Май 2011 г. *Том 181, № 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Интегральные характеристики — ключ к пониманию структурообразования в стохастических динамических системах

В.И. Кляцкин

Рассматриваются общие вопросы статистического описания параметрически возбуждаемых стохастических динамических систем, описываемых уравнениями в частных производных. Такие задачи возникают в гидродинамике, магнитной гидродинамике, астрофизике, физике плазмы и радиофизике. Особенностью этих задач является экспоненциальное возрастание во времени всех статистических характеристик их решений (моментных, корреляционных, спектральных функций и т.п.), в то время как в отдельных реализациях решений нередко образуются случайные структуры с вероятностью единица в результате кластеризации. Выяснению условий возникновения таких структур на основе идей статистической топографии и посвящён данный обзор.

PACS numbers: **05.40.** – **a**, **05.45.** – **a**, **46.65.** + **g**, **47.27.** – **i**

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201105a.0457

Содержание

1. **Введение (457).**
   1.1. Элементы статистической топографии случайных полей. 1.2. Кривая типичной реализации случайного процесса. 1.3. Некоторые свойства логнормального случайного процесса.
2. **Простейшая анизотропная трёхмерная модель кластеризации полей плотности и магнитной энергии (464).**
   2.1. Динамическое описание модели. 2.2. Статистическое описание модели.
3. **Изотропная модель случайного магнитогидродинамического поля скоростей (470).**
   3.1. Гауссово векторное случайное поле. 3.2. Вероятностное описание поля плотности в случайном поле скоростей. 3.3. Вероятностное описание магнитного поля и его энергии в случайном поле скоростей.
4. **Интегральные одноточечные статистические характеристики пассивных векторных полей (475).**
   4.1. Пространственная корреляционная функция поля плотности. 4.2. Пространственная корреляционная функция магнитного поля. 4.3. Обобщение для случая неоднородных начальных условий.
5. **Волны в случайно-неоднородных средах (480).**
6. **Заключение (480).**

Список литературы (481).

В.И. Кляцкин. Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, 119017 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 269-12-83. E-mail: klyatskin@yandex.ru

Статья поступила 12 августа 2010 г., после доработки 1 ноября 2010 г.

Смотри в корень!
Козьма Прутков

1. Введение

Параметрически возбуждаемые динамические системы возникают во всех областях физики. И это возбуждение обычно ассоциируется со свойством неустойчивости таких систем вследствие флуктуации начальных условий. Аналогичная ситуация возникает и при детерминированных начальных условиях, но флуктуирующих параметрах системы. Динамические системы при этом могут описываться как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. Простейшая динамическая система, которая соответствует логнормальному случайному процессу $y(t;\alpha)$, описывается обыкновенным стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t;\alpha) = \big(-\alpha + z(t)\big)\, y(t;\alpha)\,, \quad y(0;\alpha) = 1\,, \tag{1}$$

где $z(t)$ — гауссов случайный процесс *белого шума* с параметрами

$$\big\langle z(t)\big\rangle = 0, \quad B_z(t-t') = \big\langle z(t)\, z(t')\big\rangle = 2D\delta(t-t')\,.$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$y(t;\alpha) = \exp\left(-\alpha t + \int_0^t \mathrm{d}\tau\, z(\tau)\right). \tag{2}$$

Основные статистические свойства этого процесса хорошо известны — они описаны в работе [1] и монографиях [2–6]. Дополнительные, связанные со структурообразованием в динамических системах, свойства, не освещённые в литературе, будут рассмотрены в разделах 1.2 и 1.3. На рисунке 1 приведены реализации логнор-

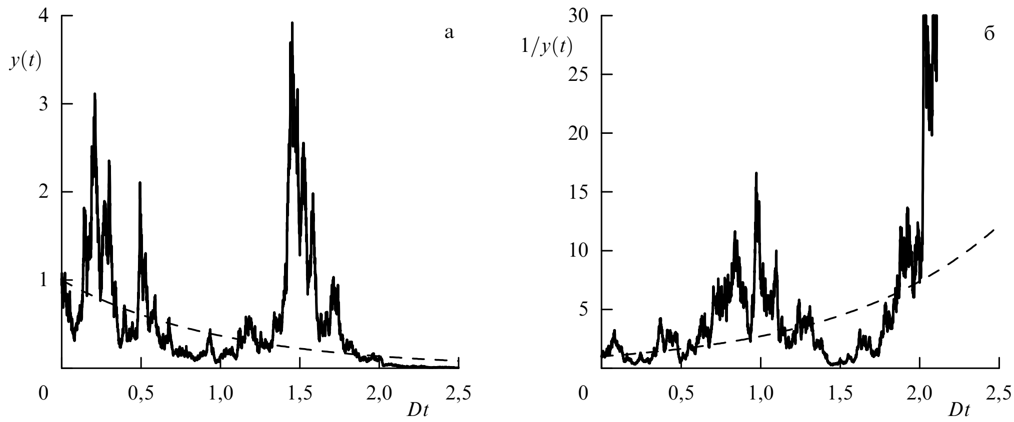

Рис. 1. Реализации логнормальных процессов $y(t)$ (а) и $1/y(t)$ (б) при отношении параметров $\alpha/D = 1$.

мальных случайных процессов $y(t)$ (2) и $1/y(t)$ при отношении параметров $\alpha/D = 1$ (штриховыми кривыми показаны функции $\exp(-Dt)$ и $\exp(Dt)$ соответственно). Из рисунка 1 видно наличие редких, но больших выбросов относительно штриховых кривых как в сторону бо́льших значений, так и в сторону нуля. Такое свойство случайных процессов называется *перемежаемостью* (см., например, [7, 8]). Отметим, что это свойство является общим для всех случайных процессов. Кривую, относительно которой осуществляются выбросы, будем называть *кривой типичной реализации* (см. раздел 1.2).

Другие простейшие примеры — задачи о стохастическом осцилляторе с флуктуирующей частотой $\omega(t)$ и коэффициентом затухания $\lambda(t)$ [2–6, 9]:

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,x(t) + \lambda(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t) + \omega^2(t)x(t) = 0\,,$$

$$x(0) = x_0\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t)\bigg|_{t=0} = y_0\,.$$

Отметим, что задача об осцилляторе с флуктуирующей массой рассматривалась в работах [10–12].

Краевая стационарная задача о падении плоской волны на слой случайной слоистой среды $[L_0, L]$ описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,u(x) + k^2\big[1 + z(x)\big]u(x) = 0 \tag{3}$$

с условиями непрерывности поля и его производной на границах слоя:

$$u(L) + \frac{\mathrm{i}}{k}\,\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=L} = 2\,,\quad u(L_0) - \frac{\mathrm{i}}{k}\,\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=L_0} = 0\,.$$

На рисунке 2 приведены две реализации интенсивности волнового поля $I(x) = |u(x)|^2$ в достаточно толстом слое среды, соответствующие двум, полученным численным моделированием, реализациям неоднородности среды, которые различаются тем, что для них функции $z(x)$ в середине слоя на расстоянии длины волны имеют разные знаки. Это позволяет увидеть влияние малой расстройки среды на поведение решения краевой задачи. Отметим, что на рис. 2 явно просматривается тенденция резкого экспоненциального спада (с большими выбросами как в сторону увеличения интенсивности, так и к значениям, близким к нулю), обусловленная многократ-

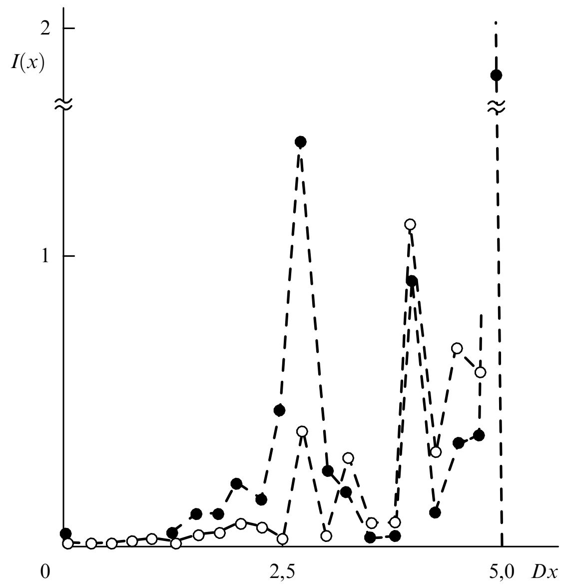

Рис. 2. Численное моделирование динамической локализации интенсивности плоской волны для двух реализаций неоднородностей среды.

ным переотражением волны в хаотически неоднородной среде (*динамическая локализация*). Это явление обычно отождествляется с *локализацией Андерсона* собственных волновых функций для стационарного одномерного уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом [13] (см. также [14]). Однако это не совсем точно, так как решение краевой задачи (3) представляет собой суперпозицию всех собственных функций.

Для краевой задачи (3) интенсивность волнового поля $I(x)$ для полупространства случайной среды статистически эквивалентна случайному процессу $2y(t;\alpha)$ при $\alpha = D$ и её реализация похожа на зеркальное отображение рис. 1а.

Что касается случайных полей и уравнений в частных производных, то простейшей (по постановке) задачей является кинематическая задача о диффузии частицы в случайном поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ с заданными статистическими свойствами [2–6, 15]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}\big(\mathbf{r}(t), t\big)\,,\quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0\,. \tag{4}$$

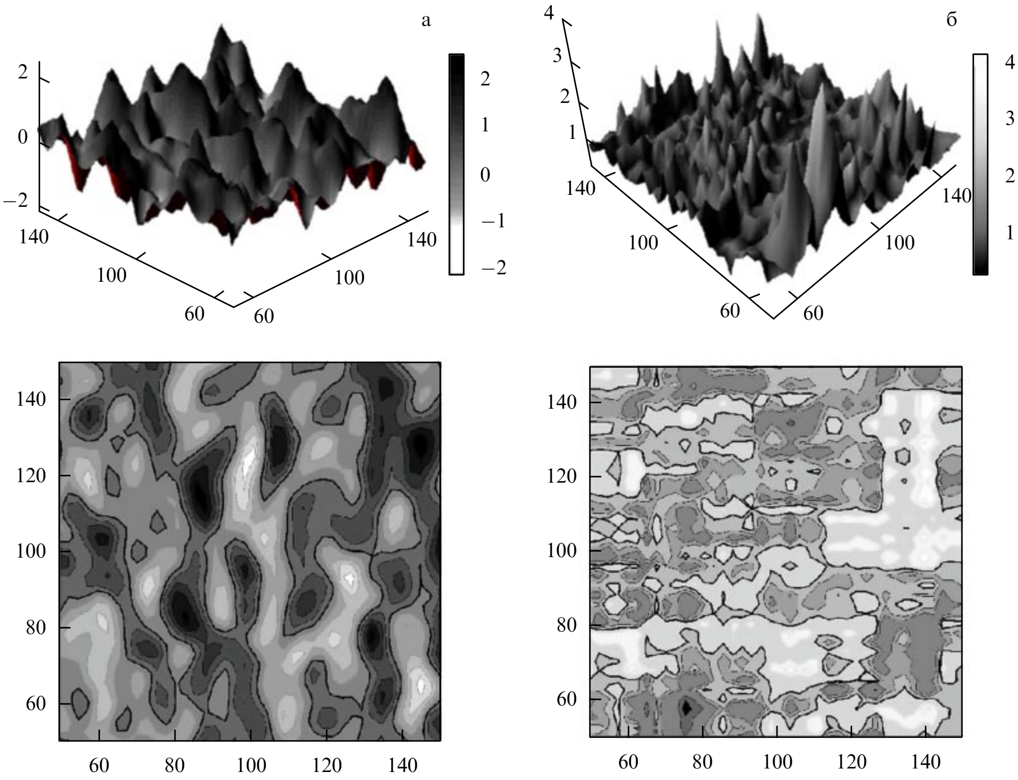

Рис. 3. Реализации (а) гауссова $\ln f(\mathbf{r}, t)$ и (б) логнормального $f(\mathbf{r}, t)$ (10) полей и их топографические линии уровня. Жирными кривыми в нижней части рисунка обозначены линии уровня, соответствующие значениям полей 0 (а) и 1 (б).

Далее можно ввести обобщение логнормального случайного процесса (2) для логнормального случайного поля по формуле

$$f(\mathbf{r}, t; \alpha) = \exp\left(-\alpha t + \int_0^t \mathrm{d}\tau\, z(\mathbf{r}, \tau)\right), \tag{5}$$

где $z(\mathbf{r}, t)$ — гауссово случайное поле, дельта-коррелированное во времени, с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\left\langle z(\mathbf{r}, t)\, z(\mathbf{r}', t')\right\rangle = 2D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, \delta(t - t'). \tag{6}$$

Это поле удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{r}, t; \alpha) = \left\{-\alpha + z(\mathbf{r}, t)\right\} f(\mathbf{r}, t; \alpha), \quad f(\mathbf{r}, 0; \alpha) = 1, \tag{7}$$

параметрически зависящему от пространственной точки $\mathbf{r}$. При этом все одноточечные статистические характеристики этого поля не зависят от $\mathbf{r}$, следовательно, если ограничиться только одноточечными характеристиками, то случайное поле $f(\mathbf{r}, t; \alpha)$ можно считать статистически эквивалентным случайному процессу $y(t; \alpha)$ (2).

Отметим, что в упомянутых ранее работах [7, 8] в качестве модельной задачи рассматривалось уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{r}, t) = z(\mathbf{r}, t)\, f(\mathbf{r}, t) + \mu_f \Delta f(\mathbf{r}, t), \tag{8}$$

где μ_f — динамический коэффициент диффузии для поля $f(\mathbf{r}, t)$. Отметим, что уравнение (8), содержащее члены, описывающие случайное размножение и диффузию, характерно как для задач биологии, так и для задач кинетики химических и ядерных реакций (см., например, [16]).

Заменяя t мнимым временем $\mathrm{i}\tau$, мы приходим к *уравнению Шрёдингера* со случайным потенциалом $z(\mathbf{r}, \tau)$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(\mathbf{r}, \tau) = \mathrm{i} z(\mathbf{r}, \tau)\, f(\mathbf{r}, \tau) + \mathrm{i}\mu_f \Delta f(\mathbf{r}, \tau), \quad f(\mathbf{r}, 0) = f_0(\mathbf{r}). \tag{9}$$

На начальном этапе диффузии решением задачи (8) является функция (5) при $\alpha = 0$, т.е.

$$f(\mathbf{r}, t) = \exp\left(\int_0^t \mathrm{d}\tau\, z(\mathbf{r}, \tau)\right). \tag{10}$$

Введение случайности в параметры среды порождает стохастичность самих физических полей. Индивидуальные реализации, например, логнормального скалярного двумерного поля (10) $f(\mathbf{R}, t)$, где $\mathbf{R} = (x, y)$, напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределёнными пиками, провалами, хребтами и перевалами. На рисунке 3 приведены примеры реализации двух случайных полей с разной статистической структурой, полученные численным моделированием.

Одной из важных проблем теории турбулентности в магнитной гидродинамике является решение задач о диффузии в кинематическом приближении таких пассивных полей, как поле плотности примеси (концентрация частиц), и магнитного поля. Исходными стохастическими уравнениями для них являются уравнение непрерывности для поля плотности примеси $\rho(\mathbf{r}, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu_\rho\, \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \tag{11}$$

и уравнение индукции для бездивергентного магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ [17]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\,\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\left(\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{u}(\mathbf{r},t)+\mu_H\,\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\,,$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},0)=\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\,, \qquad (12)$$

где μ_ρ — динамический коэффициент диффузии для плотности, $\mu_H=c^2/(4\pi\sigma)$ — динамический коэффициент диффузии магнитного поля, связанный с проводимостью среды σ, $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — поле турбулентных скоростей, которое мы считаем однородным в пространстве (в общем случае неизотропным, обладающим спиральностью) и стационарным с заданными статистическими свойствами.

Отметим, что уравнения (11), (12) приведены для эйлерова описания динамики полей, тогда как уравнение (4) является характеристическим для уравнений, соответствующих (11) и (12), в лагранжевом описании.

Следует также специально отметить, что уравнение (12) описывает диффузию магнитного поля в трёхмерном ($d=3$) пространстве $\mathbf{r}=\{\mathbf{R},\mathbf{z}\}$ ($\mathbf{R}=\{x,\ y\}$) трёхмерным полем скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\{u_x,\ u_y,\ u_z\}$.

В случае плоскопараллельного потока поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{R},t)=\{u_x,\ u_y,\ 0\}$ — двумерное ($d=2$). В этом случае для трёхмерного магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{R},t)=\{\mathbf{H}_\perp,\ H_z\}$, где $\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R},t)=\{H_x,\ H_y\}$, уравнение (12) расщепляется. А именно, двумерная компонента магнитного поля в плоскости $\mathbf{R}-\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R},t)$ описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\,\mathbf{u}(\mathbf{R},t)\right)\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R},t)=$$
$$=\left(\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R},t)\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\right)\mathbf{u}(\mathbf{R},t)+\mu_H\,\Delta\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R},t)\,,$$
$$\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R},0)=\mathbf{H}_{\perp 0}(\mathbf{R})\,,$$

а компонента магнитного поля $H_z(\mathbf{R},t)$ описывается уравнением непрерывности для пассивного скаляра

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\,\mathbf{u}(\mathbf{R},t)\right)H_z(\mathbf{R},t)=\mu_H\,\Delta H_z(\mathbf{R},t)\,,$$
$$H_z(\mathbf{R},0)=H_{z0}(\mathbf{R})\,,$$

подобным уравнению для поля плотности (11).

Другим примером задачи о параметрическом возбуждении динамических систем является задача о распространении монохроматического излучения в случайных многомерных средах, которая описывается комплексным параболическим уравнением (см., например, [2–6, 18])

$$\frac{\partial}{\partial x}\,u(x,\mathbf{R})=\frac{\mathrm{i}}{2k}\,\Delta_{\mathbf{R}}\,u(x,\mathbf{R})+\frac{\mathrm{i}k}{2}\,\varepsilon(x,\mathbf{R})\,u(x,\mathbf{R})\,,$$
$$u(x,\mathbf{R})=u_0(\mathbf{R})\,, \qquad (13)$$

где x — координата в направлении распространения волны, $\mathbf{R}$ — координаты в поперечной плоскости, $\varepsilon(x,\mathbf{R})$ — отклонение диэлектрической проницаемости от единицы. Отметим, что это же уравнение является нестационарным *уравнением Шрёдингера* со случайным потенциалом $\varepsilon(x,\mathbf{R})$, подобным уравнению (9) при замене x временем.

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля по формуле

$$u(x,\mathbf{R})=A(x,\mathbf{R})\exp\left[\mathrm{i}S(x,\mathbf{R})\right],$$

то уравнение для интенсивности волнового поля $I(x,\mathbf{R})=|u(x,\mathbf{R})|^2$ примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,I(x,\mathbf{R})+\frac{1}{k}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{R}}\left\{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{R}}S(x,\mathbf{R})\,I(x,\mathbf{R})\right\}=0\,,\quad I(0,\mathbf{R})=I_0(\mathbf{R})\,. \qquad (14)$$

Уравнение (14) по форме совпадает с уравнением непрерывности для поля плотности примеси (11) в случайном потенциальном потоке.

Обычно используемые методы статистического усреднения (т.е. вычисление средних, например $\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle$, $\langle\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\rangle$, пространственно-временны́х корреляционных функций $\langle\rho(\mathbf{r},t)\,\rho(\mathbf{r}',t')\rangle$, $\langle H_i(\mathbf{r},t)H_j(\mathbf{r}',t')\rangle$ и т.п., где через $\langle\ldots\rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности отдельных реализаций, и часто полученные статистические характеристики не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций.

Таким образом, статистические средние указанного типа обычно характеризуют "глобальные" пространственно-временны́е масштабы области, в которой происходят стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри её.

Динамические системы (11)–(13) консервативны, и в них сохраняются такие интегральные характеристики, как общая масса примеси $M=\int\mathrm{d}\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r},t)$, поток магнитного поля $\int\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$, а также мощность волнового поля $I=\int\mathrm{d}\mathbf{R}\,I(x,\mathbf{R})$.

