

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

К вопросу об электромагнитном импульсе заряженных тел

В.Б. Морозов

В макроскопических задачах электродинамики учёт релятивистского импульса неэлектромагнитной природы устраняет несоответствие между электромагнитной массой и электромагнитным импульсом макроскопических тел, что, в частности, позволяет разрешить известный "парадокс 4/3".

PACS numbers: 01.65. + g, 03.30. + p, 41.20. – q

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201104c.0389

1. Почти сразу после открытия катодных лучей возникла идея о том, что электромагнитное поле электрона имеет массу и, более того, масса электрона носит чисто полевой характер. Однако член, характеризующий меру электромагнитной инерции заряженной сферы как модели электрона, имеет, как было подмечено Дж.Дж. Томсоном ещё в 1881 г. [1], "странный и труднообъяснимый коэффициент 4/3" [2]. Рассмотрение этой задачи Лоренцем с учётом релятивистского сокращения сферы привело к тому же результату. В разное время вопросами электромагнитной массы и импульса занимались А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, М. Абрагам и многие другие. Сейчас классическая теория электрона представляет только исторический интерес. Задача об электромагнитной массе классической модели электрона, которая лежит в стороне от основных направлений развития теории, воспринималась скорее как досадное недоразумение или как повод поговорить о неполноте классической электродинамики. Однако решение задачи об электромагнитной массе заряженных тел как задачи классической электродинамики может оказаться интересным и сейчас.

Попробуем на примере простых задач продемонстрировать непротиворечивость релятивистской теории движения заряженных тел.

2. Напомним известное парадоксальное решение задачи [2–5] об электромагнитной массе сферы с равномерно заряженной поверхностью. При этом исходят из плотности импульса поля

$$\mathbf{g}_f = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Откуда после интегрирования по объёму импульс поля заряженной сферы радиусом a , движущейся равномерно со скоростью v , для малых v/c

$$\mathbf{P}_f = \frac{4}{3} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \frac{\mathbf{v}}{c^2}, \quad (1)$$

где q — заряд. С другой стороны, из плотности энергии электрического поля

$$\rho c^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

находится полная электромагнитная масса поля заряженной сферы

$$m_{em} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \frac{1}{c^2}. \quad (2)$$

Сравнение (1) и (2) не даёт ожидаемого совпадения масс электромагнитного поля. Отношение масс 4/3, давнее название парадоксу, до настоящего времени, как правило, объяснялось наличием у "электрона" (заряженной сферы) неэлектромагнитной массы. Заметим, что парадоксальное решение имеет место не только при сравнении электромагнитной массы "электрона", но и почти для всех задач такого типа. Например, для равномерно распределённого внутри сферы заряда это отношение равно 8/5 [2].

Любая классическая модель электрона заведомо неустойчива, и необходимо ввести силы, компенсирующие кулоновское отталкивание. Пуанкаре предположил наличие в электроне скалярных *натяжений Пуанкаре*, компенсирующих натяжения Максвелла. По мысли Пуанкаре натяжения, которые вызваны неким массивным полем, должны объяснить недостающую массу электрона, но этот формальный подход оказался непродуктивным. В конечном счёте, парадоксальность этого решения дала повод для спекуляций на тему противоречивости классической электродинамики и/или специальной теории относительности. В результате более чем столетней истории задачи о ней сложилось представление как о не имеющем решения парадоксе [2, 5]. Удивительно то, что осталось незамеченным доказательство баланса импульса и энергии заряженных тел, опубликованное ещё в 1933 г. в учебнике Беккера¹ [6]. Беккер показал, что появление множителя 4/3 в импульсе заряженной сферы обусловлено добавочным импульсом, который, хотя и имеет неэлектромагнитное проис-

В.Б. Морозов, ПНП "Сигнур",
ул. Твардовского 8, 123458 Москва, Российская Федерация
E-mail: morozov@sci.lebedev.ru

Статья поступила 28 мая 2010 г.,
после доработки 20 сентября 2010 г.

¹ На работу [6] автору было указано рецензентом очередного варианта данной статьи.

