

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Задача Кеплера и столкновения для тел с отрицательными массами

А.А. Шацкий, И.Д. Новиков, Н.С. Кардашев

Рассматриваются механические процессы взаимодействия систем, содержащих тела с отрицательными массами. Показано, что законы механики для таких систем не ведут к противоречиям.

PACS numbers: 04.20.-q, 45.05.+x, 45.50.Pk

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201104e.0399

Содержание

1. Введение (399).
 2. Классическая задача Кеплера двух тел (399).
 3. Классификация взаимодействия с отрицательными массами (401).
 4. Эквивалентность эллиптических траекторий для тел, движущихся в поле масс разного знака (401).
 5. Ускорение обычных тел телами с отрицательной массой (402).
 6. Столкновение двух тел (403).
 7. Заключение (403).
- Список литературы (403).

1. Введение

В последнее время увеличилось число публикаций, посвящённых фантомной материи и её приложениям [1–9]. В связи с этим возникло много недоразумений, называемых иногда парадоксами, связанных с неадекватной интерпретацией свойств такой материи даже в приближении ньютоновской механики. Один из таких парадоксов — появление модели вечного двигателя третьего рода (см. по этому вопросу, например, работы [10, 11]). Этот парадокс связан с гипотетической возможностью неограниченного ускорения двух гравитационно взаимодействующих тел, одно из которых состоит из фантомной материи и имеет отрицательную массу.

А.А. Шацкий, Н.С. Кардашев. Астрокосмический центр, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 333-33-66, (495) 333-21-11
E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru, nkardash@asc.rssi.ru

И.Д. Новиков. Астрокосмический центр, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, ул. Профсоюзная 84/32, 117997 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 333-15-55. E-mail: novikov@asc.rssi.ru
The Niels Bohr International Academy, Niels Bohr Institute, Blegdamsvej 17, DK-2100 Copenhagen, Denmark

Статья поступила 5 июля 2010 г.,
после доработки 31 января 2011 г.

Ниже мы проанализируем механику систем, включающих в себя тела с отрицательной массой. Настоящая статья имеет цель устранить возникающие по этим вопросам противоречия и показать, что, по крайней мере, ньютоновская механика фантомной материи вполне согласуется со здравым смыслом и законами физики. Указываются возможные приложения рассматриваемых вопросов.

Для положительных масс все расчёты выполнены в [12]. Здесь мы проведём основные расчёты с учётом того, что массы могут быть отрицательными.

В настоящей статье, так же как и в классической задаче Кеплера, согласно принципу эквивалентности инертная и гравитационная массы предполагаются равными.

2. Классическая задача Кеплера двух тел

В классической задаче Кеплера законы движения каждого из двух взаимогравитирующих тел с массами m_1 и m_2 определяются в системе центра масс (СЦМ) радиусами-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 :

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}, \quad m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор от первого тела ко второму, а начало координат находится в центре инерции.

Будем считать, что тела гравитационно взаимодействуют между собой с энергией взаимодействия $U(r)$:

$$U(r) \equiv -\frac{Gm_1 m_2}{r}, \quad (2)$$

здесь G — гравитационная постоянная.

Полное решение определяется четырьмя параметрами (см. [12]):

- 1) приведённой массой $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$;
- 2) величиной α гравитационного взаимодействия этих тел, $\alpha \equiv Gm_1 m_2$;
- 3) сохраняющимся угловым моментом количества движения этих тел

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (\mathbf{p} \equiv \mu \dot{\mathbf{r}}); \quad (3)$$

4) полной сохраняющейся энергией этих тел

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}. \tag{4}$$

Параметр энергии E определяют тип траектории: эллипс (при $E < 0$) или гипербола (при $E > 0$), а величина L (вместе с E) определяет степень эксцентриситета траектории e .

С методической точки зрения необходимо проявлять осторожность, чтобы избежать ошибок, связанных с возможным внесением под знак радикала (или вынесением из-под знака радикала) отрицательных величин (которые в классическом случае являются положительными).

Эффективный потенциал имеет вид

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}. \tag{5}$$

Поскольку результаты не зависят от знака углового момента L , то далее для удобства величину $l \equiv L/\mu$ везде будем считать положительной.

