

ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Универсальная случайность

В.С. Доценко

На протяжении последних двух десятилетий было обнаружено, что статистические свойства многих микроскопически различных систем на макроскопическом уровне описываются одной и той же универсальной функцией распределения, известной под названием функция Трейси–Видома. Сюда относятся как чисто математические проблемы, например статистика возрастающих подпоследовательностей при случайных перестановках натуральных чисел, так и вполне физические системы, такие как направленные полимеры в случайной среде, или кристаллы со случайными зародышами. В первой части этого обзора это явление рассматривается на простом качественном уровне на примере нескольких конкретных моделей. Далее рассматривается точное решение проблемы одномерных направленных полимеров в случайной среде, которое показывает, что флуктуации свободной энергии такой системы описываются универсальной функцией распределения Трейси–Видома. Вторая часть обзора представляет собой подробные математические приложения, содержащие все необходимые выводы и доказательства, используемые в первой части.

PACS numbers: 02.50.Cw, 02.90.+p, 05.20.-y, 05.40.-a, 61.41.+e

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201103b.0269

Содержание

1. Введение (269).
 - 1.1. Комбинаторика. 1.2. Рост кристаллов со случайными зародышами. 1.3. Направленные полимеры. 1.4. Метод реплик. 1.5. Функция распределения Трейси–Видома.
 2. Направленные полимеры и одномерные квантовые бозоны (276).
 3. Решение задачи об одномерных направленных полимерах (277).
 4. Заключение (279).
- Приложение А. Квантовые бозоны с отталкиванием (280).
 А.1. Собственные функции. А.2. Ортонормальность собственных функций.
- Приложение Б. Квантовые бозоны с притяжением (282).
 Б.1. Основное состояние. Б.2. Собственные функции. Б.3. Ортонормальность собственных функций. Б.4. Пропагатор.
- Приложение В. Интегральные соотношения для функции Эйри (289).
- Приложение Г. Детерминант Фредгольма с ядром Эйри и распределение Трейси–Видома (290).
- Список литературы (291).

1. Введение

Всем хорошо известна гауссова функция распределения вероятностей. Всякий раз, когда мы имеем дело с системой, содержащей независимые случайные параметры, её макроскопические вероятностные свойства (согласно центральной предельной теореме) описы-

ваются гауссовой функцией распределения. Подобное универсальное свойство является тривиальным и не особенно интересным. С другой стороны, любая нетривиальная система обычно требует индивидуального рассмотрения и, хотя довольно часто обнаруживаются универсальные макроскопические свойства среди микроскопически различных систем (например критические индексы при фазовых переходах второго рода), до самого последнего времени никогда не наблюдалось такого явления, чтобы макроскопические статистические свойства целого класса нетривиальных случайных систем описывались бы одной и той же универсальной (не гауссовой) функцией распределения

Первоначально в работе Трейси и Видома [1] рассматривалась довольно специфическая математическая проблема, а именно, функция распределения наибольшего собственного значения случайной эрмитовой матрицы (Gaussian Unitary Ensemble, GUE) размера $N \times N$ в пределе $N \rightarrow \infty$. С тех пор прошло много лет, и в настоящее время мы имеем довольно обширный список различных случайных систем, макроскопические статистические свойства которых описываются одной и той же универсальной функцией распределения Трейси–Видома. К таким системам, в частности, относятся комбинаторная статистика возрастающих подпоследовательностей при случайных перестановках натуральных чисел [2, 3], решёточные направленные полимеры с геометрическим беспорядком [4], модель кристаллического роста со случайными зародышами [5], модель направленного кипения [6], модель баллистической декомпозиции [7], асимптотическое распределение решений уравнений KPZ [8] (описывающих движение доменных стенок, разделяющих различные однородные пространственные структуры) в пределе бесконечного времени [9, 10], и, нако-

В.С. Доценко. LPTMC, Université Paris VI, 75252 Paris, France, Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация
 E-mail: victor-dotsenko@yandex.ru

Статья поступила 16 июля 2010 г.

нец, распределение свободной энергии одномерных направленных полимеров в случайном потенциале с локальными корреляциями [11–14]. Следует отметить, что эта последняя система была предметом интенсивных исследований на протяжении последних трёх десятилетий (см., например, обзор [15]). В частности, это связано с тем, что модель направленных полимеров в случайной среде эквивалентна многим другим физическим системам, таким как доменные стенки в магнитных плёнках [16], вихревые линии в сверхпроводниках [17], границы смачивания в планарных системах [18], бюргерсовская турбулентность [19] и т.д.

Во вводной части этого обзора, в виде примера, мы рассмотрим на простом качественном уровне три статистические системы: комбинаторную модель возрастающих подпоследовательностей, возникающих при случайных перестановках натуральных чисел (раздел 1.1), модель кристаллического роста со случайными зародышами (раздел 1.2) и одномерные направленные полимеры в случайном потенциале (раздел 1.3). В разделе 1.4 будут изложены основные идеи метода реплик, который будет использоваться в дальнейшем при решении задачи о направленных полимерах и, наконец, в разделе 1.5 мы дадим определение функции распределения Трейси–Видома и рассмотрим её основные свойства.

Разделы 2 и 3 посвящены точному решению задачи об одномерных полимерах в случайном потенциале. В разделе 2 изложена общая методология и основные идеи решения, а в разделе 3 изложен формальный вывод распределения Трейси–Видома для флуктуаций свободной энергии в одномерных направленных полимерах. Вторая часть обзора представляет собой математические приложения, содержащие всю необходимую вычислительную "технику", которая используется в первой части обзора.

