдём

$$F(z) W(z) = U(\eta) = \frac{1}{1 + \eta/l}, \quad (4.4)$$

$$l = \frac{l_1 l_2}{l_1 - l_2}. \quad (4.5)$$

Подстановка (4.4) в (4.1) позволяет переписать это уравнение в η -пространстве в виде, аналогичном (2.7):

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} U^2(\eta) u = 0. \quad (4.6)$$

Для решения этого уравнения удобно применить алгоритм, неоднократно использованный в разделах 2 и 3. Вводя новую переменную

$$\tau = \int_0^\eta U(\eta_1) d\eta_1 = l \ln \frac{l_1(z + l_2)}{l_2(z + l_1)}, \quad (4.7)$$

можно представить решение уравнения (4.6) в виде прямой и обратной волн, бегущих вдоль "оси" τ :

$$u = \frac{A_r [\exp(iq\tau) + Q \exp(-iq\tau)]}{\sqrt{U(\eta)}}. \quad (4.8)$$

"Волновое число" q в (4.8) соответствует дисперсии волноводного типа в градиентном слое:

$$q = \frac{\omega}{v_0} \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}, \quad \Omega = \frac{v_0}{2l}. \quad (4.9)$$

Характерная частота Ω в (4.9) зависит через параметр l от пространственных масштабов изменения плотности и упругих свойств l_1 и l_2 . Учитывая граничные условия (3.1), (3.2) на границе барьера $\eta = 0$ ($z = 0$), найдём выражение для коэффициента отражения R . В отличие от коэффициента отражения (3.7), вычисленного для нормальной дисперсии, R в рассматриваемой задаче соответствует волноводной дисперсии (4.9):

$$R = \frac{i\alpha - \gamma/2 - iN(1 - Q)(1 + Q)^{-1}}{i\alpha + \gamma/2 + iN(1 - Q)(1 + Q)^{-1}}, \quad (4.10)$$

$$N = \sqrt{1 - S^2}, \quad S = \frac{\Omega}{\omega}. \quad (4.11)$$

Однако параметр Q , описывающий в (4.8) вклад обратной волны в поле внутри барьера $U(\eta)$, следует вычислить заново, так как этот барьер, в отличие от описываемого в (2.8), несимметричен: $U(\eta = 0) \neq U(\eta_0)$, где коор-

дината η_0 соответствует задней границе барьера $z = d$:

$$\eta_0 = \eta(d) = \frac{d}{1 + d/l_1}, \quad U_0 = U(\eta_0) = \frac{l_1(d + l_2)}{l_2(d + l_1)}. \quad (4.12)$$

Обозначая координату τ (4.7), соответствующую задней границе барьера, как

$$\tau_0 = \tau(d) = l \ln U_0 \quad (4.13)$$

и пользуясь соотношениями, следующими из распределений (4.2),

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{W^2(z)}, \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{F(z)}{W(z)}, \quad (4.14)$$

запишем условия непрерывности смещений и напряжений на этой границе:

$$\frac{A_r [\exp(iq\tau_0) + Q \exp(-iq\tau_0)]}{\sqrt{U_0}} = A_2, \quad (4.15)$$

$$\frac{A_r}{\sqrt{U_0}} \left\{ -\frac{i\chi}{2} [\exp(iq\tau_0) + Q \exp(-iq\tau_0)] + N [\exp(iq\tau_0) - Q \exp(-iq\tau_0)] \right\} = \alpha\beta A_2, \quad (4.16)$$

$$\beta = \frac{W(d)}{F^3(d)} = \left(1 + \frac{d}{l_1}\right) \left(1 + \frac{d}{l_2}\right)^3. \quad (4.17)$$

Здесь A_2 — амплитуда прошедшей волны, Ω — характерная частота, определённая в (4.9), α — отношение импедансов (3.8); в граничных условиях (4.15), (4.16) для простоты предполагается, что плотности и упругие параметры сред слева и справа от барьера одинаковы.

Определяя из граничных условий параметр Q :

$$Q = -\frac{\exp(2iq\tau_0)(\chi/2 - i\beta + iN)}{\chi/2 - i\beta - iN}, \quad \chi = \frac{v_0}{l\omega}, \quad (4.18)$$

и подставляя это значение Q в (4.10), найдём коэффициент отражения:

$$R = \frac{t(\alpha\beta - \chi^2/4 - N^2) + i[(\chi t/2)(\alpha + \beta) + N(\alpha - \beta)]}{t(\alpha\beta + \chi^2/4 + N^2) + i[(\chi t/2)(\alpha - \beta) + N(\alpha + \beta)]}, \quad (4.19)$$

$$t = \tan(q\tau_0), \quad q\tau_0 = \frac{N}{2S} \ln U_0.$$

Выражение (4.19) для R записано для положительных значений параметра l (4.5). Как видно из формулы (4.5), значение $l > 0$ возможно при трёх профилях плотности и модуля сдвига (4.2):

- 1) $l_1 > l_2, l_1 > 0, l_2 > 0$;
- 2) $l_1 > l_2, l_1 < 0, l_2 < 0$;
- 3) $l_1 < l_2, l_1 < 0, l_2 > 0$.

Каждой из комбинаций 1–3 в (4.20), определяющих значение параметра β (4.17), соответствует своё значение коэффициента отражения. Вычислить коэффициент отражения по формуле (4.19) можно и для $l < 0$; в этом случае также возможны комбинации параметров, аналогичные (4.20), переменная τ сохраняет положительное значение, а параметр χ в соответствии с (4.11) нужно взять с противоположным знаком, $\chi \rightarrow -\chi$. Наконец, в частном случае $l_1 = l_2$ найдём, делая предельный переход $l \rightarrow \infty$ в

(4.5) и (4.20):

$$U \rightarrow 1, \quad \Omega \rightarrow 0, \quad \tau = \eta, \quad \chi = 0, \quad N = 1, \quad (4.21)$$

$$q\tau_0 = \frac{\omega d}{v_0} \left(1 + \frac{d}{l_1}\right)^{-1}.$$

Подставляя величины (4.21) в (4.19), получим значения коэффициента отражения в этом предельном случае. Следует отметить, что в указанном пределе нелокальная дисперсия барьера исчезает ($\Omega = 0, N = 1$).

Таким образом, при заданных толщине "двойного" барьера d и частоте отсечки Ω (4.9), т.е. при условии ($l = \text{const}$), что одна из длин, l_1 или l_2 , допускает свободный выбор, эта возможность представляет интерес для оптимизации параметров барьера. Отметим, что формула (4.19) охватывает различные тенденции в комбинированных эффектах влияния изменений плотности и упругих параметров, описываемых моделями (4.2), на отражение волн сдвига от "двойного" градиентного слоя при нормальном падении. Эти модели позволяют также найти аналогичное выражение для коэффициента отражения продольной волны при произвольных положительных и отрицательных значениях параметров l_1 и l_2 .

4.2. Спектры отражения волн сдвига в градиентном слое при согласованном распределении плотности и упругости

В этом разделе рассматривается акустический барьер, в котором изменения плотности и упругих параметров, в отличие от таковых в разделе 4.1, характеризуются одинаковыми нормированными распределениями: $F^2(z) = W^2(z)$. В этом случае уравнение (4.1) сводится к следующему:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} F^4(z) u = 0. \quad (4.22)$$

Уравнение (4.22) удобно решать с помощью метода вспомогательного барьера, описанного в разделе 3.2.