При однородных начальных условиях $\rho_0(\mathbf{r})=\rho_0$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})=\mathbf{H}_0$, $u_0(\mathbf{R})=u_0$ и статистически однородных в пространстве случайных параметрах следствием консервативности динамических систем (11)–(13) являются равенства

$$\big\langle\rho(\mathbf{r},t)\big\rangle=\rho_0\,,\quad\big\langle\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\big\rangle=\mathbf{H}_0\,,\quad\big\langle I(x,\mathbf{R})\big\rangle=I_0=|u_0|^2\,.$$

В общем случае статистическое среднее, например, $\int\mathrm{d}\mathbf{r}\,\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))\rangle$ для магнитного поля при однородных начальных условиях переходит в выражение $\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))\rangle$, т.е. имеет место взаимно однозначное соответствие:

$$\int\mathrm{d}\mathbf{r}\left\langle f\big(\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\big)\right\rangle\Leftrightarrow\left\langle f\big(\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\big)\right\rangle,$$

следовательно, величина $\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r},t))\rangle$ является удельной, приходящейся на единицу объёма, и, таким образом, — интегральной величиной. При этом все интегральные величины не зависят от адвекции этих полей, описывающейся потоковым (дивергентным) членом в соответствующих уравнениях.

Отметим, что интегральные величины являются основными величинами, характеризующими динамические системы в целом. Так, все законы сохранения в механике и электродинамике сплошных сред записываются для интегральных величин.

Особенностью уравнений (11) и (12) является параметрическое возбуждение во времени как поля плотности $\rho(\mathbf{r},t)$ (для сжимаемого потока жидкости), так и энергии магнитного поля $E(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}^2(\mathbf{r},t)$ (для турбулентного потока жидкости), что называется *стохастическим динамо* (см., например, обзорную работу [19] и монографии [20–28]).

Такое параметрическое возбуждение сопровождается на начальных стадиях эволюции динамических систем возрастанием во времени всех статистических характеристик решения задачи, например всех моментов плотности $\langle \rho^n(\mathbf{r}, t)\rangle$ и энергии магнитного поля $\langle E^n(\mathbf{r}, t)\rangle$, а также возрастанием с увеличением расстояния моментов мощности излучения в случайных средах $\langle I^n(x, \mathbf{R})\rangle$.

На начальных этапах развития эффекты динамической диффузии для плотности и магнитного поля являются несущественными, и, пренебрегая ими, мы приходим к уравнениям в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\,\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0\,, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r})\,, \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\,\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right)\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\,, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})\,. \tag{16}$$

Стохастическое уравнение (16) интенсивно изучается в связи с проблемой мелкомасштабного динамо магнитного поля — усилением флуктуаций последнего случайными движениями среды с заданными корреляционными свойствами. В этом случае происходят такие стохастические нестационарные явления, как перемешивание и кластеризация в фазовом и физическом пространствах. Кластеризация какого-либо поля (плотности, энергии магнитного поля и т.п.) — это возникновение компактных областей с большими величинами данного поля на фоне окружающих областей с относительно низкими их значениями. Время жизни кластеров ограничено. Их пространственный узор постоянно меняется. Отметим, что сходство между задачами о магнитном динамо и о волнах в случайных средах отмечалось в монографии [23, с. 54]. Проявления эффектов кластеризации магнитного поля хорошо известны. Так, весь объём плазменного шнура в стеллараторе заполнен стохастическими плазменными структурами с большими значениями полей с негауссовыми распределениями. Аналогичная картина наблюдается и в плазме токамака [29]. Грануляция в солнечной фотосфере с локальными большими значениями магнитных полей, связываемая с действием турбулентных движений, представляет собой, возможно, другой пример явления кластеризации [30, 31].

Обнаружить и описать эти явления удаётся только с помощью анализа одновременных и одноточечных плотностей вероятностей решений уравнений, приведённых выше, на основе идей статистической топографии.

1.1. Элементы статистической топографии случайных полей

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трёхмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$.

Для анализа системы контуров (для простоты в данном разделе ограничимся двумерным случаем $\mathbf{r} = \mathbf{R}$) удобно ввести сосредоточенную на этих контурах дельта-функцию Дирака

$$\varphi(\mathbf{R}, t; f) = \delta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\,, \tag{17}$$

называемую *индикаторной функцией*.

Через функцию (17) выражаются, например, такие величины, как общая площадь ограниченных линиями уровня областей, в которых случайное поле $f(\mathbf{R}, t)$ превышает заданный уровень f, т.е. $f(\mathbf{R}, t) > f$:

$$S(t; f) = \int \theta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\,\mathrm{d}\mathbf{R} = \int_f^\infty \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}\mathbf{R}\,\varphi(\mathbf{R}, t; f')\,,$$

и общая "масса" поля, заключённая в этих областях,

$$M(t; f) = \int f(\mathbf{R}, t)\,\theta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\,\mathrm{d}\mathbf{R} = \int_f^\infty f'\,\mathrm{d}f' \int \mathrm{d}\mathbf{R}\,\varphi(\mathbf{R}, t; f')\,,$$

где $\theta(f(\mathbf{R}, t) - f)$ — тета-функция Хевисайда.

Среднее значение индикаторной функции (17) по ансамблю реализаций случайного поля $f(\mathbf{R}, t)$ определяет одновременную и одноточечную в пространстве плотность вероятностей [2 – 6, 32]

$$P(\mathbf{R}, t; f) = \big\langle \delta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\big\rangle\,,$$

следовательно, средние по ансамблю реализаций значения величин $S(t; f)$ и $M(t; f)$ определяются непосредственно этой плотностью вероятностей:

$$\big\langle S(t; f)\big\rangle = \int_f^\infty \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}\mathbf{R}\,P(\mathbf{R}, t;\, f')\,,$$

$$\big\langle M(t; f)\big\rangle = \int_f^\infty f'\,\mathrm{d}f' \int \mathrm{d}\mathbf{R}\,P(\mathbf{R}, t; f')\,.$$

Дополнительную информацию о детальной структуре поля $f(\mathbf{R}, t)$ можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{R}, t)$. Так, например, величина

$$l(t; f) = \int \mathrm{d}\mathbf{R}\,\big|\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)\big|\,\delta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big) = \oint \mathrm{d}l \tag{18}$$

определяет общую длину контуров. Подынтегральное выражение в (18) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\varphi(\mathbf{R}, t; f, \mathbf{p}) = \delta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\,\delta\big(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}\big) \tag{19}$$

и среднее значение $l(t; f)$ (см. формулу (18)) связано с совместной одновременной плотностью вероятностей поля $f(\mathbf{R}, t)$ и его градиента $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$, определяемой усреднением индикаторной функции (19) по ансамблю реализаций, т.е. функцией

$$P\big(\mathbf{R}, t;\, f, \mathbf{p}\big) = \big\langle \delta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\,\delta\big(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}\big)\big\rangle\,.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$ с помощью приближённой (с точностью до незамкнутых линий) формулы

$$N(t; f) = N_{\text{in}}(t; f) - N_{\text{out}}(t; f) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\mathbf{R}\kappa(t, \mathbf{R}; f)\,\big|\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)\big|\,\delta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\,, \tag{20}$$

где $N_{\text{in}}(t; f)$, $N_{\text{out}}(t; f)$ — числа контуров, для которых вектор $\mathbf{p}$ направлен по внутренней и внешней нормали соответственно, $\kappa(t, \mathbf{R}; f)$ — кривизна линии уровня.

Отметим, что для пространственно однородного поля $f(\mathbf{R}, t)$, когда соответствующие одноточечные плотности вероятностей $P(\mathbf{R}, t; f)$ и $P(\mathbf{R}, t; f, \mathbf{p})$ не зависят от $\mathbf{R}$, статистические средние всех выражений (без интегрирования по $\mathbf{R}$) будут описывать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин. Так, например, удельная средняя площадь $\langle S(t; f)\rangle$, на которой случайное поле $f(\mathbf{R}, t)$ превышает заданный уровень f, совпадает с вероятностью события в любой точке пространства $f(\mathbf{R}, t) > f$, т.е.

$$\left\langle S(t; f)\right\rangle = \left\langle \theta\big(f(\mathbf{R}, t) - f\big)\right\rangle = \mathrm{Prob}\left\{f(\mathbf{R}, t) > f\right\},$$

и, таким образом, средняя удельная площадь является геометрической интерпретацией вероятности события $f(\mathbf{R}, t) > f$, не зависящей, естественно, от точки $\mathbf{R}$.

В этом случае, в силу однородности и в ряде случаев — изотропности, может оказаться, что пространственные производные поля $f(\mathbf{R}, t)$ не коррелируют с самим полем $f(\mathbf{R}, t)$. Тогда задача вычисления средних значений описанных функционалов может существенно упроститься — она сводится к вычислению соответствующих моментных функций производных поля $f(\mathbf{R}, t)$. При этом все рассмотренные выше статистические характеристики являются интегральными, характеризующими динамику стохастических систем в целом во всём пространстве.

Кроме того, при анализе одноточечных статистических характеристик удобно учитывать, что случайное поле $f(\mathbf{R}, t)$ статистически эквивалентно некоему случайному процессу $y(t)$ с теми же статистическими характеристиками. Для таких случайных процессов важную роль играют понятие "*кривая типичной реализации*" процесса и некоторые свойства логнормального случайного процесса.

1.2. Кривая типичной реализации случайного процесса

Статистические характеристики процесса $z(t)$ в фиксированный момент времени t описываются плотностью вероятностей $P(z, t)$ и интегральной функцией распределения вероятностей $F(Z, t) = \int_{-\infty}^{Z} \mathrm{d}z'\, P(z', t)$.

Типичной реализацией случайного процесса $z(t)$ называется детерминированная кривая $z^*(t)$, которая является *медианой интегральной функции распределения вероятностей* и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F\big(z^*(t), t\big) = \frac{1}{2}\,. \tag{21}$$

Это означает, с одной стороны, что для любого t вероятности $\mathrm{Prob}\{z(t) > z^*(t)\} = \mathrm{Prob}\{z(t) < z^*(t)\} = 1/2$. С другой стороны, медиана имеет специфическое свойство, заключающееся в том, что для любого интервала (t_1, t_2) случайный процесс $z(t)$ "обвивает" кривую $z^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство $z(t) > z^*(t)$, совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство $z(t) < z^*(t)$ (рис. 4), т.е.

$$\left\langle T_{z(t)>z^*(t)}\right\rangle = \left\langle T_{z(t)<z^*(t)}\right\rangle = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\,.$$

Кривая типичной реализации (21) для гауссова случайного процесса $z(t)$ совпадает со средним значением

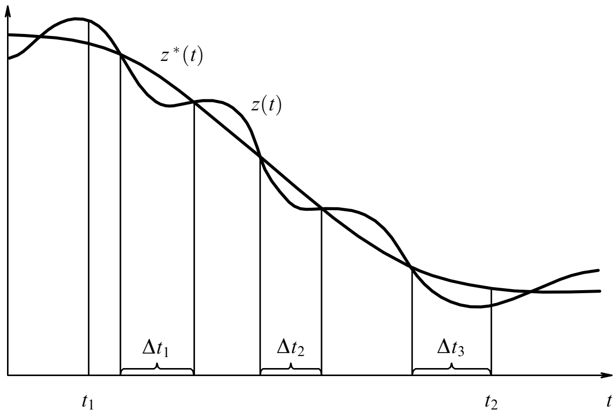

Рис. 4. К определению кривой типичной реализации случайного процесса.

процесса $z(t)$, т.е. $z^*(t) = \langle z(t)\rangle$, а кривая типичной реализации для логнормального случайного процесса $y(t) = \exp\big(z(t)\big)$ определяется равенством $y^*(t) = \exp\langle z(t)\rangle = \exp\langle \ln y(t)\rangle$.

Кривая типичной реализации, таким образом, является той детерминированной кривой, относительно которой осуществляется перемежаемость. Однако она, конечно, не несёт никакой информации об амплитудах выбросов случайного процесса относительно этой кривой.

1.3. Некоторые свойства логнормального случайного процесса

Логнормальный случайный процесс мы определили по формуле (2). Одновременная плотность вероятностей этого процесса $P(t; y) = \langle \delta(y(t) - y)\rangle$ описывается уравнением Фоккера – Планка

$$\frac{\partial}{\partial t}\, P(y, t; \alpha) = \alpha \frac{\partial}{\partial y}\, yP(y, t; \alpha) + D \frac{\partial}{\partial y}\, y \frac{\partial}{\partial y}\, yP(y, t; \alpha)\,,$$
$$P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1)\,, \tag{22}$$

решение которого, естественно, зависит от параметра α:

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi D t}} \exp\left\{-\frac{\ln^2\left[y \exp(\alpha t)\right]}{4Dt}\right\}. \tag{23}$$

Отметим, что одновременная плотность вероятностей случайного процесса $\tilde{y}(t; \alpha) = 1/y(t; \alpha)$ также является логнормальной и определяется формулой

$$P(\tilde{y}, t; \alpha) = \frac{1}{2\tilde{y}\sqrt{\pi D t}} \exp\left\{-\frac{\ln^2\left[\tilde{y} \exp(-\alpha t)\right]}{4Dt}\right\}, \tag{24}$$

соответствующей изменению знака параметра α в формуле (23). Для определённости здесь будем считать, что параметр $\alpha > 0$. Графики логарифмически нормальных плотностей вероятностей (23) и (24) при $\alpha/D = 1$ для безразмерных времён $\tau = Dt = 0{,}1$ и 1 показаны на рис. 5. Отметим, что примеры реализации случайных процессов $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ именно для этого случая приведены на рис. 1.

Эти распределения вероятностей имеют совершенно различные структуры. Их общей особенностью является лишь появление длинных пологих *хвостов* при $\tau = 1$,

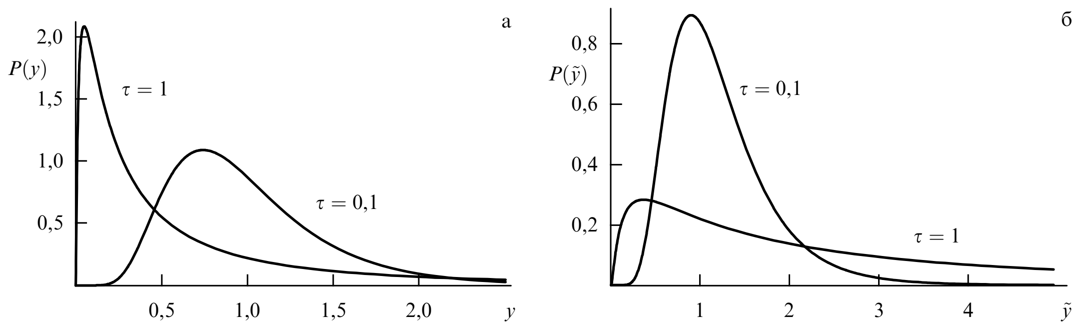

Рис. 5. Логнормальные распределения вероятностей (23) (а) и (24) (б) при $\alpha/D = 1$ для безразмерного времени $\tau = 0{,}1$ и 1.

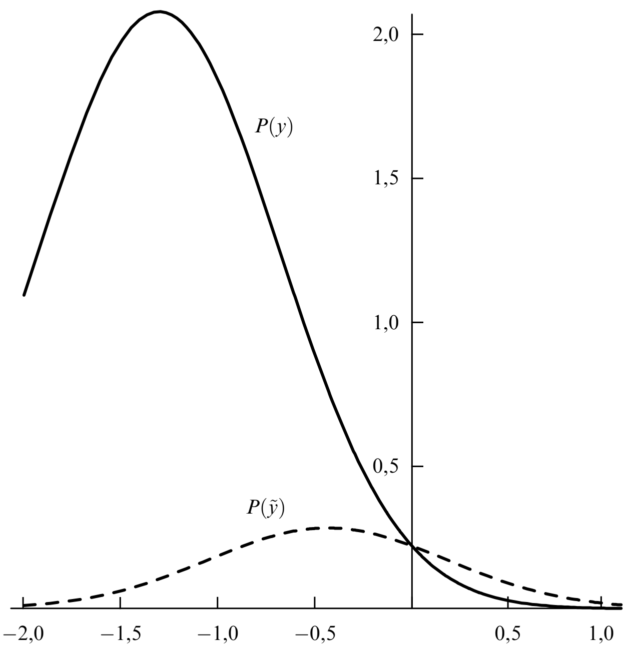

Рис. 6. Плотности вероятностей процессов $y(t;\alpha)$ (сплошная кривая) и $\tilde{y}(t;\alpha)$ (штриховая кривая) при $\tau = 1$ в логарифмическом (десятичном) масштабе.

означающих усиление роли больших выбросов процессов $y(t;\alpha)$ и $\tilde{y}(t;\alpha)$ (см. рис. 1) в формировании одновременной статистики. На рисунке 6 показано поведение плотностей вероятностей этих процессов при $\tau = 1$ в логарифмическом масштабе. Соответственно интегральная функция распределения вероятностей, согласно (23) и (24), определяется выражением

$$F(y,t;\alpha) = \int_{-\infty}^{y} \mathrm{d}y' \, P(t;y') = \mathrm{Prob}\,\big(y(t;\alpha) < y\big) = = \mathrm{Pr}\left\{\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln\left[y \exp(\pm\alpha t)\right]\right\}, \tag{25}$$

где функция $\mathrm{Pr}\,(z)$ — *интеграл вероятностей*,

$$\mathrm{Pr}\,(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{26}$$

При этом очевидно, что $\mathrm{Pr}\,(\infty) = 1$ и $\mathrm{Pr}\,(0) = 1/2$.

Отметим, что для отрицательных z $(z < 0)$ функцию (26) можно представить в виде

$$\mathrm{Pr}\,\big(-|z|\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z|}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1 - \mathrm{Pr}\,\big(|z|\big). \tag{27}$$

Исходя из выражений (26) и (27) легко найти асимптотику интеграла вероятностей при $z \to \pm\infty$, а именно:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}\,(z)_{z\to\infty} &\approx 1 - \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \\ \mathrm{Pr}\,(z)_{z\to-\infty} &\approx \frac{1}{|z|\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Также нетрудно, исходя из уравнения (22), записать уравнения для моментных функций процессов $y(t;\alpha)$ и $\tilde{y}(t;\alpha)$. Решения этих уравнений (при $\tau = Dt$)

$$\begin{aligned} \big\langle y^n(\tau;a) \big\rangle &= \exp\left[n\left(n - \frac{\alpha}{D}\right)\tau\right], \\ \left\langle \frac{1}{y^n(\tau;a)} \right\rangle &= \exp\left[n\left(n + \frac{\alpha}{D}\right)\tau\right], \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{29}$$

экспоненциально возрастают во времени практически по одним и тем же законам. Таким образом, несмотря на то что плотности вероятностей величин $y(t;\alpha)$ и $1/y(t;\alpha)$ совершенно различны, их моментные функции имеют очень похожий вид.

Исходя из уравнения (22) легко получить равенства

$$\big\langle \ln y(t;\alpha) \big\rangle = -\alpha t, \qquad \left\langle \ln \frac{1}{y(t;\alpha)} \right\rangle = \alpha t. \tag{30}$$

Следовательно, параметр α в (30) является ляпуновским характеристическим показателем для логнормального случайного процесса $y(t)$ (см., например, [14, 33, 34]).

Наряду с ляпуновской экспонентой, можно вычислить также *кривые типичной реализации*, характеризующие поведение случайного процесса в отдельных реализациях. Для логнормальных процессов $y(t;\alpha)$ и $\tilde{y}(t;\alpha)$ (при $\alpha > 0$) эти кривые совпадают с ляпуновской экспонентой и описываются формулами

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \exp\big\langle \ln y(t) \big\rangle = \exp(-\alpha t), \\ \tilde{y}^*(t) &= \exp\big\langle \ln \tilde{y}(t) \big\rangle = \exp(\alpha t), \end{aligned} \tag{31}$$

которые представляют собой экспоненциально убывающую кривую для процесса $y(t;\alpha)$ и экспоненциально возрастающую — для процесса $\tilde{y}(t;\alpha)$, несмотря на похожие законы временнóго возрастания всех моментных функций этих величин. Именно эти кривые изображены на рис. 1 (штриховые кривые).