1.1. Комбинаторика

Мы начнём с чисто математической "игрушечной" модели, которая, как мы увидим позже, тесно связана с такими физическими проблемами, как модель кристаллического роста со случайными зародышами и одномерная модель направленных полимеров в случайной среде. В этой комбинаторной задаче рассматриваются статистические свойства самой длинной подпоследовательности при случайных перестановках N натуральных чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ [20]. Рассмотрим произвольную перестановку этих чисел и выделим все имеющиеся в ней *возрастающие* подпоследовательности. Длину самой длинной из них обозначим l_N . В качестве иллюстрации рассмотрим произвольную перестановку для случая $N = 11$:

$$\{3, 5, 10, 1, 9, 6, 8, 4, 7, 11, 2\}. \quad (1.1)$$

В этой перестановке имеется несколько различных возрастающих подпоследовательностей (таких, как $\{3, 5, 10, 11\}$, $\{1, 9, 11\}$ и т.д.), и среди них самыми длинными являются две: $\{3, 5, 6, 7, 11\}$ и $\{3, 5, 6, 8, 11\}$. Иными словами для данной перестановки $l_N = 5$. Простое графическое представление рассмотренной перестановки показано на рис. 1. Здесь 11 точек расположенных внутри квадрата размером (12×12) изображают перестановку, показанную в уравнении (1.1): каждому натуральному числу на оси x соответствует одно и только одно число на оси y (числу $x = 1$ соответствует $y = 3$,

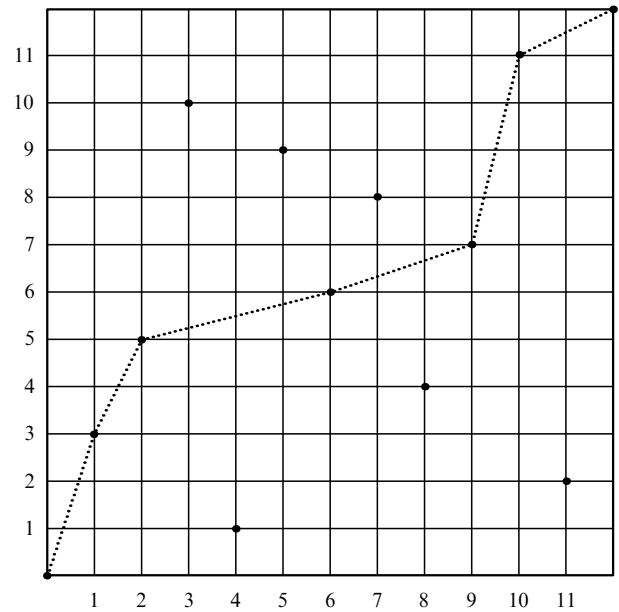


Рис. 1. Геометрическое представление перестановки, показанной в уравнении (1). Пунктирная линия изображает одну из двух самых длинных подпоследовательностей $\{3, 5, 6, 7, 11\}$.

числу $x = 2$ соответствует $y = 5$ и т.д.). Различные возрастающие подпоследовательности представляются здесь всевозможными *направленными путями*, соединяющими начало координат $(0, 0)$ с правым верхним углом квадрата $(12, 12)$ и проходящими через расположенные внутри квадрата точки. "Направленность" этих путей означает, что при переходе от точки к точке возможно движение лишь вправо и вверх. Например, из точки $(6, 6)$ на рис. 1 возможен переход лишь в точки $(7, 8)$, $(9, 7)$ и $(10, 11)$. Другими словами, при движении из точки $(0, 0)$ в точку $(12, 12)$ обе координаты x и y на каждом шаге могут лишь возрастать. В соответствии с этими правилами самая длинная подпоследовательность представляется направленным путём, проходящим через максимально возможное число точек. Заметим, что для данной перестановки самая длинная подпоследовательность не обязательно является единственной. В частности, в рассмотренном примере имеется две самых длинных подпоследовательности: $\{3, 5, 6, 7, 11\}$ и $\{3, 5, 6, 8, 11\}$.

Рассматривая все возможные перестановки из N чисел, мы обнаруживаем, что длина l_N является случайной величиной. Полагая, что все эти перестановки имеют равную вероятность, проблема формулируется следующим образом: какова функция распределения случайной величины l_N ?

Оказывается, при больших значениях N *средняя величина* самой длинной возрастающей подпоследовательности, \bar{l}_N , пропорциональна \sqrt{N} , а именно, $\bar{l}_N \simeq 2\sqrt{N}$ [21]. Более того, в пределе $N \rightarrow \infty$ наблюдается так называемое явление *самоусреднения*, а именно, $\lim_{N \rightarrow \infty} l_N / \sqrt{N} = 2$. Другими словами, это означает, что в пределе $N \rightarrow \infty$ функция распределения случайной величины l_N / \sqrt{N} сжимается в δ -функцию.

На качественном уровне легко понять, почему при больших N типичное значение величины l_N должно быть пропорционально \sqrt{N} . Действительно, при большом N произвольная перестановка чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ в терми-

нах матрицы, показанной на рис. 1, представляет собой *однородное распределение* N точек внутри квадрата $N \times N$. В этом случае плотность точек в таком квадрате будет порядка $1/N$, и, соответственно, характерное расстояние между ближайшими точками будет пропорционально \sqrt{N} . Это означает, что типичное число точек, которые окажутся на близком к диагонали пути из угла $(0, 0)$ в угол $(N + 1, N + 1)$ (имеющем длину порядка N) будет порядка $N/\sqrt{N} = \sqrt{N}$.

Однако наибольший интерес в этой системе представляет собой не сама средняя величина \bar{l}_N , а статистика *флуктуаций* случайной величины l_N вокруг её среднего значения $2\sqrt{N}$. Исследование этой проблемы оказалось весьма нетривиальным, и лишь сравнительно недавно было показано, что в пределе больших значений N характерная величина флуктуаций l_N растёт как $N^{1/6}$ (что значительно меньше её среднего значения $2\sqrt{N}$). Другими словами, при больших N случайная величина l_N может быть представлена в виде [2, 22]:

$$l_N \simeq 2\sqrt{N} + N^{1/6} s, \tag{1.2}$$

где введена новая случайная величина $s \sim 1$ и эта случайная величина в пределе $N \rightarrow \infty$ описывается универсальным не зависящим от N распределением, которое называется распределением *Трейси – Видома* (подробнее свойства этого распределения будут рассмотрены в разделе 1.5):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\frac{l_N - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}} = s \right) = P_{\text{TW}}(s). \tag{1.3}$$

1.2. Рост кристаллов со случайными зародышами

Рассмотренная выше чисто математическая "игрушечная" модель в действительности эквивалентна физической модели кристаллического роста происходящего благодаря случайно разбросанным зародышам. Это так называемая модель PNG (*polynuclear growth*) размерности $(2 + 1)$, описывающая рост двумерных монокристаллических слоёв.

