*Апрель 2011 г.* **Том 181, № 4**

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**

# Нерелятивистская квантовая теория вынужденных черенковского излучения и комптоновского рассеяния в плазме

М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе

*Обсуждена роль квантовых эффектов в теории ленгмюровских волн в бесстолкновительной плазме. Показано, что квантовые эффекты действительно могут быть существенными при резонансных взаимодействиях потоков квантовых частиц с плазменными колебаниями и при резонансном рассеянии электромагнитных волн в плазме.*

PACS numbers: **41.60.–m**, **52.35.–g**, 52.40.Mj DOI: 10.3367/UFNr.0181.201104d.0393

## Содержание



## 1. Введение. Высокочастотные волны в квантовой плазме

Применимость кинетических уравнений с самосогласованным полем (уравнение Власова — в классическом случае, уравнение Вигнера — в квантовом) для описания бесстолкновительной плазмы была обоснована Н.Н. Боголюбовым в его знаменитом труде [1]. Условие применимости в случае электронного газа сводится к виду

$$e^2 n^{1/3} \ll \varepsilon_0 \,, \tag{1.1}$$

здесь $e$ — заряд электрона, $n$ — концентрация электронов, $\varepsilon_0 = mV_0^2/2$ — средняя энергия их хаотического движения, $m$ — масса электрона, $V_0$ — средняя скорость электронов (для невырожденного максвелловского газа $V_0 = V_T$, где $V_T = \sqrt{k_\mathrm{B}T/m}$ — тепловая скорость; при наличии вырождения $V_0 = V_\mathrm{F}$, где $V_\mathrm{F} = (3\pi^2)^{1/3}\hbar n^{1/3}/m$ — скорость Ферми; $T$ — температура). Для дальнейшего условие (1.1) удобно переписать с использованием газового параметра $\eta$, а именно:

$$\eta = \frac{\hbar\omega_\mathrm{L}}{\varepsilon_0} \leqslant \frac{\hbar\omega_\mathrm{L}}{\varepsilon_\mathrm{F}} \approx \left(\frac{e^2}{\langle r\rangle\,\varepsilon_\mathrm{F}}\right)^{1/2} \ll 1 \,, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon_\mathrm{F} = mV_\mathrm{F}^2/2$ — энергия Ферми, $\omega_\mathrm{L} = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ — электронная ленгмюровская частота, $\langle r\rangle = n^{-1/3}$ — среднее расстояние между электронами. Малость параметра (1.2) обязательно должна учитываться при рассмотрении квантовых эффектов в плазме.

Рассматриваемые в настоящей статье электромагнитные процессы определяются высокочастотным диэлектрическим откликом плазмы на электромагнитное поле. Поэтому выпишем здесь известные выражения для поперечной и продольной диэлектрических проницаемостей электронной квантовой плазмы [2] (см. также [3]):

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mathrm{tr}(\omega,\mathbf{k}) &= 1 - \frac{\omega_\mathrm{L}^2}{\omega^2}\left(1 + \int \frac{[\mathbf{kv}]^2 f(\mathbf{p})}{(\omega-\mathbf{kv})^2 - \omega_\hbar^2}\,\mathrm{d}\mathbf{p}\right), \\ \varepsilon^\mathrm{l}(\omega,\mathbf{k}) &= 1 - \omega_\mathrm{L}^2 \int \frac{f(\mathbf{p})}{(\omega-\mathbf{kv})^2 - \omega_\hbar^2}\,\mathrm{d}\mathbf{p}\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $f(\mathbf{p})$ — функция распределения электронов плазмы по импульсам $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $\omega$ и $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор электромагнитных возмущений в плазме, $\omega_\hbar$ — квантовая частота, определяющая одночастичный спектр колебаний электрона (спектр волны де Бройля электрона)[1], имеющего импульс $\hbar\mathbf{k}$:

$$\omega_\hbar = \frac{\hbar k^2}{2m}\,. \tag{1.4}$$

В невырожденной равновесной (максвелловской) плазме $f(\mathbf{p})$ — функция распределения Максвелла, а в вырожденной плазме — распределение Ферми. В любом случае

**М.В. Кузелев.** Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Воробьевы горы, 119992 Москва, Российская Федерация
Тел./Факс (495) 939-25-47. E-mail: kuzelev@mail.ru
**А.А. Рухадзе.** Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел./Факс (495) 135-02-47. E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

*Статья поступила 16 июня 2010 г., после доработки 13 сентября 2010 г.*

[1] Говорить о такой волне здесь имеет смысл, поскольку при взаимодействии с электромагнитным полем импульс электрона плазмы изменяется на величину, кратную $\hbar\mathbf{k}$.

характерная "ширина" функции распределения $f(\mathbf{p})$ определяется величиной $mV_0$.

В случае холодной плазмы, рассмотрением которого мы здесь и ограничимся, имеем $f(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p})$, поэтому формулы (1.3) преобразуются в следующие:

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{L}}^2}{\omega^2}\,, \qquad \varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{L}}^2}{\omega^2 - \omega_\hbar^2}\,. \tag{1.5}$$

Структура выражений (1.3) (наличие разностей квадратов в знаменателях) подсказывает, что формулы (1.5) справедливы только в высокочастотном пределе, когда выполнены условия

$$|\omega \pm \omega_\hbar| \gg kV_0\,, \tag{1.6}$$

которые обязательно нужно учитывать при анализе спектров колебаний квантовой плазмы.