хождение, связан с максвелловскими натяжениями. Далее Беккер показал, что задача решается непротиворечиво, если предположить, что плотности сил, вызванные натяжениями Максвелла и упругими натяжениями, компенсируют друг друга. По существу, это не что иное как обобщение теоремы о сохранении энергии-импульса в замкнутых системах как по формулировке, так и по методу доказательства. Возможно, это объясняет тот факт, что результат Беккера оставался незамеченным три четверти века².

Выполнение закона сохранения энергии-импульса в системе связанных зарядов воспринимается как должное. Как мы увидим далее, неожиданным оказывается то, что в релятивистской динамике появляется неустрашимое перераспределение импульса системы между импульсом поля и механическим импульсом. Тогда как масса поля и механическая масса подобной связи не обнаруживаются.

3. Вначале рассмотрим простейшую одномерную задачу о движении заряженного плоского конденсатора в направлении x , перпендикулярном к плоскостям обкладок конденсатора А и В. Между обкладками движущегося конденсатора имеется ненулевая электромагнитная энергия, которой мы должны приписать массу. Но эта масса не содержится в электромагнитном импульсе конденсатора. Действительно, электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено параллельно скорости конденсатора $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$, вектор Пойнтинга, а также электромагнитный импульс — нулевые. Это ещё более вопиющее несоответствие электромагнитного импульса и массы можно было бы назвать нулевым парадоксом или парадоксом 0/1.

Последовательное применение специальной теории относительности помогает решить эту задачу. Если w — плотность энергии электрического поля конденсатора, то на поверхность диэлектрика действует давление

$$p = \frac{dw}{dx}. \quad (3)$$

Поскольку плоскости А и В перемещаются со скоростью v_x , давление p совершает работу над обеими плоскостями диэлектрика. Соответственно мощность, отнесённая к единице площади, равна $v_x p$ для плоскости А и $-v_x p$ для плоскости В. На первый взгляд, это ничего не меняет, поскольку и силы, и работа, просуммированные по всей системе, равны нулю. Однако мы наблюдаем перенос энергии от плоскости А к плоскости В. Откуда плотность потока энергии равна $S = v_x p$. Эта величина связана с плотностью импульса³ соотношением

$$g_x = \frac{1}{c^2} S, \quad (4)$$

что является прямым следствием эйнштейновской эквивалентности массы и энергии [7]. Пусть L — толщина слоя диэлектрика в лабораторной системе отсчёта. Тогда, интегрируя (4) с учётом (3), получим импульс конденсатора, отнесённый к его единичной площади:

$$G_x = \frac{v_x}{c^2} \int_0^{\delta} \frac{dw}{dx} dx = v_x \frac{wL}{c^2}. \quad (5)$$

Этот импульс в точности соответствует электромагнитной массе конденсатора, также отнесённой к его площади:

$$m_f = \frac{1}{c^2} \int_0^{\delta} w dx = \frac{wL}{c^2}. \quad (6)$$

При этом релятивистский множитель $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ уже содержится в толщине конденсатора L . Величины (5) и (6) найдены через электромагнитную плотность энергии. Здесь нам даже не пришлось вычислять конкретное значение энергии электромагнитного поля. Однако в данной задаче импульс целиком относится к механической части системы — сплошной среде, несмотря на то что параметры этой среды не содержатся в конечном результате. Таким образом, как показал этот пример, корректное описание движения системы заряженных тел возможно только при совместном рассмотрении электромагнитного поля и механической системы.

4. При рассмотрении замкнутой системы заряженных тел тензор энергии-импульса электромагнитного поля должен быть дополнен тензором энергии-импульса сплошного тела [8]

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & cg_x & cg_y & cg_z \\ cg_x & t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ cg_y & t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ cg_z & t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix},$$