При параметре $\alpha/D = 1$ среднее значение процесса $y(t;D)$ не зависит от времени и равняется единице. Однако вероятность выполнения неравенства, например, $y(t;D) < 1$ при $Dt \gg 1$, согласно (25), быстро стремится к единице по закону

$$\text{Prob}\left\{y(t;D)<1\right\} = \Pr\left(\sqrt{\frac{Dt}{2}}\right) = \\ = 1-\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\exp\left(-\frac{Dt}{4}\right),$$

т.е. на большей части временнóй оси графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения $\langle y(t;D)\rangle = 1$, а соответствующая вероятность события $\text{Prob}\left\{y(t;D)>1\right\}$ стремится к нулю, хотя статистические моменты процесса $y(t;D)$ и определяются его большими выбросами.

Отметим, что существуют стационарные распределения вероятностей для площадей $S_n(x)=\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, y^n(\tau;\alpha)$, в частности при $\alpha = D$ $P(S_1)=1/(DS_1^2)\exp\left[-1/(DS_1^2)\right]$. Это означает, что большие выбросы логнормального процесса $y(t;\alpha)$ при $\alpha>0$ достаточно узки.

Если $\alpha=0$, то $y^*(t)=1$, что соответствует случайному процессу $y(t)=\exp\left(w(t)\right)$, где $w(t)$ — винеровский процесс. Тогда случайные процессы $y(t)$ и $1/y(t)$ статистически эквивалентны и их плотность вероятностей и интегральная функция распределений вероятностей имеют вид

$$P(y,t)=\frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}}\exp\left(-\frac{\ln^2 y}{4Dt}\right), \\ F(y,t)=\Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}}\ln y\right). \tag{32}$$

Прежде чем перейти к анализу задач, описываемых уравнениями в частных производных, рассмотрим простейшую трёхмерную модель случайного анизотропного поля скоростей, позволяющую получить решение этих задач в аналитическом виде и, следовательно, "вживую" на картинках проследить динамику этих полей, а именно динамику кластеризации.

2. Простейшая анизотропная трёхмерная модель кластеризации полей плотности и магнитной энергии

Для рассмотрения кластеризации поля плотности в рамках уравнения (15) в работе [35] была предложена простейшая стохастическая трёхмерная модель поля скоростей вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\mathbf{v}(t)\,f(\mathbf{kr}), \tag{33}$$

где

$$f(\mathbf{kr})=\sin 2(\mathbf{kr}), \tag{34}$$

$\mathbf{v}(t)$ — гауссов случайный стационарный векторный процесс с корреляционным тензором

$$\left\langle v_i(t)\,v_j(t')\right\rangle = 2\sigma^2\delta_{ij}\tau_0\,\delta(t-t'), \tag{35}$$

здесь σ^2 — дисперсия каждой компоненты скорости, τ_0 — её временной радиус корреляции. Отметим, что такой вид поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ соответствует первому члену разложения магнитогидродинамического поля скоростей по гармоническим составляющим, обычно используемого при численном моделировании задачи.

Выбирая ось x в направлении вектора $\mathbf{k}$, видим, что эта модель соответствует зависимости поля скоростей только от одной пространственной переменной, т.е. $f(\mathbf{kr})=f(kx)$, и, следовательно, поле скоростей является дивергентным и анизотропным.

2.1. Динамическое описание модели

2.1.1. Кластеризация поля плотности. В этой модели динамическое уравнение для поля плотности с однородным начальным условием $\rho(\mathbf{r},0)=\rho_0$ существенно упрощается, принимая вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho(x,t)+v_x(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\,f(kx)\,\rho(x,t)=0\,. \tag{36}$$

Поле плотности зависит только от x, и для функции (34) решение уравнения (36) описывается формулой [2–5, 32, 35]

$$\frac{\rho(x,t)}{\rho_0}=\frac{1}{\exp\big(T(t)\big)\cos^2(kx)+\exp\big(-T(t)\big)\sin^2(kx)}\,, \tag{37}$$

где $T(t)$ — винеровский случайный процесс,

$$T(t)=2k\int_0^t \mathrm{d}\tau\, v_x(\tau)\,, \tag{38}$$

с параметрами, вытекающими из (35),

$$\big\langle T(t)\big\rangle = 0\,,\qquad \sigma_T^2(t)=8k^2\sigma^2\tau_0 t\,. \tag{39}$$

На рисунке 7 представлен фрагмент реализации случайного процесса $T(t)$, полученный численным интегрированием равенства (38) для одной реализации случайного процесса $v_x(t)$, с помощью которого рассчитывалось поле $\rho(x,t)$ по формуле (37). Результаты расчёта пространственно-временнóй эволюции реализации эйлерова поля плотности $1+\rho(x,t)/\rho_0$ (единица добавлена, чтобы избежать проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе) в безразмерных переменных

$$t\to k^2\sigma^2\tau_0 t\,,\quad x\to kx\,,\quad \big\langle v_i(t)\,v_j(t')\big\rangle \to 2\delta_{ij}\,\delta(t-t') \tag{40}$$

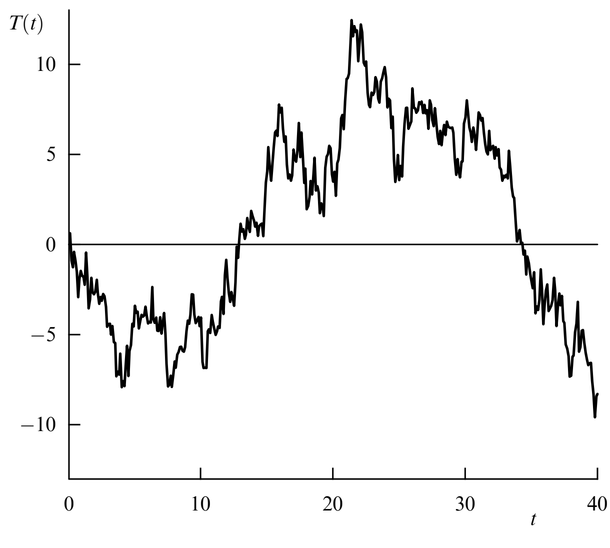

Рис. 7. Фрагмент реализации случайного процесса $T(t)$.

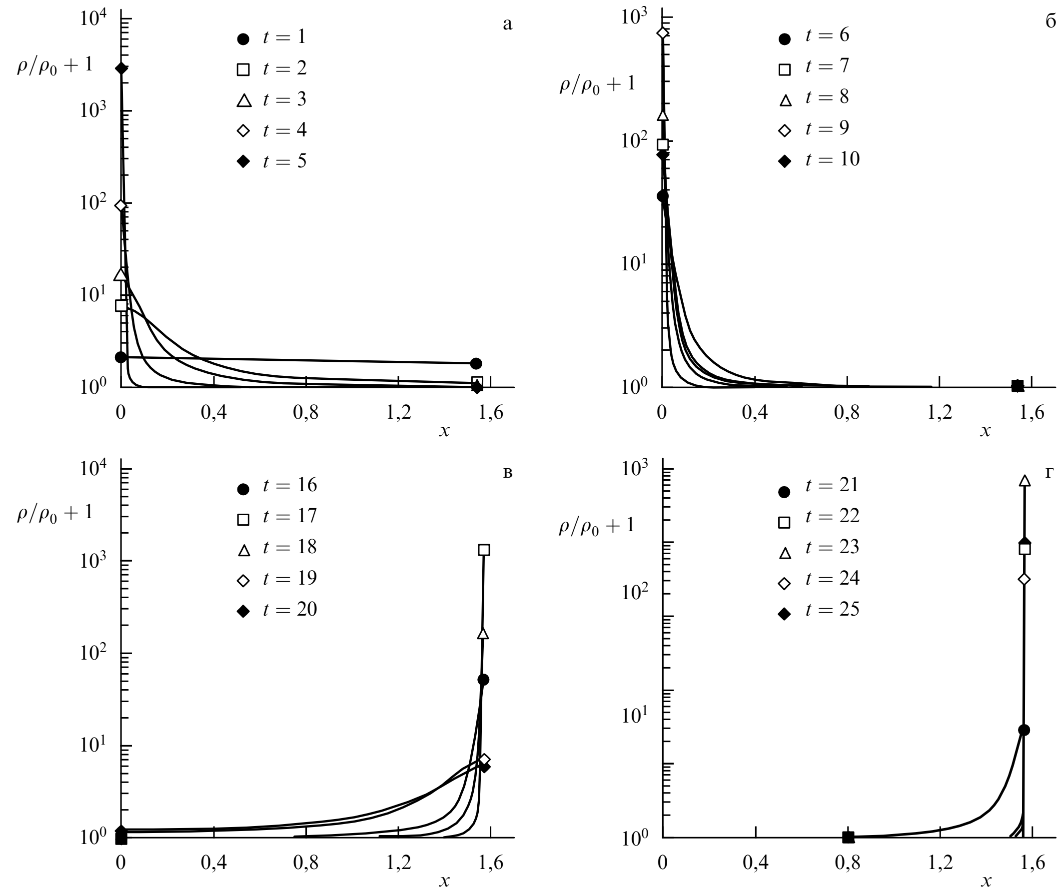

Рис. 8. Пространственно-временна́я эволюция эйлерова поля плотности.

представлены на рис. 8. Из рисунка 8 видно последовательное перетекание поля плотности к узким окрестностям точек $x \approx 0$ и $x \approx \pi/2$, т.е. образование кластеров, в которых относительное значение плотности достигает порядка $10^3 - 10^4$, а во всём остальном пространстве практически равняется нулю. Отметим, что в моменты t, в которые $T(t) = 0$, реализация поля плотности проходит через начальное однородное состояние.

Отметим также, что усреднённая по пространственной переменной величина (37),

$$\overline{\left(\frac{\rho(x,t)}{\rho_0}\right)} = 1\,,$$

не зависит от случайного фактора $T(t)$, а для квадрата поля плотности имеем выражение

$$\overline{\left(\frac{\rho^2(x,t)}{\rho_0^2}\right)} = \frac{1}{2}\left[\exp\big(T(t)\big) + \exp\big(-T(t)\big)\right],$$

в основном возрастающее во времени. Для гауссова случайного процесса $v_x(t)$ с корреляционной функцией (35), усредняя последнее равенство по ансамблю реализации винеровского процесса $T(t)$, в силу (39) находим экспоненциально возрастающее во времени равенство

$$\left\langle \overline{\frac{\rho^2(x,t)}{\rho_0^2}} \right\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\,\sigma_T^2(t)\right) = \exp\left(4k^2\sigma^2\tau_0 t\right).$$

При этом для величины, обратной полю плотности,

$$\frac{\rho_0}{\rho(x,t)} = \exp\big(T(t)\big)\cos^2(kx) + \exp\big(-T(t)\big)\sin^2(kx)$$

после пространственного усреднения получаем выражения

$$\overline{\left(\frac{\rho_0}{\rho(x,t)}\right)} = \frac{1}{2}\left[\exp\big(T(t)\big) + \exp\big(-T(t)\big)\right],$$

$$\overline{\left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2(x,t)}\right)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\left[\exp\big(2T(t)\big) + \exp\big(-2T(t)\big)\right],$$

также в основном возрастающие во времени. После усреднения по ансамблю реализации винеровского процесса $T(t)$ приходим к выражениям, экспоненциально возрастающим во времени:

$$\left\langle \overline{\frac{\rho_0}{\rho(x,t)}} \right\rangle = \exp\left(4k^2\sigma^2\tau_0 t\right),$$

$$\left\langle \overline{\frac{\rho_0^2}{\rho^2(x,t)}} \right\rangle = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\exp\left(16k^2\sigma^2\tau_0 t\right).$$

2.1.2. Кластеризация энергии магнитного поля. Эта же модель поля скоростей использовалась в работе [36] в качестве иллюстрации кластеризации энергии магнитного поля в рамках уравнения (16). В этом случае также можно получить явные выражения для магнитного поля, аналогичные таковым в случае плотности при-

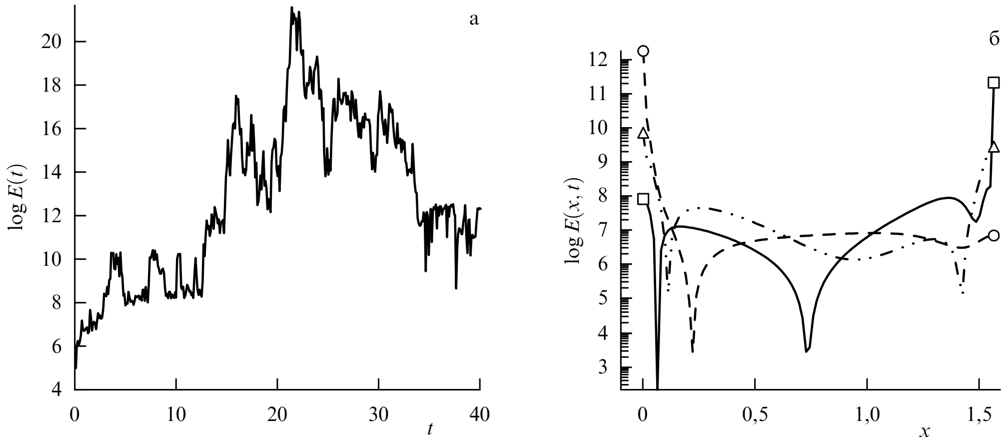

Рис. 9. Эволюция во времени полной энергии магнитного поля на отрезке $[0, \pi/2]$ (а) и динамика исчезновения кластера в точке 0 и его возникновения в точке $\pi/2$ (б). Кружки соответствуют моменту времени $t = 10{,}4$, треугольники — $t = 10{,}8$, квадраты — $t = 11{,}8$.

меси. При однородном начальном условии $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0$ магнитное поле, так же как и поле плотности примеси, зависит от одной координаты x, т.е. $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(x, t)$, и для этой модели уравнение индукции (16) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t)\sin 2(kx)\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{H}(x,t) = \\ = 2k\cos 2(kx)\left[\mathbf{v}(t)\,H_x(x,t) - v_x(t)\,\mathbf{H}(x,t)\right].$$

Из этого уравнения видно, что x-компонента магнитного поля сохраняется (т.е. $H_x(x,t) = H_{x0}$), а в поперечной плоскости (y, z) появляется дополнительный источник магнитного поля (генерация) из-за наличия H_{x0}:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t)\sin 2(kx)\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{H}_\perp(\mathbf{r},t) = \\ = 2k\cos 2(kx)\big(\mathbf{v}_\perp(t)H_{x0} - v_x(t)\,\mathbf{H}_\perp(x,t)\big), \qquad (41)$$

$$\mathbf{H}_\perp(x,0) = \mathbf{H}_{\perp 0}.$$

Решая уравнение (41) методом характеристик, можно показать, что его решение *статистически эквивалентно* выражению [36]

$$\mathbf{H}_\perp(x,t) = \frac{\rho(x,t)}{\rho_0}\,\mathbf{H}_{\perp 0} + \\ + 2kH_{x0}\int_0^t \mathrm{d}\tau\;\frac{\exp\big(T(\tau)\big)\cos^2(kx) - \exp\big(-T(\tau)\big)\sin^2(kx)}{\left[\exp\big(T(\tau)\big)\cos^2(kx) + \exp\big(-T(\tau)\big)\sin^2(kx)\right]^2}\times \\ \times v_x(\tau)\,\mathbf{v}_\perp(\tau), \qquad (42)$$

где поле плотности описывается формулой (37). Статистическая эквивалентность означает, что все одновременные и одноточечные в пространстве характеристики решения уравнения (41) совпадают со статистическими характеристиками выражения (42).

Первое слагаемое в (42) описывает кластеризацию магнитного поля по типу кластеризации поля плотности, если $H_{\perp 0} \neq 0$. Второе слагаемое описывает генерацию магнитного поля в поперечной (y, z)-плоскости, обусловленную наличием начального поля H_{x0}. И при $H_{\perp 0} = 0$ это слагаемое, пропорциональное квадрату случайного поля скорости, определяет ситуацию. Структура этого поля, подобно структуре поля плотности, также кластеризуется.

На рисунке 9 представлены результаты расчёта пространственно-временно́й эволюции реализации энергии генерируемого магнитного поля в поперечной плоскости $E(x,t) = \mathbf{H}_\perp^2(x,t)$ в безразмерных переменных (40) при $H_{\perp 0} = 0$ и динамика перетекания возмущений магнитной энергии от одной границы области к другой для той же реализации случайного процесса $T(t)$ (см. рис. 7).

Прежде всего отметим, что полная энергия генерируемого магнитного поля, сосредоточенная на отрезке $[0, \pi/2]$, быстро возрастает во времени.

Таким образом, на примере простейшей модели анизотропного дивергентного случайного поля скоростей, допускающей полный анализ, мы ясно видим процессы кластеризации поля плотности и генерации энергии магнитного поля (магнитное динамо), которая сосредоточивается в узких пространственных образованиях, т.е. также происходит кластеризация.

2.2. Статистическое описание модели

Рассмотрим теперь общую модель поля скоростей (33), где $f(kx)$ — периодическая функция. В этом случае для однородных начальных условий $\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0$, как и ранее, все функции зависят от одной пространственной координаты — x, т.е. $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(x, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(x, t)$.

Отметим, что при нахождении различных статистических средних, связанных с уравнениями, в общем случае нам необходимо расщеплять корреляции случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ с функционалами от него. Для гауссова поля, однородного в пространстве и стационарного, с корреляционной функцией $B_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \langle u_k(\mathbf{r},t)\,u_l(\mathbf{r}',t')\rangle$ такое расщепление осуществляется на основе формулы Фуруцу – Новикова (см., например, [2 – 6])

$$\big\langle u_k(\mathbf{r},t)\,R\big[t;\mathbf{u}(\mathbf{r},\tau)\big]\big\rangle = \\ = \int_0^t \mathrm{d}t'\int \mathrm{d}\mathbf{r}'\,B_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\left\langle\frac{\delta R\big[t;\mathbf{u}(\mathbf{r},\tau)\big]}{\delta u_l(\mathbf{r}',t')}\right\rangle, \qquad (43)$$

где $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Для приближения дельта-коррелированного во времени гауссова поля,

$$B_{kl}(\mathbf{r},t) = 2B_{kl}(\mathbf{r})\,\delta(t)\,, \qquad B_{kl}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\,B_{kl}(\mathbf{r},t)\,, \qquad (44)$$

общая формула упрощается, принимая вид

$$\left\langle u_k(\mathbf{r}, t)\, R\big[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)\big]\right\rangle = \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\, B_{kl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \frac{\delta R\big[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)\big]}{\delta u_l(\mathbf{r}', t - 0)} \right\rangle, \tag{45}$$

где $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

2.2.1. Кластеризация поля плотности. Прежде всего отметим, что для простейшей модели поля скоростей (33) одномерная задача о диффузии пассивной примеси (36) может быть решена для любой статистики случайного процесса $v_x(t)$ без предположения его гауссовости и дельта-коррелированности. Это связанно с тем, что функциональная зависимость решения задачи $\rho(x, t)$ от случайного процесса $v_x(t)$, очевидно, имеет структуру [2–6]

$$\rho(x, t) = \rho\big(x, t; v(\tau)\big) = \rho\big(x, T(t)\big)\,,$$

где новое "случайное" время $T(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, v_x(\tau)$. Уравнение (36) при этом принимает детерминированный вид:

$$\frac{\partial}{\partial T}\, \rho(x, T) + \frac{\partial}{\partial x}\, f(kx)\, \rho(x, T) = 0\,.$$

Следовательно, для вариационной производной поля $\rho(x, t)$ получаем

$$\frac{\delta \rho\big[x, t; v(\tau)\big]}{\delta v(t')} = \frac{\partial \rho(x, T)}{\partial T}\, \theta(t - t') = \\ = -\theta(t - t')\, \frac{\partial}{\partial x}\, f(kx)\, \rho(x, t)\,,$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, т.е. вариационная производная случайного поля $\rho(x, t)$ выражается через обычную пространственную производную этого поля.

