Май 2011 г. **Том 181, № 5**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Строгий вывод преобразования Лоренца на основе минимальных предположений

С.-Б. Хуан

В различных выводах преобразований Лоренца (ПЛ), помимо двух фундаментальных постулатов Эйнштейна, принимаются дополнительные предположения. Два или три так называемых точных вывода ПЛ очень абстрактны и малопонятны. Таким образом, справедливость вывода ПЛ находится под вопросом. Здесь мы строго выводим ПЛ необычным методом. Наш вывод основывается только на постоянстве скорости света и двух мысленных экспериментах. Никаких дополнительных допущений не требуется, поскольку необходимые предположения доказываются с помощью постоянства скорости света. На основе нашего систематического подхода даётся убедительное объяснение того, что сокращение длины не создаёт никакого механического напряжения.

PACS numbers: **01.40.–d**, **03.30.+p** DOI: 10.3367/UFNr.0181.201105g.0553

Содержание

1. **Введение (553).**
2. **Доказательство равенства относительной скорости между двумя инерциальными системами отсчёта (554).**
3. **Вывод соотношений для сокращения длины и задержки времени (555).**
4. **Вывод преобразования Лоренца (555).**
5. **Заключение (556).**

Список литературы (556).

1. Введение

Эйнштейн создал свою замечательную специальную теорию относительности в 1905 г. Он вывел преобразование Лоренца (ПЛ), которое является центральной частью его теории, из двух простых постулатов. Однако при выводе ПЛ Эйнштейн сделал дополнительные предположения [1, 2]. Как следствие, его вывод трудно принять безоговорочно, и в литературе по специальной теории относительности появились различные альтернативные выводы ПЛ [3–7]. Тем не менее и в этих выводах не удаётся полностью обойтись без дополнительных предположений. Ниже перечисляются два постулата Эйнштейна и обычные дополнительные предположения.

• *Постулат относительности*: законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

С.-Б. Хуан (X.-B. Huang). College of Physics Science and Technology, Heilongjiang University, Xuefu Road 74, 150080 Harbin City, Heilongjiang Province, China
Tel. 86-451-86609614
E-mail: huangxingbin@msn.com

Статья поступила 13 сентября 2010 г.

• *Постулат постоянства скорости света*: скорость света в вакууме является одинаковой во всех инерциальных системах отсчёта и не зависит от движения источника.

• *Предположение о равенстве относительной скорости* для двух инерциальных систем координат. Если Мэри видит, что Генри удаляется от неё с постоянной скоростью u, то Генри видит Мэри, удаляющуюся от него с той же скоростью u.

• *Предположение о несжимаемости длин*, измеренных в направлении, перпендикулярном относительному движению двух систем отсчёта, т.е. координаты y и z преобразуются согласно преобразованию Галилея.

• *Предположение о линейности координатных преобразований.*

• *Предположение об однородности и изотропности пространства-времени.*

Физики, изучающие вывод ПЛ, до сих пор пытаются устранить дополнительные предположения [8]. В частности, часто используются первые два предположения — о равенстве относительной скорости между двумя инерциальными системами отсчёта и о галилеевом характере преобразования координат y и z. Некоторые исследователи и преподаватели полагают, что доказательства этих двух предположений сомнительны, даже если они кажутся очевидными с точки зрения здравого смысла. Равенство относительной скорости между двумя инерциальными системами отсчёта — один из очевидных случаев. Поскольку ни единичная длина, ни единичное время в двух системах не допускают прямого сопоставления, относительные скорости двух систем могут быть неодинаковыми [9].

Ниже мы выводим ПЛ, ограничиваясь наименьшим возможным числом предположений или постулатов. В действительности, мы точно доказываем необходимые предположения с помощью основных постулатов. Во-

первых, одинаковость относительной скорости между двумя инерциальными системами отсчёта точно доказывается исходя из постоянства скорости света и мысленного эксперимента. Во-вторых, на основе вышеупомянутого непосредственного метода и названных результатов прямо выводятся сжатие длины и задержка времени. Наконец, точно формулируется ПЛ без привлечения необоснованных предположений.