Интеграл траектории имеет вид

$$\varphi = \int \frac{l}{r^2} \left[\frac{2E}{\mu} + \frac{2\alpha}{\mu r} - \frac{l^2}{r^2} \right]^{-1/2} dr. \tag{6}$$

Обозначим квадрат эксцентриситета как

$$e^2 \equiv 1 + \frac{2E\mu l^2}{\alpha^2}. \tag{7}$$

Различные случаи движения показаны на рис. 1–3. Обратим внимание на то, что при $m_1 + m_2 < 0$ эксцентриситет может быть только больше единицы ($e^2 > 1$) (см. (4)). Этот случай соответствует рис. 3а, б.

Обозначая $\xi \equiv l/r > 0$, переписываем (6) в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= - \int \frac{d\xi}{\sqrt{2E/\mu + 2\alpha\xi/(\mu l) - \xi^2}} = \\ &= - \int \left[\left(\frac{e\alpha}{\mu l} \right)^2 - \left(\xi - \frac{\alpha}{\mu l} \right)^2 \right]^{-1/2} d\xi. \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда видно, что решение имеет область значений только при $e^2 > 0$.

Уравнение траектории получается в виде

$$\varphi(\xi) - \text{const} = -\arcsin \left[\frac{\xi - \alpha/(\mu l)}{|e\alpha/(\mu l)|} \right], \tag{9}$$

или, обозначая удельный радиус как $r_0 \equiv l^2|\mu/\alpha|$, получаем

$$\frac{r_0}{r} = \text{sign} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) - e \sin \varphi = \text{sign}(m_1 + m_2) - e \sin \varphi. \tag{10}$$

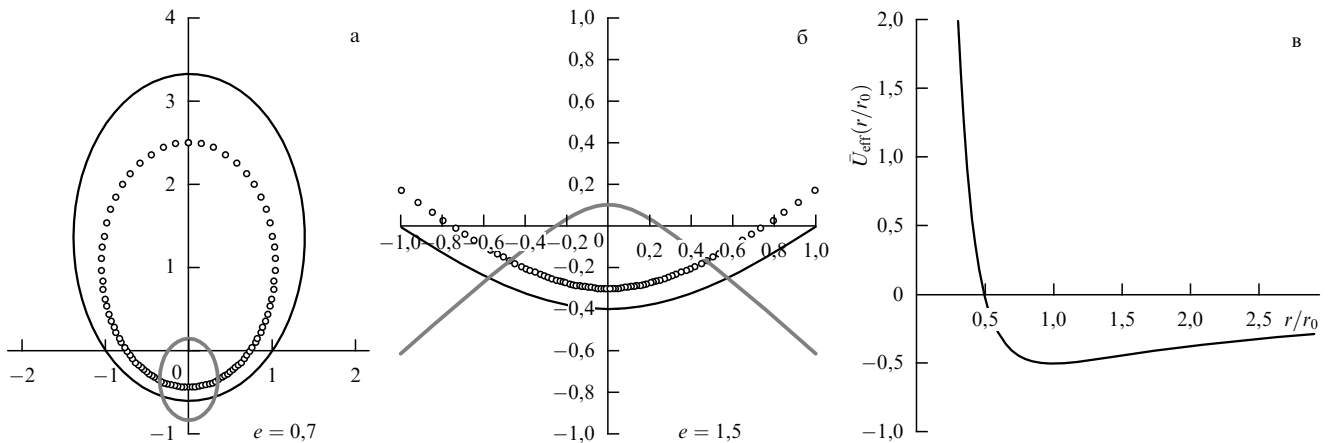


Рис. 1. Траектории (а, б) приведённой массы $\mu > 0$ (тонкая линия), массы $m_1 = 3$ (жирная линия) и $m_2 = 1$ (кружки); (в) график $\tilde{U}_{\text{eff}}(r/r_0)$.