Для получения одновременной плотности вероятностей случайного поля $\rho(x, t)$ введём её индикаторную функцию $\varphi(x, t; \rho) = \delta(\rho(x, t) - \rho)$. Эта функция, согласно общей методике, описанной в монографиях [2–6], удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t)\, f(kx)\, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x, t; \rho) = \\ = v_x(t)\, \frac{\partial f(kx)}{\partial x}\, \frac{\partial}{\partial \rho}\big[\rho \varphi(x, t; \rho)\big] \tag{46}$$

с начальным условием $\varphi(x, 0; \rho) = \delta(\rho_0 - \rho)$. И при предположении для простоты, например, что $v_x(t)$ — гауссов случайный стационарный процесс с параметрами

$$\big\langle v(t)\big\rangle = 0\,, \\ B_v(t - t') = \big\langle v_x(t)\, v_x(t')\big\rangle \quad \big(\sigma^2 = B_v(0) = \big\langle v_x^2(t)\big\rangle\big)\,,$$

после усреднения уравнения Лиувилля (46) по ансамблю реализаций случайного процесса $v_x(t)$ для плотности вероятностей поля плотности $P(x, t; \rho) = \langle \varphi(x, t; \rho)\rangle$ с учётом формулы (43) получаем уравнение, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\, P(x, t;\, \rho) = \\ = \int_0^t \mathrm{d}t'\, B(t') \left[\frac{\partial}{\partial x}\, f^2(x)\, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\, f(x)\, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\, \frac{\partial}{\partial \rho}\, \rho - \right. \\ - \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\, f(x)\, \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\, \rho\right) + \\ \left. + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\, \rho \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\, \rho\right)\right] P(x, t;\, \rho)\,,$$

с начальным условием $P(0, x; \rho) = \delta(\rho_0 - \rho)$.

Отметим, что если функция $f(x)$ имеет характерный масштаб изменения k^{-1} по x и является периодической функцией ("быстрое изменение"), то, дополнительно усредняя уравнение по этому масштабу (по x), получаем уравнение для "медленных" пространственных изменений плотности вероятностей, не зависящей от x,

$$\frac{\partial}{\partial t}\, P(t; \rho) = \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2} \int_0^t \mathrm{d}t'\, B(t')\, \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\, \rho^2 P(t; \rho)\,, \\ P(0; \rho) = \delta(\rho_0 - \rho)\,.$$

Это уравнение соответствует плотности вероятностей логнормального случайного процесса. При $t \gg \tau_0$ данное уравнение переходит в следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t}\, P(t; \rho) = D_\rho\, \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\, \rho^2 P(t; \rho)\,, \qquad P(0; \rho) = \delta(\rho_0 - \rho)\,, \tag{47}$$

где коэффициент диффузии D_ρ в ρ-пространстве:

$$D_\rho = \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}t'\, B(t') = \sigma^2 \tau_0 \overline{\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,,$$

τ_0 — временной радиус корреляции случайного процесса $v(t)$.

Уравнение (47) с соответствующим коэффициентом диффузии D_ρ совпадает с уравнением (22) при $\alpha = D = D_\rho$, и именно решение этого уравнения изображено на рис. 5 и 6. Нормированное случайное поле плотности $\rho(x, t)/\rho_0$ при этом для одновременных и одноточечных статистических характеристик совпадает со статистическими характеристиками случайного процесса $y(t; \alpha)$, т.е. пространственно однородное поле $\rho(x, t)/\rho_0$ *статистически эквивалентно* случайному процессу $y(t; \alpha)$.

При этом моментные функции плотности, которые имеют вид ($\tau = D_\rho t$)

$$\big\langle \rho^n(x, t)\big\rangle = \rho_0^n \exp\big(n(n - 1)\tau\big)\,, \\ \left\langle \frac{1}{\rho^n(x, t)}\right\rangle = \frac{1}{\rho_0^n} \exp\big(n(n + 1)\tau\big)\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

экспоненциально возрастают во времени практически по одним и тем же законам.

Для поля плотности $\rho(x, t)$ и обратной величины $1/\rho(x, t)$ соответственно имеем для любой произвольной точки x кривые типичной реализации вида ($\tau = D_\rho t$)

$$\rho^*(x, t) = \rho_0 \exp(-\tau)\,, \qquad \frac{\rho_0}{\rho^*(x, t)} = \exp \tau\,. \tag{48}$$

Первое равенство свидетельствует о кластеризации во времени поля $\rho(x, t)$ и общем возрастании во времени поля $1/\rho(x, t)$ в любой точке пространства.

Экспоненциальное возрастание моментов случайных процессов $\rho(x, t)$ и $1/\rho(x, t)$ обусловлено выбросами этих процессов относительно кривых типичной реализации $\rho^*(x,t)$ и $1/\rho^*(x,t)$ в сторону бо́льших значений $\rho(x,t)$ и $1/\rho(x,t)$.

2.2.2. Кластеризация энергии магнитного поля. При переходе к безразмерным переменным (40) уравнение (41) для поперечной составляющей индукции магнитного поля принимает вид (индекс поперечности к оси x далее опускаем)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_x(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\,f(x)\right)\mathbf{H}(x,t)=\mathbf{v}(t)\,f'(x)\,H_{x0}\,,\qquad \mathbf{H}(x,0)=\mathbf{H}_0\,. \tag{49}$$

Введём индикаторную функцию магнитного поля

$$\varphi(x,t;\mathbf{H})=\delta\big(\mathbf{H}(x,t)-\mathbf{H}\big)\,.$$

Используя стандартную процедуру для уравнений в частных производных первого порядка [2–6], можно получить уравнение Лиувилля, эквивалентное исходной задаче,

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi(x,t;\mathbf{H})=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\,f(x)+f'(x)\left(1+\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\right)\right]v_x(t)\,\varphi(x,t;\mathbf{H})-f'(x)H_{x0}\,v_i(t)\,\frac{\partial}{\partial H_i}\,\varphi(x,t;\mathbf{H})\,, \tag{50}$$

с начальным условием $\varphi(x,0;\mathbf{H})=\delta(\mathbf{H_0}-\mathbf{H})$.

Для получения плотности вероятностей магнитного поля $P(x,t;\mathbf{H})=\langle\varphi(x,t;\mathbf{H})\rangle$ усредним уравнение (50) по ансамблю случайной векторной функции $\mathbf{v}(t)$, которую далее будем считать дельта-коррелированной во времени. В результате с учётом формулы (45) получаем уравнение для плотности вероятностей:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(x,t;\mathbf{H})=\frac{\partial}{\partial x}\left(f^2(x)\,\frac{\partial}{\partial x}-f(x)\,f'(x)\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\right)P(x,t;\mathbf{H})+\left(1+\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\right)\left(-f(x)f'(x)\,\frac{\partial}{\partial x}+\big[f'(x)\big]^2\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\right)P(x,t;\mathbf{H})+\big[f'(x)\big]^2E_{x0}\,\frac{\partial}{\partial H_i}\,\frac{\partial}{\partial H_i}\,P(x,t;\mathbf{H})\,.$$

Если функция $f(x)$ имеет характерный масштаб изменения k^{-1} по x и является периодической ("быстрое изменение"), то, дополнительно усредняя уравнение по этому масштабу (по x), получаем уравнение для "медленных" пространственных изменений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(x,t;\mathbf{H})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{f^2(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)P(x,t;\mathbf{H})+\overline{\big[f'(x)\big]^2}\left(1+\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}P(x,t;\mathbf{H})+\overline{\big[f'(x)\big]^2}E_{x0}\,\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{H}^2}\,P(x,t;\mathbf{H})\,.$$

Учитывая теперь, что в силу начальных условий функция $P(x,t;\mathbf{H})$ не зависит от x, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(t;\mathbf{H})=D\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\right)P(t;\mathbf{H})+DE_{x0}\,\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{H}^2}\,P(t;\mathbf{H})\,,$$

где $D=\overline{[f'(x)]^2}$. Нормируя время, $t\to Dk^2\sigma^2\tau_0 t$, находим окончательное уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(t;\mathbf{H})=\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{H}}\,\mathbf{H}\right)P(t;\mathbf{H})+E_{x0}\,\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{H}^2}\,P(t;\mathbf{H})\,. \tag{51}$$

Выведем теперь уравнение для плотности вероятностей генерируемой поперечной энергии магнитного поля $E(t)=\mathbf{H}^2(t)$. Для этого умножим обе части уравнения (51) на $\delta(\mathbf{H}^2-E)$ и проинтегрируем его по $\mathbf{H}$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(t;E)=\left(2\,\frac{\partial}{\partial E}\,E+4\,\frac{\partial}{\partial E}\,E\,\frac{\partial}{\partial E}\,E\right)P(t;E)+4E_{x0}\,\frac{\partial}{\partial E}\,E\,\frac{\partial}{\partial E}\,P(t;E)\,. \tag{52}$$

Умножая (52) на E и интегрируя по E, получаем уравнение для средней генерируемой части энергии поперечного магнитного поля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big\langle E(t)\big\rangle=2\big\langle E(t)\big\rangle+4E_{x0}\,,\qquad\big\langle E(0)\big\rangle=0\,, \tag{53}$$

решение которого $\langle E(t)\rangle=2E_{x0}[\exp{(2t)}-1]$ демонстрирует экспоненциальное возрастание средней энергии.

Нормируем энергию на E_{x0}. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(t;E)=\left(2\,\frac{\partial}{\partial E}\,E+4\,\frac{\partial}{\partial E}\,E\,\frac{\partial}{\partial E}\,E\right)P(t;E)+4\,\frac{\partial}{\partial E}\,E\,\frac{\partial}{\partial E}\,P(t;E) \tag{54}$$

с начальным условием

$$P(0;E)=\delta(E-\beta)\,,$$

где параметр $\beta=E_{\perp0}/E_{x0}$.

Следует иметь в виду, что задача (54) является краевой и её граничные условия по E представляют собой условия равенства плотности вероятностей нулю при $E=0$ и $E=\infty$ для любых $t>0$.

В общем случае для n-го момента энергии поперечного магнитного поля получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\big\langle E^n(t)\big\rangle=2n(2n-1)\big\langle E^n(t)\big\rangle+4n^2\big\langle E^{n-1}(t)\big\rangle\,,\qquad\big\langle E^n(0)\big\rangle=\beta^n\,,$$

асимптотика решения которого при $\beta=0$ и $t\gg1$ имеет вид

$$\big\langle E^n(t)\big\rangle=\frac{2^n(n!)^2}{(4n-3)!!}\,\exp\big[2n(2n-1)t\big]\,,\quad n=1,2,\ldots$$

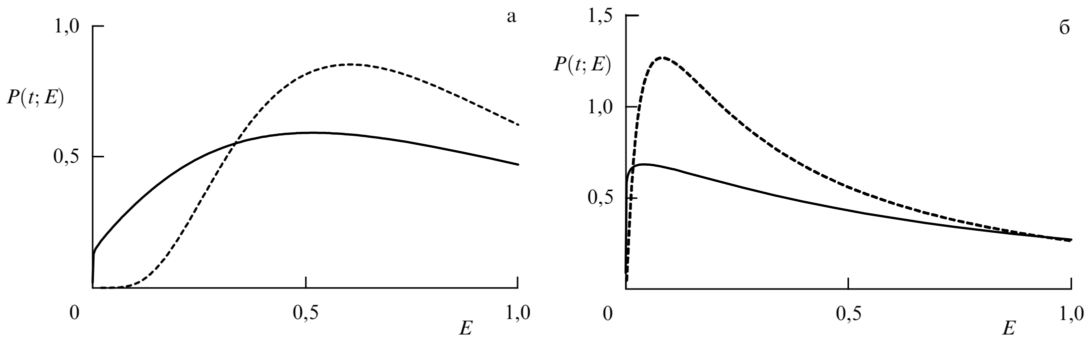

Рис. 10. Распределения плотностей вероятностей при $\beta = 1$ в моменты времени $t = 0{,}05$ (а) и $t = 0{,}25$ (б).

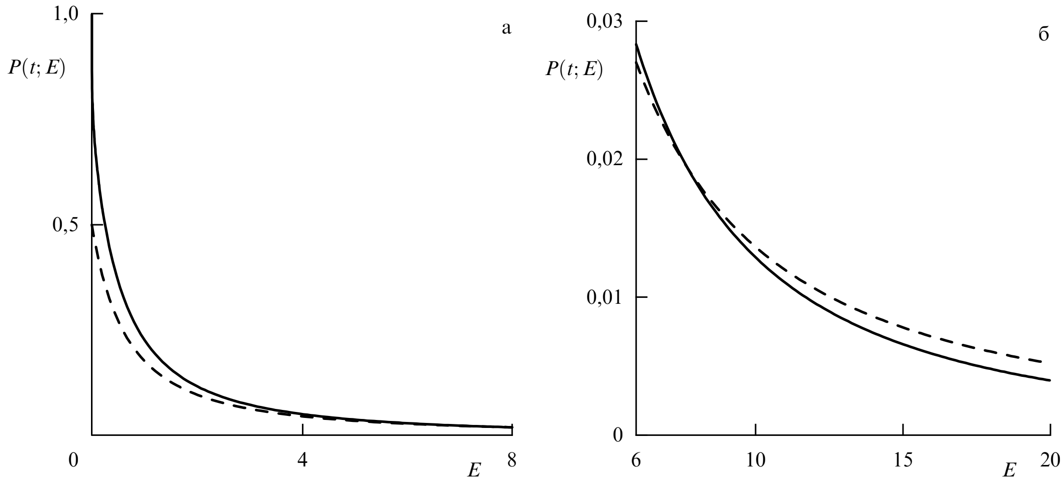

Рис. 11. Распределение плотности вероятностей при $\beta = 0$ и $t = 10$ на интервалах значений энергии $(0, 8)$ (а) и $(6, 20)$ (б).

При этом в общем случае уравнения (54) для распределения вероятностей существует стационарное распределение с бесконечными моментами, не зависящее от параметра β:

$$P(\infty; E) = \frac{1}{2(E+1)^{3/2}} \,. \qquad (55)$$

Следует иметь в виду, что это распределение представляет собой обобщённую функцию и является справедливым на интервале $(0, \infty)$. В точке $E = 0$ плотность вероятностей должна обращаться в нуль.

Отметим, что при $\beta = 1$ и $E_{x0} = 0$ плотность вероятностей для энергии, нормированной на $E_{\perp 0}$, описывается уравнением (54) при отсутствии последнего члена и, следовательно, распределение вероятностей является логнормальным:

$$P(t; E) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}\, E} \exp\left\{-\frac{1}{16t} \ln^2 \left[E \exp(2t)\right]\right\}. \qquad (56)$$

Такая структура плотности вероятностей будет, очевидно, определяющей только при очень малых значениях времени, на которых генерирующий член ещё не существен. Так, на рис. 10 приведены решения уравнения (54) (сплошные кривые), полученные численным интегрированием, при $\beta = 1$ и $t = 0{,}05$ и $t = 0{,}25$. Штриховыми кривыми изображено логнормальное распределение (56).

Из рисунка 10 видно, что уже на малых временах член уравнения (54), обеспечивающий генерацию энергии, является преобладающим. На рисунке 11 приведено решение уравнения (54) (сплошная кривая) для параметра $\beta = 0$ (т.е. плотность вероятностей генерируемой магнитной энергии) при $t = 10$ и асимптотика (55) (штриховая кривая). Видно, что только "хвост" решения уравнения (54) выходит на асимптотическое решение (55) (рис. 11а), но при этом очень медленно (рис. 11б). Пересечение этих кривых происходит вследствие нормирования рассматриваемых плотностей вероятностей. По-видимому, далее плотность вероятностей $P(t; E)$ будет сближаться с "хвостом" стационарного распределения.

Отметим также, что в общем случае величина $\langle \ln E(t) \rangle$ не зависит от последнего (диффузионного) члена уравнения (54) и, так же как для логнормального распределения, ляпуновский характеристический показатель определяется величиной (см., например, [14, 33, 34])

$$\langle \ln E(t) \rangle = \ln \beta - 2t \,.$$

При $\beta \to +0$ этот показатель стремится к минус бесконечности, что свидетельствует об отсутствии магнитного поля практически в любой точке пространства, т.е. о кластеризации. При этом вычислить кривую типичной реализации не удаётся.

3. Изотропная модель случайного магнитогидродинамического поля скоростей

3.1. Гауссово векторное случайное поле

Рассмотрим теперь основные пространственно-временны́е статистические характеристики гауссова векторного случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = \left\langle u_i(\mathbf{r},t)\,u_j(\mathbf{r}',t')\right\rangle .$$

Случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ для полноты картины будем предполагать в общем случае дивергентным ($\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\neq 0$), гауссовым, статистически однородным полем, обладающим сферической симметрией, но не имеющим отражательной симметрии в пространстве и являющимся стационарным, с корреляционным и спектральным тензорами ($\tau = t - t_1$)

$$B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau) = \left\langle u_i(\mathbf{r},t)\,u_j(\mathbf{r}_1,t_1)\right\rangle = \int \mathrm{d}\mathbf{k}\,E_{ij}(\mathbf{k},\tau)\exp\left[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\right],$$

$$E_{ij}(\mathbf{k},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,B_{ij}(\mathbf{r},\tau)\exp\left(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}\right),$$

где параметр d — размерность пространства. В силу предполагаемых условий симметрии корреляционный тензор $B_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\tau)$ имеет векторную структуру [38] ($\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}$):

$$B_{ij}(\mathbf{r},\tau) = B_{ij}^{\mathrm{iso}}(\mathbf{r},\tau) + C(r,\tau)\varepsilon_{ijk}\,r_k\,, \tag{57}$$

где $B_{ij}^{\mathrm{iso}}(\mathbf{r},\tau)$ — изотропная часть корреляционного тензора,

$$B_{ij}^{\mathrm{iso}}(\mathbf{r},\tau) = A(r,\tau)\,r_i r_j + B(r,\tau)\,\delta_{ij}\,,$$

ε_{ijk} — псевдотензор, принимающий значение $\varepsilon_{ijk}=0$, если некоторые из индексов i, j и k совпадают, и $\varepsilon_{ijk}=\pm1$, если все индексы i, j и k различны и расположены в циклическом или антициклическом порядке (см., например, [38]). Произведение двух псевдотензоров ε уже является тензором, и в этом случае имеет место равенство

$$\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq} = \delta_{ij}\delta_{lp}\delta_{mq} + \delta_{ip}\delta_{lq}\delta_{mj} + \delta_{iq}\delta_{lj}\delta_{mp} - \delta_{ij}\delta_{lq}\delta_{mp} - \delta_{ip}\delta_{lj}\delta_{mq} - \delta_{iq}\delta_{lp}\delta_{mj}\,, \tag{58}$$

следовательно, при $j=m$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование)

$$\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{mpq} = (d-2)(\delta_{ip}\delta_{lq} - \delta_{iq}\delta_{lp})\,, \tag{59}$$

и в двумерном случае свёртка обращается в нуль.