2. Доказательство равенства относительной скорости между двумя инерциальными системами отсчёта

Пусть $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}'$ — инерциальные системы отсчёта, оси координат которых параллельны. Система $\boldsymbol{K}'$ движется с постоянной скоростью u по отношению к системе $\boldsymbol{K}$ вдоль общей оси $x{-}x'$ в положительном направлении с точки зрения системы $\boldsymbol{K}$. Для простоты предположим, что начала координат O и O′ совпадают в начальный момент времени $t = t' = 0$.

Для того чтобы доказать равенство относительной скорости между двумя инерциальными системами отсчёта рассмотрим мысленный эксперимент. Если источник света, покоящийся в начале координат O системы $\boldsymbol{K}$, быстро мигнёт в момент времени $t = t' = 0$, то постоянство скорости света подразумевает, что наблюдатели как в $\boldsymbol{K}$, так и в $\boldsymbol{K}'$ увидят волновой фронт, движущийся наружу от соответствующих начал координат со скоростью c. Когда волновой фронт в момент t дойдёт до точек A и B на оси x системы $\boldsymbol{K}$, точки A′, M′, O′ и B′ на оси x' совпадут с точками A, O, C и B соответственно на оси x системы $\boldsymbol{K}$. Это изображено на рис. 1, где точки, относящиеся к системе $\boldsymbol{K}'$, покоятся относительно системы $\boldsymbol{K}'$.

Наш первый вопрос таков: когда мы знаем, что $\boldsymbol{K}'$ движется относительно $\boldsymbol{K}$ с постоянной скоростью u в положительном направлении x с точки зрения $\boldsymbol{K}$, как нам вычислить скорость u' системы $\boldsymbol{K}$ относительно системы $\boldsymbol{K}'$ с точки зрения $\boldsymbol{K}'$? Для того чтобы ответить на этот вопрос, будем считать, что $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$ и $\overline{\mathrm{CB}}$ — расстояния между двумя соответствующими точками в системе $\boldsymbol{K}$. Согласно геометрическим соотношениям на рис. 1 получаем

$$\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{AO}} = 2\overline{\mathrm{OB}} = 2ct\,, \tag{1}$$

$$\overline{\mathrm{OC}} = ut = \frac{u\overline{\mathrm{AB}}}{2c}\,, \tag{2}$$

где c — скорость света в вакууме.

Пусть $\overline{\mathrm{A'B'}}$, $\overline{\mathrm{A'M'}}$, $\overline{\mathrm{M'B'}}$ и $\overline{\mathrm{M'O'}}$ — расстояния между двумя соответствующими точками в $\boldsymbol{K}'$. На рисунке 1

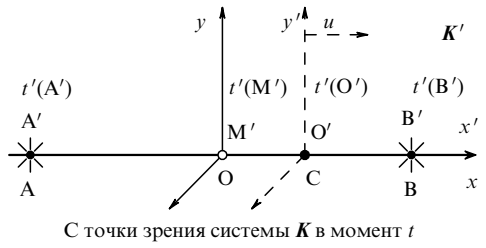

Рис. 1. В системе отсчёта $\boldsymbol{K}$ волновой фронт приходит в точки A и B на оси x в момент времени t.