Рассмотрим сначала выпуклый профиль $F(z)$, содержащий два свободных параметра — характерную длину L и безразмерный параметр M (рис. 5а, разные значения M),

$$F(z) = \cos \frac{z}{L} + M \sin \frac{z}{L}, \quad 0 \leq \frac{z}{L} \leq \pi. \quad (4.23)$$

Значение переменной η находится при подстановке в (3.19) функции $W^2 = F^2$:

$$\eta = \frac{Lt}{1 + Mt}, \quad t = \tan \frac{z}{L}. \quad (4.24)$$

Используя (4.23), (4.24), выразим $F^2(z)$ (4.23) через переменную η :

$$F^2(z) = \left[1 - \frac{2M}{L} \eta + \frac{1 + M^2}{L^2} \eta^2\right]^{-1}. \quad (4.25)$$

Существенно, что функция $F^2(z)$, записанная в виде (4.25), совпадает с часто используемой моделью $F(\eta)$ (2.8), если положить в (2.8) $s_1 = -1, s_2 = 1$ и найти характерные длины L_1, L_2 и параметр y модели (2.14), сопоставляя её с (4.25):

$$\frac{2M}{L} = \frac{1}{L_1}, \quad \frac{1 + M^2}{L^2} = \frac{1}{L_2^2}, \quad y = \frac{L_2}{2L_1} = \frac{M}{\sqrt{1 + M^2}} < 1. \quad (4.26)$$

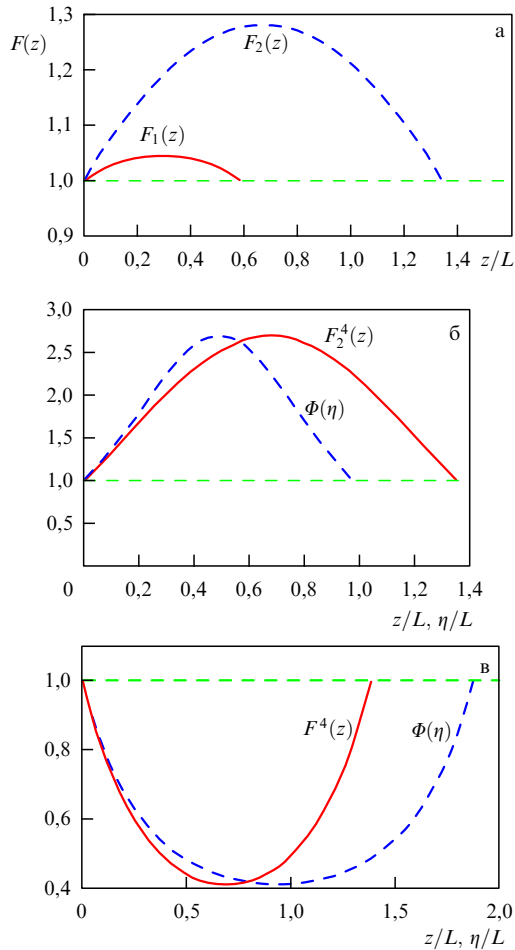


Рис. 5. Градиентные барьеры, образованные "согласованными" распределениями плотности $F^2(z)$ и модуля сдвига $W^2(z)$, когда $F^2(z) = W^2(z)$, с аномальной (4.23) и нормальной (4.31) нелокальной дисперсией. (а) Графики функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$, соответствующих значениям параметров $M_1 = 0,3$ и $M_2 = 0,8$. (б) Вспомогательный $\Phi(\eta) = F^2(z(\eta))$ и основной выпуклые барьеры для $M = 0,8$. (в) Вспомогательный $\Phi(\eta)$ и основной $F^4(z(\eta))$ вогнутые барьеры для $M = 0,6$.

Определённая таким образом функция $F^2(\eta)$ образует выпуклый вспомогательный барьер (рис. 5б), позволяющий записать уравнение (4.22) в форме, совпадающей с (2.7):

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} F^2(\eta) u = 0. \quad (4.27)$$

Максимумы барьеров $F^4(z)$ и $F^2(\eta)$, расположенных соответственно в z -пространстве и η -пространстве, равны $(F_{\max}^2 = (1 + M^2)^2)$, ширина d симметричного барьера (4.25) в z -пространстве, определяемая из условия $F(0) = F(d) = 1$, выражается в виде

$$d = L \arctan \frac{2M}{1 - M^2}. \quad (4.28)$$

Ширина вспомогательного барьера d_1 в η -пространстве определяется из условия (2.10):

$$d_1 = 2yL_2 = \frac{2ML}{1 + M^2}. \quad (4.29)$$

Сравнение (4.28) и (4.29) показывает, что для выпуклых барьеров $d_1 < d$ (рис. 5б).

Приведя уравнение для барьера (4.22) к форме (4.27), совпадающей с (2.7), можно воспользоваться решением (2.7) и получить коэффициент отражения от градиентного барьера, образованного распределениями $F^2(z) = W^2(z)$, в виде (3.10), где характерная частота Ω_1 и фазовый сдвиг $q\eta_0$ определяются формулами:

$$\Omega_1 = \frac{v_0}{d} \theta_1(M), \quad \theta_1(M) = \arctan \frac{2M}{1 - M^2}, \quad (4.30)$$

$$q\eta_0 = \frac{\omega N_+ d}{v_0}, \quad N_+ = \sqrt{1 + S^2}, \quad S = \frac{\Omega_1}{\omega}.$$

Метод вспомогательного барьера позволяет найти спектр отражения при условии $F^2(z) = W^2(z)$ и для вогнутого профиля, содержащего, как и (4.23), два свободных параметра — L и M :

$$F(z) = \cosh \frac{z}{L} - M \sinh \frac{z}{L} = W(z). \quad (4.31)$$

Используя алгоритм, развитый в (4.24)–(4.30) для выпуклого профиля, и подставляя (4.31) в (3.19), введём новую переменную η :

$$\eta = \frac{Lt}{1 - Mt}, \quad t = \tanh \frac{z}{L}, \quad (4.32)$$

и, выражая функцию $F^2(z)$ через η , получим вогнутый профиль вспомогательного барьера:

$$F^2(z) = \left(1 + \frac{2M}{L} \eta - \frac{1 - M^2}{L^2} \eta^2 \right)^{-1}. \quad (4.33)$$

Профиль (4.33) совпадает с моделью (2.8), если характерные длины L_1 , L_2 и параметр y модели (2.8) определены выражениями

$$\frac{2M}{L} = \frac{1}{L_1}, \quad \frac{1 - M^2}{L^2} = \frac{1}{L_2^2}, \quad y = \frac{M}{\sqrt{1 - M^2}}. \quad (4.34)$$

Ширины барьера (4.31) d и вспомогательного барьера (4.33) d_1 :

$$d = L \operatorname{artanh} \frac{2M}{1 + M^2}, \quad d_1 = \frac{2ML}{1 - M^2}. \quad (4.35)$$

Минимумы барьера $F^2(z)$ (4.31) и вспомогательного барьера (4.33) совпадают ($F_{\min}^2 = (1 - M^2)^2$), а ширины d и d_1 , в отличие от таковых для выпуклого барьера, связаны противоположным неравенством: $d_1 > d$.

При вычислении коэффициента отражения от вогнутого профиля (4.31) можно использовать выражение (3.14), найденное ранее для барьера $F^2(\eta)$, с учётом соотношений

$$\Omega_2 = \frac{v_0}{d} \theta_2(M), \quad \theta_2(M) = \operatorname{artanh} \frac{2M}{1 + M^2}, \quad (4.36)$$

$$q\eta_0 = \frac{\omega N_- d}{v_0}, \quad N_- = \sqrt{1 - S^2}, \quad S = \frac{\Omega_2}{\omega}.$$

Градиентные барьеры, образованные распределениями модуля сдвига, заданными в параметрической форме (2), и соответствующие вспомогательные барьеры (1) представлены на рис. 4. Барьеры (3.23) на рис. 4а характеризуются аномальной дисперсией, а барьер (3.33)

на рис. 46 — нормальной. Расстояния η , z по горизонтальным осям нормированы соответственно на d_1 и d . Градиентные барьеры, образованные "согласованными" распределениями плотности $F^2(z)$ и модуля сдвига $W^2(z)$, когда $F^2(z) = W^2(z)$, с аномальной (4.23) и нормальной (4.31) нелокальной дисперсией представлены на рис. 5. Следует отметить, что спектры отражения для указанных моделей даются общими формулами (3.10) и (3.14), а входящие в эти выражения фазовые сдвиги $q\eta_0 \propto N_{\pm}$ определяются характерными частотами нелокальной дисперсии $\Omega_{1,2}$, которые описываются для барьеров с выпуклыми и вогнутыми профилями неоднородности сходными выражениями, различающимися лишь геометрическими факторами, например $\Omega_{1,2} = (v_0/d)\theta_{1,2}$. В частности, при отражении от вогнутых профилей (3.14) в области низких частот $\omega < \Omega_2$, $S > 1$, $N_{\pm}^2 < 0$ фазовый сдвиг $q\eta_0$ становится мнимым. Своеобразные эффекты, возникающие в градиентной акустике в этом спектральном диапазоне, рассмотрены в разделе 5.