Изотропной части корреляционного тензора соответствует пространственный спектральный тензор вида

$$E_{ij}^{\mathrm{iso}}(\mathbf{k},\tau) = E_{ij}^{\mathrm{s}}(\mathbf{k},\tau) + E_{ij}^{\mathrm{p}}(\mathbf{k},\tau)\,,$$

где спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру

$$E_{ij}^{\mathrm{s}}(\mathbf{k},\tau) = E^{\mathrm{s}}(k,\tau)\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right), \quad E_{ij}^{\mathrm{p}}(\mathbf{k},\tau) = E^{\mathrm{p}}(k,\tau)\,\frac{k_i k_j}{k^2}\,.$$

Здесь через $E^{\mathrm{s}}(k,\tau)$ и $E^{\mathrm{p}}(k,\tau)$ обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Определим теперь функцию $B_{ij}(\mathbf{r})$ как интеграл по времени от корреляционной функции (57):

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\,B_{ij}(\mathbf{r},\tau) = B_{ij}^{\mathrm{iso}}(\mathbf{r}) + C(r)\varepsilon_{ijk}\,r_k\,, \tag{60}$$

тогда $B_{ij}(\mathbf{0}) = D_0\delta_{ij}$ и, следовательно, величина

$$B_{ii}(\mathbf{0}) = D_0 d = \tau_0\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \int \mathrm{d}\mathbf{k}\left[(d-1)\,E^{\mathrm{s}}(k) + E^{\mathrm{p}}(k)\right] \tag{61}$$

определяет временной радиус корреляции поля скоростей τ_0, где $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}(\mathbf{0},0) = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r},t)\rangle$ — его дисперсия,

$$E^{\mathrm{s}}(k) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\,E^{\mathrm{s}}(k,\tau)\,, \qquad E^{\mathrm{p}}(k) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\,E^{\mathrm{p}}(k,\tau)\,. \tag{62}$$

Для корреляционной функции (60) вычисления, связанные с пространственными производными поля скоростей, существенно упрощаются. Так, в этом случае

$$\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k} = C(0)\varepsilon_{ijk}\,, \tag{63}$$

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k\,\partial r_l} = \frac{D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\left[(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}\right] + \frac{D^{\mathrm{p}}}{d(d+2)}\left[\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}\right], \tag{64}$$

$$\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_j} = -2\alpha(\varepsilon_{kpj}\delta_{nm} + \varepsilon_{kpm}\delta_{nj} + \varepsilon_{kpn}\delta_{mj})\,, \tag{65}$$

следовательно,

$$\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{r}^2\,\partial r_j} = -2\alpha(d+2)\varepsilon_{kpj}\,,$$

где параметры

$$D^{\mathrm{s}} = \int \mathrm{d}\mathbf{k}\,k^2 E^{\mathrm{s}}(k) = \frac{1}{d-1}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\left\langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t+\tau)\,\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)\right\rangle,$$

$$D^{\mathrm{p}} = \int \mathrm{d}\mathbf{k}\,k^2 E^{\mathrm{p}}(k) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\left\langle \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau)}{\partial\mathbf{r}}\,\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle, \tag{66}$$

$$C(r) = C(0) - \alpha\mathbf{r}^2\,,$$

$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — вихрь поля скорости, а функция $C(r)$ описывает статистические характеристики спиральности поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

В дальнейшем при расчёте статистических характеристик частиц и поля плотности воспользуемся приближением дельта-коррелированности во времени поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, в рамках которого корреляционный тензор $B_{ij}(\mathbf{r},t)$ аппроксимируется выражением (44).

3.2. Вероятностное описание поля плотности в случайном поле скоростей

Для описания локального поведения реализаций примеси в случайном поле скоростей должно быть известно вероятностное распределение её плотности, которое можно получить только при отсутствии эффекта динамической диффузии.

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении введём индикаторную функцию $\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho)$, сосредоточенную на поверхности $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \mathrm{const}$ в трёхмерном случае или контуре в двумерном случае. Уравнение Лиувилля для неё в отсутствие среднего потока имеет вид [2–6]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\varphi(\mathbf{r}, t; \rho)\right], \quad (67)$$

и одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (15) в этом случае совпадает с усреднённой индикаторной функцией по ансамблю реализаций случайного поля скоростей $P(\mathbf{r}, t; \rho) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho)\rangle$.

Усредняя уравнение (67) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, с учётом формулы Фуруцу – Новикова (45) и формул (63), (64) получаем уравнение для плотности вероятностей поля плотности в виде

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \varDelta\right) P\big(\mathbf{r}, t; \rho|\rho_0(\mathbf{r})\big) = D_\rho\,\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\,\rho^2 P\big(\mathbf{r}, t; \rho|\rho_0(\mathbf{r})\big)\,, \\ P\big(\mathbf{r}, 0; \rho|\rho_0(\mathbf{r})\big) = \delta\big(\rho - \rho_0(\mathbf{r})\big)\,,\end{gathered} \quad (68)$$

где коэффициенты диффузии в $\mathbf{r}$-пространстве D_0 и ρ-пространстве $D_\rho = D^{\mathrm{p}}$ определяются равенствами (61) и (66); вертикальной чертой мы обозначили зависимость плотности вероятностей эйлерова поля $\rho(\mathbf{r}, t)$ от начального распределения $\rho_0(\mathbf{r})$.

Решение уравнения (68) имеет вид

$$P\big(\mathbf{r}, t; \rho|\rho_0(\mathbf{r})\big) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi D_\rho t}}\,\exp\left(D_0 t\,\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\right)\times \\ \times \exp\left\{-\frac{\ln^2\left[\rho \exp\left(D_\rho t\right)/\rho_0(\mathbf{r})\right]}{4 D_\rho t}\right\}. \quad (69)$$

Если начальная плотность примеси однородна, $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \mathrm{const}$, то вероятностное распределение плотности не зависит от $\mathbf{r}$ и в этом случае эйлерово поле плотности логнормально с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения:

$$\begin{gathered}P(t; \rho|\rho_0) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}}\,\exp\left\{-\frac{\ln^2\left[\rho\exp(\tau)/\rho_0\right]}{4\tau}\right\}, \\ F(t; \rho|\rho_0) = \Pr\left(\frac{\ln\left[\rho\exp(\tau)/\rho_0\right]}{2\sqrt{\tau}}\right),\end{gathered} \quad (70)$$

где параметр $\tau = D_\rho t$, $\Pr(z)$ — интеграл вероятностей (26).

С точки зрения одноточечных характеристик поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$, в этом случае задача, как указывалось ранее, статистически эквивалентна анализу случайного процесса, при этом все моментные функции, начиная со второй, экспоненциально возрастают во времени:

$$\big\langle \rho(\mathbf{r}, t)\big\rangle = \rho_0\,, \qquad \big\langle \rho^n(\mathbf{r}, t)\big\rangle = \rho_0^n \exp\big(n(n-1)\tau\big)\,, \quad (71)$$

а кривая типичной реализации поля плотности в любой фиксированной точке пространства экспоненциально убывает во времени:

$$\rho^*(t) = \rho_0 \exp(-\tau)\,,$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергентных потоках. Формирование эйлеровой статистики плотности в любой фиксированной точке пространства осуществляется за счёт флуктуации плотности вокруг этой кривой.

Выше мы обсудили одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что уже позволило нам сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Это же распределение даёт также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временно́й структуры реализаций поля плотности.

Для наглядности ограничимся здесь двумерным случаем. Как обсуждалось в разделе 1.1, важные сведения о пространственном поведении реализаций представляет анализ линий уровня, определяемых равенством $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \mathrm{const}$. В частности, такие функционалы поля плотности, как общая величина площади $S(t, \rho)$ в области, в которой $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$, общая масса примеси $M(t, \rho)$, заключённая в этой области, средние значения которых определяются одноточечной плотностью вероятностей, описываются выражениями

$$\begin{gathered}\big\langle S(t, \rho)\big\rangle = \int_\rho^\infty \mathrm{d}\tilde{\rho} \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, P\big(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}|\rho_0(\mathbf{r})\big)\,, \\ \big\langle M(t, \rho)\big\rangle = \int_\rho^\infty \tilde{\rho}\, \mathrm{d}\tilde{\rho} \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, P\big(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}|\rho_0(\mathbf{r})\big)\,.\end{gathered} \quad (72)$$

Подставив в (72) решение (69), посредством несложных преобразований легко найти явные выражения:

$$\begin{gathered}\big\langle S(t, \rho)\big\rangle = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, \Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\,\ln\frac{\rho_0(\mathbf{r})\exp(-\tau)}{\rho}\right), \\ \big\langle M(t, \rho)\big\rangle = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, \rho_0(\mathbf{r})\, \Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\,\ln\frac{\rho_0(\mathbf{r})\exp(\tau)}{\rho}\right),\end{gathered} \quad (73)$$

где интеграл вероятностей $\Pr(z)$ определяется по формуле (26). Учитывая теперь асимптотику функции $\Pr(z)$ (28), получаем, что при $\tau \gg 1$ средняя площадь областей, в которых плотность, превышающая уровень ρ, убывает со временем по закону

$$\big\langle S(t, \rho)\big\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}}\,\exp\left(-\frac{\tau}{4}\right)\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}\,, \quad (74)$$

тогда как заключённая в этих областях средняя масса примеси

$$\big\langle M(t, \rho)\big\rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}}\,\exp\left(-\frac{\tau}{4}\right)\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} \quad (75)$$

монотонно стремится к её полной массе $M = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\rho_0(\mathbf{r})$. Это ещё раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окружённые разрежёнными областями.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере, когда первоначально примесь равномерно распределена на плоскости $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$. При этом средняя удельная площадь области (приходящаяся на единицу площади), внутри которой $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$,

$$s(t, \rho|\rho_0) = \int_\rho^\infty \mathrm{d}\tilde{\rho}\, P(t; \tilde{\rho}|\rho_0) = \Pr\left(\frac{\ln\left[\rho_0 \exp(-\tau)/\rho\right]}{\sqrt{2\tau}}\right), \tag{76}$$

где $P(t; \rho|\rho_0)$ — не зависящее от $\mathbf{r}$ решение уравнения (68) (т.е. функция (70)), а удельная средняя масса примеси (приходящаяся на единицу площади), сосредоточенная в этой области, описывается выражением

$$\frac{m(t, \rho|\rho_0)}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}\int_\rho^\infty \tilde{\rho}\, \mathrm{d}\tilde{\rho}\, P(t; \tilde{\rho}|\rho_0) = \Pr\left(\frac{\ln\left[\rho_0 \exp(\tau)/\rho\right]}{\sqrt{2\tau}}\right). \tag{77}$$

Из (76), (77) следует, что на больших временах ($\tau \gg 1$) средняя удельная площадь убывает по закону

$$s(t, \rho|\rho_0) \approx \sqrt{\frac{\rho_0}{\pi\rho\tau}}\, \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right), \tag{78}$$

в то время как внутри этой площади собирается практически вся масса примеси:

$$\frac{m(t, \rho|\rho_0)}{\rho_0} \approx 1 - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\rho_0\tau}}\, \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right). \tag{79}$$

Характер временно́й эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения ρ/ρ_0. Так, если $\rho/\rho_0 < 1$, то в начальный момент времени $s(0, \rho) = 1$ и $m(0, \rho) = 1$. Далее, вследствие того что частицы примеси первое время стремятся разбежаться, образуются небольшие области, в которых $\rho(\mathbf{r}, t) < \rho$ и которые содержат незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области, довольно быстро выходя на асимптотические зависимости (78), (79) (штриховые кривые на рис. 12).

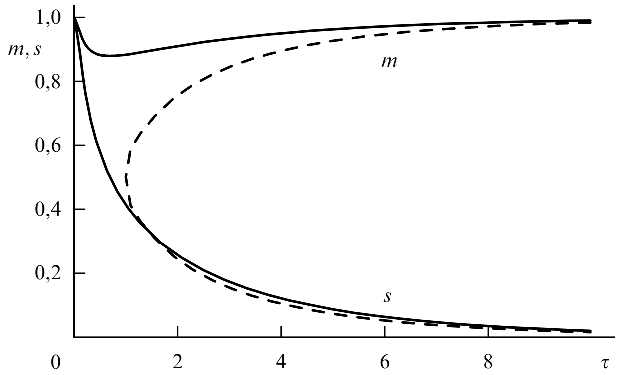

Рис. 12. Динамика образования кластеров при $\rho/\rho_0 = 0{,}5$.

В обратном, более интересном случае, $\rho/\rho_0 > 1$, в начальный момент времени $s(0, \rho) = 0$ и $m(0, \rho) = 0$. Из-за начального разбегания частиц образуются небольшие кластерные области, в которых $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$; эти области практически сохраняются во времени и интенсивно втягивают в себя значительную часть общей массы. Со временем площади этих областей уменьшаются, а масса в них увеличивается согласно асимптотическим зависимостям (78), (79) (штриховые кривые на рис. 13).

Выше мы рассмотрели простейшую статистическую задачу о диффузии скалярной примеси в случайном поле скоростей в отсутствие регулярного потока и эффекта динамической диффузии. Для статистического описания также использовалось приближение дельта-коррелированного во времени случайного поля. Все неучтённые факторы начинают действовать с какого-то момента времени, так что полученные выше результаты справедливы лишь на начальном этапе диффузии. Кроме того, эти факторы могут приводить к новым физическим эффектам [2–6].

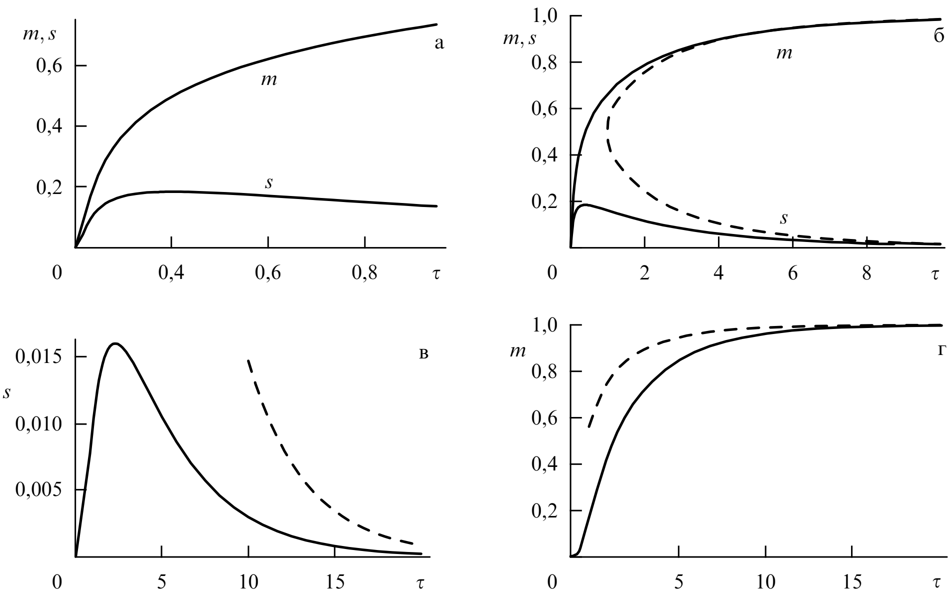

Рис. 13. Динамика образования кластеров при $\rho/\rho_0 = 1{,}5$ (а, б) и $\rho/\rho_0 = 10$ (в, г).

3.3. Вероятностное описание магнитного поля и его энергии в случайном поле скоростей

3.3.1. Вероятностное описание магнитного поля. Рассмотрим вероятностное описание магнитного поля на основе динамического уравнения (16). Как и для поля плотности, случайную составляющую поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ будем предполагать дивергентным ($\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\neq 0$) случайным гауссовым полем, однородным и изотропным в пространстве и стационарным, дельта-коррелированным во времени.

Введём индикаторную функцию магнитного поля $\varphi(\mathbf{r},t;\mathbf{H})=\delta(\mathbf{H}(\mathbf{r},t)-\mathbf{H})$, которая, очевидно, удовлетворяет уравнению Лиувилля [36]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\varphi(\mathbf{r},t;\mathbf{H})=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial H_i}\left[\mathbf{H}\,\frac{\partial u_i(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}-H_i\,\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right]\varphi(\mathbf{r},t;\mathbf{H}) \qquad (80)$$

с начальным условием $\varphi(\mathbf{r},0;\mathbf{H})=\delta(\mathbf{H}_0(\mathbf{r})-\mathbf{H})$.

Усредним уравнение (80) по ансамблю реализаций поля $\{\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\}$. Для расцепления возникающих корреляций воспользуемся формулой Фуруцу – Новикова (45). Учитывая выражения (61), (63) и (64) с параметрами (66), получаем искомое уравнение для одноточечной плотности вероятностей магнитного поля $P(\mathbf{r},t;\mathbf{H})=\langle\varphi(\mathbf{r},t;\mathbf{H})\rangle_{\mathbf{u}}$ [36]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-D_0\,\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\right)P(\mathbf{r},t;\mathbf{H})=$$
$$=\left\{D_1\,\frac{\partial}{\partial H_l}\,\frac{\partial}{\partial H_k}\,H_lH_k+D_2\,\frac{\partial}{\partial H_l}\,\frac{\partial}{\partial H_l}\,H_k^2\right\}P(\mathbf{r},t;\mathbf{H})\,, \quad (81)$$

где D_1, D_2 — коэффициенты диффузии,

$$D_1=\frac{(d^2-2)D^{\mathrm{p}}-2D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\,,\qquad D_2=\frac{(d+1)D^{\mathrm{s}}+D^{\mathrm{p}}}{d(d+2)}\,,$$

d — размерность пространства. При выводе уравнения (81) используется формула $\partial H_i/\partial H_i=d$. Для трёхмерной задачи $d=3$, а для плоскопараллельного потока жидкости $d=2$ (см. замечание к уравнению (12)).

Отметим, что при однородных начальных условиях одноточечная плотность вероятностей не зависит от переменной $\mathbf{r}$ и уравнение (81) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\,P(t;\mathbf{H})=\left\{D_1\frac{\partial}{\partial H_l}\,\frac{\partial}{\partial H_k}\,H_lH_k+D_2\frac{\partial}{\partial H_l}\,\frac{\partial}{\partial H_l}\,H_k^2\right\}P(t;\mathbf{H})\,. \qquad (82)$$

Найдём теперь одноточечную корреляцию магнитного поля $\langle W_{ij}(t)\rangle=\langle H_i(\mathbf{r},t)\,H_j(\mathbf{r},t)\rangle$ для этого случая. Умножая (81) на H_i и H_j и интегрируя по $\mathbf{H}$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\big\langle W_{ij}(t)\big\rangle=2D_1\big\langle W_{ij}(t)\big\rangle+2D_2\delta_{ij}\big\langle E(t)\big\rangle\,,$$

откуда следует решение для средней энергии

$$\big\langle E(t)\big\rangle=E_0\exp\left[2\,\frac{d-1}{d}\,(D^{\mathrm{s}}+D^{\mathrm{p}})t\right], \qquad (83)$$

а для корреляции магнитного поля получаем выражение

$$\frac{\big\langle W_{ij}(t)\big\rangle}{\big\langle E(t)\big\rangle}=\frac{1}{d}\,d_{ij}+\left(\frac{W_{ij}(0)}{E_0}-\frac{1}{d}\,d_{ij}\right)\times$$
$$\times\exp\left[-2\,\frac{(d+1)D^{\mathrm{s}}+D^{\mathrm{p}}}{d+2}\,t\right]. \qquad (84)$$

Таким образом, средняя энергия экспоненциально возрастает во времени, при этом происходит изотропизация магнитного поля также экспоненциальным образом. Отметим, что в соответствующие экспоненты спектральные составляющие поля скоростей входят аддитивным образом. Очевидно, что это обстоятельство сохраняется и для любых других корреляций магнитного поля и его энергии.

3.3.2. Вероятностное описание энергии магнитного поля. Введём теперь индикаторную функцию энергии магнитного поля $E(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}^2(\mathbf{r},t)$ — $\varphi(\mathbf{r},t;E)=\delta(E(\mathbf{r},t)-E)$, с помощью которой плотность вероятностей $P(\mathbf{r},t;E)$ определяется как

$$P(\mathbf{r},t;E)=\big\langle\delta\big(E(\mathbf{r},t)-E\big)\big\rangle_{\mathbf{u}}=\big\langle\delta\big(\mathbf{H}^2(\mathbf{r},t)-E\big)\big\rangle_{\mathbf{H}}\,.$$

Для получения уравнения для этой функции следует домножить уравнение (81) на $\delta(\mathbf{H}^2-E)$ и проинтегрировать его по $\mathbf{H}$. В результате получаем уравнение [36]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-D_0\,\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\right)P(\mathbf{r},t;E)=$$
$$=\left\{\alpha\,\frac{\partial}{\partial E}\,E+D\,\frac{\partial}{\partial E}\,E\,\frac{\partial}{\partial E}\,E\right\}P(\mathbf{r},t;E)\,, \qquad (85)$$
$$P(\mathbf{r},0;E)=\delta\big(E-E_0(\mathbf{r})\big)\,,$$

с параметрами

$$\alpha=2\,\frac{d-1}{d+2}\,(D^{\mathrm{p}}-D^{\mathrm{s}})\,,\qquad D=4(d-1)\,\frac{(d+1)D^{\mathrm{p}}+D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\,.$$

При этом α может быть как положительным, так и отрицательным. Изменения знака α для одноточечных характеристик означает переход от поля $E(\mathbf{r},t)$ к полю $\tilde{E}(\mathbf{r},t)=1/E(\mathbf{r},t)$. Случай $\alpha=0$ ($D^{\mathrm{p}}=D^{\mathrm{s}}$) заслуживает отдельного рассмотрения.