Вернёмся к рис. 1, где случайно расположенные N точек будут теперь представлять собой зародыши кристаллизации. В этой модели кристаллические монослои растут в "вертикальном" направлении (по направлению к читателю) согласно следующему правилу. Из каждого зародыша мы проводим "ступеньку" монослоя горизонтально вправо и вертикально вверх до тех пор пока эта линия ступеньки не встретится с такой же линией, выходящей из другого зародыша. В результате мы получим некоторую конфигурацию "террас", поднимающихся от нижнего левого к верхнему правому углу квадрата (рис. 2).

Легко понять, что для данного (произвольного) расположения зародышей число террас h_N в рассматриваемой модели равняется размеру самой длинной возрастающей подпоследовательности l_N в комбинаторной модели перестановок, рассмотренной в разделе 1.1. В зависимости от случайного расположения зародышей внутри квадрата размера $N \times N$, число образованных монослоями террас h_N является случайной величиной, статистика которой в пределе $N \rightarrow \infty$, описывается универсальным распределением *Трейси – Видома*, как в уравнении (1.3) [5]. В настоящее время изучение всевозможных вариантов и модификаций, сформулированной выше модели кристаллического роста типа PNG, пред-

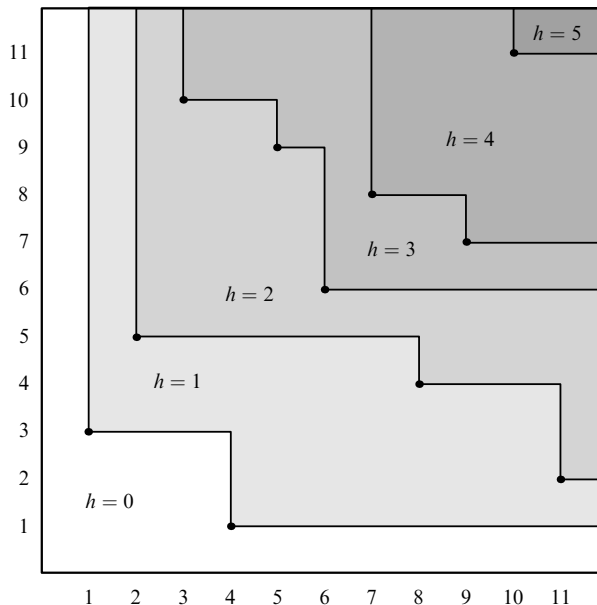


Рис. 2. Конфигурация террас монокристаллических слоёв, возникающих из случайных зародышей, положение которых соответствует модели перестановок, показанных на рис. 1.

ставляет собой обширное поле деятельности (см., например, [23]). Интересно также отметить, что совсем недавно возникновение распределения *Трейси – Видома* в моделях типа PNG было продемонстрировано экспериментально [24].

1.3. Направленные полимеры

Понятно, что если в рассмотренных выше примерах размер системы является большим, то наличие в ней "микроскопической" решётки не должно быть существенным. Таким образом, вместо того, чтобы формулировать проблему в терминах перестановок целых чисел (как в разделе 1.1), можно просто ввести однородное распределение N точек по непрерывному пространству, ограниченному квадратом (рис. 3). Введём ось "времени", которая будет выходить из начала координат (левый нижний угол квадрата) и проходить вдоль диагонали через правый верхний угол квадрата. Направленный полимер в этой модели — это путь, проходящий через случайно разбросанные точки квадрата и идущий по направлению "времени", т.е. этот путь выходит из начала координат и заканчивается в правом верхнем углу квадрата. При этом разрешены только такие "прыжки" из одной точки на другую точку, при которых временная координата пути увеличивается. Для данного случайного расположения точек мы должны выбрать такой путь, который проходит через максимально возможное число точек, и это число мы назовём "длиной" полимера. Формально, в такой формулировке проблема несколько отличается от комбинаторной задачи, сформулированной в разделе 1.1. Тем не менее можно доказать, что в пределе большого времени t и больших значений N эти две системы становятся эквивалентными [22].

Пусть размер диагонали рассматриваемого квадрата равен t . Введём вместо полного числа точек N , в качестве независимого параметра задачи плотность точек ρ и будем считать, что в пределе $t \rightarrow \infty$ этот параметр остаётся конечным. Длину направленного полимера

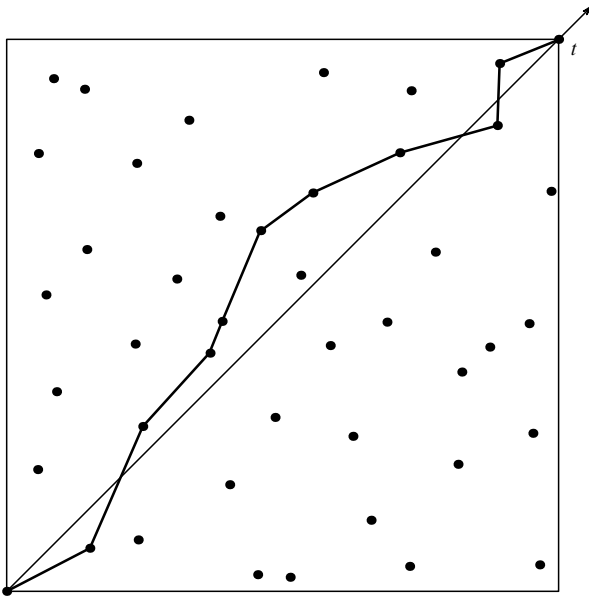


Рис. 3. Направленный путь, проходящий по случайно расположенным точкам.

(т.е. полное число пройденных им точек) $l(t)$ мы будем теперь измерять в зависимости от времени (размера квадрата) t . По определению, $\rho = 2N/t^2$. Поскольку мы рассматриваем задачу с постоянной плотностью $\rho \sim 1$, то это означает, что $t \propto \sqrt{N}$. В такой формулировке среднее значение случайной величины $l(t)$ будет пропорционально t (вместо \sqrt{N} , как в комбинаторной задаче), а характерная величина флуктуаций вокруг этого среднего значения будет порядка $t^{1/3}$ (вместо $N^{1/6}$). Соответственно вместо уравнения (1.3) для статистики флуктуаций длины направленного полимера мы будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\frac{l(t) - \sqrt{2\rho} t}{t^{1/3}} = s \right) = P_{\text{TW}}(s). \tag{1.4}$$

Таким образом, в *термодинамическом пределе*, $t \rightarrow \infty$, все три рассмотренные выше системы являются эквивалентными, что, в общем, не представляется особенно удивительным, если сравнить рис. 1 – 3.