Выражение для высокочастотной поперечной диэлектрической проницаемости (1.5) не содержит квантового члена, а следовательно, и спектр поперечных электромагнитных волн является таким же, как и в классическом пределе [2, 4]. Спектр продольных волн, определяемый нулями продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega, \mathbf{k}) = 0$, даётся выражением

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_{\mathrm{L}}^2 + \omega_\hbar^2}\,. \tag{1.7}$$

Именно эта формула как спектр продольных квантовых волн в холодной плазме приведена в [2]. Однако в [2] условия применимости формулы (1.7) не указаны. Найдём эти условия.

Подставляя (1.7) в неравенство (1.6), приводим его к виду

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\,\eta\kappa^2\right)^2} - \frac{1}{4}\,\eta\kappa^2 \gg \kappa\,, \tag{1.8}$$

где $\kappa = kV_0/\omega_{\mathrm{L}}$ — безразмерное волновое число, $\eta$ — малый газовый параметр (1.2). Поскольку функция $\sqrt{1+x^2} - x$ монотонно убывает от единицы до нуля, неравенство (1.8) может быть выполнено только при $\kappa \ll 1$, т.е. при

$$kV_0 \ll \omega_{\mathrm{L}}\,. \tag{1.9}$$

Неравенство (1.9) как условие применимости формул (1.5), а значит, и спектра (1.7) сохраняет свой вид при любой величине газового параметра[2] $\eta$.

Оценим, учитывая неравенство (1.9), величину квантовой поправки в спектре (1.7). Из (1.9) находим максимальное значение волнового числа $k_{\max} = \omega_{\mathrm{L}}/V_0$, которое определяет максимально допустимое значение квантовой частоты (1.4) $\omega_{\hbar,\max} = \hbar k_{\max}^2/(2m)$. Тогда, поскольку $k \ll k_{\max}$ и выполнено (1.2), имеют место следующие неравенства:

$$\frac{\omega_\hbar}{\omega_{\mathrm{L}}} \ll \frac{\omega_{\hbar,\max}}{\omega_{\mathrm{L}}} = \frac{1}{4}\,\eta \ll 1\,, \qquad \frac{\omega_\hbar}{kV_0} \ll \frac{\hbar k_{\max}}{2mV_0} = \frac{1}{4}\,\eta \ll 1\,. \tag{1.10}$$

Таким образом, квантовая поправка в спектре (1.7) в пределах применимости приближения бесстолкновительной плазмы мала. Более того, вследствие второго неравенства (1.10), квантовая поправка в (1.7) меньше не учтённой в этой формуле классической тепловой поправки, т.е. фактически является превышением точности[3].

Заметим, что неравенство (1.6), приведшее к неравенству (1.9), не принципиально, поскольку является всего лишь условием применимости в квантовой теории приближения холодной плазмы, т.е. формул (1.5). Тогда как для применимости общих формул (1.3) требуется выполнение только неравенства (1.2). Из структуры формул (1.3) видно, что квантовый вклад в диэлектрические проницаемости всегда определяется частотой $\omega_\hbar$, а тепловые эффекты — величиной $kV_0$. Поэтому имеет смысл оценить величины (1.10), не предполагая выполнения неравенства (1.6). Снимая ограничение на величину волнового числа $k$, имеем

$$\frac{\omega_\hbar}{kV_0} \leqslant \frac{\omega_\hbar}{kV_{\mathrm{F}}} \approx \frac{\langle r\rangle}{\lambda}\,, \qquad \frac{\omega_\hbar}{\omega_{\mathrm{L}}} \approx \frac{\langle r\rangle^2}{\eta\lambda^2}\,, \tag{1.11}$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина ленгмюровской волны. В случае ленгмюровских волн, обусловленных нарушением квазинейтральности в объёмах, содержащих большое число частиц, отношение $\langle r\rangle/\lambda$ мало по определению. Поэтому квантовая поправка в спектре ленгмюровских волн меньше тепловой поправки, обусловленной хаотическим движением электронов плазмы, безотносительно к неравенству (1.6).

Из второй оценки (1.11) видно, что квантовая частота в принципе может превосходить электронную ленгмюровскую частоту (поскольку $\eta \ll 1$). Однако в максвелловской плазме это не совсем так. Действительно, ввиду малости отношения $\langle r\rangle/\lambda$ справедливо неравенство $\omega_\hbar < kV_T$, но одновременно должно выполняться $kV_T < \omega_{\mathrm{L}}$, так как в противном случае ленгмюровских волн в плазме фактически не существует из-за их сильного затухания Ландау. Поэтому в максвелловской плазме слабозатухающие ленгмюровские волны возможны только при $\omega_\hbar < kV_T < \omega_{\mathrm{L}}$, когда квантовые эффекты малы. Однако в вырожденной плазме, где затухание ленгмюровских волн согласно классической теории отсутствует и при $kV_{\mathrm{F}} > \omega_{\mathrm{L}}$ (нулевой звук), возможны случаи, в которых вторая величина в (1.11) не является малой. Квантовая кинетическая теория ленгмюровских волн в электронной плазме с учётом теплового движения электронов развита в работе [5], где показано, что квантовые поправки в спектрах частот действительно всегда малы, хотя и могут приводить к качественно новым эффектам (например, к бесстолкновительному затуханию нулевого звука в вырожденной плазме).