5. Туннелирование звука в среде с нелокальной дисперсией

Туннелирование — одно из фундаментальных явлений в динамике волн различной физической природы. Первые шаги в исследовании этого явления были сделаны в оптике: в работе А. Эйхенвальда [27] (1908 г.), где было теоретически показано на основе решения уравнений Максвелла, что при полном внутреннем отражении света, падающего на границу раздела двух прозрачных сред, световое поле частично проникает в приграничную область отражающей среды, ослабевая экспоненциально на расстоянии порядка длины волны. В 1910 г. этот эффект был подтвержден в эксперименте Л. Мандельштама и П. Зелени [28]. Интерес к эффектам туннелирования усилился после опубликования знаменитой работы Г. Гамова [29] (1928 г.), объяснившей ядерный α -распад именно туннелированием волн де Бройля, описывающих прохождение α -частиц через потенциальный барьер, окружающий атомное ядро.

Вероятности туннельных переходов частиц через потенциальные барьеры, рассчитанные согласно концепции Гамова, легли в основу решения многих задач квантовой механики [30]. Впоследствии схожие модели использовались в ряде задач радиофизики и электродинамики неоднородной плазмы [31].

Однако используемые в таких решениях модели однородных потенциальных барьеров, описывающие экспоненциально малое пропускание (прямоугольный барьер и δ -потенциал), не позволяли исследовать процессы эффективного и, в частности, безотражательного переноса энергии при туннелировании волн через неоднородные потенциальные барьеры (см. рис. 2). Такие процессы, привлекающие в последнее время внимание в градиентной оптике [32], электродинамике метаматериалов [33] и радиофизике направляющих систем [34], иллюстрируют общность режимов туннелирования полей различной физической природы, описываемых волновым уравнением.

Отмеченная общность позволяет поставить задачу о туннелировании звука, также описываемого волновым уравнением, через градиентные акустические барьеры. Как известно, спектры пропускания звука через одно-

родные акустические барьеры с волноводной дисперсией (акустические волноводы) характеризуются частотой отсечки Ω_2 , разделяющей спектр волн на две части, традиционно называемые областью прозрачности ($\omega > \Omega_2$, $S < 1$, $N_{\pm}^2 > 0$) и областью непрозрачности ($\omega < \Omega_2$, $S > 1$, $N_{\pm}^2 < 0$). В отличие от этого, для градиентных барьеров возможно эффективное, иногда стопроцентное, прохождение звука через барьер в области непрозрачности. Такие эффекты, связанные с интерференцией прямой и обратной волн внутри барьера, могут возникать как при определенном профиле скорости звука внутри неоднородного барьера, так и внутри однородного барьера, ограниченного стенками определенного профиля. Эти физически различные туннельные эффекты рассмотрены в разделах 5.1 и 5.2.

5.1. Безотражательное акустическое туннелирование через градиентные волновые барьеры

В разделах 2–4 рассматривались примеры применения модельного уравнения (2.7) к ряду задач о прохождении звука через градиентные акустические барьеры, образованные неоднородными распределениями как плотности среды, так и её упругих параметров. В случае нормальной частотной дисперсии барьера ("вогнутый профиль") полученный спектр отражения (3.14) справедлив для высоких частот $\omega \geq \Omega_2$, где Ω_2 — частота отсечки, определяемая общей формулой (2.21) с формфактором θ_2 , в зависимости от геометрии задачи определяемым (2.21) или (3.37). В низкочастотном интервале, $\omega < \Omega_2$, также можно воспользоваться модельным уравнением (2.13), однако пространственная структура поля внутри барьера тогда описывается неперiodическими решениями (2.13); в этом случае можно говорить о туннелировании звука. Простейший пример такого туннелирования связан с распространением продольной волны, падающей на плоскость $z = 0$ нормально к градиентному слою (2.8), в случае $s_1 = 1$, $s_2 = -1$ (вогнутый профиль плотности). В этом случае решение волнового уравнения (2.13) записывается в виде, отличном от (3.4):

$$u = \frac{A_r [\exp(-p\eta) + Q \exp(p\eta)]}{\sqrt{F(z)}}, \quad (5.1)$$

$$p = \frac{\omega}{v_0} N, \quad N = \sqrt{S^2 - 1}.$$

Дальнейший анализ проводится по схеме, описанной в разделе 3.2. Коэффициент отражения R определяется из граничных условий на плоскости $z = 0$:

$$R = \frac{i\alpha - \gamma/2 + N(1-Q)(1+Q)^{-1}}{i\alpha + \gamma/2 - N(1-Q)(1+Q)^{-1}}. \quad (5.2)$$

Вычисляя Q из условий на задней границе барьера $z = d$ и подставляя в (5.2), найдём

$$R = \frac{t(\alpha^2 + \gamma^2/4 + N^2) - \gamma N}{t(\alpha^2 - \gamma^2/4 - N^2) + \gamma N + 2i\alpha(N - \gamma t/2)}, \quad (5.3)$$

$$\gamma = \frac{2Sy}{\sqrt{1+y^2}}, \quad t = \tanh(p\eta_0), \quad p\eta_0 = \sqrt{1-S^{-2}} Y, \quad (5.4)$$

$$Y = \ln \frac{y_+}{y_-}, \quad y_{\pm} = \sqrt{1+y^2} \pm y. \quad (5.5)$$

Если частота волны равна частоте отсечки ($S = 1$), то выражение для коэффициента отражения получается из

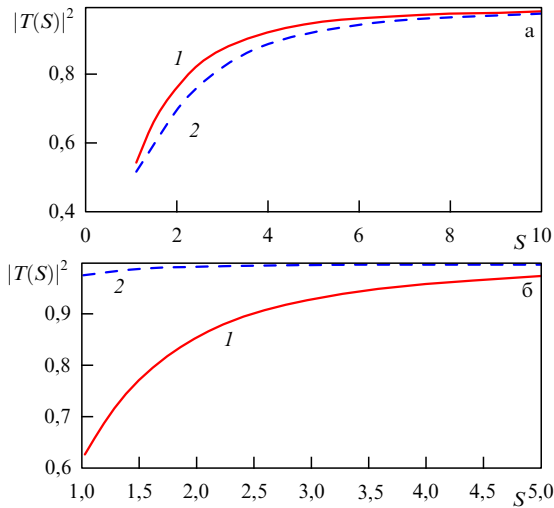


Рис. 6. Спектры пропускания сдвиговых волн $|T(S)|^2$ при туннелировании через градиентный барьер, сформированный распределением плотности и состоящий из одного слоя (5.7): (а) $\alpha = 0,3$, кривые 1 и 2 соответствуют значениям $y = 0,45$ и $0,7$; (б) $y = 0,3$, кривые 1 и 2 построены для $\alpha = 0,3$ и $1,25$ соответственно.

(5.3) предельным переходом $S \rightarrow 1$:

$$R|_{S \rightarrow 1} = \frac{Y[\alpha^2 + y^2/(1 + y^2)] - 2y/\sqrt{1 + y^2}}{Y[\alpha^2 - y^2/(1 + y^2)] + 2y/\sqrt{1 + y^2} + 2i\alpha(1 - yY/\sqrt{1 + y^2})}. \quad (5.6)$$

Находя из (5.3) величину $|R|^2$, можно получить энергетический коэффициент пропускания барьера $|T|^2 = 1 - |R|^2$:

$$|T|^2 = \frac{4\alpha^2 N^2 (1 - t^2)}{[t(\alpha^2 - \gamma^2/4 - N^2) + \gamma N]^2 + 4\alpha^2 (N - \gamma t/2)^2}. \quad (5.7)$$

Графики $|T(S)|^2$ приведены на рис. 6. Коэффициент пропускания T можно также записать в комплексном виде $T = |T| \exp(i\phi_t)$, где фаза волны ϕ_t , пропущенной при туннелировании через барьер, определяется выражением

$$\tan \phi_t = \frac{t(\alpha^2 - \gamma^2/4 - N^2) + \gamma N}{2\alpha(N - \gamma t/2)}. \quad (5.8)$$

Коэффициент пропускания для частоты отсечки получается из (5.7) предельным переходом $S \rightarrow 1$:

$$|T|^2|_{S \rightarrow 1} = 4\alpha^2 \left\{ \left[Y \left(\alpha^2 - \frac{y^2}{1 + y^2} \right) + \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}} \right]^2 + 4\alpha^2 \left(1 - \frac{yY}{\sqrt{1 + y^2}} \right)^2 \right\}^{-1}. \quad (5.9)$$

Коэффициент отражения от системы m смежных одинаковых барьеров выводится при последовательном использовании граничных условий на каждой границе между двумя смежными барьерами (3.1), (3.2). Результат вычислений вновь приводит к формулам (5.4) и (5.7), обобщённым с помощью замены

$$t \rightarrow t_m = \tanh(m\pi\eta_0), \quad m\pi\eta_0 = mY\sqrt{1 - S^{-2}}. \quad (5.10)$$

В формулах (5.6)–(5.8), соответствующих пределу $S \rightarrow 1$, учёт совместного действия m одинаковых барьеров обеспечивается заменой $Y \rightarrow mY$.