В статистической физике проблема направленных полимеров формулируется несколько иначе. Пусть задана квадратная решётка, на которой ось дискретного времени направлена горизонтально, $t = 1, 2, \dots, L$, а вдоль вертикальной оси откладываются значения дискретного параметра $\phi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$ (рис. 4). В каждом узле решётки (ϕ, t) заданы *независимые* случайные величины $V(\phi, t)$, которые описываются гауссовым

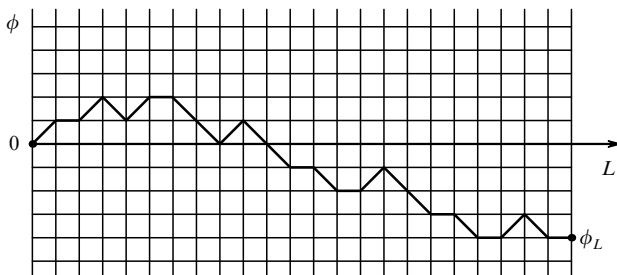


Рис. 4. Направленный полимер на квадратной решётке.

распределением

$$\mathcal{P}[V] = \prod_{\phi, t} \sqrt{\frac{1}{2\pi u}} \exp \left(-\frac{1}{2u} V^2(\phi, t) \right). \tag{1.5}$$

Здесь параметр u описывает характерную величину случайного потенциала $V(\phi, t)$. Согласно распределению (1.5), $\overline{V(\phi, t)} = 0$, и

$$\overline{V(\phi, t) V(\phi', t')} = u \delta_{\phi, \phi'} \delta_{t, t'}. \tag{1.6}$$

Направленный полимер представляет собой путь $\phi(t)$, выходящий из начала координат ($t = 0, \phi = 0$) и проходящий по узлам решётки к правой границе системы, $t = L$. На каждом шаге времени $t \rightarrow t + 1$ траектория полимера $\phi(t)$ может отклоняться вверх или вниз на один шаг, или не отклоняться совсем: $\phi(t + 1) = \phi(t) + \sigma(t + 1)$, где $\sigma = \pm 1, 0$. Предполагая, что рассматриваемый полимер представляет собой упругую струну, можно ввести (положительную) энергию изгиба полимера $\propto [\phi(t + 1) - \phi(t)]^2$. Таким образом, для заданной траектории $\phi(t)$ мы можем ввести понятие её *энергии*:

$$H[\phi(t)] = \sum_{t=1}^{L-1} \left[\frac{1}{2} [\phi(t + 1) - \phi(t)]^2 + V(\phi(t), t) \right]. \tag{1.7}$$

При заданных случайных значениях потенциала $V(\phi, t)$ это выражение содержит два конкурирующих вклада: упругая энергия пытается сделать полимер как можно более горизонтальным, тогда как второй (случайный) член "разбалтывает" траекторию, заставляет её отклоняться в поисках наиболее отрицательных значений случайного потенциала $V(\phi, t)$. Оптимальная траектория $\phi_*(t)$ определяется минимумом энергии (1.7):

$$E(L) = \min_{\phi(t)} \left\{ \sum_{t=1}^{L-1} \left[\frac{1}{2} [\phi(t + 1) - \phi(t)]^2 + V(\phi(t), t) \right] \right\}. \tag{1.8}$$

Будучи зависимой от конкретной реализации случайного потенциала $V(\phi, t)$, эта величина также является случайной. Энергию $E(L)$ можно рассматривать как аналог случайной длины направленных полимеров в предыдущей модели, показанной на рис. 3. Существенное отличие между ними состоит в том, что, во-первых, в этом последнем случае упругой энергии нет вовсе, а (отрицательные) вклады случайного потенциала представляют собой фиксированную энергию V_0 , которую несут *геометрически* случайно расположенные точки (в отличие от гауссова случайного потенциала $V(\phi, t)$) и, во-вторых, полимер на рис. 4 представляет собой локальное (с отклонениями только на один шаг) блуждание по решётке, тогда как траектории на рис. 3 позволено прыгать от точки к точке на любое расстояние и не только между ближайшими соседями. Таким образом, статистические свойства этих двух случайных величин, $E(L)$, (1.8), и $l(t)$ в модели на рис. 3, вообще говоря, вовсе не обязательно должны быть одинаковыми. Если же мы *предположим*, что в силу каких-то пока не очень понятных глубинных причин в термодинамическом пределе $t \sim L \rightarrow \infty$ эти два типа моделей становятся эквивалентными, то тогда энергия (1.8) должна зависеть от размера системы следующим образом: $E(L) \simeq f_0 L + L^{1/3} s$, где f_0 — это обычная экстенсивная (самоусредняющаяся)

плотность энергии, а случайная величина $s \sim 1$ должна описываться не зависящим от L универсальным распределением Трейси – Видома $P_{TW}(s)$.

Система, которая описывается гамильтонианом (1.7), это обычная одномерная статистическая модель, содержащая замороженный беспорядок. В том, что её энергия основного состояния $E(L)$ пропорциональна размеру системы, нет ничего удивительного. Действительно, чтобы найти глобальный минимум энергии (1.7), в первом приближении можно следовать локальному по времени алгоритму. А именно, на каждом шаге по времени среди трёх возможностей — сдвинуться вверх, вниз, или горизонтально — будем всегда выбирать ту, для которой случайная величина $V(\phi, t)$ является наименьшей (разумеется, при такой стратегии мы не учитываем траектории, которые время от времени выбирают локально невыгодный путь, но за счёт этого получают глобальный выигрыш в энергии). При таком алгоритме второй член в (1.7) будет давать вклад пропорциональный $-\sqrt{u}L$ (а не $\sqrt{u}L$, как было бы, если бы траектория $\phi(t)$ была произвольной). Так как вклад от первого (упругого) члена в (1.7) также пропорционален L , мы находим, что главный вклад в энергию оптимальной траектории $E(L) \simeq -(\text{const})L$, и более того, мы можем быть уверены, что этот вклад является отрицательным, так как энергия оптимальной траектории в отсутствие случайного потенциала равна нулю (это просто прямая горизонтальная линия), а присутствие случайного потенциала может только понизить энергию. С другой стороны, то, что поправки конечного размера дают вклад порядка $L^{1/3}$, а вовсе не $L^{1/2}$, как это обычно бывает, является весьма нетривиальным явлением, которое объяснить "на пальцах" не так уж просто.