Следует заметить, что в обзорной работе [6] исследовались спектры колебаний электронной плазмы с использованием как квантового кинетического уравнения [2], так и модели квантовой гидродинамики [3]. В [6], однако, не оговорены условия применимости полученных результатов. Нам представляется, что многие результаты этой работы выходят за рамки условий их применимости. Первые работы, в которых такие условия оговорены и в которых показано, когда квантовые эффекты могут проявиться в холодной плазме в высокочастотной области, — это работы [7–9]. В них исследованы квантовое вынужденное черенковское излучение продольных и поперечных электромагнитных волн электронными пучками в средах и квантовое вынужденное рассеяние электромагнитных волн на пучке. Ниже обсуждаются результаты указанных работ.

[2] Делая некоторые допущения, можно предположить, что кинетические уравнения Власова и Вигнера применимы и при невыполнении неравенства (1.2). Так, в частности, поступают при рассмотрении электронного газа в металлах [2].

[3] Учёт хаотического движения электронов даёт вместо (1.7) спектр $\omega^2 = \omega_{\mathrm{L}}^2 + \alpha k^2 V_0^2 + \beta k^4 V_0^4/\omega_{\mathrm{L}}^2 + \omega_\hbar^2$, где $\alpha, \beta \sim 1$ [2]. В силу неравенства (1.2) квантовый член здесь мал даже по сравнению с членом $\beta k^4 V_0^4/\omega_{\mathrm{L}}^2$.

Можно высказать предположение о структуре частотных спектров квантовых ленгмюровских волн в более коротковолновой области, когда отношение $\langle r\rangle/\lambda$ является большим и представление о самосогласованном поле становится некорректным. В этом случае взаимодействие электронов плазмы происходит только посредством столкновений. Если же таковые отсутствуют (поскольку выполнено неравенство (1.2)), то частота продольных квантовых колебаний плазмы определяется формулой

$$\omega = \omega_\hbar\,. \tag{1.12}$$

В отличие от коллективных ленгмюровских колебаний, волны (1.12) являются одночастичными [2, 5].

## 2. Вынужденное черенковское излучение нерелятивистского электронного пучка в плазме. Трёхволновой процесс с участием квантовых волн

Из анализа неравенств (1.2) и (1.6), казалось бы, следует, что квантовые эффекты в теории плазмы (по крайней мере, холодной электронной плазмы) проявляются как малые несущественные поправки. В действительности это не совсем так. Например, известен [2] хорошо наблюдаемый квантовый эффект в электронной плазме — диамагнетизм свободного электронного газа, определяемый величиной

$$\frac{\omega^2}{k^2c^2}\left(\varepsilon^1-\varepsilon^{\mathrm{tr}}\right)_{\omega/k\to 0}\,, \tag{2.1}$$

дающей вклад электронов в статическую магнитную проницаемость. При вычислении (2.1) большие слагаемые, имеющие классическое происхождение, сокращаются, и остающиеся квантовые члены становятся заметными. Аналогичная ситуация имеет место в процессах вынужденного черенковского излучения пучком электронов продольных плазменных колебаний и вынужденного резонансного рассеяния поперечной электромагнитной волны на продольных колебаниях плотности электронов в плазме. В дисперсионных уравнениях, описывающих эти процессы, при выполнении резонансных условий большие классические слагаемые сокращаются, а в оставшихся малых слагаемых квантовые эффекты могут оказаться существенными и дать значительный вклад во времена развития (инкременты) процессов.

Рассмотрим задачу возбуждения нерелятивистским моноэнергетическим электронным пучком продольных колебаний в плотной холодной электронной плазме. Плотную плазму будем описывать классически, а электронный пучок, учитывая его малую плотность, — квантово. В этих условиях дисперсионное уравнение пучково-плазменного взаимодействия или, что то же самое, вынужденного черенковского излучения электронным пучком продольных плазменных волн записывается в виде [7]

$$\varepsilon^1(\omega,\mathbf{k}) \equiv 1-\frac{\omega_{\mathrm{Lp}}^2}{\omega^2}-\frac{\omega_{\mathrm{Lb}}^2}{(\omega-\mathbf{ku})^2-\omega_\hbar^2}=0\,. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость электронов пучка, $\omega_{\mathrm{Lb}}$ и $\omega_{\mathrm{Lp}}$ — ленгмюровские частоты электронов пучка и плазмы соответственно. Поясним, что левая часть уравнения (2.2) — это продольная диэлектрическая проницаемость пучково-плазменной системы. В частности, пучковый вклад в диэлектрическую проницаемость получается из второй формулы (1.5) путём замен $\omega_{\mathrm{L}}\to\omega_{\mathrm{Lb}}$ и $\omega\to\omega-\mathbf{ku}$. Последняя замена учитывает доплеровский сдвиг частоты, обусловленный движением электронов. В целях упрощения конкретных формул будем записывать их для случая возмущений, распространяющихся вдоль направления движения пучка, т.е. при $\mathbf{ku}=ku$; в общих формулах этого делать не будем.