они должны быть *собственной длиной* в $\boldsymbol{K}'$, потому что наблюдатели покоятся в $\boldsymbol{K}'$. Следовательно, их длины в движении, измеренные в системе $\boldsymbol{K}$ в момент времени t, — это $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{OB}}$ и $\overline{\mathrm{OC}}$ соответственно. Затем положим $\overline{\mathrm{OB}} = \alpha\overline{\mathrm{M'B'}}$, где α — произвольный множитель. Поскольку точки A′ и M′ движутся с постоянной скоростью u относительно $\boldsymbol{K}$, M′ должна переместиться от O к B, тогда как A′ — от A к O. Таким образом, длина $\overline{\mathrm{A'M'}}$ в движении также равна $\overline{\mathrm{OB}}$. Поскольку измеренная в движении длина не зависит от времени, мы по-прежнему имеем $\overline{\mathrm{OB}} = \alpha\overline{\mathrm{A'M'}}$. Значит, $\overline{\mathrm{AO}} = \alpha\overline{\mathrm{A'M'}}$ и $\overline{\mathrm{AB}} = \alpha\overline{\mathrm{A'B'}}$. Следовательно, произвольный множитель α не зависит от собственной длины; иными словами, в пропорциональные соотношения между любой собственной длиной в $\boldsymbol{K}'$ и длиной в движении в $\boldsymbol{K}$ параметр α должен входить как общий линейный фактор. По существу, это важное следствие равномерного прямолинейного движения. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{AO}} = \alpha\overline{\mathrm{A'M'}}\,, \quad \overline{\mathrm{OB}} = \alpha\overline{\mathrm{M'B'}}\,, \quad \overline{\mathrm{AC}} = \alpha\overline{\mathrm{A'O'}}\,, \\ &\overline{\mathrm{CB}} = \alpha\overline{\mathrm{O'B'}}\,, \quad \overline{\mathrm{OC}} = \alpha\overline{\mathrm{M'O'}}\,, \quad \overline{\mathrm{AB}} = \alpha\overline{\mathrm{A'B'}}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь посмотрим с другой стороны. Наблюдатели, покоящиеся в $\boldsymbol{K}'$, видят, что волновой фронт исходит из начала координат O′ в момент $t' = 0$ и приходит в B′ в момент $t'(\mathrm{B'})$. Аналогично, волновой фронт достигает точки A′ в момент $t'(\mathrm{A'})$. Можно вычислить $t'(\mathrm{B'})$ и $t'(\mathrm{A'})$, используя постоянство скорости света и уравнения (1)–(3):

$$t'(\mathrm{B'}) = \frac{\overline{\mathrm{O'B'}}}{c} = \frac{(c-u)t}{\alpha c}\,, \tag{4}$$

$$t'(\mathrm{A'}) = \frac{\overline{\mathrm{A'O'}}}{c} = \frac{(c+u)t}{\alpha c}\,. \tag{5}$$

Поскольку $\overline{\mathrm{A'O'}}$ больше $\overline{\mathrm{O'B'}}$, $t'(\mathrm{A'})$ больше, чем $t'(\mathrm{B'})$. Это и есть знаменитая относительность одновременности. Комбинируя вышеприведённые уравнения, получаем

$$t'(\mathrm{A'}) - t'(\mathrm{B'}) = \frac{2ut}{\alpha c} = \frac{u}{c^2}\,\overline{\mathrm{A'B'}}\,. \tag{6}$$

Выражение (6) позволяет нам сделать важное заключение: физически оно означает, что мы можем вычислить интервал времени между двумя любыми событиями в $\boldsymbol{K}'$, когда оба эти события произошли в двух точках в $\boldsymbol{K}$ одновременно. Поскольку на рис. 1 M′ совпадает с O и B′ совпадает с B в один и тот же момент времени t в системе $\boldsymbol{K}$, временной интервал, соответствующий точкам M′ и B′, в системе $\boldsymbol{K}'$ равен $t'(\mathrm{M'}) - t'(\mathrm{B'})$. Аналогично получаем $t'(\mathrm{O'}) - t'(\mathrm{B'})$. Из формулы (6) находим

$$t'(\mathrm{M'}) - t'(\mathrm{B'}) = \frac{u}{c^2}\,\overline{\mathrm{M'B'}} = \frac{u}{c^2}\,\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\alpha} = \frac{ut}{\alpha c}\,, \tag{7}$$

$$t'(\mathrm{O'}) - t'(\mathrm{B'}) = \frac{u}{c^2}\,\overline{\mathrm{O'B'}} = \frac{(c-u)ut}{\alpha c^2}\,. \tag{8}$$

Разрешая эти уравнения относительно $t'(\mathrm{M'})$ и $t'(\mathrm{O'})$ получаем:

$$t'(\mathrm{M'}) = \frac{t}{\alpha}\,, \qquad t'(\mathrm{O'}) = \frac{1-u^2/c^2}{\alpha}\,t\,. \tag{9}$$