здесь ρ — плотность, $c^2 g_i$ — компоненты потока энергии, g_i — компоненты импульса, $t_{\alpha\beta}$ — тензор механических напряжений. В частности для неподвижной однородной сферы или просто капли жидкости с внутренним давлением p тензор энергии-импульса [9] имеет вид

$$\begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Преобразование Лоренца тензора даёт соотношение для плотности импульса, выраженной через скорость системы отсчёта v_x , плотность и натяжения в сопутствующей системе [8]:

$$\begin{aligned} g_x &= \gamma^2 \rho^0 v_x + \frac{\gamma^2}{c^2} t_{xx}^0 v_x, \\ g_y &= \frac{\gamma}{c^2} t_{xy}^0 v_x, \\ g_z &= \frac{\gamma}{c^2} t_{xz}^0 v_x, \end{aligned} \quad (8)$$

где $t_{xx}^0 v_x$, $t_{xy}^0 v_x$, $t_{xz}^0 v_x$ — составляющие плотности потока энергии. Заряд на поверхности заряженных тел создаёт механические напряжения внутри этих тел. Следовательно, существует ненулевая неэлектромагнитная плотность импульса, не исчезающая при интегрировании по объёму системы. Плотность импульса связана, в конечном счёте, с зарядами системы, но не с плотностью среды, входящей в эту систему. В частности, из симметрии задачи о заряженной сфере следует, что ненулевой вклад в полный импульс вносит только g_x .

5. Если мы рассмотрим элемент среды в виде прямоугольного параллелепипеда объёмом $dx dy dz$, на грани которого вдоль оси x действуют две равные по абсолют-

² Единственное упоминание о работе Беккера в связи с проблемой электромагнитной массы удалось обнаружить в ссылке, сделанной редакторами русского перевода книги В. Паули [3].

³ За таким импульсом в англоязычной литературе закрепилось название "hidden momentum" [5].

ной величине и противоположные по направлению силы $t_{xx} dy dz$, то, как и в задаче о конденсаторе, рассмотренной выше, в результате движения этого элемента объёма вдоль оси x приложенные силы производят за единицу времени работу $t_{xx} v_x dy dz$ и $-t_{xx} v_x dy dz$. При этом поток энергии переносит за единицу времени на расстояние dx энергию $t_{xx} v_x dx dy dz$. Заметим, что если силы, действующие на противоположные грани, направлены навстречу друг другу, то направление потока энергии совпадает с вектором скорости; если силы направлены наружу, то поток энергии направлен в противоположную сторону по отношению к вектору v . Соответственно, релятивистский импульс элемента среды, согласно (4), имеет направление, знак которого зависит от знака давления.

6. Обратим внимание на то, что величина $\mathbf{Ej}$ (где $\mathbf{j}$ — плотность тока), входящая в уравнение баланса энергии (теорема Пойнтинга), в рассматриваемых задачах не равна нулю. Для заряженной сферы это означает, что поле совершает работу, в нашем случае — над сферой. В случае положительного значения $\mathbf{Ej}$ энергия передаётся от поля сфере, а в случае отрицательного — от поверхности сферы полю. Поскольку картина симметрична, вклад $\mathbf{Ej}$ в баланс энергии является нулевым и, казалось бы, им можно пренебречь. Однако внутри сферы имеется поток энергии, который переносится без посредства поля (см. рисунок). Этот поток энергии эквивалентен импульсу, что следует из релятивистского принципа эквивалентности энергии-массы. Или, что то же самое, компоненты тензора натяжений сферы обладают плотностью импульса, определяемой (8).

7. Рассмотрим сферу с центром в начале декартовых координат. Согласно (8), импульс элемента сферы — диска толщиной dx , вырезанного двумя плоскостями, параллельными плоскости yz , с центром в точке x , выражается в виде

$$dp_x = dx \frac{v_x}{c^2} \int_s t_{xx} dy dz = dx \frac{v_x}{c^2} T,$$

где s — элемент поверхности площадью $\pi(a^2 - x^2)$, T — сила, действующая на него в направлении x . Пондеромоторная сила (давление), действующая на единицу площади поверхности сферы, подобна гидростатической, и