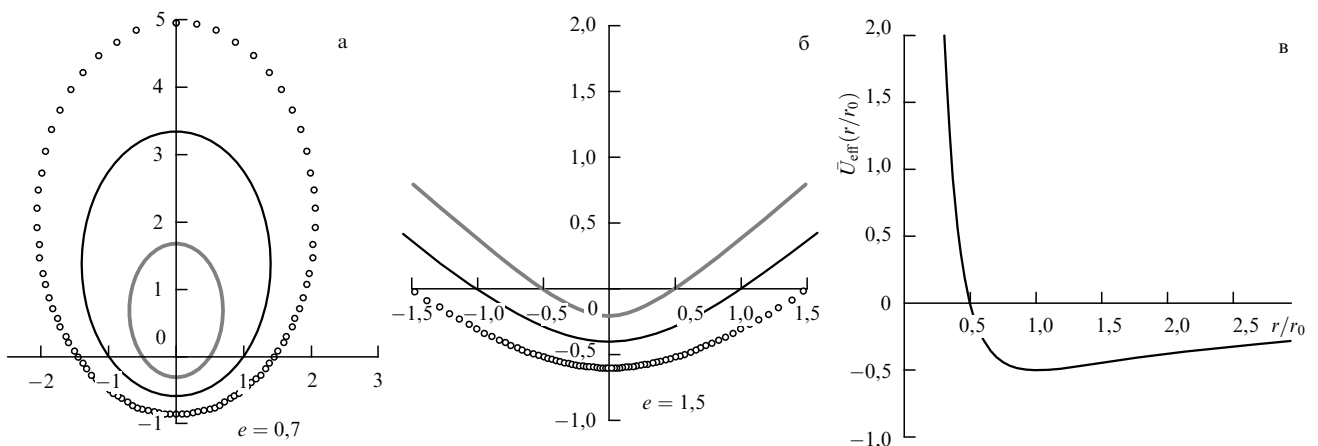


Рис. 2. Траектории (а, б) приведённой массы $\mu < 0$ (тонкая линия), массы $m_1 = 3$ (жирная линия) и $m_2 = -1$ (кружки); (в) график $\tilde{U}_{\text{eff}}(r/r_0)$.

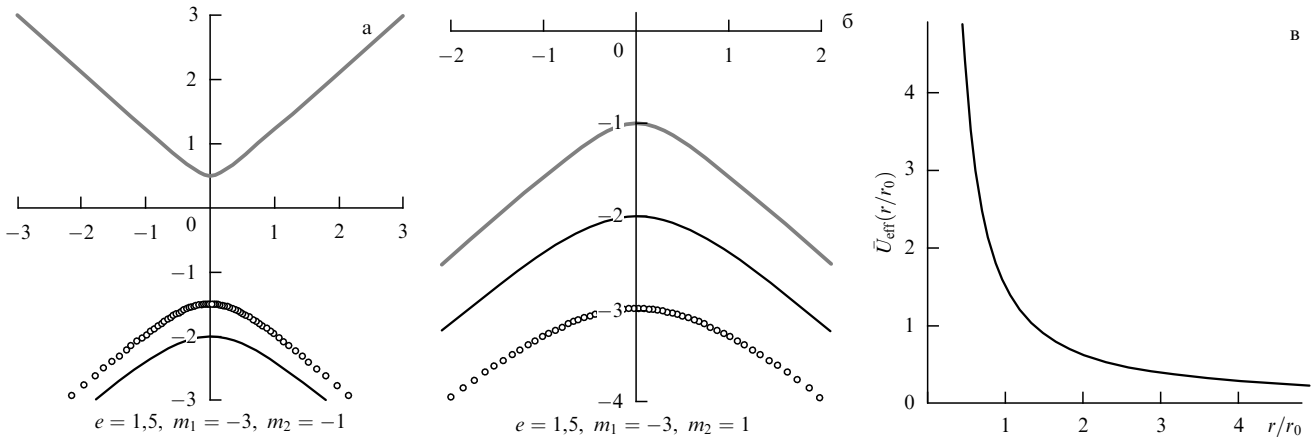


Рис. 3. Траектории (а, б) массы m_1 — жирные линии, массы m_2 — кружки, приведённой массы μ — тонкие линии; (в) функция $\tilde{U}_{\text{eff}}(r/r_0)$ для этих случаев.

Отсюда также видно, что при $m_1 + m_2 < 0$ должно быть $e > 1$.