Принципиально важным эффектом, присущим градиентным акустическим барьерам с дисперсией волноводного типа, является возможность режима безотражательного туннелирования для некоторой частоты волны $\omega_0 \leq \Omega_2$ ($R(\omega_0) = 0$, $|T(\omega_0)|^2 = 1$). Условие возникновения такого режима можно найти из (5.3) и (5.9):

$$\tanh(mY\sqrt{1 - S^{-2}}) = \frac{\gamma N}{\alpha^2 + \gamma^2/4 + N^2}. \quad (5.11)$$

Спектры волн, туннелирующих через систему градиентных акустических барьеров (5.7)–(5.9), зависят от отношения импедансов барьера и окружающей среды α , геометрического параметра y и числа барьеров m . Эти зависимости показаны на рис. 7 для $m = 2$. Как видно из сравнения рис. 6 и 7, для одиночных барьеров пропускание монотонно возрастает с понижением частоты. Напротив, влияние второго барьера (см. рис. 7) приводит к усложнению интерференционной структуры поля, формированию максимума пропускания $|T|^2 = 1$ и падению пропускания до нуля при дальнейшем понижении частоты. Следует отметить появление в режиме туннелирования окон прозрачности конечной спектральной ширины, соответствующих высоким значениям коэффициента пропускания; так, например, согласно рис. 7а $|T|^2$ достигает значений $|T|^2 > 0,9$ в спектральном интервале $1,22 < S < 1,48$.

5.2. Туннелирование продольного звука через однородную среду в канале с переменным сечением

При описании распространения звука в трубках, рупорах и концентраторах часто возникают задачи об акустических процессах в волноводных системах с переменным поперечным сечением $F(z)$, где z — координата, отсчитываемая вдоль оси системы. Своеобразие таких про-

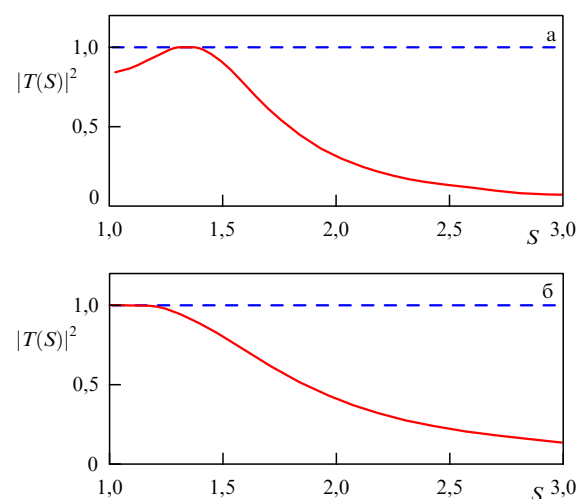


Рис. 7. Спектры пропускания сдвиговых волн $|T(S)|^2$ при туннелировании через составной градиентный барьер, сформированный двумя одинаковыми распределениями плотности (5.11), $m = 2$, $y = 0,577$: (а) $\alpha = 0,2925$; (б) $\alpha = 0,4515$. В точках $S = 1,32$ на рис. а и $S = 1$ на рис. б достигается режим безотражательного туннелирования.

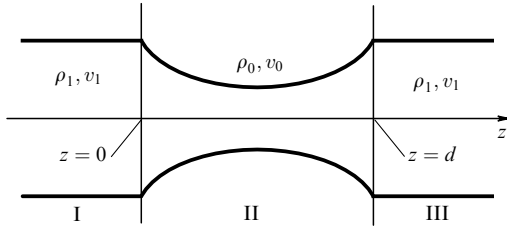


Рис. 8. Сужение в заполненном различными жидкостями канале, допускающее безотражательное туннелирование продольного звука через участок II с постоянной плотностью жидкости, ограниченный криволинейными стенками.

цессов можно проследить при анализе простой задачи о распространении продольного звука в нерегулярном волноводе, показанном на рис. 8: в трубе цилиндрического сечения имеется сужение в области $0 \leq z \leq d$ (область II); площадь сечения в этой области изменяется непрерывно по некоторому закону $F(z)$, при $z \leq 0$ и $z \geq d$ (области I и III) сечение трубы F_0 постоянно, при этом $F(0) = F(d) = F_0$. Область II отделена от областей I и III тонкими звукопроницаемыми мембранами, расположенными в плоскостях $z = 0$ и $z = d$, все области заполнены сплошной средой, характеризуемой значениями плотности и скорости продольного звука ρ_1 и v_1 (области постоянного сечения I и III) и ρ_0, v_0 (область переменного сечения II). Для удобства сравнения результатов этого раздела с результатами раздела 4.1 параметры области II отмечены индексами 0.

Если характерный радиус трубы велик по сравнению с длиной волны ($r_0(z) \gg \lambda$) и сечение трубы изменяется достаточно медленно ($dr_0/dz \ll 1$), то распространение продольной звуковой волны вдоль оси z обсуждаемой системы описывается уравнением Вебстера [35]:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\ln F \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \quad (5.12)$$

здесь $P(z, t)$ — акустическое давление. Анализ эффектов, описываемых этим уравнением, предложенным ещё в 1919 г., продолжается и поныне [36–38]; эффекты нелокальной дисперсии и туннелирования звука через область переменного сечения можно также исследовать в рамках уравнения Вебстера. Для того чтобы построить точное аналитическое решение этого уравнения для монохроматической волны с частотой ω , введём вместо давления новую функцию $f(z)$:

$$P(z, t) = \frac{f(z)}{\sqrt{F(z)}} \exp(-i\omega t). \quad (5.13)$$

Подстановка (5.13) в (5.12) приводит к уравнению, не содержащему первую производную неизвестной функции:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + f \left[\frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1}{4F^2} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 \right] = 0. \quad (5.14)$$

Функция $F(z)$, описывающая в (5.14) изменение сечения трубы, здесь пока не определена.

Рассмотрим симметричный вогнутый профиль $F(z)$, сводящий уравнение (5.14) к волновому уравнению с

постоянными коэффициентами:

$$F(z) = F_m \cosh^2 \left[\left(\frac{2z}{d} - 1 \right) A \right], \quad F(0) = F(d) = 1, \quad (5.15)$$

$$F\left(\frac{d}{2}\right) = F_m < 1, \quad A = \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{F_m}},$$

здесь d — длина суженной части, F_m — минимальная площадь сечения. Подставляя профиль $F(z)$ (5.15) в (5.14), получим для функции $f(z)$ простое волновое уравнение:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} N_-^2 f = 0, \quad N_-^2 = 1 - S^2, \quad S = \frac{\Omega}{\omega}, \quad (5.16)$$

$$\Omega = \frac{v_0}{d} \theta, \quad \theta = 2 \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sqrt{F_m}} = 2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - F_m}}{\sqrt{F_m}}. \quad (5.17)$$

Здесь Ω — характерная частота для области сужения. Уравнение (5.16) напоминает волновое уравнение для волновода или плазмы, а Ω играет роль частоты отсечки, разделяющей спектральные интервалы распространяющихся ($\omega > \Omega$) и туннелирующих ($\omega < \Omega$) волн. При таком рассмотрении существенно, что среда в области II, представляющей собой акустический барьер, предполагается однородной и недиспергирующей, а частота отсечки обусловлена нелокальной дисперсией, зависящей от геометрических параметров — толщины барьера d и минимальной площади сужения F_m .