В одночастичном пределе $\omega_{\mathrm{Lb}}\to 0$ из (2.2) находим известное квантовое условие черенковского резонанса между электроном и продольной волной [10]:

$$\omega = \mathbf{ku}\mp\omega_\hbar\,. \tag{2.3}$$

Условие (2.3) со знаком минус представляет собой условие черенковского излучения, а со знаком плюс — квантовое условие черенковского поглощения. Заметим, что в теории плазмы вынужденное излучение пучка описывается как некоторая резонансная пучковая неустойчивость [10]. При неустойчивости описывающее её дисперсионное уравнение относительно частоты $\omega$ имеет комплексное решение с $\operatorname{Im}\omega>0$.

При анализе дисперсионного уравнения (2.2) предположим, что выполнено сильное неравенство

$$\omega_{\mathrm{Lp}}\gg\omega_{\mathrm{Lb}}\,. \tag{2.4}$$

Подставляя в (2.3) $\omega=\omega_{\mathrm{Lp}}$, находим точки одночастичного черенковского резонанса пучка с плазменной волной:

$$\begin{aligned} k_{1,2}&=\frac{mu}{\hbar}\left(1\mp\sqrt{1-\mu}\,\right),\\ k_{3,4}&=-\frac{mu}{\hbar}\left(1\pm\sqrt{1+\mu}\,\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\mu$ — важный для дальнейшего квантовый параметр,

$$\mu=\frac{\hbar\omega_{\mathrm{Lp}}}{mu^2/2}\,. \tag{2.6}$$

Величины $k_{1,2}$ в (2.5) определяют волновые числа излучаемых плазменных колебаний, а $k_{3,4}$ — волновые числа колебаний плазмы, которые поглощаются электронами пучка. Если выполнено неравенство $\mu>1$, то резонансы в точках $k_{1,2}$ отсутствуют. Поскольку при резонансах в точках $k_{3,4}$ излучения нет (см. далее), неравенство $\mu>1$ является условием устойчивости пучка с малой плотностью в плазме, в чём можно убедиться и из анализа дисперсионного уравнения (2.2) относительно $\omega$: при $\mu>1$ у него отсутствуют комплексные корни. Поэтому нас здесь интересует только случай $\mu<1$. Более того, будем считать это неравенство сильным. Физический смысл неравенства $\mu<1$ как условия неустойчивости состоит в том, что при излучении плазмона электрон теряет энергию $\hbar\omega_{\mathrm{Lp}}$. Но это возможно, только если энергия плазмона меньше кинетической энергии электрона. Таким образом, неравенство $\mu<1$ является принципиальным квантовым порогом энергии электрона для развития черенковской пучковой неустойчивости в плазме [7].

В окрестности резонансных точек $k_{1,2}$ дисперсионное уравнение (2.2) при выполнении неравенств (2.4) и $\mu\ll 1$ принимает вид

$$\delta\omega^2(\delta\omega-2\omega_{\hbar 1,2})=\frac{1}{2}\,\omega_{\mathrm{Lb}}^2\omega_{\mathrm{Lp}}\,, \tag{2.7}$$

где $\delta\omega=\omega-\omega_{\mathrm{Lp}}$ — комплексный инкремент неустойчивости, $\omega_{\hbar 1,2}=\hbar k_{1,2}^2/2m$. Если выполнено неравенство $|\delta\omega|\gg 2\omega_{\hbar 1,2}$, то из уравнения (2.7) следует инкремент обычной классической пучковой неустойчивости в плазме [4, 10]. Этот случай нас здесь не интересует. Но при выполнении обратного неравенства из уравнения (2.7) для

инкремента следует:

$$\delta\omega_{1,2} = \mathrm{i}\left(\frac{\omega_{\mathrm{Lb}}^2\omega_{\mathrm{Lp}}}{4\omega_{\hbar 1,2}}\right)^{1/2} \to \begin{cases} \delta\omega_1 = \mathrm{i}\left(\dfrac{\omega_{\mathrm{Lb}}^2}{\omega_{\mathrm{Lp}}^2}\dfrac{mu^2}{2\hbar\omega_{\mathrm{Lp}}}\right)^{1/2}\omega_{\mathrm{Lp}}\,, \\ \delta\omega_2 = \mathrm{i}\,\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\omega_{\mathrm{Lb}}^2}{\omega_{\mathrm{Lp}}^2}\dfrac{2\hbar\omega_{\mathrm{Lp}}}{mu^2}\right)^{1/2}\omega_{\mathrm{Lp}}\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Инкременты (2.8), очевидно, являются чисто квантовыми. В классическом пределе (при $\hbar \to 0$) инкремент $\delta\omega_1$ возрастает и переходит в инкремент классической пучковой неустойчивости в плазме, а инкремент $\delta\omega_2$ обращается в нуль.