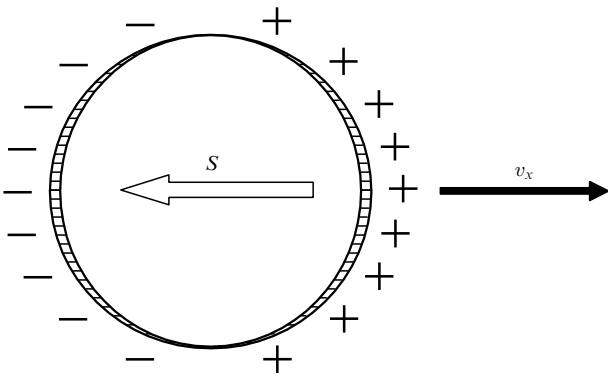


Рисунок. Поток энергии S внутри заряженной сферы при её движении. Жёсткая сфера при её смещении на расстояние dx с одной своей стороны "поглощает" поле E_0 , а с другой — "рождает" его (заштрихованные области). Знаком плюс помечена зона, в которой сфера приобретает энергию, $\mathbf{Ej} > 0$, знаком минус — зона, отдающая энергию, $\mathbf{Ej} < 0$.

она может быть найдена через напряжённость поля на поверхности сферы E_0 . Это же давление действует и на площадь s , откуда $T = -\pi(a^2 - x^2)(\epsilon_0/2)E_0^2$.

И наконец, внутри сферы полный неэлектромагнитный (механический) импульс

$$p_i = \frac{v_x}{c^2} \int_{-a}^a T dx = -\frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 a^4} \frac{v_x}{c^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = -\frac{1}{3} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \frac{v_x}{c^2}. \quad (9)$$

Этот добавочный импульс является отрицательным и составляет ровно четверть от импульса (1). Откуда полный импульс заряженной сферы

$$p = p_f + p_i = \frac{1}{c^2} \frac{q^2 v_x}{8\pi\epsilon_0 a},$$

что уже в точности соответствует (2). Причём результат не зависит от распределения напряжений t_{ij} внутри сферы и, следовательно, внутреннего устройства сферы. Сфера может быть неоднородной, полый, анизотропной, жидкой и т.п. Обратим внимание, что при решении задачи вместо ожидаемой добавки к электромагнитной массе мы обнаружили "лишний" импульс, необходимый для получения замкнутого решения.

8. В частном случае изотропной сферы решение становится предельно простым. Из формулы (8) при объёме сферы $V = 4a^3/3$ и давлении $p = -q^2/(32\pi^2\epsilon_0 a^4)$, равном давлению на её поверхности, механический импульс (9) вычисляется как произведение плотности импульса на объём:

$$p_i = \frac{v_x}{c^2} p V.$$

9. Общее решение этой парадоксальной задачи, приводящее к такому же результату, можно получить непосредственно из эквивалентности импульса и потока энергии (4), применив выражение для импульса [8, 10]

$$\delta P = \frac{1}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} l, \quad (10)$$

где l — расстояние между элементарными источниками и приёмниками энергии, $\mathcal{E}$ — энергия. При этом генератором и приёмником энергии является поверхность сферы (см. пункт 6 и рисунок), а поверхностная плотность мощности

$$\mathbf{Ej} = \frac{\epsilon_0 v_x}{2} E_0^2 a \sin \theta,$$

здесь E_0 — напряжённость поля на поверхности сферы, θ — угол между осью x и радиусом-вектором с началом в центре сферы. Суммируя потоки энергии (10) через элементарные площади поверхности и переходя к интегралу, получим то же самое значение импульса (9):

$$p_i = -\frac{1}{c^2} \frac{q^2 v_x}{8\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{1}{3} \frac{1}{c^2} \frac{q^2 v_x}{8\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Отметим, что плотность среды не содержится в выражениях для импульса среды, связанного с натяжениями, вызванными пондеромоторными силами. Поскольку эта среда играет ту же роль, что и натяжения Пуанкаре, можно утверждать, что и в классической

модели электрона гипотеза Пуанкаре в принципе не могла разрешить парадокс $4/3$.