Теперь вычислим скорость u', с которой система $\boldsymbol{K}$ движется относительно $\boldsymbol{K}'$ в отрицательном направле-

нии вдоль общей оси $x{-}x'$ в системе $\boldsymbol{K}'$. Поскольку каждая точка в $\boldsymbol{K}$ движется с постоянной скоростью u' по отношению к $\boldsymbol{K}'$ в отрицательном x'-направлении, вычисляем только скорость движения начала координат O. Наблюдатели, покоящиеся в $\boldsymbol{K}'$, видят, что O совпадает с O$'$, когда световой сигнал испускается из O$'$ в момент $t'=0$ и O совпадает с M$'$ в момент $t'(\mathrm{M}')$ в системе $\boldsymbol{K}'$. Таким образом, измеренный в движении интервал времени прохождения началом координат O пути от O$'$ до M$'$ равен $t'(\mathrm{M}')$, а измеренный в движении путь, пройденный началом координат O в системе $\boldsymbol{K}'$ равен $\overline{\mathrm{O}'\mathrm{M}'}$. Следовательно, скорость начала координат O относительно системы $\boldsymbol{K}'$ должна быть $u' = \overline{\mathrm{O}'\mathrm{M}'}/t'(\mathrm{M}')$. Комбинируя уравнения (2), (3) и (9), находим

$$u' = \frac{\overline{\mathrm{O}'\mathrm{M}'}}{t'(\mathrm{M}')} = \frac{ut}{\alpha}\,\frac{\alpha}{t} = u\,. \tag{10}$$

Итак, мы доказали, что относительная скорость между двумя инерциальными системами отсчёта одинакова.

3. Вывод соотношений для сокращения длины и задержки времени

Для того чтобы определить общий множитель α, обратим внимание на то, что наблюдатели, покоящиеся в $\boldsymbol{K}'$, видят, что волновой фронт достигает точки B$'$ в момент $t'(\mathrm{B}')$, как это изображено на рис. 2. Зададимся вопросом: как определить положение точки A в $\boldsymbol{K}'$ в момент $t'(\mathrm{B}')$? Поскольку A и A$'$ совпадают в системе $\boldsymbol{K}'$ в момент времени $t' = t'(\mathrm{A}')$, точка A в момент $t' = t'(\mathrm{B}')$ совпадает с точкой E$'$, расположенной между точками A$'$ и B$'$. Кроме того, расстояние между A$'$ и E$'$ $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{E}'} = u[t'(\mathrm{A}') - t'(\mathrm{B}')]$.

Из выражения (6) получаем

$$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{E}'} = \frac{u^2}{c^2}\,\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}\,. \tag{11}$$

На рисунке 2, поскольку покоящиеся относительно системы $\boldsymbol{K}'$ наблюдатели измеряют длину между движущимися точками A и B одновременно, расстояние между A и B является собственной длиной в системе $\boldsymbol{K}$. Таким образом, $\overline{\mathrm{E}'\mathrm{B}'}$ — длина $\overline{\mathrm{AB}}$ в движении, вычисленная в системе $\boldsymbol{K}'$. Поскольку $u' = u$, фактор пропорциональности между длиной в движении и собственной длиной, измеренный в системе $\boldsymbol{K}'$, равен вышеупомянутому множителю α, измеренному в системе $\boldsymbol{K}$. Следовательно, $\overline{\mathrm{E}'\mathrm{B}'} = \alpha\overline{\mathrm{AB}}$. Согласно геометрическим соотношениям на рис. 2, имеем $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{E}'} + \overline{\mathrm{E}'\mathrm{B}'} = \overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$. Комбинируя приведённые уравнения, получаем

$$\frac{u^2}{c^2}\,\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} + \alpha\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}\,. \tag{12}$$

Так как масштабный фактор α не может быть отрицательным, решая уравнение (12) относительно α, находим

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,. \tag{13}$$

Итак, мы доказали эффект сокращения длины, т.е. то, что $\overline{\mathrm{AB}} = \alpha\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$. Далее получаем выражение для задержки времени на основе уравнений (9) и (13), т.е. $t'(\mathrm{O}') = \alpha t$. Таким образом, эффекты сокращения длины и задержки времени получены без каких-либо лишних предположений.