Следует отметить, что в терминах обычной статистической механики решёточная модель (1.7), (1.8) является существенно нуль-температурной системой, поскольку здесь для данной реализации случайного потенциала мы учитываем лишь траекторию, являющуюся глобальным минимумом. Понятно, что поиск такого глобального минимума является весьма нетривиальной задачей, поскольку для этого локального по времени алгоритма вовсе недостаточно. С другой стороны, иногда, чтобы упростить себе жизнь, нужно рассмотреть более общую (т.е., вообще говоря, более сложную) проблему. Введём в рассматриваемую проблему понятие *температуры* T , и таким образом, кроме флуктуаций, связанных с присутствием случайного потенциала, мы будем иметь термодинамические флуктуации благодаря вкладам "возбуждённых" траекторий, не являющихся глобальным минимумом энергии. Другими словами, вместо энергии $E(L)$, (1.8), мы теперь будем рассматривать *свободную энергию*:

$$F(L, T) = -T \ln \left[\sum_{\phi(t)} \exp \left(-\frac{1}{T} H[\phi(t)] \right) \right], \quad (1.9)$$

где выражение под знаком логарифма представляет собой статистическую сумму, в которой суммирование производится по *всем* траекториям (выходящим из начала координат). В том случае, когда глобальный минимум в системе является единственным (что обычно имеет место в системе большого размера), энергия, определяемая уравнением (1.8), получается из свободной энергии в нуль-температурном пределе: $E(L) = \lim_{T \rightarrow 0} F(L, T)$.

Решёточная модель, определённая в уравнениях (1.7) и (1.9), является достаточно простой для численных исследований (см., например, [25]), которые, в частности, убедительно демонстрируют, что флуктуации свободной энергии в такой системе действительно растут как $\sim L^{1/3}$. С другой стороны, модель, определённая на решётке, довольно сложна для теоретических исследований. Поскольку нас, главным образом, интересует термодинамический предел $L \rightarrow \infty$, естественно было бы ожидать, что на больших масштабах (в непрерывном пределе) наличие решётки является несущественным. Переход к непрерывному пределу в гамильтониане (1.7) сделать очень просто. Подразумевая, что размер решётки стремится к нулю, и заменяя конечные разности в другом члене градиентом, мы получаем

$$H[\phi(t)] = \int_0^L d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} \right]^2 + V(\phi(\tau), \tau) \right\}, \quad (1.10)$$

где, как и раньше, случайный потенциал $V(\phi, \tau)$ описывается гауссовым распределением. Вместо дискретного соотношения (1.6), в непрерывном пределе мы будем иметь

$$\overline{V(\phi, \tau) V(\phi', \tau')} = u \delta(\phi - \phi') \delta(\tau - \tau'). \quad (1.11)$$

Статистическая сумма рассматриваемой системы теперь выражается в терминах функционального интеграла по траекториям:

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_L \int_{\phi(0)=0}^{\phi(L)=\phi_L} \mathcal{D}[\phi(\tau)] \exp(-\beta H[\phi]), \quad (1.12)$$

где $\beta = 1/T$ — обратная температура, и интегрирование идёт по всем траекториям, выходящим из начала координат, $\phi(\tau = 0) = 0$, со свободными граничными условиями при $\tau = L$. Таким образом, вместо решёточных траекторий, показанных на рис. 4, мы будем иметь непрерывные гладкие траектории, как на рис. 5. Так определённая непрерывная модель довольно неплохо поддаётся теоретическому анализу.

Прежде всего, легко понять, что в отсутствие случайного потенциала в гамильтониане (1.10), рассматриваемая модель описывает простую тепловую диффузию. Действительно, вероятность того, что в момент времени $\tau = L$ траектория приходит в точку $\phi(L) = \phi_L$, даётся статистической суммой

$$Z_0(\phi_L) = \int_{\phi(0)=0}^{\phi(L)=\phi_L} \mathcal{D}[\phi(\tau)] \exp \left\{ -\frac{1}{2T} \int_0^L d\tau \left[\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} \right]^2 \right\}. \quad (1.13)$$

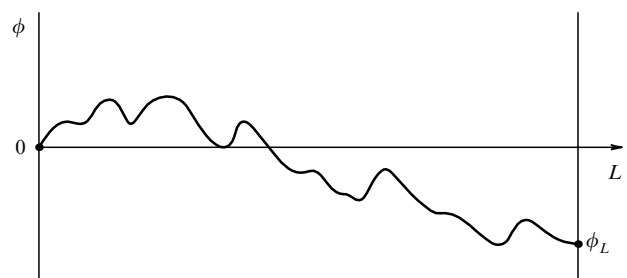


Рис. 5. Непрерывная упругая струна в случайном потенциале (1.10).

Простое гауссово интегрирование (с надлежащим выбором *меры интегрирования*, которое для статистической суммы (1.13) или (1.12) представляет собой произвольный нормировочный фактор) приводит к результату

$$Z_0(\phi_L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi TL}} \exp\left(-\frac{\phi_L^2}{2TL}\right). \quad (1.14)$$

Мы видим, что характерная величина "ухода" траектории $\langle \phi_L^2 \rangle^{1/2}$ благодаря тепловым флуктуациям растёт как $\sqrt{TL}^{1/2}$ (и исчезает в нуль-температурном пределе).