Подобные задачи демонстрируют выполнение общих принципов в частных задачах. Некоторые поучительные задачи и не всегда очевидные выводы при привлечении к рассмотрению релятивистского (скрытого) механического импульса уже рассмотрены в литературе (см., например, [11–14]). Следует заметить, что при описании движения свободных зарядов в общем случае достаточно учитывать импульс электромагнитного поля (см. знаменитую статью И. Пейджа и Н.И. Адамса [15]). Но если движение зарядов не является свободным, то можно столкнуться с необходимостью учёта "скрытого импульса" [16, 17]⁴.

Автор благодарен М.Б. Белоненко, Г.Д. Богомолову и Ю.Н. Ерошенко за поддержку и замечания.

Список литературы

1. Thomson J J "On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies" *Philos. Mag. Ser. 5* **11** (68) 229 (1881)
2. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1962) [Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965) с. 646]
3. Pauli W *Relativitätstheorie* (Leipzig: Teubner, 1921) [*Theory of Relativity* (New York: Pergamon Press, 1958); Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983) § 63]
4. Feynman R P, Leighton R B, Sands M *The Feynman Lectures on Physics* Vol. 2 (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1964)
5. [Фейнман Р, Лейтон Р, Сэндс М *Фейнмановские лекции по физике* Т. 6 *Электродинамика* (М.: Мир, 1966)]
5. Hnizdo V *Am. J. Phys.* **65** 55 (1997)
6. Becker R *Theorie der Elektrizität* Bd. II *Elektronentheorie* (Berlin: V.G. Teubner, 1933) [Беккер Р *Теория электричества* Т. II *Электронная теория* (Л.-М.: Гостехиздат, 1941)]
7. Эйнштейн А "Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?" *Собрание научных трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 36 [Einstein A "Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?" *Ann. Physik* **323** 639 (1905)]
8. Tolman R C *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology* (Oxford, 1969) [Толмен Р *Относительность, термодинамика и космология* (М.: Наука, 1974) §§ 27, 35]
9. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) §§ 32, 35 [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975) §§ 32, 35]
10. Panofsky W K H, Phillips M *Classical Electricity and Magnetism* (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1955) [Пановский В, Филиппс М *Классическая электродинамика* (М.: Физматгиз, 1963) § 16.4]
11. McDonald K T "Energy, momentum and stress in a belt drive", http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/belt_drive.pdf (October 20, 2007)
12. McDonald K T "Hidden' momentum in a sound wave", http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/hidden_sound.pdf (October 31, 2007)
13. Shockley W, James R P *Phys. Rev. Lett.* **18** 876 (1967)
14. Shockley W *Phys. Rev. Lett.* **20** 343 (1968)
15. Page L, Adams N I (Jr.) *Am. J. Phys.* **13** 141 (1945)
16. McDonald K T "Cullwick's paradox: charged particle on the axis of a toroidal magnet", <http://wwwphy.princeton.edu/~kirkmc/examples/cullwick.pdf> (June 4, 2006)
17. McDonald K T "Onoochin's paradox", <http://wwwphy.princeton.edu/~kirkmc/examples/onoochin.pdf> (January 1, 2006) [Перевод на русск. яз.: "Парадокс Г. Иванова" <http://wwwphy.princeton.edu/~kirkmc/examples/Ivanov.pdf>]

⁴ Автор работы [17] ошибочно назвал парадокс "парадоксом Онучина", на самом деле указанный парадокс предложен Г.П. Ивановым, что отмечено в русском переводе работы [17].

On the question of the electromagnetic momentum of a charged body

V.B. Morozov

PNP "Signur",

ul. Tvardovskogo 8, 123458 Moscow, Russian Federation

E-mail: morozov@sci.lebedev.ru

The incorporation of a relativistic momentum of non-electromagnetic nature into macroscopic problems of electrodynamics removes the lack of correspondence between the electromagnetic mass and the electromagnetic momentum of macroscopic bodies allowing, in particular, the resolution of the well-known $4/3$ paradox.

PACS numbers: **01.65. + g, 03.30. + p, 41.20. – q**

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201104c.0389

Bibliography — 17 references

Received 28 May 2010, revised 20 September 2010

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (4) 389–392 (2011)

Physics – Uspekhi **54** (4) (2011)