Заметим, что условия резонанса (2.3) имеют вид условий резонанса при аномальном и нормальном эффектах Доплера [11, 12]:

$$\omega = \mathbf{ku} \mp \Omega\,, \tag{2.9}$$

где $\Omega$ — собственная частота колебаний электрона. Например, во внешнем магнитном поле $\Omega$ — это электронная циклотронная частота, $\omega_H = eB/mc$, где $B$ — индукция внешнего продольного магнитного поля[4]. В случае пучка большой плотности $\Omega \sim \omega_{\mathrm{Lb}}$. В рассматриваемом здесь случае частота $\Omega$ — это квантовая частота $\omega_\hbar$. Таким образом, квантовые пучковые неустойчивости в плазме аналогичны пучковым неустойчивостям в условиях аномального эффекта Доплера, или неустойчивостям типа коллективного вынужденного эффекта Черенкова [10]. Именно поэтому неустойчивость реализуется только в резонансных точках $k_{1,2}$, поскольку именно они попадают в область аномального эффекта Доплера. При резонансе в области нормального эффекта (точки $k_{3,4}$) неустойчивости нет.

Перейдём теперь к вопросу о применимости полученных в этом разделе результатов. Заметим, что условия (1.1) и (1.2) сохраняются и в рассматриваемом случае. Что касается условия (1.6), то вместе с условием квантовости режима неустойчивости оно даёт следующее:

$$\omega_{\hbar 1,2} \gg |\delta\omega_{1,2}| \gg k_{1,2}V_0\,, \tag{2.10}$$

где $V_0$ — величина теплового разброса электронов пучка по скоростям[5]. При неустойчивости на волновом числе $k_1 \approx \omega_{\mathrm{Lp}}/u$, с учётом (2.8), из (2.10) имеем

$$\mu^3 \gg \frac{\omega_{\mathrm{Lb}}^2}{\omega_{\mathrm{Lp}}^2} \gg \mu\,\frac{V_0^2}{u^2}\,, \tag{2.11а}$$

а в случае неустойчивости на волновом числе $k_2 \approx 2mu/\hbar$ неравенства (2.10) сводятся к следующим:

$$1 \gg \mu^3\,\frac{\omega_{\mathrm{Lb}}^2}{\omega_{\mathrm{Lp}}^2} \gg \frac{V_0^2}{u^2}\,. \tag{2.11б}$$

Оба неравенства (2.11) могут быть выполнены. Поэтому квантовая черенковская пучковая неустойчивость в плазме вполне реализуема, правда, при очень малой плотности пучка и большой плотности плазмы.

Может показаться, что утверждение о возможности квантовой черенковской пучковой неустойчивости в плазме противоречит приведённым выше результатам, которые показывают, что ленгмюровские волны, в том числе ленгмюровские волны электронного пучка, можно описывать без учёта квантовых эффектов, поскольку роль этих эффектов мала. Дело в том, что при рассматриваемой здесь пучковой неустойчивости ленгмюровские волны в пучке вообще не возбуждаются, поэтому их свойства в данной ситуации роли не играют. Для того чтобы пояснить о чём идёт речь, запишем дисперсионное уравнение (2.2) в виде

$$(1 + \delta\varepsilon_{\mathrm{p}}^1)(1 + \delta\varepsilon_{\mathrm{b}}^1) = \delta\varepsilon_{\mathrm{p}}^1\delta\varepsilon_{\mathrm{b}}^1\,, \tag{2.12}$$

где $\delta\varepsilon_{\mathrm{p}}^1$ и $\delta\varepsilon_{\mathrm{b}}^1$ — вклады электронов плазмы и электронов пучка соответственно в общую продольную диэлектрическую проницаемость, т.е. в левую часть уравнения (2.2).

При такой форме записи уравнение (2.12) явно описывает взаимодействие волн плазмы и пучка. Уравнения $1 + \delta\varepsilon_{\mathrm{p}}^1 = 0$ и $1 + \delta\varepsilon_{\mathrm{b}}^1 = 0$ являются дисперсионными уравнениями ленгмюровских волн невзаимодействующих плазмы и пучка. При черенковской пучково-плазменной неустойчивости $\omega \approx \omega_{\mathrm{Lp}}$, поэтому $1 + \delta\varepsilon_{\mathrm{p}}^1 \approx 0$, и ленгмюровские волны в плазме действительно возбуждаются, причём эти волны описываются нами классически, что полностью согласуется с результатами, представленными выше. Можно показать, что при справедливости левых неравенств (2.11) (точнее, при $\omega_{\mathrm{Lb}}^2/\omega_{\mathrm{Lp}}^2 \ll \mu$ в случае (2.11а) и $\mu\omega_{\mathrm{Lb}}^2/\omega_{\mathrm{Lp}}^2 \ll 1$ в случае (2.11б)) будет выполняться $|\delta\varepsilon_{\mathrm{b}}^1| \ll 1$, поэтому о возбуждении ленгмюровских волн в пучке вообще говорить не приходится. Рассматриваемая черенковская пучковая неустойчивость является одночастичной, а проявление квантовых эффектов обусловлено квантованием энергии, передаваемой свободным электроном пучка классической плазменной волне, в чём можно убедиться на основе следующих простых рассуждений.

Запишем законы сохранения энергии и импульса при излучении электроном некоторой волны с частотой $\omega$ и волновым вектором $\mathbf{k}$:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mu'^2}{2} + \sigma_0\,, \qquad m\mathbf{u} = m\mathbf{u}' + \mathbf{p}_0\,, \tag{2.13}$$

здесь $\mathbf{u}'$ — скорость электрона после излучения, $\sigma_0$ и $\mathbf{p}_0$ — энергия и импульс кванта излучения (в нашем случае плазмона с частотой $\omega = \omega_{\mathrm{Lp}}$). Из общей теории волн имеем $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{k}/\omega)\sigma_0$. Тогда, исключая из (2.13) $\mathbf{u}'$, получаем соотношение

$$\omega = \mathbf{ku} - \frac{(\sigma_0/\omega)k^2}{2m}\,. \tag{2.14}$$

Если положить $\sigma_0 = \hbar\omega$, то приходим к условию (2.3) со знаком минус, т.е. квантовому условию черенковского излучения.