Рассмотрим туннелирование продольного звука через область II ($0 \leq z \leq d$). Давление P в этой области может быть представлено с помощью прямой и обратной волн, являющихся решениями уравнения (5.16):

$$P_2 = \frac{A_r [\exp(-pz) + Q \exp(pz)]}{\sqrt{F(z)}}, \quad (5.18)$$

$$p = \frac{\omega}{v_0} N, \quad N = \sqrt{S^2 - 1}.$$

Для упрощения записи здесь и ниже множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен. Давление P и скорость среды V в поле звуковой волны связаны уравнениями

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}, \quad V = -\frac{i}{\omega \rho} \frac{dP}{dz}. \quad (5.19)$$

Подставляя распределение давления P_2 (5.18) в (5.19), найдём распределение скорости среды в области II:

$$V_2 = \frac{iA_2}{v_0 \rho_0} \frac{1}{\sqrt{F}} \left\{ \frac{F_z v_0}{2F \omega} [\exp(-pz) + Q \exp(pz)] + N [\exp(-pz) - Q \exp(pz)] \right\}, \quad F_z = \frac{dF}{dz}. \quad (5.20)$$

Распределения давления и скорости в звуковых полях в областях до ($z \leq 0$) и после сужения ($z \geq d$) описываются выражениями

$$P_1 = A_1 [\exp(ik_0 z) + R \exp(-ik_0 z)], \quad (5.21)$$

$$V_1 = \frac{A_1}{v_1 \rho_1} [\exp(ik_0 z) - R \exp(-ik_0 z)],$$

$$P_3 = A_3 \exp[ik_0(z-d)], \quad V_3 = \frac{A_3}{v_1 \rho_1} \exp[ik_0(z-d)]. \quad (5.22)$$

Здесь A_1 , A_2 и A_3 — амплитуды падающей, туннелирующей и прошедшей волн соответственно, параметр Q в (5.20) характеризует вклад обратной волны в звуковое поле внутри сужения.

Чтобы вычислить коэффициент отражения звуковых волн от области II, следует использовать условия непрерывности давления и скорости на границах области $z = 0$ и $z = d$. Отношение $F_z/(2F)$ в формуле (5.20) определяется на границах области II как

$$\frac{F_z}{2F} \Big|_{z=0} = -\frac{2A}{d} \sqrt{1-F_m} = -\frac{F_z}{2F} \Big|_{z=d}. \quad (5.23)$$

Представляя значения давления и скорости по обе стороны от границы $z = 0$ из формул (5.18), (5.20) и (5.21), можно записать условия непрерывности на этой границе, связывающие комплексный коэффициент отражения R и параметр Q :

$$A_1(1+R) = A_2(1+Q), \quad (5.24)$$

$$\frac{iA_1(1-R)}{v_1\rho_1} = \frac{A_2}{v_0\rho_0} [S\sqrt{1-F_m}(1+Q) - N(1-Q)]. \quad (5.25)$$

Из системы (5.24), (5.25) находим выражение для R :

$$R = \frac{i\alpha_1 - S\sqrt{1-F_m} + N(1-Q)(1+Q)^{-1}}{i\alpha_1 + S\sqrt{1-F_m} - N(1-Q)(1+Q)^{-1}}. \quad (5.26)$$

Здесь α_1 — отношение импедансов, определяемое, в отличие от α (3.8), отношением

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha} = \frac{\rho_0 v_0}{\rho_1 v_1}. \quad (5.27)$$

Величина Q находится из граничных условий на границе области II ($z = d$)

$$Q = -\exp(-2pd) \frac{\alpha_1 - iS\sqrt{1-F_m} - iN}{\alpha_1 - iS\sqrt{1-F_m} + iN}. \quad (5.28)$$

Подставляя Q (5.28) в (5.26), получим формулу для коэффициента отражения:

$$R = \left\{ t[\alpha_1^2 + S^2(1-F_m) + N^2] - 2SN\sqrt{1-F_m} \right\} \times \\ \times \left\{ t[\alpha_1^2 - S^2(1-F_m) - N^2] + \right. \\ \left. + 2SN\sqrt{1-F_m} + 2i\alpha_1(N - S\sqrt{1-F_m}t) \right\}^{-1}, \quad (5.29)$$

$$t = \tanh(pd), \quad pd = \frac{2NA}{S}. \quad (5.30)$$

При обсуждении выражений (5.29), (5.30) следует отметить своеобразный эффект подобия градиентных волновых барьеров разной физической природы. Выражения (5.29), (5.30) описывают отражение звука при туннелировании через плоский однородный слой, ограниченный криволинейной границей $F(z)$ (5.15). Пропускание волн через область II, определяемое выражением $|T|^2 = 1 - |R|^2$, зависит от геометрических параметров F_m и A (5.15). С другой стороны, следующие замены в (5.29), (5.30):

$$1 - F_m = \frac{y^2}{1 + y^2}, \quad 2A = \ln \frac{y_+}{y_-}, \quad \alpha_1 = \alpha^{-1}, \quad (5.31)$$

переводят эти формулы в выражения (5.3)–(5.5), описывающие другую физическую ситуацию — туннелирование звука через градиентный барьер, разделяющий однородные среды. Если в волноводе имеется несколько примыкающих друг к другу одинаковых сужений ($m > 1$), то при расчёте коэффициента отражения (5.30) в формуле (5.30) следует сделать замену (5.10).

Таким образом, пользуясь соотношениями (5.31), можно применять спектры отражения, рассчитанные для туннелирования звука через градиентные барьеры, к анализу туннелирования продольных акустических волн через сужения в волноводах. Так, спектр, показанный на рис. 6 ($y = 0,3$, $\alpha = 1,25$, $m = 1$), описывает туннельный эффект и для нерегулярного волновода (см. рис. 8), характеризуемого значениями площади сужения $F_m = 0,917$, $\alpha_1 = 0,8$, $A = 0,59$. При этом одинаковым значениям нормированной частоты S соответствует одинаковое пропускание $|T|^2$. Это равенство остаётся в силе для всех частот звука ω и параметров области сужения — скорости v_0 и толщины d , связанных фазовым соотношением

$$\frac{\omega d}{v_0} = \frac{2A}{S}. \quad (5.32)$$

Аналогичное сопоставление с вариантом $y = 0,577$, $\alpha_1 = 0,2925$, $m = 2$ (см. рис. 7) указывает, например, на возможность появления окон прозрачности при безотражательном туннелировании ($|T|^2 = 1$, $S = 1,28$) через нерегулярный акустический волновод (см. рис. 8) с двумя одинаковыми сужениями и параметрами $F_m = 0,75$, $\alpha_1 = 3,42$, $A = 1,099$; этот эффект возникает при всех частотах, удовлетворяющих условию (5.32). Отмеченное подобие вновь иллюстрирует сходство процессов туннелирования волн различной физической природы.

6. Градиентные элементы фононных кристаллов

Возрастающий в последние годы интерес к физике и технологии фононных кристаллов связан с разработкой нового поколения систем управления акустическими волновыми потоками [39, 40]. Так же как и получение фотонных кристаллов для оптики и радиофизики, эти акустические разработки ориентированы на искусственные неоднородные и композитные материалы, которые не встречаются в естественных условиях. Продолжая указанную аналогию, можно отметить, что, наряду со случаем нормального падения волн на градиентный слой, обсуждавшимся в разделах 3–5, для ряда структур представляет интерес и другой случай — распространение волн вдоль поверхности градиентной среды — тогда говорят о поверхностных волнах в градиентных средах. Ниже кратко отмечены некоторые свойства градиентных акустических барьеров (раздел 6.1) и периодических структур, состоящих из таких барьеров (раздел 6.2), представляющие интерес для создания фононных кристаллов.

6.1. Субволновые акустические барьеры

Спектры отражения различных градиентных акустических барьеров, рассмотренные в разделах 3–5, позволяют отметить некоторые общие свойства таких барьеров, сформированных как неоднородностями плотности

или упругих параметров, так и совместным действием обоих типов неоднородностей.