При наличии случайного потенциала ситуация становится намного сложнее. Естественно предположить, что упругая энергия и энергия, связанная со случайным потенциалом, должны быть одного порядка. Если характерное отклонение траектории равно ϕ_L , то величина упругой энергии и, соответственно, всей энергии системы, должна быть порядка ϕ_L^2/L . Таким образом, если предположить, что характерная величина флуктуаций свободной энергии в такой системе растёт как $L^{1/3}$ (а в этом уже давно нет никаких сомнений (см., например, [26–29])), то это означает, что характерная величина отклонения траектории благодаря действию случайного потенциала должна расти как $\phi_L \sim L^{2/3}$, что намного больше, чем отклонение порядка $L^{1/2}$, связанное с действием температуры.

Статистические свойства модели (1.10), (1.11) являются центральной проблемой, которая будет подробно рассматриваться в последующих разделах. Оказывается, что несмотря на довольно существенные исходные отличия этой модели от систем, рассмотренных в разделах 1.1–1.3, в термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ все эти модели не просто обнаруживают один и тот же скейлинг по параметру L , а оказываются *эквивалентными*. Центральный результат, который будет доказан далее [11–14], состоит в том, что в пределе $L \rightarrow \infty$ свободная энергия рассматриваемой системы может быть представлена в виде

$$F = f_0 L + c L^{1/3} f, \quad (1.15)$$

где f_0 — линейная плотность свободной энергии, а $c = (1/2)(\beta^5 u^2)^{1/3}$. При этом, случайная величина $f \sim 1$ (которая описывает флуктуации свободной энергии) точно так же, как и случайная величина s в уравнениях (1.2)–(1.4), описывается универсальной функцией распределения Трейси–Видома (см. раздел 1.5).

1.4. Метод реплик

Метод реплик давно и широко используется при изучении систем, содержащих замороженный беспорядок (см., например, [30, 31]). Рассмотрим модель направленных полимеров, которая описывается гамильтонианом (1.10), и для простоты ограничимся случаем нулевых граничных условий: $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Для данной реализации случайного потенциала статистическая сумма системы имеет вид

$$Z[V] = \int_{\phi(0)=0}^{\phi(L)=0} \mathcal{D}[\phi(\tau)] \exp(-\beta H[\phi, V]). \quad (1.16)$$

С другой стороны, статистическая сумма связана со свободной энергией соотношением

$$Z[V] = \exp(-\beta F[V]). \quad (1.17)$$

Свободная энергия $F[V]$ зависит от конкретной реализации случайного потенциала и поэтому тоже является величиной случайной. Возведём обе части соотношения (1.17) в *целую* степень N и произведём усреднение по реализациям случайного потенциала:

$$\overline{Z^N[V]} \equiv Z[N, L] = \overline{\exp(-\beta N F[V])}. \quad (1.18)$$

Величина $Z[N, L]$ в левой части соотношения (1.18) называется *репличной статистической суммой*. Теперь выразим случайную свободную энергию рассматриваемой системы в виде (1.15) $F = f_0 L + c L^{1/3} f$ и переопределим репличную статистическую сумму:

$$Z[N, L] = \tilde{Z}[N, L] \exp(-\beta N f_0 L). \quad (1.19)$$

В результате из соотношения (1.18) мы получаем

$$\tilde{Z}[N, L] = \overline{\exp(-\lambda N f)}, \quad (1.20)$$

где введён новый параметр $\lambda = \beta c L^{1/3}$. Усреднение в правой части соотношения (1.20), которое содержит случайную величину f , может быть представлено в терминах её функции распределения $P_L(f)$ (которая, вообще говоря, зависит от размера системы L). Таким образом, мы приходим к следующему общему соотношению между репличной статистической суммой $\tilde{Z}[N, L]$ и функцией распределения флуктуаций свободной энергии $P_L(f)$:

$$\tilde{Z}[N, L] = \int_{-\infty}^{+\infty} df P_L(f) \exp(-\lambda N f). \quad (1.21)$$

Разумеется, наибольший интерес для нас представляет функция распределения в термодинамическом пределе $P_*(f) = \lim_{L \rightarrow \infty} P_L(f)$, которая, возможно, является универсальной функцией, не содержащей никаких параметров. Нетрудно видеть, что соотношение (1.21) представляет собой двустороннее преобразование Лапласа от функции $P_L(f)$, и поэтому, по крайней мере формально, оно позволяет восстановить функцию $P_L(f)$ с помощью обратного преобразования Лапласа. Для этого функции $\tilde{Z}[N, L]$ нужно сначала вычислить для *произвольных* целых значений репличного параметра N , а затем (если это окажется возможным) произвести аналитическое продолжение этой функции на всю комплексную плоскость. К сожалению, в таком подходе очень часто подобное аналитическое продолжение является довольно сомнительной операцией [32, 33]. Даже в тех редких случаях, когда вычисление репличной статистической суммы $Z(N) = \overline{Z^N}$ может быть выполнено точно, дальнейшее аналитическое продолжение на произвольные нецелые значения N оказывается неоднозначным. Классическим примером подобной ситуации является модель случайных энергий Дерриды [34], в которой величина $Z(N)$ при больших N растёт как $\exp(N^2)$, и в этом случае оказывается, что существует бесконечно много различных функций распределения, которые дают одни и те же значения репличной статистической суммы $Z(N)$, но приводят к *различным* значениям средней свободной энергии системы. В рассматриваемом случае направленных полимеров, которые описываются гамильтонианом (1.10), ситуация оказывается ещё хуже, потому что, как мы увидим позже, репличная статистическая сумма этой системы при больших N растёт как $\exp(N^3)$, и поэтому, тем более, аналитическое продолжение на нецелые N является неоднозначным (для того, чтобы аналитиче-

ское продолжение функции $Z(N)$ с целых на произвольные значения N было однозначным, нужно, чтобы в пределе $N \rightarrow \infty$ функция $Z(N)$ росла не быстрее, чем экспоненциально). К счастью, в рассматриваемой здесь задаче оказалось возможным обойтись без аналитического продолжения на нецелые значения N . Для этого вместо самой функции распределения $P_*(f)$ мы будем рассматривать ее интегральное представление:

$$W(x) = \int_x^\infty df P_*(f). \tag{1.22}$$

Функция $W(x)$ даёт вероятность того, что значение случайной величины f превосходит заданное число x . Формально эту функцию можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} W(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{N=0}^\infty \frac{(-1)^N}{N!} \exp(\lambda N x) \overline{Z^N} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{N=0}^\infty \frac{(-1)^N}{N!} \overline{\exp(\lambda N x - \lambda N f)} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \overline{\exp[-\exp(\lambda(x-f))]} = \overline{\theta(f-x)}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Таким образом, введённая выше функция вероятности $W(x)$ может быть вычислена в терминах репличной статистической суммы $\tilde{Z}[N, L]$ путём суммирования по *целым положительным* значениям репличного параметра N :

$$W(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{N=0}^\infty \frac{(-1)^N}{N!} \exp(\lambda N x) \tilde{Z}[N, L]. \tag{1.24}$$