Вместо (5) введём нормированный эффективный потенциал \tilde{U}_{eff} :

$$\tilde{U}_{\text{eff}}(r) = \frac{r_0^2}{2r^2} - \text{sign}(m_1 + m_2) \frac{r_0}{r}, \quad U_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{\alpha^2}{\mu l^2} \tilde{U}_{\text{eff}}(r). \quad (11)$$

При положительной сумме масс безразмерный эффективный потенциал \tilde{U}_{eff} имеет локальный минимум и траектории могут являться эллипсами, если $\tilde{U}_{\text{eff}} < 0$. Это соответствует устойчивости орбит этих масс, несмотря на то что эффективный потенциал U_{eff} при $\mu < 0$ имеет локальный максимум (и не имеет минимума). Это свойство является характерным для отрицательной приведённой массы.

3. Классификация взаимодействия с отрицательными массами

Очевидно, что, в отличие от классического случая (см. рис. 1), при наличии отрицательных масс может быть только три разных случая.

1. Приведённая масса отрицательна, $\mu < 0$, и $\alpha < 0$ — массы имеют разные знаки и их сумма положительна (см. рис. 2). Оба тела лежат на одном радиальном луче, по одну сторону от центра инерции (находящегося в начале координат). В предельном случае $m_2 \rightarrow -m_1$ тела удалены от центра инерции на бесконечность. Возможны как финитные ($e < 1$), так и инфинитные ($e > 1$) траектории.

2. Приведённая масса отрицательна, $\mu < 0$, и $\alpha > 0$ — обе массы отрицательны (рис. 3а). Этот случай соответствует взаимодействию двух отрицательных масс и инфинитным движениям с $e > 1$.

3. Приведённая масса положительна, $\mu > 0$, и $\alpha < 0$ — массы имеют разные знаки и их сумма отрицательна (рис. 3б). Этот случай аналогичен динамике двух одноимённых зарядов в электродинамике и соответствует инфинитным движениям с $e > 1$.

Согласно формуле (9), первый случай (см. рис. 2) эквивалентен классической задаче Кеплера в поле притяжения и поэтому сводится к классическому (см. рис. 1). Он соответствует $m_1 > 0$, $m_2 < 0$ и $m_1 > |m_2|$. В этом

случае вариант с эллиптической орбитой (рис. 2а) является единственным в приведённой классификации (с отрицательными массами).

4. Эквивалентность эллиптических траекторий для тел, движущихся в поле масс разного знака

Рассмотрим две пары тел: (m, m^+) и (m, m^-) . Причём полагаем $e < 1$, $m > 0$, $m^+ > 0$, $m^- < 0$ и $m + m^- > 0$. Эти случаи изображены на рис. 1а и 2а.

Зададимся вопросом: при каких условиях эллиптическая траектория массы m в первом случае (взаимодействие m с m^+) совпадёт с траекторией массы m во втором случае (взаимодействие m с m^-)?

Очевидно, что это возможно при одинаковых эксцентриситетах e и параметрах r_{0m} (соответствующие массе m радиусы r_0). Согласно (1) и (7) для этого необходимо выполнение двух уравнений:

$$\frac{2E^+ \mu^+ (l^+)^2}{(\alpha^+)^2} = -\frac{2E^- \mu^- (l^-)^2}{(\alpha^-)^2} \iff \frac{E^+ (l^+)^2}{m^+ (m + m^+)} = -\frac{E^- (l^-)^2}{m^- (m + m^-)}, \quad (12)$$

$$\frac{m^+ r_0^+}{m + m^+} = -\frac{m^- r_0^-}{m + m^-} \iff \frac{m^+ (l^+)^2}{(m + m^+)^2} = -\frac{m^- (l^-)^2}{(m + m^-)^2}, \quad (13)$$

здесь индексами "+" и "-" мы обозначаем соответствующие случаи. В дополнении к (12), (13) мы должны положить равными угловые моменты массы m на траекториях: $L_m^+ = L_m^-$ (или $l_m^+ = l_m^-$). Тогда, принимая во внимание, что в СЦМ $p_m^+ + p_m^+ = 0$, и соотношения (1), получаем

$$L^+ = \mu^+ l^+ = r_m^+ p_m^+ + r_{m^+}^+ p_{m^+}^+ = p_m^+ (r_m^+ - r_{m^+}^+) = m l_m^+ \left(1 + \frac{m}{m^+} \right), \quad (14)$$

$$l^+ = l_m^+ \left(\frac{m + m^+}{m^+} \right)^2, \quad l^- = l_m^- \left(\frac{m + m^-}{m^-} \right)^2. \quad (15)$$