4. Вывод преобразования Лоренца

Для того чтобы вывести координатное преобразование Лоренца, обратимся к рис. 3, начальные условия на котором такие же, как и на рис. 1. Ради простоты сначала рассмотрим одномерный случай. Пусть временны́е и пространственные координаты произвольной точки на общей оси $x{-}x'$ равны $\mathrm{P}(x,t)$ и $\mathrm{P}'(x',t')$ в системах $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}'$ соответственно. Таким образом, $\mathrm{P}(x,t)$ и $\mathrm{P}'(x',t')$ совпадают в момент t, и расстояние от O до N в момент t равно ut, с точки зрения системы $\boldsymbol{K}$. Координатное расстояние x' между O$'$ и P$'$ является собственной длиной в системе $\boldsymbol{K}'$, значит, в системе $\boldsymbol{K}$, расстояние от N до P равно $\alpha x'$. Далее, расстояние от O до P равно x:

$$x = ut + \alpha x'. \tag{14}$$

Выражая x' из уравнения (14), мы получаем первую формулу координатного преобразования Лоренца:

$$x' = \frac{x - ut}{\alpha}\,. \tag{15}$$

Поскольку точки O$'$ и P$'$ совпадают в момент t в системе $\boldsymbol{K}$ с точками N и P соответственно, разница между временами $t'(\mathrm{O}')$ и $t'(\mathrm{P}') = t'$ определяется уравнением (6), т.е.

$$t'(\mathrm{O}') - t' = \frac{u}{c^2}\,\mathrm{O}'\mathrm{P}' = \frac{u}{c^2}\,x'. \tag{16}$$

Принимая во внимание $t'(\mathrm{O}') = \alpha t$ и уравнение (15) и решая уравнение (16) относительно t', получаем второе уравнение координатного преобразования Лоренца:

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\alpha}\,. \tag{17}$$

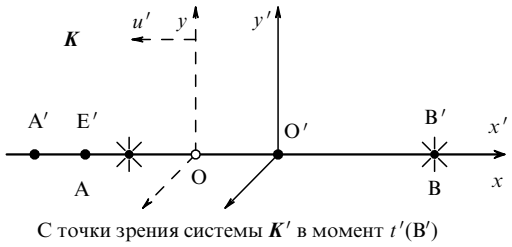

Рис. 2. В системе отсчёта $\boldsymbol{K}'$ волновой фронт наблюдается в точке B$'$ в момент времени $t'(\mathrm{B}')$.

Рис. 3. В системе отсчёта $\boldsymbol{K}$ событие происходит в точке на общей оси $x{-}x'$ в момент времени t.

Наконец, покажем, как вывести соотношения между y и y' и между z и z' из постоянства скорости света. Рассмотрим другой мысленный эксперимент. Как было сказано выше относительно рис. 1, мы предполагаем, что волновой фронт испускается из точки O′ в момент $t' = 0$ и движется в положительном направлении вдоль оси y' в системе $\boldsymbol{K}'$. После того, как волновой фронт пройдёт расстояние y', он отражается зеркалом и возвращается в O′ в момент времени t'. Таким образом, волновой фронт проходит полное расстояние $2y'$ за временной интервал t'. Следовательно, согласно постулату постоянства скорости света, получаем

$$y' = \frac{ct'}{2}\,. \tag{18}$$

Такое же распространение фронта может быть также рассмотрено по отношению к системе $\boldsymbol{K}$, и в этом случае постулат постоянства скорости света тоже справедлив. Время прохождения туда и обратно в системе $\boldsymbol{K}$ равно другой величине t. В системе $\boldsymbol{K}$ волновой фронт отправляется и возвращается в разных точках на оси x. За время t начало координат O′ сдвигается на расстояние ut по отношению к $\boldsymbol{K}$. Расстояние между зеркалом и началом координат O равно y, когда два начала O и O′ совпадают. Значит, согласно постоянству скорости света имеем