1. При прохождении звука через однородный непоглощающий слой коэффициенты отражения и пропускания зависят при нормальном падении лишь от толщины слоя d и контраста акустических импедансов $I = \rho v$ внутри и вне слоя. В отличие от этого, при падении на градиентный слой отражённая волна формируется при интерференции волн, отражённых со своими значениями амплитуды и фазы в каждой точке внутри слоя. При этом тонкий слой, толщина которого меньше длины волны, может внести определяющий вклад в структуру отражённой волны. Оценить толщины таких слоёв можно по спектрам отражения $R(S)$ (см., например, рис. 3 и 10). Используя значения безразмерной частоты $S = \Omega/\omega$ на осях абсцисс этих графиков и выражения для характерных частот Ω_1 (2.14) и Ω_2 (2.21), найдём отношение

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{2\pi S}{\theta}, \quad (6.1)$$

где, согласно разделу 3.1, формфакторы $\theta = \theta_1(y) = 2y\sqrt{1-y^2}$ или $\theta = \theta_2(y) = 2y\sqrt{1+y^2}$ для неоднородности плотности, показанной на рис. 1. При неоднородностях модуля сдвига (см. рис. 5) значения формфакторов $\theta_1(y)$ (3.31) и $\theta_2(y)$ (3.37) даны на рис. 9. Подстановка этих значений в (6.1) показывает, что для разных длин волн λ толщины d имеют субволновые значения: $d \approx \approx (0,2-0,3)\lambda$. Такие размеры представляются перспективными для задач миниатюризации фоновых кристаллов.

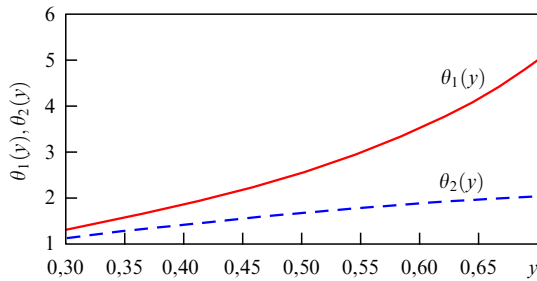


Рис. 9. Формфакторы $\theta_1(y)$ (3.31) и $\theta_2(y)$ (3.37) для градиентных барьеров, сформированных неоднородностью модуля сдвига.

2. Спектры пропускания волн в режиме тунелирования при некоторых наборах параметров представляют интерес для создания эффективных градиентных акустических отражателей в заданном интервале частот. Так, пользуясь рис. 7, можно построить график коэффициента отражения $|R(\delta)|^2 = 1 - |T(\delta)|^2$ (рис. 10). Как видно из рис. 10, коэффициент отражения от барьера, состоящего из двух одинаковых, окружённых упругой средой (отношение импедансов равно α) смежных слоёв ($m = 2$) толщиной d каждый, характеризуемых вогнутым профилем плотности (2.8) и значением $y^2 = 1/3$, обращается в нуль при $\delta = 1,32$, при этом формфактор θ , согласно (2.21), записывается в виде $\theta = \theta_2 = 2y\sqrt{1+y^2}$. Рассмотрим теперь конфигурацию, в которой этот градиентный барьер заменён однородным слоем, имеющим, как и градиентный барьер, толщину $2d$, при тех же значениях частоты ω , скорости v_0 и отношении импедансов α . Переписывая формулу (6.1) для градиентного барьера в

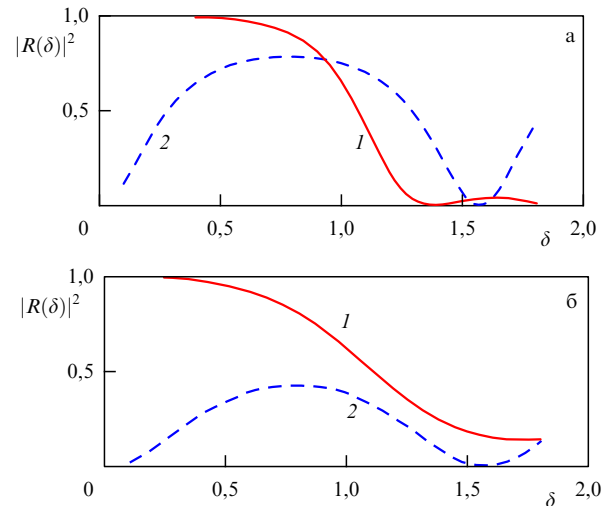


Рис. 10. Коэффициент отражения от барьера толщиной $2d$ в зависимости от безразмерной частоты $\delta = \omega d/v_0$: (а) $\alpha = 0,25$; (б) $\alpha = 0,4595$. Кривая 1 — коэффициент отражения от составного градиентного барьера, образованного двумя одинаковыми слоями с толщинами d (5.7), (5.9), $m = 2$, $y = 0,75$; кривая 2 — коэффициент отражения от однородного барьера толщиной $2d$, определяемый формулой (3.38). В определённых интервалах δ отражение от градиентного барьера сильнее, чем от однородного с той же толщиной при одинаковых значениях скорости v_0 и параметра α .

виде

$$\frac{\omega d}{v_0} = \frac{\theta_2}{S}, \quad (6.2)$$

найдем для сравнения коэффициент отражения от указанного однородного слоя $|R|^2$. Подставляя в формулу (3.38), описывающую отражение от такого слоя толщиной $2d$, значение параметра

$$\delta = \frac{2\omega d}{v_0} = \frac{4y\sqrt{1+y^2}}{S}, \quad (6.3)$$

вычислим коэффициенты отражения $|R|^2$ при значениях, соответствующих рис. 8 ($y^2 = 1/3$, $\alpha = 0,2925$).

Как видно из рис. 10, коэффициент отражения от градиентного барьера в области низких частот при прочих равных параметрах значительно превосходит коэффициент отражения от однородного слоя. Такая дисперсия градиентного барьера представляет интерес для создания акустических фильтров и селективно отражающих поверхностей.

3. При определённых соотношениях параметров градиентного барьера его нелокальная дисперсия может исчезнуть. Так, в простом случае барьера, образованного выпуклым профилем плотности $F^2(z)$, характерная частота Ω_1 (2.14) обращается в нуль при $y = 1$, т.е. $L_2 = 2L_1$; при этом волновое число q даётся обычным выражением $q = \omega/v_0$.

Более сложный случай описывается уравнением (4.2). В этом случае распространение волны через "двойной" барьер зависит от двух распределений: плотности $F^2(z)$ и модуля сдвига $W^2(z)$. В частном случае $F^2(z)W^2(z) = 1$ решение (4.2) имеет вид

$$u = \exp\left(\frac{i\omega\eta}{v_0}\right) + Q \exp\left(-\frac{i\omega\eta}{v_0}\right). \quad (6.4)$$

Так, для профиля плотности $F(z) = \cos(z/L) + M \sin(z/L)$ (4.23) получим вместо (4.24) следующее выражение для переменной η в (6.4):

$$\eta = \frac{L \tan(z/L)}{1 + M \tan(z/L)}. \quad (6.5)$$

Волна (6.4), (6.5) распространяется в "двойном" барьере, $F^2(z)W^2(z) = 1$, с переменной фазовой скоростью, но без дисперсионных искажений.

6.2. Периодические градиентные структуры

Акустические метаматериалы с периодической структурой часто моделируются как композитные среды, составленные из изотропных матриц с периодическими включениями сосредоточенных масс, упругих элементов (пружин) и полостей с различной формой и объёмом [41]. В отличие от этого, в данном разделе отмечается возможность создания периодических структур, рассмотренных в разделах 3–5, из градиентных акустических барьеров, обеспечивающих контролируемое отражение и пропускание волновых потоков в заданном спектральном диапазоне. Традиционные многослойные структуры, созданные для этих целей, содержат перемежающиеся слои из материалов, различающихся скоростью звука $v_{l,t}$ или толщиной d . Градиентные слои, формирующие периодическую структуру, могут различаться не только значениями $v_{l,t}$ и d , но и распределениями плотности $F^2(z)$ и упругих параметров $W^2(z)$ внутри каждого слоя. Спектры отражения и пропускания такой периодической структуры, связанные с разрывами градиента и кривизны распределений $F^2(z)$ и $W^2(z)$ на границах слоёв, могут существенно отличаться от соответствующих спектров одного барьера.