Отсюда, учитывая (12), (13), находим необходимое условие в виде

$$\frac{(m+m^+)^2}{(m^+)^3} = -\frac{(m+m^-)^2}{(m^-)^3} \quad (16)$$

или

$$\left(\frac{E^+}{E^-}\right)^2 = -\frac{m^+}{m^-}. \quad (17)$$

Предположим, что мы хотим имитировать движение массы m вокруг массы m^+ движением вокруг массы m^- . Будем считать, что параметры, связанные с положительной массой, нам известны из наблюдений, а масса m^- невидима. Выразим через эти параметры все параметры, связанные с отрицательной массой.

Обозначим

$$x \equiv \frac{m^+}{m}, \quad y \equiv \frac{m^-}{m}. \quad (18)$$

Из (16) получим

$$F(x, y) \equiv \frac{(1+x)^2}{x^3} y^3 + y^2 + 2y + 1 = 0. \quad (19)$$

Корни y уравнения (19) при заданном x соответствуют ответу на поставленный вопрос.

Найдём приближённое решение уравнения (19) при больших x . Элементарное применение метода теории возмущений для корней уравнения (19) даёт:

$$\begin{aligned} x \gg 1, \quad y_1 &\approx -\frac{x}{(1+x)^{2/3}}, \quad y_2 \approx -1 - \frac{1+x}{x^{3/2}}, \\ y_3 &\approx -1 + \frac{1+x}{x^{3/2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Первые два корня не удовлетворяют условию эллиптичности орбиты: $m+m^- > 0$. Третий корень, y_3 , отвечает необходимым условиям.

Графические решения уравнения (19) для некоторых значений x представлены на рис. 4. Отсюда, зная величину m^- , с помощью выражений (13) и (17) можно получить выражения для l^- и E^- .

Однако все эти рассуждения могут быть верны лишь в том случае, если мы не видим реальных траекторий второй массы. Также следует помнить, что разные траектории для всех возможных масс m соответствуют разным массам m^- .

Указанные соображения могут быть интересны для астрофизики кротовых нор или их остатков [13], поскольку входы в кротовые норы могут иметь отрицательные массы. Возможно, аналогичные идеи могут быть использованы для анализа природы тёмной материи.

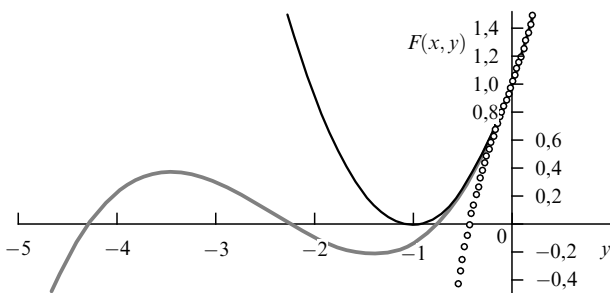


Рис. 4. Графики $F(x, y)$ при $x = 100$ (тонкая кривая), $x = 9$ (жирная кривая) и $x = 1$ (кружки).

5. Ускорение обычных тел телами с отрицательной массой

Рассчитаем максимально возможное изменение скорости тела, обусловленное его взаимодействием с другим телом. Рассмотрим случай инфинитных траекторий ($e > 1$), поскольку случай финитных (эллиптических) траекторий в ньютоновской механике не может дать бесконечных значений (как будет видно далее). Очевидно, что в этом случае разница между скоростями тела достигает максимального значения между точкой перигелия и бесконечно удалённой точкой. Обозначим соответствующие квадраты импульсов тела в этих точках как p_p^2 и p_∞^2 .