Решение уравнения (85) имеет вид

$$P(\mathbf{r},t;E)=\frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}}\,\exp\left(D_0t\,\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{\ln^2\left[E\exp(\alpha t)/E_0(\mathbf{r})\right]}{4Dt}\right\}. \qquad (86)$$

Для пространственно однородного начального распределения энергии $E_0(\mathbf{r})=E_0$ плотность вероятностей (86) не зависит от $\mathbf{r}$ и описывается формулой

$$P(t;E)=\frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}}\,\exp\left\{-\frac{\ln^2\left[E\exp(\alpha t)/E_0\right]}{4Dt}\right\}. \qquad (87)$$

Таким образом, в этом случае одноточечные статистические характеристики энергии $E(\mathbf{r},t)/E_0$ статистически эквивалентны характеристикам случайного процесса $E(t)=y(t;\alpha)$ (2).

Характерной особенностью распределения (87) является появление длинного пологого "хвоста" при $Dt \gg 1$, означающего усиление роли больших выбросов процесса $E(t;\alpha)$ в формировании одновременной статистики. Для этого распределения все моменты энергии магнитного поля экспоненциально возрастают со временем (как для положительных n, так и для $n < 0$):

$$\left\langle E^n(t)\right\rangle = E_0^n \exp\left[-2n\,\frac{d-1}{d+2}(D^{\mathrm p}-D^{\mathrm s})t + \right. \\ \left. + 4n^2(d-1)\,\frac{(d+1)D^{\mathrm p}+D^{\mathrm s}}{d(d+2)}\,t\right],$$

в частности, при $n = 1$ средняя удельная энергия

$$\left\langle E(t)\right\rangle = E_0 \exp(\gamma t)\,, \qquad \gamma = \frac{2(d-1)}{d}(D^{\mathrm p}+D^{\mathrm s})\,, \qquad (88)$$

а

$$\left\langle \ln\frac{E(t)}{E_0}\right\rangle = -\alpha t = -2\,\frac{d-1}{d+2}(D^{\mathrm p}-D^{\mathrm s})t\,,$$

следовательно, параметр α является *ляпуновским характеристическим показателем*. При этом *кривая типичной реализации* случайного процесса $E(t)$, определяющая поведение энергии магнитного поля в конкретных реализациях, в любой фиксированной точке пространства является экспоненциальной,

$$E^*(t) = E_0 \exp(-\alpha t) = E_0 \exp\left[-2\,\frac{d-1}{d+2}(D^{\mathrm p}-D^{\mathrm s})t\right],$$

возрастающей или убывающей во времени. Так, при $\alpha > 0$ ($D^{\mathrm p} > D^{\mathrm s}$) кривая типичной реализации экспоненциально спадает в каждой точке пространства, что свидетельствует о кластерной структуре магнитного поля, и возрастание моментов энергии магнитного поля в этом случае определяется редкими, но большими выбросами энергии относительно кривой типичной реализации, характерными для логнормальных процессов. В другом случае, при $\alpha < 0$ ($D^{\mathrm p} < D^{\mathrm s}$), кривая типичной реализации экспоненциально возрастает во времени, что свидетельствует об общем увеличении магнитной энергии в каждой точке пространства. На рисунке 14 схематически изображены реализации энергии магнитного поля в случайном поле скоростей для параметра α разных знаков.

Индикаторная функция энергии магнитного поля позволяет получить и общую информацию о пространственной структуре поля энергии. В частности, такие функционалы энергии магнитного поля, как общая величина объёма (в трёхмерном случае) или площади (в двумерном случае) области, в которой $E(\mathbf r, t) > E$,

$$V(t,E) = \int \mathrm d\mathbf r\,\theta\big(E(\mathbf r,t)-E\big) = \int \mathrm d\mathbf r \int_E^\infty \mathrm d\tilde E\,\delta\big(E(\mathbf r,t)-\tilde E\big)\,,$$

и общая энергия магнитного поля, заключённая в этой области,

$$\mathcal E(t,E) = \int \mathrm d\mathbf r\, E(\mathbf r,t)\,\theta\big(E(\mathbf r,t)-E\big) = \\ = \int \mathrm d\mathbf r \int_E^\infty \tilde E\,\mathrm d\tilde E\,\delta\big(E(\mathbf r,t)-\tilde E\big)\,,$$

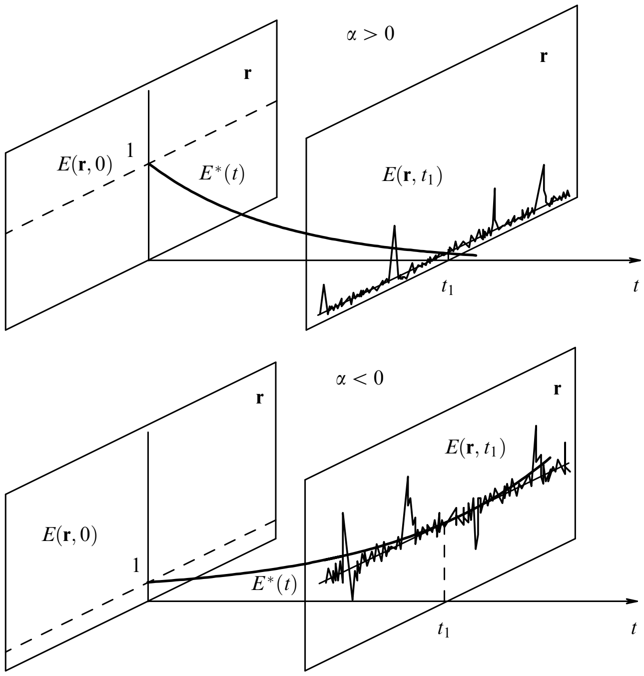

Рис. 14. Схематическое поведение случайных реализаций энергии поля для параметра $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$.

средние значения которых определяются одноточечной плотностью вероятностей (86), описываются в общем случае равенствами

$$\left\langle V(t,E)\right\rangle = \int_E^\infty \mathrm d\tilde E \int \mathrm d\mathbf r\, P(\mathbf r,t;\tilde E)\,,$$

$$\left\langle \mathcal E(t,E)\right\rangle = \int_E^\infty \tilde E\,\mathrm d\tilde E \int \mathrm d\mathbf r\, P(\mathbf r,t;\tilde E)\,.$$

Средние значения этих функционалов не зависят от диффузии в $\mathbf r$-пространстве (коэффициента D_0) и для распределения вероятностей (86) получаем, что асимптотика среднего объёма при $t \to \infty$ (при $\alpha > 0$) убывает во времени по закону

$$\left\langle V(t,E)\right\rangle \approx \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{D}{\pi E^{\alpha/D} t}}\,\exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{4D}\right)\int \mathrm d\mathbf r\,\sqrt{E_0^{\alpha/D}(\mathbf r)}\,.$$

При $\alpha < 0$ средний объём при $t \to \infty$ занимает всё пространство.

Для полной энергии в обоих случаях получаем асимптотику при $t \to \infty$ (так как $\alpha < 2D$):

$$\left\langle \mathcal E(t,E)\right\rangle \approx \\ \times \exp(\gamma t)\int \mathrm d\mathbf r\, E_0(\mathbf r)\left\{1 - \frac{1}{(2D-\alpha)}\sqrt{\frac{D}{\pi t}\left(\frac{E}{E_0(\mathbf r)}\right)^{(2D-\alpha)/D}}\times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{(2D-\alpha)^2 t}{4}\right]\right\},$$

где параметр γ описывается равенством (88), значит, при $\alpha > 0$ в кластерах содержится 100 % от общей средней энергии.

Соответствующие асимптотические выражения при однородном начальном условии для удельных значений объёма больших выбросов и их общей энергии, приходящиеся на единицу объёма, имеют вид

$$\left\langle \mathcal{V}_{\mathrm{hom}}(t, E)\right\rangle \approx$$
$$\approx \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{D}{\pi t}\left(\dfrac{E_0}{E}\right)^{\alpha/D}}\exp\left(-\dfrac{\alpha^2 t}{4D}\right), & \alpha > 0\,, \\ 1-\dfrac{1}{|\alpha|}\sqrt{\dfrac{D}{\pi t}\left(\dfrac{E}{E_0}\right)^{|\alpha|/D}}\exp\left(-\dfrac{|\alpha|^2 t}{4D}\right), & \alpha < 0\,, \end{cases}$$

и, так как $(2D-\alpha) > 0$, то

$$\left\langle \mathcal{E}_{\mathrm{hom}}(t, E)\right\rangle \approx E_0 \exp(\gamma t)\left\{1-\frac{1}{2D-\alpha}\sqrt{\frac{D}{\pi t}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{(2D-\alpha)/D}}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-\frac{(2D-\alpha)^2 t}{4D}\right]\right\}.$$

Таким образом, при $\alpha > 0$ $(D^{\mathrm{p}} > D^{\mathrm{s}})$ удельный общий объём стремится к нулю, а удельная общая энергия, заключённая в этом объёме, совпадает со средней энергией во всём пространстве. Это свидетельствует о кластеризации энергии магнитного поля.

В случае $\alpha < 0$ $(D^{\mathrm{p}} < D^{\mathrm{s}})$ кластеризация отсутствует, происходит общее усиление энергии магнитного поля и удельный объём, в котором удельная средняя энергия возрастает во времени, занимает всё пространство. Отдельно отметим, что при экспоненциальном возрастании магнитной энергии E во всём пространстве (мелкомасштабном динамо) происходит кластеризация обратной величины $1/E$. То есть появляются кластеры компактных областей с вытесненным магнитным полем (магнитных нулей).

3.3.3. Случай $\alpha = 0$ $(D^{\mathrm{p}} = D^{\mathrm{s}})$. В этом случае при однородном начальном условии энергия магнитного поля статистически эквивалентна случайному процессу (10). При этом все одноточечные статистические характеристики не зависят от $\mathbf{r}$ и одноточечная плотность вероятностей принимает вид

$$P(t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi D t}}\exp\left[-\frac{\ln^2(E/E_0)}{4Dt}\right].$$

Случайные процессы $E(t)$ и $1/E(t)$ тогда также статистически эквивалентны, а все моменты энергии магнитного поля экспоненциально возрастают во времени: $\langle E^n(t)\rangle = E_0^n \exp(n^2\gamma t)$, где $\gamma = 4(d-1)D^{\mathrm{p}}/d$, и, в частности, при $n = 1$ средняя удельная энергия $\langle E(t)\rangle = E_0 \exp(\gamma t)$.

Для удельного среднего объёма при $t \to \infty$ получаем, что он асимптотически стремится к половине общего объёма, а удельная средняя энергия при этом стремится к полной средней энергии.

Таким образом, в случае $\alpha = 0$ $(D^{\mathrm{p}} = D^{\mathrm{s}})$ мы видим, что кластеризации нет, но при этом, естественно, перемежаемость сохраняется. Этот же вывод относится, соответственно, и к полю $f(\mathbf{r}, t)$ (10).

4. Интегральные одноточечные статистические характеристики пассивных векторных полей

В разделе 3 для одноточечных характеристик поля плотности и магнитного поля при отсутствии эффектов динамической диффузии были приведены уравнения для плотностей вероятностей этих полей. Это позволяет получить условия возможности образования кластерных структур на основе идей статистической топографии. Для получения более подробной информации о кластерах необходимо знание статистических величин, связанных с одноточечными характеристиками производных скалярных полей и их корреляцией с самим полем. К сожалению, рассмотрение таких величин требует очень громоздких вычислений, и разобраться в следствиях такого описания очень сложно. Кроме того, такое вероятностное описание не допускает включения в анализ эффектов динамической диффузии.

Отметим, однако, что в случае дельта-коррелированного случайного поля скоростей от линейных уравнений (11) и (12) легко перейти к замкнутым уравнениям как для самих средних значений этих полей, так и для их высших многоточечных корреляционных функций. Поэтому для анализа сформулированных проблем остаётся единственный путь: изучение двухточечных корреляционных функций поля плотности $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \langle\rho(\mathbf{r}, t)\,\rho(\mathbf{r}_1, t)\rangle$ и магнитного поля $W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \langle H_i(\mathbf{r}, t)\,H_j(\mathbf{r}_1, t)\rangle$, зависящих от разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$ при однородных начальных условиях $\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0$, что существенно упрощает рассмотрение [37]. Как указывалось в разделе 1, в этом случае все статистические средние являются интегральными — удельными, приходящимися на единицу объёма.

Различные корреляции пространственных производных рассматриваемых полей можно получить последовательным дифференцированием этих функций по пространственным переменным. Исходные уравнения при этом должны содержать диссипативные члены.

4.1. Пространственная корреляционная функция поля плотности

Исходя из уравнения (11), прежде всего выпишем стохастическое динамическое уравнение для функции $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\,\rho(\mathbf{r}_1, t)$ и усредним его по ансамблю реализаций случайного поля скоростей. Тогда для пространственной корреляционной функции $\langle R(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, t)\rangle = \langle\rho(\mathbf{r}, t)\,\rho(\mathbf{r}_1, t)\rangle$ с учётом формулы Фуруцу – Новикова (45) получаем уравнение в частных производных для корреляционной функции поля плотности $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r})$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle R(\mathbf{r}, t)\right\rangle = -\frac{\partial^2\left[B_{ij}(\mathbf{r})+B_{ji}(\mathbf{r})\right]}{\partial r_j\,\partial r_i}\left\langle R(\mathbf{r}, t)\right\rangle -$$
$$-\frac{\partial\left[B_{ij}(\mathbf{r})+B_{ji}(\mathbf{r})\right]}{\partial r_i}\left\langle R_j(\mathbf{r}, t)\right\rangle - \frac{\partial\left[B_{ij}(\mathbf{r})+B_{ji}(\mathbf{r})\right]}{\partial r_j}\left\langle R_i(\mathbf{r}, t)\right\rangle +$$
$$+\left[2B_{ij}(\mathbf{0})-B_{ij}(\mathbf{r})-B_{ji}(\mathbf{r})\right]\left\langle R_{ji}(\mathbf{r}, t)\right\rangle + 2\mu_\rho\left\langle R_{kk}(\mathbf{r}, t)\right\rangle\,, \tag{89}$$

где $\langle R_{kk}(\mathbf{r}, t)\rangle = \partial^2/\partial\mathbf{r}^2\langle R(\mathbf{r})\rangle$, т.е. индексами у функции $\langle R(\mathbf{r}, t)\rangle$ обозначены пространственные производные, при этом $\langle R_{kk}(\mathbf{0}, t)\rangle < 0$.

Отметим, что в случае изотропного случайного поля скорости случайное поле плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ будет однородным и изотропным случайным полем. Тогда уравнение для корреляционной функции упрощается, принимая вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle R(\mathbf{r}, t)\right\rangle = 2\mu_\rho\,\Delta\left\langle R(\mathbf{r}, t)\right\rangle + \frac{\partial^2}{\partial r_i\,\partial r_j}D_{ij}(\mathbf{r})\left\langle R(\mathbf{r}, t)\right\rangle\,,$$

где $D_{ij}(\mathbf{r})$ — структурная матрица векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$,

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2\left[B_{ij}(0) - B_{ij}(\mathbf{r})\right].$$

Корреляционная функция $\langle R(\mathbf{r},t)\rangle$ теперь оказывается зависящей от модуля вектора $\mathbf{r}$, т.е. $\langle R(\mathbf{r},t)\rangle = \langle R(r,t)\rangle$, и как функция переменных r, t будет описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle R(r,t)\right\rangle = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\, r^{d-1}\times \\ \times\left[\frac{\partial D_{ii}(r)}{\partial r} + \left(2\mu + \frac{r_i r_j}{r^2}\, D_{ij}(\mathbf{r})\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\left\langle R(r,t)\right\rangle,$$

где, как и ранее, d — размерность пространства. Это уравнение может иметь стационарное решение $\langle R(r,t)\rangle = \langle R(r)\rangle$ при $t\to\infty$, соответствующее краевому условию $\langle R(\infty)\rangle = \rho_0^2$ вида [39]

$$\left\langle R(r)\right\rangle = \rho_0^2\exp\left(\int_r^\infty \mathrm{d}r'\ \frac{\partial D_{ii}(r')/\partial r'}{2\mu + r_i' r_j' D_{ij}(\mathbf{r}')/r'^2}\right).$$

Отметим, что эта величина при $r=0$ определяет стационарное значение второго момента поля плотности $\langle R(0)\rangle = \langle \rho^2(\mathbf{r},t)\rangle_{t\to\infty}$, следовательно,

$$\left\langle\rho^2(\mathbf{r},t)\right\rangle_{t\to\infty} = \rho_0^2\exp\left(\int_0^\infty \mathrm{d}r'\ \frac{\partial D_{ii}(r')/\partial r'}{2\mu + r_i' r_j' D_{ij}(\mathbf{r}')/r'^2}\right) > \rho_0^2\,. \tag{90}$$

Вернёмся теперь к общему случаю случайного поля скоростей, не имеющего зеркальной симметрии (т.е. обладающего спиральностью). Полагая $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ в уравнении (89), с учётом формулы (64) приходим к незамкнутому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2D^{\mathrm{p}}\right)\left\langle R(\mathbf{0},t)\right\rangle = 2\mu_\rho\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle,\qquad \left\langle R(\mathbf{0},0)\right\rangle = \rho_0^2\,. \tag{91}$$

Для построения приближённого решения уравнения (91) можно построить приближённую процедуру разложения его правой части в ряд по малому параметру μ_ρ. Для этого пометим величины $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_\mu$ и $\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\rangle_\mu$ индексом μ и перепишем это уравнение в виде незамкнутого интегрального уравнения:

$$\left\langle R(\mathbf{0},t)\right\rangle_\mu = \rho_0^2\exp\left\{2D^{\mathrm{p}}t + \int_0^t \mathrm{d}\tau\ \frac{2\mu_\rho}{\left\langle R(\mathbf{0},\tau)\right\rangle_\mu}\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},\tau)\right\rangle_\mu\right\}. \tag{92}$$

Решение на начальном этапе, когда можно пренебречь диссипацией, которое имеет вид

$$\left\langle R(\mathbf{0},t)\right\rangle_0 = \left\langle\rho^2(\mathbf{r},t)\right\rangle_0 = \rho_0^2\exp\left(2D^{\mathrm{p}}t\right), \tag{93}$$

естественно, совпадает с формулой (71) при $n=2$ и определяется только потенциальной составляющей спектральной функции поля скоростей.

Далее будем искать правую часть в виде ряда по параметру μ. В первом приближении решение задачи имеет структуру

$$\left\langle R(\mathbf{0},t)\right\rangle_1 = \rho_0^2\exp\left\{2D^{\mathrm{p}}t + \int_0^t \mathrm{d}\tau\ \frac{2\mu_\rho}{\left\langle R(\mathbf{0},\tau)\right\rangle_0}\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},\tau)\right\rangle_0\right\}. \tag{94}$$

Ясно, что решение (94) при малых временах будет экспоненциально возрастать и, достигнув максимального значения в момент $t_{\max}$, затем будет уменьшаться во времени до выхода на стационарное значение, в соответствии с физическим смыслом рассматриваемой задачи.