Рассмотрим, например, периодическую структуру, составленную из m примыкающих друг к другу одинаковых барьеров с переменной плотностью (2.8) и аномальной геометрической дисперсией (рис. 11а). Плотности любых смежных барьеров на их общей границе $z = d$ совпадают ($F^2(d) = 1$), а градиенты плотности испытывают на этой границе разрыв, определяемый из (2.8): так,

при переходе через границу по направлению распространения волны этот разрыв составляет

$$\text{grad } F^2|_{z=d-0} - \text{grad } F^2|_{z=d+0} = -\frac{8y^2}{d}. \quad (6.6)$$

Используя условия непрерывности на границах между двумя смежными слоями и приписывая номер $m = 1$ крайнему слою на дальней (по направлению распространения волны) стороне структуры, можно получить рекурсивное соотношение для параметра Q_m , описывающего вклад обратной волны в m -м слое:

$$Q_m = \exp[2i(m-1)q\eta_0]Q_0. \quad (6.7)$$

Здесь Q_0 равно величине Q , определённой в (3.9). Подстановка выражения для Q_m (6.7) вместо Q в формулу (3.9) показывает, что формула (3.10) для коэффициента отражения от одного барьера с аномальной дисперсией обобщается для случая отражения от периодической системы из m таких барьеров (пример дан на рис. 11) при замене в этой формуле

$$\tan(q\eta_0) \rightarrow \tan(mq\eta_0). \quad (6.8)$$

Как видно из рис. 11б, с возрастанием числа градиентных барьеров m увеличивается число частот ω , на которых наблюдается 100%-ное прохождение волны через периодическую структуру с субволновыми неоднородностями.

Периодическая структура, составленная из m градиентных барьеров (2.8) с нормальной дисперсией (вогнутый профиль $F^2(z)$), характеризуется иным значением разрыва $\text{grad } F^2$, составляющим, в отличие от (6.6), величину $8y^2/d$. При этом замена (6.8) в формуле (3.14), найденной для одного барьера с нормальной дисперсией, приводит к выражению для коэффициента отражения периодической структуры из m таких барьеров. Спектры отражения таких градиентных структур, представленные на рис. 3, показывают, что, в отличие от полос пропускания структур, составленных из однородных слоёв, полосы пропускания градиентных периодических структур, границы которых определены условием $R = 0$, в разных частях спектра имеют разную ширину.

Комплексный коэффициент отражения при туннелировании волны через структуру, содержащую m барьеров, получается при аналогичной замене в формулах (5.4) и (5.8):

$$\tanh(p\eta_0) \rightarrow \tanh(mp_0). \quad (6.9)$$

Спектры пропускания волн, туннелирующих через такие структуры, представлены на рис. 7.

Рисунки 3 и 7 показывают значительную зависимость амплитуд волн, проходящих через градиентные периодические структуры, от числа барьеров m даже при небольшом m . Такая зависимость, особенно в области туннелирования волн, в сочетании с субволновыми толщинами градиентных акустических барьеров представляет интерес для создания субволновых элементов фоновых кристаллов.

7. Заключение

Динамика волновых процессов в градиентных средах включает в себя ряд эффектов, общих для волн различной физической природы. Характерным примером такой общности являются упоминавшиеся выше процессы

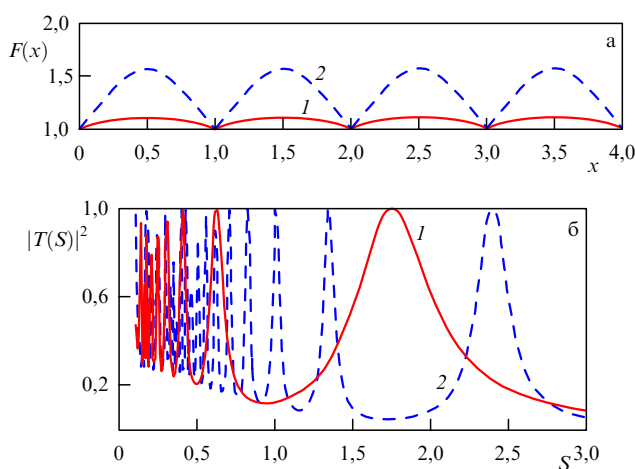


Рис. 11. (а) Периодическая структура из четырёх выпуклых градиентных барьеров (кривая 1 соответствует $y = 0,3$, кривая 2 — $y = 0,6$). (б) Спектры пропускания для периодической структуры, состоящей из трёх (кривая 1) и пяти (кривая 2) градиентных барьеров, при $\alpha = 0,2925$, $y^2 = 1/3$.

туннелирования волн в электродинамике, акустике и квантовой механике. В связи с этим целесообразно отметить и аналогию между "двойным" градиентным акустическим барьером (см. раздел 4.1) и сверхвысоко-частотной линией передачи с распределёнными параметрами. Как известно [42], распределение тока I и напряжения V в линии передачи без потерь с распределёнными параметрами описывается системой уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial z} + L(z) \frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial z} + C(z) \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (7.1)$$

Здесь $L(z) = L_0 F^2(z)$, $C(z) = C_0 W^{-2}(z)$ — распределения самоиндукции и ёмкости на единицу длины линии передачи, зависящие от координаты z вдоль линии. Вводя генерирующую функцию Ψ , такую, что

$$V = \frac{W^2(z)}{C_0} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad I = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (7.2)$$

получим из системы (7.1), (7.2) уравнение (2.3), выведенное для описания смещения в градиентном слое с распределением плотности $F^2(z)$ и модуля сдвига $W^2(z)$ поперёк слоя. Такая аналогия представляет интерес для моделирования сложных акустических полей в неоднородных средах с помощью радиотехнической линии передачи.

Для того чтобы пояснить физику взаимодействия акустических потоков с градиентными барьерами, здесь использовалась простейшая одномерная модель такого взаимодействия, предполагающая нормальное падение потока, простые законы нелокальной дисперсии и точно решаемые модели для плоских волн. Следует отметить принципиально важные проблемы, оставшиеся вне рамок такого рассмотрения.

I. Точечные источники и акустические пучки непоплотных волн и импульсов в неоднородных средах. Один из немногих точных результатов, не ограниченный предположениями об одномерных плоских волнах и однородных средах, описывает преломление акустического потока на границе двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 [43]:

$$\rho_1 \tan \phi_1 = \rho_2 \tan \phi_2, \quad (7.3)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — углы между векторами потока и нормалью к границе жидкостей. Некоторые точно решаемые модели двумерных и трёхмерных волновых пучков обсуждаются в монографии [44], однако физические концепции нелокальной дисперсии и туннелирования для таких конфигураций волновых полей пока не развиты.

II. В настоящем обзоре рассматриваются задачи распространения волн в градиентных средах в направлении изменения плотности ($\text{grad } F^2$) или упругих параметров среды ($\text{grad } W^2$). Следует отметить, что и другая геометрия задач градиентной акустики, связанная с распространением волн в направлениях, перпендикулярных направлениям $\text{grad } F^2$ и $\text{grad } W^2$, также является "горячей" проблемой, имеющей многочисленные приложения в радиофизике и электронике. С такой конфигурацией полей связаны исследования поверхностных волн в градиентных средах [45]. В последнее время особый интерес вызывают поверхностные волновые поля в градиентных средах, характеризующихся собственными масштабами неоднородности; информация о прост-

ранственной структуре и спектральных свойствах таких полей находит многочисленные применения как при зондировании естественных геофизических сред [46], так и при создании искусственных материалов для поглощения и преобразования [47] акустических волн.

III. "Акустическая маска". Успехи в теории градиентных диэлектрических слоёв, покрывающих непрозрачную мишень, осуществляющих захват падающей извне электромагнитной волны и минимизирующих рассеяние на этой мишени ("мишень-невидимка") [48], стимулировали соответствующие разработки и в акустике [49]. Так, например, физические основы для такой "акустической маски" в частном случае цилиндрического тела на поверхности воды были развиты в [50]. Модель акустического метаматериала с анизотропными плотностью и упругостью, состоящего из пружин с разной массой и жёсткостью, была предложена в [51]. Однако эта перспективная теория, не являющаяся повторением "трансформационной оптики", развитой для соответствующих задач электродинамики [52], сегодня делает лишь первые шаги. Необходимо также отметить, что дальнейшее развитие резонансного туннелирования волн через градиентные барьеры в акустике будет связано с исследованием роли нелинейных эффектов; некоторые из них исследованы в монографии [53]. Кроме того, весьма важен учёт влияния на резонансное туннелирование волн в атмосфере и океане крупномасштабных течений. Например, при наличии таких потоков в атмосфере прохождение внутренних гравитационных волн (ВГВ) из тропосферных зон кризисных процессов типа ураганов, землетрясений и пр. на ионосферные высоты с последующей генерацией в ионосфере индикаторов и предвестников этих кризисных явлений возможно только при горизонтальных длинах ВГВ-мод не менее ≈ 30 км [54].