Квантовой черенковской пучковой неустойчивости в плазме можно дать иную физическую интерпретацию [7]. В электрическом поле плазменной волны с потенциалом

$$\varphi(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left[A\exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{kr}\right) + A^*\exp\left(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\mathbf{kr}\right)\right] \tag{2.15}$$

волновая функция электрона пучка имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}\psi(t,\mathbf{r}) = a_0\exp\left(-\mathrm{i}\omega_0 t + \mathbf{k}_0\mathbf{r}\right) + \\ + a_-\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_0 - \omega)t + \mathrm{i}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{r}\right] + \\ + a_+\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_0 + \omega)t + \mathrm{i}(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})\mathbf{r}\right]\,.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь $\omega = \omega_{\mathrm{Lp}}$ — частота плазменной волны, $\omega_0 = \hbar k_0^2/2m$, $\hbar\mathbf{k}_0 = m\mathbf{u}$. Представление (2.16) в линейном

[4] Уравнение (2.2) при замене $\omega_\hbar \to \omega_H$ напоминает дисперсионное уравнение пучково-плазменного взаимодействия в классическом случае в условиях, когда пучок замагничен, а плазма нет [4].

[5] При записи условия (1.6) для пучка следует сделать замену $\omega \to \omega - \mathbf{ku}$.

приближении следует непосредственно из уравнения Шрёдингера для электрона пучка. Первое слагаемое в (2.16) описывает волну де Бройля невозмущённого электрона, второе слагаемое — волну де Бройля электрона, испустившего плазмон, а третье слагаемое — волну де Бройля электрона, поглотившего плазмон (энергия и импульс плазмона $\hbar\omega$ и $\hbar\mathbf{k}$ соответственно). Квантовое черенковское излучение можно трактовать как процесс распада первичной волны де Бройля пучка на плазменную волну и вторичную волну де Бройля с частотой $\omega' = \omega_0 - \omega$ и волновым вектором $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ (второе слагаемое в (2.16)). Условия распада выражаются в виде

$$\omega_0 = \omega + \omega', \qquad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k} + \mathbf{k}'. \tag{2.17}$$

Однако физический смысл условия (2.17) имеют только тогда, когда каждая из входящих в них величин характеризует реальную волну. В частности, вторичная волна должна быть реальной волной де Бройля, поэтому должно удовлетворяться дисперсионное соотношение

$$\omega' = \frac{\hbar k'^2}{2m}. \tag{2.18}$$

Если теперь подставить в (2.18) соотношения (2.17) и учесть определения $\omega_0$ и $\mathbf{k}_0$, то получим условие (2.3) со знаком минус, т.е. квантовое резонансное условие черенковского излучения. Таким образом с квантовой точки зрения черенковское излучение — это процесс резонансного взаимодействия трёх волн (трёхволновой процесс) — двух волн де Бройля свободного электрона и плазменной волны[6]. Заметим, что реальной волны де Бройля $\omega = \omega_\hbar$ нет (см. сноску 1) — это некая виртуальная волна, определяющая порции энергии и импульса ($\sigma_0$ и $\mathbf{p}_0$ в (2.13)), теряемые электроном пучка при излучении.

Аналогично можно трактовать и обратный процесс черенковского поглощения как слияние (обратный распад):

$$\omega_0 + \omega = \omega', \qquad \mathbf{k}_0 + \mathbf{k} = \mathbf{k}', \tag{2.19}$$

первичной волны де Бройля и плазменной волны во вторичную волну де Бройля, описываемую третьим слагаемым в (2.16). Действительно, если (2.19) подставить в (2.18), то получится условие (2.3) со знаком плюс, т.е. резонансное условие черенковского поглощения.

Обратим внимание на различие в подходах. Если при выводе соотношения (2.14) предполагается квантование поля излучения, то при подходе, основанном на взаимодействии волн, квантовым является электрон (формула (2.16)), а поле не квантуется. Результат получается один и тот же.

## 3. Вынужденное комптоновское рассеяние в плазме. Четырёхволновой процесс с участием квантовых волн

Перейдём теперь к рассмотрению вынужденного комптоновского рассеяния поперечной электромагнитной волны на электронах холодной плазмы (или на электронном пучке) с возбуждением квантовых волн. В классической теории в линейном приближении такой процесс описывается известным дисперсионным уравнением трёхволнового распада падающей поперечной электромагнитной волны (частота $\omega_1$, волновой вектор $\mathbf{k}_1$) на рассеянную поперечную волну (частота $\omega$, волновой вектор $\mathbf{k}$) и продольную ленгмюровскую волну [4]:

$$\left[1 + \delta\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega_1 - \omega, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k})\right]\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega, \mathbf{k})\right] = \\ = \frac{1}{4}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^2 \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_E]^2}{k^2c^2}\,\delta\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega_1 - \omega, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}). \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{V}_E = e\mathbf{E}_1/m\omega_1$, где $\mathbf{E}_1$ — амплитуда падающей волны. Согласно (3.1), плазма модулируется волной биений на частоте $\omega_1 - \omega$ с волновым вектором $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}$. Оказывается, уравнение (3.1) справедливо и в квантовом случае, причём $\varepsilon^{\mathrm{tr}}$ и $1 + \delta\varepsilon^{\mathrm{l}} \equiv \varepsilon^{\mathrm{l}}$ определяются формулами (1.5) (в случае пучка в качестве аргумента в $\varepsilon^{\mathrm{l}}$ следует вместо $\omega$ взять $\omega - \mathbf{ku}$).