Согласно (4), (7) и (10) имеем

$$2\mu E = p_\infty^2 = p_p^2 - \frac{2\mu\alpha}{r_p} = (e^2 - 1) \frac{\alpha^2}{l^2}, \quad (21)$$

$$\frac{r_0}{r_p} = \text{sign}(m_1 + m_2) + e, \quad (22)$$

$$r_0 = \frac{l^2\mu}{\alpha} \text{sign}(m_1 + m_2). \quad (23)$$

Отсюда получаем необходимое выражение:

$$\frac{p_p^2}{p_\infty^2} = \frac{e + \text{sign}(m_1 + m_2)}{e - \text{sign}(m_1 + m_2)}. \quad (24)$$

Случай $\text{sign}(m_1 + m_2) = 1$ соответствует классическому (замедление при уходе тела на бесконечность), и поэтому его рассмотрение не даёт ничего нового.

Случай $\text{sign}(m_1 + m_2) = -1$ соответствует ускорению при уходе тела на бесконечность. В этом случае большим ускорениям соответствует $1 < e \approx 1$. Согласно (21) и (24) при $e \rightarrow 1$ получаем

$$p_\infty^2 \approx 4 \left(\frac{e-1}{e+1} \right) \frac{\alpha^2}{l^2} = 4 \frac{p_p^2 \alpha^2}{p_\infty^2 l^2}. \quad (25)$$

Мы рассматриваем здесь нерелятивистский случай $v \ll c$ (здесь c — скорость света). Обозначая $r_g \equiv \equiv 2G|m_1 + m_2|/c^2$, получаем $4\alpha^2/(\mu^2 l^2) = r_g^2 c^4/(r_p^2 v_p^2)$, откуда для существенно нерелятивистских скоростей c помощью (25) находим

$$\frac{v_p^2}{c^2} \ll \frac{v_\infty^2}{c^2} \approx \frac{r_g}{r_p} \ll 1, \quad \frac{v_\infty^2}{v_p^2} \approx \frac{c^2 r_g}{v_p^2 r_p} \ll \frac{c^2}{v_p^2}. \quad (26)$$

Если считать перигелий начальной точкой траектории, а v_p — возмущением к начальному состоянию покоя, то массы будут ускоряться не бесконечно, а до некоторого предела, определяемого этим возмущением по формуле (26).

Неравенства (26) ограничивают степень возможного ускорения в ньютоновской механике с отрицательными массами.

Выше мы нигде не касались особого случая: $m_1 = -m_2$, $\mu \rightarrow \pm\infty$. Этот случай является вырожденным и должен рассматриваться как один из пределов:

$$m_1 + m_2 > 0, \quad m_1 \rightarrow -m_2$$

или

$$m_1 + m_2 < 0, \quad m_1 \rightarrow -m_2.$$

В обоих случаях, как это видно из (26), неограниченно ускорение получить невозможно (в принципе), но даже для достижения максимальных скоростей v_∞ необходимо не только совпадение масс (по модулю), но и сверхтонкая подгонка начальных условий. Эти требования сводят вероятность даже такой (некритичной) ситуации практически к нулю.

6. Столкновение двух тел

Рассмотрим теперь столкновение двух масс с произвольными (с учётом знака) массами. Эта задача решена в общем виде в [12]. Итоговый результат в случае упругого соударения имеет вид (в системе центра масс):

$$v'_1 = \frac{m_2|v_1 - v_2|}{m_1 + m_2} \frac{v'_1}{v_1}, \quad v'_2 = \frac{-m_1|v_1 - v_2|}{m_1 + m_2} \frac{v'_1}{v_1}. \quad (27)$$

Здесь индексы "1" и "2" означают номера частиц, а величины, помеченные штрихом, соответствуют моменту после столкновения.

В лабораторной системе, обозначая соответствующие скорости как V , получаем аналог (27):

$$V'_1 = \frac{m_2|V_1 - V_2|}{m_1 + m_2} \frac{v'_1}{v_1} + \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2},$$

$$V'_2 = \frac{-m_1|V_1 - V_2|}{m_1 + m_2} \frac{v'_1}{v_1} + \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}. \quad (28)$$

Полагая (для ясности) $V_1 = 1$, $m_2 = 1$, $V_2 = 0$, выражаем зависимости $V'_1(m_1)$ и $V'_2(m_1)$ для случая лобового удара¹ (рис. 5).

Как и в случае задачи Кеплера, никаких противоречий не обнаруживается.