Отметим, что из структуры уравнения (89) следует, что спиральность поля скоростей не сказывается на статистике градиента поля плотности, так как во все коэффициенты этого уравнения входит только симметричная матрица $B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})$. А для такой матрицы все нечётные производные по $\mathbf{r}$ обращаются в нуль при $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ (см. равенство (65)). Нечётные производные по $\mathbf{r}$ функции $\langle R(\mathbf{r},t)\rangle$ при $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ также обращаются в нуль. Учитывая эти обстоятельства, сразу же можно сказать, что спиральность градиента плотности примеси равна нулю, так как она связана с величиной

$$\left\langle\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial r_i}\,\frac{\partial^2\rho(\mathbf{r},t)}{\partial r_j\,\partial r_k}\right\rangle = \left\langle R_{ijk}(\mathbf{0},t)\right\rangle.$$

4.1.1. Одноточечные статистические характеристики градиента поля плотности. Введём теперь вектор градиента поля плотности $p_k(\mathbf{r},t) = \partial\rho(\mathbf{r},t)/\partial r_k$, тогда пространственный корреляционный тензор градиента поля плотности и дисперсия градиента поля плотности определяются тождествами

$$P_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t) \equiv -\left\langle R_{kl}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t)\right\rangle,\qquad \sigma_{\mathbf{p}}^2(t) \equiv -\left\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\right\rangle. \tag{95}$$

Отметим, что при $t\to\infty$ из уравнения (91) следует выражение для стационарного значения дисперсии градиента поля плотности

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(\infty) = \frac{D^{\mathrm{p}}}{\mu_\rho}\left\langle R(\mathbf{0},\infty)\right\rangle.$$

Для нахождения эволюции во времени одноточечных статистических характеристик градиента поля плотности продифференцируем уравнение (89) по r_k и r_l и положим $\mathbf{r}=0$. В результате с учётом равенства (64) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\right\rangle_0 = -2\,\frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i\,\partial r_j\,\partial r_k\,\partial r_l}\left\langle R(\mathbf{0},t)\right\rangle_0 + \\ + 2\,\frac{(4+d)D^{\mathrm{p}}}{d}\left\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\right\rangle_0 + \\ + 2\,\frac{D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\left[(d+1)\,\delta_{kl}\left\langle R_{ii}(\mathbf{0},t)\right\rangle_0 - 2\left\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\right\rangle_0\right] + \\ + 2\,\frac{D^{\mathrm{p}}}{d(d+2)}\left(\delta_{kl}\left\langle R_{ii}(\mathbf{0},t)\right\rangle_0 + 2\left\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\right\rangle_0\right).$$

Учтём также, что поскольку источник генерации поля градиента является изотропным

$$2\,\frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i\,\partial r_j\,\partial r_k\,\partial r_l} = -\frac{2}{d}\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\left\langle\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\,\Delta\,\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t-\tau)}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle\delta_{kl} = \\ = \frac{1}{d}\,D_\rho^{(4)}\delta_{kl}\quad\left(D_\rho^{(4)} > 0\right),$$

то и тензор $\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\rangle$ тоже изотропен, т.е.

$$\big\langle R_{kl}(\mathbf{0},t)\big\rangle_0 = \frac{1}{d}\big\langle R_{ii}(\mathbf{0},t)\big\rangle_0\,\delta_{kl}\,.$$

Следовательно, для величины дисперсии градиента поля плотности (95) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\big\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\big\rangle_0 = -D_\rho^{(4)}\big\langle R(\mathbf{0},t)\big\rangle_0 + \\ + 2\,\frac{D^{\mathrm{s}}(d-1)+(d+5)D^{\mathrm{p}}}{d}\big\langle R_{kk}(\mathbf{0},t)\big\rangle_0\,, \qquad (96)$$

где второй момент поля плотности $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_0$ описывается равенством (93).

Решение уравнения (96) имеет вид

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(t) = \frac{D_\rho^{(4)}\big\langle R(\mathbf{0},t)\big\rangle_0}{A}\big[\exp(At)-1\big]\,, \qquad (97)$$

где $A = 2[D^{\mathrm{s}}(d-1)+(d+5)D^{\mathrm{p}}]/d$.

Отметим, что хотя это решение и генерируется потенциальной составляющей спектральной плотности случайного поля скоростей, но в случае слабой сжимаемости ($D^{\mathrm{p}} \ll D^{\mathrm{s}}$) инкремент нарастания экспоненциального роста решения во времени совпадает с инкрементом дисперсии градиента поля плотности в несжимаемом потоке жидкости с неоднородным начальным распределением плотности [2–5], так как в этом случае параметр $A = 2D^{\mathrm{s}}(d-1)/d$.

Вернёмся теперь к выражению (94), которое с помощью формулы (97) можно переписать в окончательном виде:

$$\big\langle \rho^2(t)\big\rangle_1 = \rho_0^2\exp\left\{2D^{\mathrm{p}}t - 2\,\frac{\mu_\rho D_\rho^{(4)}}{A^2}\big[\exp(At)-1-At\big]\right\}. \qquad (98)$$

Данное решение имеет максимум при

$$At_{\max} \approx \ln\frac{AD^{\mathrm{p}}}{\mu_\rho D_\rho^{(4)}}\,,$$

при этом $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_1$ достигает значения

$$\big\langle R(\mathbf{0},t)\big\rangle_{1\max} \approx \rho_0^2\left(\frac{AD^{\mathrm{p}}}{\mu_\rho D_\rho^{(4)}}\right)^{2D^{\mathrm{p}}/A}\exp\left(-\frac{2D^{\mathrm{p}}}{A}\right),$$

а условием применимости пренебрежения эффектом действия динамической диффузии является условие $t \ll t_{\max}$.

При $t > t_{\max}$ функция $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle_1$ быстро убывает во времени. Как указывалось ранее, в общем случае $\langle R(\mathbf{0},t)\rangle$ выходит на стационарное значение (90) при $t\to\infty$.

4.2. Пространственная корреляционная функция магнитного поля

Как упоминалось в разделе 3.3, в общем случае дивергентного случайного поля скоростей можно вычислить плотности вероятностей для магнитного поля и его энергии. В принципе эту методику можно использовать и для вычисления различных величин, связанных с пространственными производными магнитного поля без учёта динамической диффузии. Однако соответствующие уравнения будут очень громоздкими, и из них трудно будет получить какие-либо следствия.

При анализе различных моментных функций мы уже можем учитывать коэффициент динамической диффузии. Однако в общем случае дивергентного поля скоростей все уравнения также окажутся чрезвычайно громоздкими. Поэтому при дальнейшем анализе статистических характеристик пространственных производных магнитного поля мы ограничимся бездивергентным полем скоростей ($\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=0$), т.е. турбулентный поток жидкости будет считаться несжимаемым. Учёт сжимаемости меняет лишь коэффициенты этого уравнения аддитивным образом, но не основную тенденцию поведения моментных функций.

Введём функцию $W_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1;t) = H_i(\mathbf{r},t)H_k(\mathbf{r}_1,t)$. Тогда для корреляционной функции магнитного поля, аналогично тому, как это делалось для корреляционной функции поля плотности, получаем уравнение в частных производных ($\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\big\langle W_{ij}(\mathbf{r};t)\big\rangle = -2\,\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k\,\partial r_m}\big\langle W_{km}(\mathbf{r};t)\big\rangle - \\ - 2\,\frac{\partial\big[B_{ik}(\mathbf{0})-B_{ik}(\mathbf{r})\big]}{\partial r_s}\,\frac{\partial}{\partial r_k}\big\langle W_{sj}(\mathbf{r};t)\big\rangle - \\ - 2\,\frac{\partial\big[B_{kj}(\mathbf{0})-B_{kj}(\mathbf{r})\big]}{\partial r_s}\,\frac{\partial}{\partial r_k}\big\langle W_{is}(\mathbf{r};t)\big\rangle + \\ + \big[2B_{kq}(\mathbf{0})-B_{kq}(\mathbf{r})-B_{qk}(\mathbf{r})\big]\,\frac{\partial^2}{\partial r_q\,\partial r_k}\big\langle W_{ij}(\mathbf{r};t)\big\rangle + \\ + 2\mu_H\big\langle W_{ij;ss}(\mathbf{r};t)\big\rangle\,, \qquad (99)$$

где $\langle W_{ij;ss}(\mathbf{r};t)\rangle$ — диссипативный тензор,

$$\big\langle W_{ij;ss}(\mathbf{r};t)\big\rangle = \frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\big\langle W_{ij}(\mathbf{r};t)\big\rangle\,,$$

и производные функции $W_{ik}(\mathbf{r},t)$ по $\mathbf{r}$ обозначаются дополнительными индексами после знака ";".

Получим теперь уравнение для одноточечной корреляции, полагая в (99) $\mathbf{r}=0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big\langle W_{ij}(t)\big\rangle = -2\,\frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k\,\partial r_m}\big\langle W_{km}(t)\big\rangle + 2\mu_H\big\langle W_{ij;ss}(\mathbf{0};t)\big\rangle\,.$$

Учитывая теперь соленоидальную часть равенства (64) ($D^{\mathrm{p}}=0$), приходим к незамкнутому уравнению для корреляции:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big\langle W_{ij}(t)\big\rangle = \frac{2(d+1)D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\,\delta_{ij}\big\langle E(t)\big\rangle - \\ - \frac{4D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\big\langle W_{ij}(t)\big\rangle + 2\mu_H\big\langle W_{ij;ss}(\mathbf{0};t)\big\rangle\,,$$

где $\langle E(t)\rangle = \langle\mathbf{H}^2(\mathbf{r},t)\rangle$ — средняя энергия магнитного поля. Полагая в этом уравнении $i=j$, получаем уравнение для средней энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big\langle E(t)\big\rangle = \frac{2(d-1)D^{\mathrm{s}}}{d}\big\langle E(t)\big\rangle - 2\mu_H D(t)\,,$$

где величина $D(t)$, описывающая её диссипацию,

$$D(t) = \Big\langle\big[\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\big]^2\Big\rangle = -\big\langle W_{ii;jj}(\mathbf{0},t)\big\rangle \qquad (100)$$

определяет дисперсию силы тока в магнитогидродинамическом потоке. Отметим, что при $t\to\infty$ средняя энергия выходит на стационарное значение $\langle E(\infty)\rangle$. Поскольку $\langle E(t)\rangle \geqslant E_0$, то диссипация также выходит на стационарное значение

$$D(0) = \frac{(d-1)D^{\mathrm{s}}}{d\mu_H}\left\langle E(\infty)\right\rangle.$$

Как и в случае поля плотности, решение этого уравнения будем искать в виде ряда по параметру μ. В первом приближении получаем решение

$$\left\langle E(t)\right\rangle_1 = E_0 \exp\left(\frac{2(d-1)D^{\mathrm{s}}t}{d} - \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \frac{2\mu_H}{\left\langle E(\tau)\right\rangle_0} D_0(\tau)\right), \tag{101}$$

где $D_0(t)$ соответствует диссипации в отсутствие эффекта динамической диффузии. При этом решение задачи на начальном этапе эволюции, на котором можно пренебречь диссипацией, является экспоненциально возрастающим:

$$\left\langle E(t)\right\rangle_0 = E_0 \exp\left[\frac{2(d-1)}{d} D^{\mathrm{s}}t\right]. \tag{102}$$

4.2.1. О спиральности магнитного поля. Далее мы пренебрежём динамической диффузией и не будем указывать нулевой индекс. Получим теперь уравнение для величины

$$\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{r};t)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial r_j}\left\langle W_{kp}(\mathbf{r};t)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial H_k(\mathbf{r},t)}{\partial r_j} H_p(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle,$$

для того чтобы вычислить спиральность магнитного поля

$$H(t) = \varepsilon_{ijk}\left\langle W_{ki;\,j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = \langle \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\rangle.$$

Дифференцируя (99) по r_j, приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{r};t)\right\rangle &= -2\,\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{r})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_j}\left\langle W_{nm}(\mathbf{r};t)\right\rangle - \\
&- 2\,\frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{r})}{\partial r_n\,\partial r_m}\left\langle W_{nm;\,j}(\mathbf{r};t)\right\rangle + 2\,\frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{r})}{\partial r_m\,\partial r_j}\left\langle W_{mp;\,n}(\mathbf{r};t)\right\rangle - \\
&- 2\,\frac{\partial\big(B_{kn}(\mathbf{0}) - B_{kn}(\mathbf{r})\big)}{\partial r_m}\,\frac{\partial}{\partial r_n}\left\langle W_{mp;\,j}(\mathbf{r};t)\right\rangle + \\
&+ 2\,\frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{r})}{\partial r_m\,\partial r_j}\left\langle W_{km;\,n}(\mathbf{r};t)\right\rangle - \\
&- 2\,\frac{\partial\big(B_{np}(\mathbf{0}) - B_{np}(\mathbf{r})\big)}{\partial r_m}\,\frac{\partial}{\partial r_n}\left\langle W_{km;\,j}(\mathbf{r};t)\right\rangle - \\
&- \frac{\partial\big(B_{nq}(\mathbf{r}) + B_{qn}(\mathbf{r})\big)}{\partial r_j}\,\frac{\partial^2}{\partial r_q\,\partial r_n}\left\langle W_{kp}(\mathbf{r};t)\right\rangle + \\
&+ \big(2B_{nq}(\mathbf{0}) - B_{nq}(\mathbf{r}) - B_{qn}(\mathbf{r})\big)\,\frac{\partial^2}{\partial r_q\,\partial r_n}\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{r};t)\right\rangle.
\end{aligned} \tag{103}$$

Полагая $\mathbf{r} = 0$, переходим к уравнению для одноточечной корреляции

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{0};t)\right\rangle &= -2\,\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_j}\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle - \\
&- 2\,\frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m}\left\langle W_{nm;\,j}(\mathbf{0};t)\right\rangle + 2\,\frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m\,\partial r_j}\left\langle W_{mp;\,n}(\mathbf{0};t)\right\rangle + \\
&+ 2\,\frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m\,\partial r_j}\left\langle W_{km;\,n}(\mathbf{0};t)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Учитывая равенство (64) для соленоидальной части корреляционной функции, получим уравнение второго порядка

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2(d+5)D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\,\frac{\partial}{\partial t} - 8\,\frac{d-1}{d^2(d+2)}\,[D^{\mathrm{s}}]^2\right)\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = \\
&= -2\,\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_j}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2(d+3)D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\right)\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle + \\
&+ \frac{4(d+1)D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\left(\frac{\partial^3 B_{jp}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_k} + \frac{\partial^3 B_{kj}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_p}\right)\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle
\end{aligned} \tag{104}$$

с источником в правой части, связанным с отсутствием отражательной симметрии.

Введём разложение функции $C(r)$ в корреляционной функции поля скоростей (66) $C(r) = C(0) - \alpha\mathbf{r}^2 + \ldots$ и воспользуемся равенством (65). Решать уравнение (104) будем исходя из возрастающих экспонент одноточечной корреляционной функции магнитного поля (102)

$$\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle = \frac{1}{d}\,\delta_{nm}\left\langle E(t)\right\rangle_0.$$

В этом случае уравнение (104) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{4D^{\mathrm{s}}}{d}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2(d-1)D^{\mathrm{s}}}{d(d+2)}\right)\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = \\
&= 8\alpha D^{\mathrm{s}}\,\frac{(d+3)(d-1)}{d}\,\varepsilon_{kpj}\left\langle E(t)\right\rangle_0.
\end{aligned} \tag{105}$$

Уравнение (105) имеет два характеристических показателя — положительный, соответствующий возрастающей экспоненте, и отрицательный, соответствующий убывающему решению. Возрастающее во времени решение уравнения (105) ищем в виде

$$\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = U_{kp;\,j}(t)\exp\left(\frac{4D^{\mathrm{s}}}{d}\,t\right).$$

Тогда уравнение для $U_{kp;\,j}(t)$ упрощается и принимает вид "укороченного" уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_{kp;\,j}(t)}{\partial t} = \\
&= 4\alpha\varepsilon_{kpj}\,\frac{(d+2)(d-1)(d+3)}{3(d+1)}\,E_0\exp\left[\frac{2(d-3)D^{\mathrm{s}}}{d}\,t\right].
\end{aligned}$$

Так как нам известно, что в двумерном случае спиральность равна нулю, то в трёхмерном случае

$$U_{kp;\,j}(t) = 20\alpha\varepsilon_{kpj}E_0 t,$$

следовательно, основное экспоненциально возрастающее решение принимает вид

$$\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = U_{kp;\,j}(t)\exp\left(\frac{4D^{\mathrm{s}}}{3}\,t\right) = 20\alpha\varepsilon_{kpj}\left\langle E(t)\right\rangle_0 t. \tag{106}$$

В силу равенства (59) (в трёхмерном случае $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = 6$) для спиральности магнитного поля получаем окончательное выражение:

$$H_0(t) = 120\alpha\left\langle E(t)\right\rangle_0 t. \tag{107}$$

4.2.2. О диссипации энергии магнитного поля (дисперсии силы тока в потоке). Диссипация энергии магнитного поля определяется выражением (100), и для её получения необходимо вывести уравнение для величины

$$\left\langle W_{kp;\,js}(\mathbf{0};t)\right\rangle = \frac{\partial}{\partial r_s}\left\langle W_{kp;\,j}(\mathbf{0};t)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial H_k(\mathbf{r},t)}{\partial r_s\,\partial r_j}\,H_p(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}.$$

Дифференцируя уравнение (103) по r_s, полагая $\mathbf{r}=0$ и сворачивая все функции по индексам $k=p$ и $j=s$ с учётом формулы (64), для несжимаемого потока жидкости приходим к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle W_{kk;\,ss}(\mathbf{0};t)\right\rangle &= -2\,\frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_s\,\partial r_s}\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle - \\ &- 4\,\frac{\partial^3 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_s}\left\langle W_{nm;\,s}(\mathbf{0};t)\right\rangle + 2\,\frac{\partial^3 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m\,\partial r_s\,\partial r_s}\left\langle W_{mk;\,n}(\mathbf{0};t)\right\rangle + \\ &+ 2\,\frac{\partial^3 B_{nk}(\mathbf{0})}{\partial r_m\,\partial r_s\,\partial r_s}\left\langle W_{km;\,n}(\mathbf{0};t)\right\rangle + \frac{4(d+1)D^{\mathrm{s}}}{d+2}\left\langle W_{mm;\,ss}(\mathbf{0};t)\right\rangle.\end{aligned}$$

Теперь ограничимся источниками возбуждения, экспоненциально возрастающими во времени,

$$\begin{aligned}-2\,\frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_m\,\partial r_s\,\partial r_s}\left\langle W_{nm}(\mathbf{0};t)\right\rangle_0 &= -2\,\frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n\,\partial r_n\,\partial r_s\,\partial r_s}\left\langle E(t)\right\rangle_0 = \\ &= -2\int_0^\infty \mathrm{d}\tau\,\Big\langle\big[\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau)\big]\big[\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\big]\Big\rangle\left\langle E(t)\right\rangle_0 = \\ &= -2D_H^{(4)}\left\langle E(t)\right\rangle_0,\end{aligned}$$

где $D_H^{(4)}=\int \mathrm{d}\mathbf{k}\,\mathbf{k}^4 E^{\mathrm{s}}(k)$. В результате для трёхмерного случая

$$D_0^{(3)}(t)\approx\left[2D_H^{(4)}+2571\,\frac{\alpha^2}{D^{\mathrm{s}}}\right]\frac{15\left\langle E(t)\right\rangle_0}{28D^{\mathrm{s}}}\exp\left(\frac{28}{15}\,D^{\mathrm{s}}t\right). \tag{108}$$

Из структуры трёхмерного решения, видно, что диссипация магнитного поля для больших времён определяется спиральностью поля скоростей, а при её отсутствии — средней энергией магнитного поля (102).

В двумерном случае ($d=2$) спиральность отсутствует и, следовательно,

$$D_0^{(2)}(t)\approx\frac{D_H^{(4)}}{D^{\mathrm{s}}}\left\langle E(t)\right\rangle_0\exp\left(D^{\mathrm{s}}t\right). \tag{109}$$

В этом случае диссипация энергии определяется только её энергией.

Из формул (108) и (109) видно, что диссипация возрастает во времени значительно быстрее, чем средняя энергия.

4.3. Обобщение для случая неоднородных начальных условий

Мы рассмотрели решение ряда задач о динамике статистических характеристик скалярного поля плотности и векторного магнитного поля и их пространственных производных в простейшей постановке (с однородными начальными условиями), с минимумом определяющих параметров, связанных только со статистическими характеристиками однородного поля скоростей, дельта-коррелированного во времени. В этом случае все изучаемые поля являются также однородными в пространстве, но нестационарными случайными полями. При этом статистические средние, типа $F_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)=\left\langle f_i(\mathbf{r},t)\,f_j(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle$, зависят по пространственным координатам только от разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_1}\,F_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t)=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,F_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t),$$

т.е. при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ для независящей от $\mathbf{r}$ величины $\left\langle f_i(\mathbf{r},t)\,\partial f_j(\mathbf{r},t)/\partial\mathbf{r}\right\rangle$ справедливо тождество

$$\left\langle f_i(\mathbf{r},t)\,\frac{\partial f_j(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle=-\left\langle f_j(\mathbf{r},t)\,\frac{\partial f_i(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle, \tag{110}$$

которым мы широко пользовались при выводе всех уравнений. Это существенно упростило анализ как самой динамической системы, так и полученных результатов, потому что существенное большинство членов при $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ обнуляется, что означает отсутствие адвекции статистических характеристик в рассматриваемых задачах. Именно это и позволило решить рассмотренные задачи с большей полнотой, избежав относительно громоздких вычислений.