Разумеется, учитывая, что при больших N репличная статистическая сумма $\tilde{Z}[N, L]$ растёт как $\exp(N^3)$, мы видим, что написанный выше ряд не является таким уж невинным. В таком подходе, в соответствии с *законом сохранения неприятностей*, вместо проблемы аналитического продолжения мы сталкиваемся с проблемой формально расходящегося ряда. Тем не менее в разделе 3 будет показано, что этот *знакопеременный* расходящийся ряд может быть стандартным образом регуляризован (аналогично тому, как формально расходящийся знакопеременный ряд $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k a^k = (1+a)^{(-1)}$ при $|a| > 1$ определяется как аналитическое продолжение из области $|a| < 1$). В итоге удаётся показать, что функция $W(x)$ (1.24) рассматриваемой системы может быть выражена в терминах функции распределения Трейси–Видома, которая будет рассмотрена в следующем разделе.

1.5. Функция распределения Трейси – Видома

Первоначально распределение Трейси–Видома было получено при изучении статистических свойств случайных эрмитовых матриц с гауссовым распределением (*Gaussian Unitary Ensemble*, GUE) [1]. Пусть G_{ij} — комплексная эрмитова матрица размера $N \times N$, элементы которой являются независимыми случайными величинами, с гауссовым распределением вероятностей

$$\mathcal{P}[\mathbf{G}] = B_N \exp\left[-\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{G}^2)\right], \tag{1.25}$$

где B_N — нормировочная константа. Хорошо известно, что в таком ансамбле совместное распределение вероятностей N собственных значений $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ имеет вид

[35]:

$$\mathcal{P}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N] = C_N \prod_{i \neq j}^N |\lambda_i - \lambda_j|^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right), \tag{1.26}$$

где C_N — нормировочная константа. Используя этот результат, можно вычислить различные статистические свойства собственных значений. Простейшим таким свойством является их средняя плотность $\rho(\lambda, N) = (1/N) \sum_{i=1}^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle$, где усреднение $\langle \dots \rangle$ производится с функцией вероятности (1.26). Используя симметрию этого распределения по отношению к перестановкам собственных значений, плотность $\rho(\lambda, N)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\rho(\lambda, N) = \left[\prod_{i=2}^N \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_i \right] \mathcal{P}[\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_N]. \tag{1.27}$$

Можно показать [35], что в пределе $N \rightarrow \infty$ плотность $\rho(\lambda, N)$ представляет собой так называемый вигнеровский полукруг:

$$\rho(\lambda, N) = \sqrt{\frac{2}{N\pi^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2N}\right)}. \tag{1.28}$$

Другими словами, в пределе больших значений N , собственные значения таких матриц находятся в интервале $[-\sqrt{2N} < \lambda < \sqrt{2N}]$. Это один из центральных результатов теории случайных матриц. В частности, этот результат показывает, что в среднем максимальное собственное значение λ_{\max} рассматриваемой случайной матрицы равно $\sqrt{2N}$. Однако само это собственное значение также является случайной величиной, и можно задаться вопросом, что собой представляет распределение вероятностей максимального собственного значения λ_{\max} ? Это распределение вероятности также может быть выражено через совместную функцию вероятностей (1.26). В терминах стандартных обозначений теории случайных матриц определим функцию $F_2(s) \equiv \text{Prob}[\lambda_{\max} < s]$, которая даёт вероятность того, что максимальное собственное значение λ_{\max} не превышает наперёд заданного числа s (в этих обозначениях функции $F_1(s)$, $F_2(s)$ и $F_4(s)$ обозначают функции вероятностей в ортогональном гауссовом ансамбле (*Gaussian Orthogonal Ensemble*, GOE), в гауссовом унитарном ансамбле (*Gaussian Unitary Ensemble*, GUE) и в гауссовом симплектическом ансамбле (*Gaussian Symplectic Ensemble*, GSE) соответственно [36]). Таким образом, по определению

$$F_2(s) = \left[\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^s d\lambda_i \right] \mathcal{P}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N] \equiv \int_{-\infty}^s d\lambda P_{\text{TW}}(\lambda). \tag{1.29}$$

Именно эта проблема была решена Трейси и Видомом в 1994 г. [1]. Они показали, что при больших значениях N характерная величина флуктуаций собственного значения λ_{\max} вокруг его средней величины $\sqrt{2N}$ убывает как $N^{-1/6}$, а именно,

$$\lambda_{\max} = \sqrt{2N} + \frac{1}{\sqrt{2} N^{1/6}} s, \tag{1.30}$$

где случайная величина $s \sim 1$ описывается универсальным, не зависящим от N распределением $P_{\text{TW}}(s) = dF_2(s)/ds$. Функция $F_2(x)$ может быть представлена в

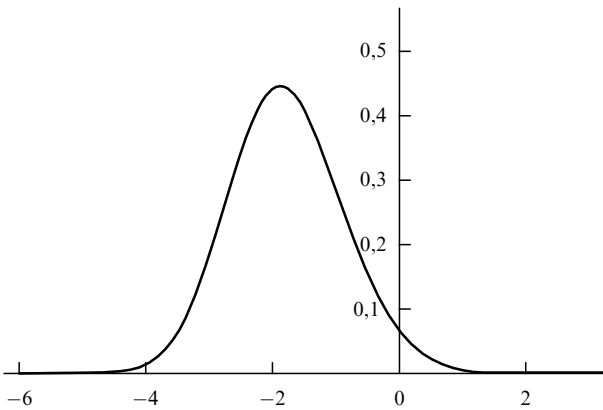


Рис. 6. Функция распределения Трейси–Видома $P_{\text{TW}}(x)$ (см. (1.32)).