Авторы признательны О.В. Руденко за систематическое обсуждение всех разделов обзора, а также благодарят О.А. Година, Л.А. Островского, Р.З. Сагдеева, И.М. Фукса за проявленный ими интерес к работе и стимулирующую критику и выражают признательность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Slawinski M A *Seismic Waves and Rays in Elastic Media* (Amsterdam: Pergamon, 2003)
2. Zaman F D, Al-Muhammed Z I A *Appl. Acoust.* **61** 427 (2000)
3. Taroyan V, Erdélyi R *Proc. Int. Astron. Union* **3** 86 (2007)
4. Sheng P et al. *Physica B* **338** 201 (2003)
5. Milton G W, Briane M, Willis J R *New J. Phys.* **8** 248 (2006)
6. Chen H, Chan C T *Appl. Phys. Lett.* **91** 183518 (2007)
7. Lee S-J et al. *Appl. Phys. Lett.* **82** 2133 (2003)
8. Ben-Amoz M Z. *Angew. Math. Phys.* **27** 83 (1976)
9. Chakraborty A J. *Acoust. Soc. Am.* **123** 56 (2008)
10. Shvartsburg A B, Kuzmiak V, Petite G *Phys. Rep.* **452** 33 (2007)
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: Наука, 1987) [Landau L D, Lifshitz E M *Theory of Elasticity* (Oxford: Pergamon Press, 1986)]
12. Mindlin R D *Int. J. Solids Struct.* **1** 417 (1965)
13. Erofeev V I *Wave Processes in Solids with Microstructure* (River Edge, NJ: World Scientific, 2003)
14. Bennett T, Gitman I M, Askes H *Int. J. Fract.* **148** 185 (2007)
15. Vavva M G et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **125** 3414 (2009)
16. Кравцов Ю А *Акуст. журн.* **14** 1 (1968) [Kravtsov Yu A *Sov. Phys. Acoust.* **14** 1 (1968)]
17. Бреховских Л М, Годин О А *Акустика слоистых сред* (М.: Наука, 1989) [Brekhovskikh L M, Godin O A *Acoustics of Layered Media, I, II* (Berlin: Springer-Verlag, 1990, 1992)]

18. Strutt J W (Baron Rayleigh) *The Theory of Sounds* (London: Macmillan and Co., 1937) [Стретт Д В (лорд Рэлей) *Теория звука* (М.: ГИТТЛ, 1940)]
19. Godin O A, Chapman D M F J. *Acoust. Soc. Am.* **106** 2367 (1999)
20. Мировольский Ю З *Динамика внутренних гравитационных волн в океане* (Л.: Гидрометеоздат, 1981)
21. Талипова Т Г, Пелиновский Е Н, Петрухин Н С *Океанология* **49** 673 (2009) [Talipova T G, Pelinovsky E N, Petrukhin N S *Oceanology* **49** 622 (2009)]
22. Gossard E E, Hooke W H *Waves in the Atmosphere* (Amsterdam: Elsevier, 1975) [Госсард Э, Хук У *Волны в атмосфере* (М.: Мир, 1978)]
23. Schoenberg M, Sen P N *J. Acoust. Soc. Am.* **73** 61 (1985)
24. Artan R, Altan B S *Int. J. Solids Struct.* **39** 5927 (2002)
25. Guck J et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 5451 (2000)
26. Aleshin V, Gusev V, Tournat V *J. Acoust. Soc. Am.* **121** 2600 (2007)
27. Эйхенвальд А А *Журн. русск. физ.-хим. общества Ч. физ.* **41** 131 (1909)
28. Mandelstam L I, Zeleni P *Ann. Phys.* **31** 58 (1910)
29. Gamow G Z. *Phys.* **51** 204 (1928)
30. Feynman R P, Hibbs A R *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill, 1965)
31. Михайловский А Б *Электромагнитные неустойчивости неоднородной плазмы* (М.: Энергоатомиздат, 1991) [Mikhailovskii A M *Electromagnetic Instabilities in an Inhomogeneous Plasma* (Bristol: IOP Publ., 1992)]
32. Shvartsburg A B, Petite G *Opt. Lett.* **31** 1127 (2006)
33. Shalaev V M *Nature Photon.* **1** 41 (2007)
34. Shvartsburg A B et al. *Phys. Rev. E* **78** 016601 (2008)
35. Eisner E J. *Acoust. Soc. Am.* **41** 1126 (1967)
36. Webster A G J. *Audio Eng. Soc.* **25** 24 (1977)
37. Forbes B J *Phys. Rev. E* **72** 016627 (2005)
38. Руденко О В, Шварцбург А Б *Акуст. журн.* (2010) (в печати)
39. Chen H, Chan C T *Appl. Phys. Lett.* **91** 183518 (2007)
40. Блюх К Ю, Блюх Ю П *УФН* **174** 439 (2004) [Bliokh K Yu, Bliokh Yu P *Phys. Usp.* **47** 393 (2004)]
41. Cummer S A et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 024301 (2008)
42. Jackson J D *Classical Electrodynamics* 3rd ed. (New York: Wiley, 1999) [Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)]
43. Godin O A *J. Acoust. Soc. Am.* **125** EL117 (2009)
44. Brekhovskikh L M, Godin O A *Acoustics of Layered Media II: Point Sources and Bounded Beams* 2nd ed. (Berlin: Springer, 1999)
45. Бирюков С В и др. *Поверхностные акустические волны в неоднородных средах* (М.: Наука, 1991)
46. Chen C-H et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 238101 (2009)
47. Sluys L J, de Brost R, Mühlhaus H B *Int. J. Solids Struct.* **30** 1153 (1993)
48. Дубинов А Е, Мытарева Л А *УФН* **180** 475 (2010) [Dubinov A E, Mytareva L A *Phys. Usp.* **53** 455 (2010)]
49. Norris A N *Proc. R. Soc. London A* **464** 2411 (2008)
50. Farhat M et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 134501 (2008)
51. Milton G W *New J. Phys.* **9** 359 (2007)
52. Leonhardt U *Science* **312** 1777 (2006)
53. Гурбатов С Н, Руденко О В, Саичев А И *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии* (М.: Физматлит, 2008)
54. Ерохин Н С, Михайловская Л А, Шалимов С Л *Геофиз. исслед.* (7) 53 (2007)

Acoustic gradient barriers (exactly solvable models)

A.B. Shvartsburg

Joint Institute of High Temperatures, Russian Academy of Sciences,
ul. Izhorskaya 13/19, 127412 Moscow, Russian Federation. Fax (7-495) 485-99 22
Department of Cosmogeophysics, Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 333-41 00. Fax (7-495) 333-12 48. E-mail: alex-s-49@yandex.ru

N.S. Erokhin

Department of Cosmogeophysics, Space Research Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 333-41 00. Fax (7-495) 333-12 48. E-mail: nerokhin@mx.iki.rssi.ru

This paper reviews the physical fundamentals and mathematical formalism for problems concerning acoustic waves passing through gradient wave barriers formed by the continuous one-dimensional spatial distribution of the density and/or elastic parameters of medium in a finite thickness layer. The physical mechanisms of such processes involve nonlocal (geometric) normal and abnormal dispersion determined by the profiles and geometric parameters of the gradient barrier. The mathematics used relies on exactly solvable gradient barrier models with up to three free parameters and on the auxiliary barrier method with which the exactly solvable models found can be used to build new, also exactly solvable, models for such barriers. The longitudinal and shear wave transmission spectra through the gradient barriers considered are presented, and how these spectra depend on the gradient and curvature of the density distribution and on the elastic parameters of the barrier is shown using general formulas corresponding to the geometrical and abnormal geometric dispersion. Examples of reflectionless tunneling of sound through gradient barriers formed either by the elastic parameter distribution in an inhomogeneous layer or by curvilinear boundaries of a homogeneous layer are considered. It is also shown that by using subwave gradient barriers and periodical structures composed of them, phonon crystal elements can be fabricated.

PACS numbers: 43.60.Vx, **51.40.+p**, **62.60.+v**, 68.35.Iv

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201106c.0627

Bibliography — 54 references

Received 8 September 2010, revised 20 November 2010

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (6) 627–646 (2011)

Physics–Uspekhi **54** (6) (2011)