В дальнейшем мы ограничимся высокочастотным случаем, в котором частоты $\omega_1$ и $\omega$ намного превосходят электронную ленгмюровскую частоту и плазма прозрачна для электромагнитных волн, т.е. $\varepsilon^{\mathrm{tr}}$ и $\varepsilon^{\mathrm{l}}$ близки к единице ($|\delta\varepsilon^{\mathrm{l}}| \ll 1$, как и в случае уравнения (2.12)). При этом дисперсионное уравнение (3.1) приводится к виду [9]

$$\omega^2 - k^2c^2 = \frac{1}{4}\,\frac{\omega_{\mathrm{L}}^2(\mathbf{e}_1\mathbf{e})^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^2 V_E^2}{\left[(\omega_1 - \omega) - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})\mathbf{u}\right]^2 - \hbar^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^4/4m^2}, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}$ — единичные векторы поляризации падающей и рассеянной электромагнитных волн.

Условие резонансного рассеяния волн, которое даётся нулями знаменателя правой части уравнения (3.2), имеет вид

$$(\omega_1 - \omega) - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})\mathbf{u} = \pm\frac{\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k})^2}{2m}. \tag{3.3}$$

Проанализируем (3.3) для частного случая $\mathbf{u} = 0$ — рассеяния на электронном газе. С точностью до квантового члена, который считаем малым, видим, что $\omega \approx \omega_1$. Поэтому условие (3.3) записывается следующим образом:

$$\omega = \omega_1 \mp \omega_1\,\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}(1 - \cos\theta), \tag{3.4}$$

где $\theta$ — угол рассеяния (угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$). Условие (3.4) со знаком минус представляет собой известное условие комптоновского рассеяния света.

В резонансной точке решение уравнения (3.2) (при $\mathbf{u} = 0$) ищем в виде

$$\omega = kc + \delta\omega = \omega_1 \mp \Omega_\hbar + \delta\omega, \qquad \Omega_\hbar = \omega_1\,\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}(1 - \cos\theta). \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.2), получим следующее уравнение для инкремента $\delta\omega$:

$$\delta\omega^2(\delta\omega \mp 2\Omega_\hbar) = \frac{1}{4}\,\frac{\tilde{V}_E^2}{c^2}\,\omega_{\mathrm{L}}^2\omega_1(1 - \cos\theta). \tag{3.6}$$

Здесь для сокращения последующих записей введено обозначение $\tilde{V}_E^2 = V_E^2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2$. Последнее уравнение целесообразно сравнить с аналогичным ему уравнением (2.7). Если выполнено неравенство $|\delta\omega| \gg 2\Omega_\hbar$, то из уравнения (3.6) следует инкремент обычной классической плазменной неустойчивости, обусловленной вынужденным томсоновским рассеянием света. Этот случай нас здесь не интересует. Но при выполнении обратного неравенства из уравнения (3.6) для инкремента получается следующее выраже-

[6] Вместо плазменной волны может фигурировать волна любой природы, лишь бы удовлетворялось условие резонанса (2.3).

ние [9]:

$$\delta\omega = \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,\frac{\tilde{V}_E}{c}\,\omega_{\mathrm{L}}\left(\frac{mc^2}{2\hbar\omega_1}\right)^{1/2}. \qquad (3.7)$$

Инкремент (3.7), очевидно, является чисто квантовым. Он характеризует квантовую плазменную неустойчивость, обусловленную вынужденным комптоновским рассеянием света. В классическом пределе (при $\hbar \to 0$) инкремент (3.7) возрастает и переходит в инкремент классического томсоновского рассеяния.

При вычислении инкремента (3.7) в уравнении (3.6) был взят верхний знак (минус). Если в квантовом пределе в уравнении (3.6) (а значит, и в формуле (3.4)) взять знак плюс, то получим $\delta\omega^2 > 0$, что означает отсутствие неустойчивости. Но это и понятно, поскольку в этом случае $\omega > \omega_1$, а рассеяние с повышением частоты на неподвижном электроне невозможно. Нетрудно увидеть, что полученные результаты справедливы и при рассеянии на пучке с той только разницей, что вследствие эффекта Доплера выражение (3.4) становится более сложным (см. подробности в [9]).

Условие применимости полученных в этом разделе результатов следует из неравенств $\Omega_\hbar \gg |\delta\omega| \gg |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|V_0$ и сводится к следующему (см. (2.11а)):

$$\left(\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}\right)^3 \gg \frac{V_E^2}{c^2}\,\frac{\omega_{\mathrm{L}}^2}{\omega_1^2} \gg \frac{\hbar\omega_1}{mc^2}\,\frac{V_0^2}{c^2}. \qquad (3.8)$$

Эти условия вполне выполнимы в случае сильных полей, когда $V_E \gg V_0$, и при достаточно высокой частоте падающей волны $\omega_1$.