$$\sqrt{y^2 + \left(\frac{ut}{2}\right)^2} = \frac{ct}{2}\,. \tag{19}$$

Подставляя (18) и $t' = \alpha t$ в уравнение (19), находим

$$y' = y\,. \tag{20}$$

Точно таким же образом находим соотношение между z и z':

$$z' = z\,. \tag{21}$$

Итак, мы точно вывели преобразование Лоренца. Уравнения (15), (17), (20) и (21) являются прямым координатным преобразованием Лоренца. Так называемое обратное координатное преобразование Лоренца можно найти из прямого ПЛ непосредственным вычислением.

5. Заключение

Специальная теория относительности — величайшая физическая теория, и её сердцем является ПЛ. Однако эта теория иногда подвергается критике. Одним из возражений является то, что делается слишком много предположений, особенно в выводе ПЛ. Для разрешения этой проблемы исследователи изучали вывод ПЛ без использования необоснованных предположений. Однако никому не удалось успешно разрешить эту проблему. Мы же точно вывели ПЛ.

Следует отметить, что в вышеприведённом выводе ПЛ мы не делали никаких предположений, кроме предположений о постоянстве скорости света и равномерном прямолинейном движении. Кроме того, наш вывод прост и ясен.

Отметим, что наш подход к выводу эффекта сокращения длины выявил внутренние свойства явления сокращения расстояний, а именно: когда мы наблюдаем одновременно несколько точек на движущемся стержне, мы видим, что каждая из точек имеет различные временны́е координаты по собственному времени стержня. Следовательно, хотя мы видим, что между этими точками имеется сокращение расстояний, эффект механического напряжения отсутствует, поскольку они рассматриваются в разное собственное время. Другими словами, никакого механического напряжения при сокращении длины не возникает. Образно эту ситуацию можно представить как прикосновение нашей вчерашней правой руки к сегодняшней левой. Итак, наш систематический подход будет важен в изучении, применении и преподавании специальной теории относительности.

Автор выражает благодарность Ван Цяну за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Einstein A *Relativity*: *The Special and General Theory* (New York: Methuen, 1916) p. 71
2. Einstein A *The Meaning of Relativity* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1922) p. 24
3. Jackson J D *Classical Electrodynamics* 3rd ed. (New York: John Wiley, 1999) Sect. 11.3
4. Bergmann P G "The special theory of relativity", in *Encyclopedia of Physics* Vol. IV (Ed. S Flügge) (Berlin: Springer-Verlag, 1962) p. 109
5. Bergmann P G *Introduction to the Theory of Relativity* (London: Butterworths, 1958) p. 33
6. Денисов А А, Теплицкий Э Ш *УФН* **176** 857 (2006) [Denisov A A, Teplitsky E Sh *Phys. Usp.* **49** 831 (2006)]
7. Hassani S *Eur. J. Phys.* **29** (1) 103 (2008)
8. Escalona H, Franco R J A *J. Vectorial Relat.* **2** (4) 15 (2007)
9. Fock V A *The Theory of Space, Time and Gravitation* 2nd ed. (Oxford: Pergamon Press, 1964) p. 30

A rigorous minimum assumption derivation of the Lorentz transformation

X.-B. Huang
College of Physics Science and Technology, Heilongjiang University, Xuefu Road 74, 150080 Harbin City, Heilongjiang Province, China
Tel. 86-451-86609614. E-mail: huangxingbin@msn.com

The available derivations of the Lorentz transformation (LT) are of questionable validity because they introduce some assumptions in addition to Einstein's two fundamental postulates or, if not, are highly abstract and abstruse (as is the case with two or three 'exact' derivations). The rigorous LT derivation proposed in this paper has only the constant speed of light and two thought experiments as its underpinnings. With the constant speed of light used to prove all the necessary assumptions, no additional assumptions are needed. Our systematic approach explains in a convincing way why stress is irrelevant to length contraction.

PACS numbers: **01.40.–d**, **03.30.+p** DOI: 10.3367/UFNr.0181.201105g.0553

Bibliography — 9 references *Received 13 September 2010*