7. Заключение

Проведённое в данной статье исследование показывает, что в ньютоновской механике взаимодействий двух тел, в том числе тел с отрицательными массами, никаких противоречий или парадоксов не существует.

Рассматриваемые идеи представляют интерес для астрофизики кротовых нор или их остатков, а также для

¹Считая для ясности направление v_1 равным $+1$, получаем $v'_1/v_1 = -1$.

The Kepler problem and collisions of negative masses

A.A. Shatskiy, N.S. Kardashev

Astro Space Center, P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 333-3366, (7-495) 333-2111
E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru, nkardash@asc.rssi.ru

I.D. Novikov

Astro Space Center, P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Profsoyuznaya 84/32, 117997 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 333-1555. E-mail: novikov@asc.rssi.ru
The Niels Bohr International Academy, Niels Bohr Institute,
Blegdamsvej 17, DK-2100 Copenhagen, Denmark

Mechanical interaction processes between systems containing negative mass bodies are considered, showing that laws of physics lead to no inconsistencies when applied to such systems.

PACS numbers: 04.20. -q, 45.05. +x, 45.50.Pk
Bibliography — 13 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk 181 (4) 399–403 (2011)

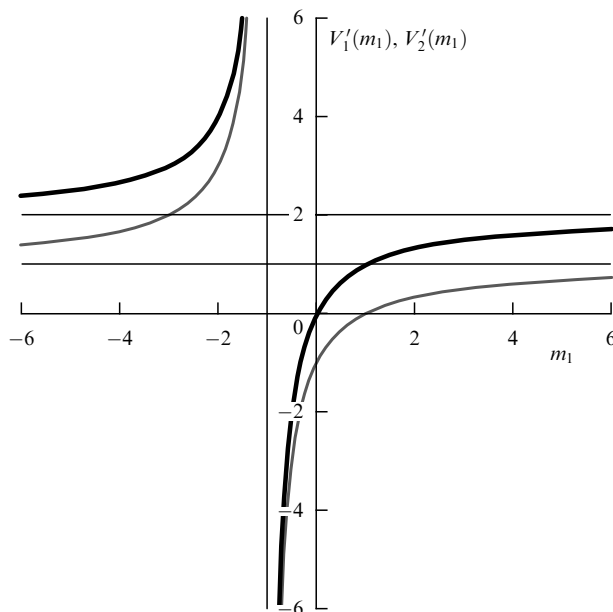


Рис. 5. Графики $V'_1(m_1)$ (тонкая кривая) и $V'_2(m_1)$ (жирная кривая).

возможных приложений к анализу физики тёмной материи.

Список литературы

1. Bondi H *Rev. Mod. Phys.* **29** 423 (1957)
2. Bonnor W B *Gen. Relat. Gravit.* **21** 1143 (1989)
3. Krasnikov S *Phys. Rev. D* **62** 084028 (2000)
4. Бабичев Е О, Докучаев В И, Ерошенко Ю Н *ЖЭТФ* **127** 597 (2005) [Babichev E O, Dokuchaev V I, Eroshenko Yu N *JETP* **100** 528 (2005)]
5. Sushkov S *Phys. Rev. D* **71** 043520 (2005)
6. Bronnikov K A, Starobinsky A A *Mod. Phys. Lett. A* **24** 1559 (2009); arXiv:0903.5173
7. Doroshkevich A, Hansen J, Novikov I, Shatskiy A *Int. J. Mod. Phys. D* **18** 1665 (2009)
8. Шацкий А А, Дорошкевич А Г, Новиков Д И, Новиков И Д *ЖЭТФ* **137** 268 (2010) [Shatskiy A A, Doroshkevich A G, Novikov D I, Novikov I D *JETP* **110** 235 (2010)]
9. Doroshkevich A et al. *Phys. Rev. D* **81** 124011 (2010)
10. Ivanov P *Phys. Lett. B* **680** 212 (2009)
11. Ivanov P, arXiv:0909.0190
12. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1973) [Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1979)]
13. Kardashev N S, Novikov I D, Shatskiy A A *Int. J. Mod. Phys. D* **16** 909 (2007)

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201104e.0399

Received 5 July 2010, revised 31 January 2011
Physics – Uspekhi **54** (4) (2011)