Рассмотренный квантовый эффект вынужденного комптоновского рассеяния можно интерпретировать как процесс резонансного взаимодействия электромагнитных волн и волн де Бройля свободного электрона. Для этого в распадные условия (2.19) подставим вместо $\omega$ и $\mathbf{k}$ частоту $\omega_1 - \omega$ и волновой вектор $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}$ волны биений, обусловленной тем, что электрон движется в поле двух электромагнитных волн — падающей и рассеянной. Получим следующие резонансные условия:

$$\omega_0 + \omega_1 - \omega = \omega', \qquad \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k} = \mathbf{k}'. \qquad (3.9)$$

Подставляя далее (3.9) в формулу (2.18), получим условие (3.3) со знаком плюс, т.е. квантовое условие комптоновского рассеяния. Таким образом, эффект Комптона является резонансным взаимодействием четырёх волн — двух электромагнитных и двух де Бройля.

## 4. Заключение

Из приведенного выше анализа можно сделать следующие выводы.

1. При описании ленгмюровских волн в газовой плазме квантовые эффекты всегда приводят к малым поправкам, в лучшем случае сопоставимым с поправками, обусловленными тепловым движением электронов плазмы. Квантовые эффекты являются важными при резонансных взаимодействиях свободных электронов плазмы с электромагнитными волнами разной природы. При этом существенно квантование электромагнитной энергии, передаваемой электронам в процессе взаимодействия.

2. При распространении пучка с малой плотностью в плотной электронной плазме возможно развитие квантовой черенковской пучковой неустойчивости. При увеличении плотности пучка квантовая неустойчивость переходит в обычный классический одночастичный вынужденный эффект Вавилова – Черенкова. Квантовая черенковская пучковая неустойчивость является трёхволновым процессом распада волны де Бройля электрона пучка на ленгмюровскую волну плазмы и другую волну де Бройля.

3. При распространении интенсивной высокочастотной электромагнитной волны в плазме реализуется квантовый эффект её комптоновского рассеяния на электронах плазмы. Его классическим аналогом является эффект вынужденного томсоновского рассеяния, имеющий место в области более низких частот. Квантовый эффект Комптона является резонансным четырёхволновым взаимодействием двух электромагнитных волн и двух волн де Бройля свободных электронов плазмы.

## Список литературы


1. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М.: Гостехиздат, 1946) [Bogoluibov N N *The Dynamical Theory in Statistical Physics* (Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1965)]
2. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Госатомиздат, 1961)
3. Кузелев М В, Рухадзе А А *УФН* **169** 687 (1999) [Kuzelev M V, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **42** 603 (1999)]
4. Александров А Ф, Богданкевич Л С, Рухадзе А А *Основы электродинамики плазмы* (М.: Высшая школа, 1988) [Alexandrov A F, Bogdankevich L S, Rukhadze A A *Principles of Plasma Electrodynamics* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)]
5. Кузелев М В *ЖЭТФ* **137** 807 (2010) [Kuzelev M V *JETP* **110** 710 (2010)]
6. Шукла П К, Элиассон Б *УФН* **180** 55 (2010) [Shukla P K, Eliasson B **53** 51 (2010)]
7. Кузелев М В *Физика плазмы* **36** 132 (2010) [Kuzelev M V *Plasma Phys. Rep.* **36** 116 (2010)]
8. Кузелев М В *Квантовая электроника* **40** 83 (2010) [Kuzelev M V *Quantum Electron.* **40** 83 (2010)]
9. Кузелев М В *Физика плазмы* **36** 627 (2010) [Kuzelev M V *Plasma Phys. Rep.* **36** 583 (2010)]
10. Кузелев М В, Рухадзе А А *УФН* **178** 1025 (2008) [Kuzelev M V, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **51** 989 (2008)]
11. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы* (М.: Наука, 1981) [Ginzburg V L *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1989)]
12. Незлин М В *УФН* **120** 481 (1976) [Nezlin M V *Sov. Phys. Usp.* **19** 946 (1976)]


**Nonrelativistic quantum theory of stimulated Cherenkov radiation and Compton scattering in a plasma**


**M.V. Kuzelev.** *Physics Department, M.V. Lomonosov Moscow State University, Vorob'evy gory, 119192 Moscow, Russian Federation. Tel./Fax (7-495) 939-25 47. E-mail: kuzelev@mail.ru*
**A.A. Rukhadze**. *A.M. Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova 38, 119192 Moscow, Russian Federation Tel./Fax (7-495) 135-02 47. E-mail: rukh@fpl.gpi.ru*



The role of quantum effects in the theory of Langmuir waves in a collisionless plasma is shown to be important for flows of quantum particles resonantly interacting with plasma oscillations and for plasma electromagnetic waves undergoing resonant scattering.



PACS numbers: **41.60.–m**, **52.35.–g**, 52.40.Mj
Bibliography — 12 references
*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **181** (4) 393 – 398 (2011)

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201104d.0393
*Received 16 June 2010, revised 13 September 2010*
*Physics – Uspekhi* **54** (4) (2011)