При наличии неоднородных начальных условий решения всех задач уже не обладают свойством пространственной однородности и уравнения приобретают очень громоздкий вид. Полученные выше решения, однако, несут определённую информацию и для этого случая. В самом деле, свойством (110) обладает также и интеграл (интегрирование по частям)

$$\int\mathrm{d}\mathbf{r}\,f_i(\mathbf{r},t)\,\frac{\partial f_j(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}=-\int\mathrm{d}\mathbf{r}\,f_j(\mathbf{r},t)\,\frac{\partial f_i(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}.$$

Поэтому ясно, что для поля плотности в случае неоднородных начальных условий при отсутствии динамической диффузии вместо (93) будем иметь решение вида

$$\int\mathrm{d}\mathbf{r}\left\langle\rho^2(\mathbf{r},t)\right\rangle_0=\int\mathrm{d}\mathbf{r}\,\rho_0^2(\mathbf{r})\exp\left(2D^{\mathrm{p}}t\right), \tag{111}$$

а вместо формулы (97) получим

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}\mathbf{r}\left\langle\left(\boldsymbol{\nabla}\rho(\mathbf{r},t)\right)^2\right\rangle_0 &= \int\mathrm{d}\mathbf{r}\left(\boldsymbol{\nabla}\rho_0(\mathbf{r})\right)^2\exp\left(At\right) + \\ &+ \frac{D_\rho^{(4)}}{A}\int\mathrm{d}\mathbf{r}\left\langle\rho^2(\mathbf{r},t)\right\rangle_0\left[\exp\left(At\right)-1\right],\end{aligned} \tag{112}$$

где $A=2\left[(d-1)D^{\mathrm{s}}+(d+5)D^{\mathrm{p}}\right]/d$.

Аналогичным образом, для средней энергии магнитного поля в случае неоднородных начальных условий при отсутствии динамической диффузии вместо формулы (83) имеем

$$\int\mathrm{d}\mathbf{r}\left\langle E(\mathbf{r},t)\right\rangle_0=\int\mathrm{d}\mathbf{r}\,E_0(\mathbf{r})\exp\left(2\,\frac{d-1}{d}\,(D^{\mathrm{s}}+D^{\mathrm{p}})\,t\right).$$

Таким образом, можно утверждать, что полученные соотношения и связи между различными величинами, с точки зрения неоднородных задач, являются интегральными и служат, образно говоря, тем "скелетом", на фоне которого происходит динамика сложных стохастических движений. При этом все члены, которые свелись к нулю в нашем рассмотрении, в случае неоднородных задач имеют дивергентный ("потоковый") вид.

5. Волны в случайно-неоднородных средах

Задача о распространении монохроматического излучения в случайных многомерных средах описывается комплексным параболическим уравнением (13). В этом случае интенсивность волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$ удовлетворяет уравнению неразрывности (14), которое по форме совпадает с уравнением для поля плотности примеси (11) в случайном потенциальном потоке, и, следовательно, интенсивность волнового поля должна кластеризоваться, что проявляется в возникновении *каустической структуры поля*.

Для малых расстояний, проходимых волной, распределение вероятностей интенсивности волнового поля имеет логнормальный характер. При увеличении расстояния необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При ещё бóльших расстояниях, проходимых волной, статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

В этой области статистические характеристики интенсивности волнового поля перестают зависеть от расстояния и приобретают вид

$$\left\langle I^n(x, \mathbf{R}) \right\rangle = n! \,, \qquad P(x, I) = \exp(-I) \,.$$

Последние выражения могут быть получены из представления решения уравнения (13) в виде континуального интеграла [2–6, 18].

При этом средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, и средняя удельная мощность, сосредоточенная в них, являются постоянными и не описывают поведение интенсивности волнового поля в отдельных реализациях.

Кроме того, в этом случае не информативен и переход к статистически эквивалентному случайному процессу, поскольку кривой типичной реализации для него будет также постоянная величина. Объяснить структуру волнового поля в этом случае в отдельных реализациях можно только исходя из анализа таких величин, как удельная средняя длина контуров и удельное среднее число контуров интенсивности волнового поля, описываемых функционалами типа (18) и (20).

Указанные величины продолжают возрастать с увеличением расстояния, и, следовательно, происходит дробление контуров, что и наблюдалось как в лабораторных экспериментах, так и при численном моделировании. Так, на рис. 15 приведены фотографии поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде в лабораторных исследованиях [40], при различных интенсивностях флуктуаций диэлектрической проницаемости. Аналогичные фотографии из работы [41] приведены на рис. 16. Фотографии получены в результате численного моделирования, выполненного в работах [42, 43]. На них ясно видно возникновение каустической структуры волнового поля.

Аналогичная ситуация должна наблюдаться и в случае монохроматической нелинейной *задачи о самовоздействии волны* в случайно-неоднородных средах, описываемой нелинейным параболическим уравнением (*нелинейным уравнением Шрёдингера*)

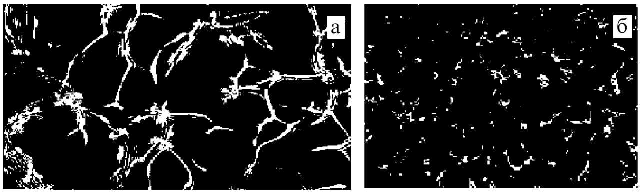

Рис. 15. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (в лабораторных условиях) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б).

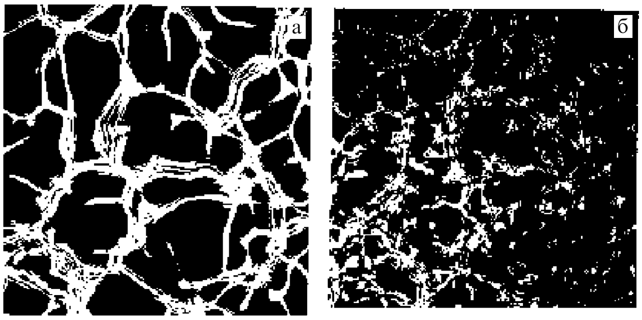

Рис. 16. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (численное моделирование) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б).

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{\mathrm{i}}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{\mathrm{i}k}{2} \varepsilon\bigl(x, \mathbf{R}; I(x, \mathbf{R})\bigr) u(x, \mathbf{R}) \,,$$
$$u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}) \,,$$

так как уравнение (14) не зависит от вида функции $\varepsilon(x, \mathbf{R}; I(x, \mathbf{R}))$. Интерес к этому уравнению связан с проблемой так называемых *волн-убийц* (см., например, [44–49]). Эти волны, безусловно, являются кластеризацией водных масс, но, по моему мнению, они не могут быть описаны на основе уравнений (линейных или нелинейных) для отдельных гармоник.

6. Заключение

Как было показано в данной статье, возрастание во времени таких величин, как моменты полей плотности $\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle$ и энергии магнитного поля $\langle E^n(\mathbf{r}, t) \rangle$ для положительных и отрицательных значений n (т.е. $\langle 1/\rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle$ и $\langle 1/E^n(\mathbf{r}, t) \rangle$), практически по одинаковым законам, никакого отношения к кластеризации этих полей не имеет. Поэтому ясно, что многочисленные попытки, начиная с классической работы [50] и серии работ [51–60], описать сложные динамические процессы в отдельных реализациях случайных полей $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в рамках вычисления "турбулентных" коэффициентов диффузии в $\mathbf{r}$-пространстве с помощью уравнений как для средних полей, так и для других моментных и корреляционных функций несостоятельны, поскольку все эти функции описываются "хвостами" распределений вероятностей, в то время как стохастическое структурообразование описывается центральной частью этих распределений.

Мы изучили ряд интегральных характеристик, которые описывают динамику в целом, что позволило выделить процессы генерации полей и отвлечься от побочных явлений, связанных с адвекцией этих величин случайным полем скоростей. В случае сжимаемого потока (в дивергентном поле скоростей) поле плотности всегда кластеризуется с вероятностью единица. Характерное время образования кластеров оценивается как $D^{\mathrm{p}} t \sim 1$, где величина D^{p} определяется потенциальной составляющей спектральной компоненты поля скоростей. Отметим, что даже для несжимаемой жидкости в гидродинамических потоках поле плотности будет кластеризоваться для "плавучей" примеси, при учёте конечной инерционности поля примеси и для многофазных потоков жидкости, т.е. всегда, когда в поле скоростей примеси, отличном от поля скоростей самой жидкости, возникает потенциальная составляющая спектра.

Что касается энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t)$, то в трёхмерном случае кластеризация в изотропном турбулентном поле скоростей будет происходить только при выполнении условия $D^{\mathrm{p}} > D^{\mathrm{s}}$, где величина D^{s} зависит от соленоидальной составляющей поля скорости. Так, для акустической турбулентности кластеризация осуществляется с вероятностью единица. В случае плоскопараллельного потока жидкости кластеризация энергии магнитного поля в плоскости поля скоростей также происходит при выполнении условия $D^{\mathrm{p}} > D^{\mathrm{s}}$, а кластеризация энергии магнитного поля, связанной с компонентой магнитного поля, перпендикулярной плоскости поля скоростей, осуществляется всегда при наличии потенциальной составляющей поля скорости.

Возникает важный вопрос: как оценить характерные масштабы самих кластеров и расстояний между различными кластерами? Ясно только, что их невозможно описать многоточечными распределениями вероятностей, так как любые средние будут определяться пологими "хвостами" этих распределений. Оценить эти величины можно лишь из одноточечных статистических функционалов (интегральных, описывающих динамику системы в целом) типа длины контуров, числа контуров и т.п., связанных с производными случайных полей. В связи с этим несомненный интерес представляет случайное логнормальное поле $f(\mathbf{r}, t; \alpha)$ (5), для которого можно как аналитически вычислить все совместные статистические характеристики поля и его пространственных производных, так и провести численное моделирование.

Автор признателен К.В. Кошелю и О.Г. Чхетиани за помощь в подготовке иллюстративного материала, а также благодарен Л.А. Пастуру за полезное обсуждение вопроса перемежаемости случайных процессов.

Работа проводилась при поддержке РФФИ (проект № 10-05-0006) и ГК № 3/ГФ/Н-08.

Список литературы

1. Кляцкин В И, Саичев А И *УФН* **162** (3) 161 (1992) [Klyatskin V I, Saichev A I *Phys. Usp.* **35** 231 (1992)]
2. Кляцкин В И *Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения* (М.: Физматлит, 2001) [Klyatskin V I *Stochastic Equations through the Eye of the Physicist: Basic Concepts, Exact Results and Asymptotic Approximations* (Amsterdam: Elsevier, 2005)]
3. Кляцкин В И *Динамика стохастических систем* (М.: Физматлит, 2002) [Klyatskin V I *Dynamics of Stochastic Systems* (Amsterdam: Elsevier, 2005)]
4. Кляцкин В И *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках* (М.: Физматлит, 2005)
5. Кляцкин В И *Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике* Т. 1, 2 (М.: Физматлит, 2008); http://klyatskinvalery.narod.ru/E-books/E-books-R.htm
6. Klyatskin V *Lectures on Dynamics of Stochastic Systems* (Boston, MA: Elsevier, 2010)
7. Зельдович Я Б и др. *ЖЭТФ* **89** 2061 (1985) [Zel'dovich Ya B et al. *Sov. Phys. JETP* **62** 1188 (1985)]
8. Зельдович Я Б и др. *УФН* **152** 3 (1987) [Zel'dovich Ya B et al. *Sov. Phys. Usp.* **30** 353 (1987)]
9. Gitterman M *The Noisy Oscillator: the First Hundred Years, from Einstein until Now* (Hackensack, NJ: World Scientific, 2005)
10. Gitterman M, Klyatskin V I *Phys. Rev. E* **81** 051139 (2010)
11. Gitterman M, Klyatskin V I *Virt. J. Nanoscale Sci. Technol.* **21** (24) (2010)
12. Gitterman M, Klyatskin V I *Virt. J. Biol. Phys. Res.* **19** (11) (2010)
13. Anderson P W *Phys. Rev.* **109** 1492 (1958)
14. Лифшиц И М, Гредескул С А, Пастур Л А *Введение в теорию неупорядоченных систем* (М.: Наука, 1982) [Lifshits I M, Gredeskul S A, Pastur L A *Introduction to the Theory of Disordered Solids* (New York: Wiley, 1988)]
15. Кляцкин В И, Саичев А И *ЖЭТФ* **111** 1297 (1997) [Klyatskin V I, Saichev A I *JETP* **84** 716 (1997)]
16. Михайлов А С, Упоров И В *УФН* **144** 79 (1984) [Mikhailov A S, Uporov I V *Sov. Phys. Usp.* **27** 695 (1984)]
17. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
18. Кляцкин В И *УФН* **174** 177 (2004) [Klyatskin V I *Phys. Usp.* **47** 169 (2004)]
19. Вайнштейн С И, Зельдович Я Б *УФН* **106** 431 (1972) [Vainshtein S I, Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. Usp.* **15** 159 (1972)]
20. Parker E N *Cosmical Magnetic Fields* (Oxford: Clarendon Press, 1979) [Паркер Е *Космические магнитные поля* Ч. 2 (М.: Мир, 1982)]
21. Moffatt H K *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978) [Моффат Г К *Генерация магнитного поля в электропроводящих жидкостях* (М.: Мир, 1980)]
22. Krause F, Rädler K-H *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (New York: Pergamon Press, 1980) [Краузе Ф, Рэдлер К Х *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо* (М.: Мир, 1984)]
23. Вайнштейн С И, Зельдович Я Б, Рузмайкин А А *Турбулентное динамо в астрофизике* (М.: Наука, 1980)
24. Zeldovich Ya B, Ruzmaikin A A, Sokoloff D D *Magnetic Fields in Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1983); *The Almighty Chance* (Singapore: World Scientific, 1990)
25. Childress S, Gilbert A D *Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo* (Berlin: Springer, 1995)
26. Rüdiger G, Hollerbach K *The Magnetic Universe: Geophysical and Astrophysical Dynamo Theory* (Weinheim: Wiley-VCH, 2004)
27. Balescu R *Aspects of Anomalous Transport in Plasmas* (Bristol: IOP Publ., 2005)
28. Vishniac E T, Lazarian A, Cho J "Problems and progress in astrophysical dynamos", in *Turbulence and Magnetic Fields in Astrophysics* (Lecture Notes in Physics, Vol. 614, Eds E Falgarone, T Passot) (Berlin: Springer, 2003)
29. Будаев В П *Физика плазмы* **34** 867 (2008) [Budaev V P *Plasma Phys. Rep.* **34** 799 (2008)]
30. van Ballegooijen A A et al. *Astrophys. J.* **509** 435 (1998)
31. Berrilli F et al. *Astrophys. J.* **632** 677 (2005)
32. Кляцкин В И *УФН* **173** 689 (2003) [Klyatskin V I *Phys. Usp.* **46** 667 (2003)]
33. Кляцкин В И *УФН* **178** 419 (2008) [Klyatskin V I *Phys. Usp.* **51** 395 (2008)]
34. Кляцкин В И *УФН* **179** 547 (2009) [Klyatskin V I *Phys. Usp.* **52** 514 (2009)]

35. Кляцкин В И, Кошель К В *УФН* **170** 771 (2000) [Klyatskin V I, Koshel' K V *Phys. Usp.* **43** 717 (2000)]
36. Кляцкин В И, Чхетиани О Г *ЖЭТФ* **136** 400 (2009) [Klyatskin V I, Chkhetiani O G *JETP* **109** 345 (2009)]
37. Кляцкин В И *ЖЭТФ* **136** 1194 (2009) [Klyatskin V I *JETP* **109** 1032 (2009)]
38. Batchelor G K *Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge: Univ. Press, 1953) [Бэтчелор Дж *Теория однородной турбулентности* (М.: ИЛ, 1955)]
39. Balkovsky E, Falkovich G, Fouxon A *Phys. Rev. Lett.* **86** 2790 (2001); http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9912027
40. Гурвич А С, Каллистратова М А, Мартвель Ф Е *Изв. вузов. Радиофиз.* **20** 1020 (1977) [Gurvich A S, Kallistratova M A, Martvel' F É *Radiophys. Quantum Electron.* **20** 705 (1977)]
41. Kravtsov Yu A *Rep. Prog. Phys.* **55** 39 (1992)
42. Flatté S M, Wang G Y, Martin J *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 2363 (1993)
43. Flatté S M, Bracher C, Wang G Y *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 2080 (1994)
44. Куркин А А, Пелиновский Е Н *Волны-убийцы: факты, теория и моделирование* (Н. Новгород: НГТУ, 2004)
45. Kharif C, Pelinovsky E, Slunyaev A *Rogue Waves in the Ocean* (New York: Springer, 2009)
46. Дьяченко А И, Захаров В Е *Письма в ЖЭТФ* **81** 318 (2005) [Dyachenko A I, Zakharov V E *JETP Lett.* **81** 255 (2005)]
47. Dyachenko A I, Zakharov V E *Письма в ЖЭТФ* **88** 356 (2008) [*JETP Lett.* **88** 307 (2008)]
48. Shukla P K et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 094501 (2006)
49. Ruban V P, arXiv:0904.2853
50. Казанцев А П *ЖЭТФ* **53** 1806 (1967) [Kazantsev A P *Sov. Phys. JETP* **26** 1031 (1968)]
51. Казанцев А П, Рузмайкин А А, Соколов Д Д *ЖЭТФ* **88** 487 (1985) [Kazantsev A P, Ruzmaikin A A, Sokolov D D *Sov. Phys. JETP* **61** 285 (1985)]
52. Schekochihin A A et al. *Astrophys. J.* **612** 276 (2004)
53. Chertkov M et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 4065 (1999)
54. Силантьев Н А *Письма в ЖЭТФ* **72** 60 (2000) [Silant'ev N A *JETP Lett.* **72** 42 (2000)]
55. Силантьев Н А *ЖЭТФ* **111** 871 (1997) [Silant'ev N A *JETP* **84** 479 (1997)]
56. Силантьев Н А *ЖЭТФ* **114** 930 (1998) [Silant'ev N A *JETP* **87** 505 (1998)]
57. Силантьев Н А *ЖЭТФ* **116** 85 (1999) [Silant'ev N A *JETP* **89** 45 (1999)]
58. Силантьев Н А *ЖЭТФ* **122** 1107 (2002) [Silant'ev N A *JETP* **95** 957 (2002)]
59. Силантьев Н А *ЖЭТФ* **125** 831 (2004) [Silant'ev N A *JETP* **98** 728 (2004)]
60. Kogan V R, Kolokolov I V, Lebedev V V *J. Phys. A Math. Theor.* **43** 182001 (2010)

Integral characteristics: a key to understanding structure formation in stochastic dynamic systems

V.I. Klyatskin
A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per. 3, 119017 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-499) 269-12 83. E-mail: klyatskin@yandex.ru

Some general problems concerning the stochastic approach are discussed in relation to parametrically excited stochastic dynamic systems described by partial differential equations. Such problems arise in hydrodynamics, magnetohydrodynamics, astro-, plasma and radio physics and share the feature that their solutions (i.e., moment, correlation and spectral functions, etc.) have all their statistical characteristics increasing exponentially with time, whereas some solution implementations lead to the formation of random structures with probability unity as a result of clusterization. It is the goal of this paper to use the ideas of stochastic topography to find conditions under which such structures arise.

PACS numbers: **05.40.–a**, **05.45.–a**, **46.65.+g**, **47.27.–i** DOI: 10.3367/UFNr.0181.201105a.0457

Bibliography — 60 references *Received 12 August 2010, revised 1 November 2010*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (5) 457–482 (2011) *Physics–Uspekhi* **54** (5) (2011)