явном виде следующим образом

$$F_2(s) = \exp\left(-\int_s^\infty dt (t-s)q^2(t)\right), \quad (1.31)$$

и, соответственно,

$$P_{\text{TW}}(s) = \frac{d}{ds} F_2(s) = \exp\left[-\int_s^\infty dt (t-s)q^2(t)\right] \int_s^\infty dt q^2(t), \quad (1.32)$$

где функция $q(t)$ представляет собой решение уравнения Панлевэ второго рода¹,

$$q'' = tq + 2q^3, \quad (1.33)$$

с граничным условием $q(t \rightarrow +\infty) \sim \text{Ai}(t)$. График функции $P_{\text{TW}}(s)$ показан на рис. 6. Следует отметить, что эта функция является асимметричной, так как её левая и правая асимптотики отличаются друг от друга. Тогда как правый хвост функции $P_{\text{TW}}(s)$ совпадает с асимптотической функцией Эйри, $P_{\text{TW}}(s \rightarrow +\infty) \sim \exp[-(4/3)s^{3/2}]$, её левый хвост спадает намного быстрее, $P_{\text{TW}}(s \rightarrow -\infty) \sim \exp[-(1/12)|s|^3]$.

2. Направленные полимеры и одномерные квантовые бозоны

В явном виде репличная статистическая сумма (1.18) системы, которая описывается гамильтонианом (1.10), имеет вид:

$$Z(N, L) = \prod_{a=1}^N \int_{\phi_a(0)=0}^{\phi_a(L)=0} \mathcal{D}\phi_a(\tau) \times \exp\left[-\beta \int_0^L dt \sum_{a=1}^N \left\{ \frac{1}{2} [\partial_\tau \phi_a(\tau)]^2 + V[\phi_a(\tau), \tau] \right\}\right]. \quad (2.1)$$

Поскольку случайный потенциал $V[\phi, \tau]$ описывается гауссовым распределением, усреднение по беспорядку

¹ Существует шесть типов дифференциальных уравнений Панлевэ, которые были открыты около ста лет назад [37] (см., например, обзор [38]). Доказано, что решения общего вида этих уравнений являются трансцендентными функциями, которые не могут быть выражены в терминах каких-либо известных функций, включая все спецфункции. В настоящее время уравнения Панлевэ имеют широкое применение в различных областях теоретической физики, таких как статистическая физика, физика плазмы, квантовая теория поля и гравитация.

(...) в этом уравнении выполняется очень просто:

$$\exp\left[-\beta \int_0^L dt \sum_{a=1}^N V[\phi_a(\tau), \tau]\right] = \exp\left[\frac{\beta^2}{2} \int_0^L dt \int_0^L dt' \sum_{a,b=1}^N \overline{V[\phi_a(\tau), \tau] V[\phi_b(\tau'), \tau']}\right]. \quad (2.2)$$

Используя определение (1.11), мы находим:

$$Z(N, L) = \prod_{a=1}^N \int_{\phi_a(0)=0}^{\phi_a(L)=0} \mathcal{D}\phi_a(\tau) \times \exp\left[-\frac{1}{2} \beta \int_0^L dt \left\{ \sum_{a=1}^N [\partial_\tau \phi_a(\tau)]^2 - \beta u \sum_{a,b=1}^N \delta[\phi_a(\tau) - \phi_b(\tau)] \right\}\right]. \quad (2.3)$$

Следует отметить, что второй член в выражении (2.3) содержит формально расходящиеся вклады, пропорциональные $\delta(0)$ (это члены суммы с $a = b$). В действительности, это просто одно из проявлений того, что модель (1.10), (1.11), будучи плохо определённой на малых расстояниях, требует надлежащей решёточной регуляризации. Понятно, что соответствующая решёточная модель (1.6), (1.7) не содержит никаких расходимостей, так как вклад от членов суммы с $a = b$ здесь представляет собой несущественную константу $(1/2)L\beta^2 u N \delta(0)$ (где решёточный вариант δ -функции — это символ Кронекера, имеющий конечное значение). Поскольку детали решёточной регуляризации не влияют на свойства рассматриваемой системы на больших масштабах, этот вклад в дальнейшем будет просто опущен.

Определим репличный гамильтониан,

$$H_N[\Phi] = \frac{1}{2} \int_0^L dt \left(\sum_{a=1}^N [\partial_\tau \phi_a(\tau)]^2 - \beta u \sum_{a \neq b}^N \delta[\phi_a(\tau) - \phi_b(\tau)] \right), \quad (2.4)$$

который описывает N скалярных полей $\Phi(\tau) \equiv \{\phi_1(\tau), \dots, \phi_N(\tau)\}$. В терминах этого гамильтониана репличная статистическая сумма (2.3) может быть записана стандартным образом:

$$Z(N, L) = \prod_{a=1}^N \int_{\phi_a(0)=0}^{\phi_a(L)=0} \mathcal{D}\phi_a(\tau) \exp(-\beta H_N[\Phi]). \quad (2.5)$$

Согласно этому определению, $Z(N, L)$ описывает свойства N эластичных струн $\phi_a(\tau)$ с парным притягивающим взаимодействием и с нулевыми граничными условиями. Чтобы сформулировать изложенную выше задачу в терминах одномерных квантовых бозонов, вместо репличной статистической суммы (2.5) мы введём более общий объект

$$\Psi(\mathbf{x}; t) = \prod_{a=1}^N \int_{\phi_a(0)=0}^{\phi_a(t)=x_a} \mathcal{D}\phi_a(\tau) \exp(-\beta H_N[\Phi]), \quad (2.6)$$

который описывает N эластичных струн $\phi_a(\tau)$, выходящих из начала координат, $\phi_a(0) = 0$, но при $\tau = t$ заканчивающихся в различных точках: $\{x_1, \dots, x_N\}$. Легко показать, что вместо вычисления $\Psi(\mathbf{x}; t)$ в виде интеграла по траекториям (как в определении (2.6)), эта

величина может быть получена как решение линейного дифференциального уравнения

$$\partial_t \Psi(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{2\beta} \sum_{a=1}^N \partial_{x_a}^2 \Psi(\mathbf{x}; t) + \frac{1}{2} \beta^2 u \sum_{a \neq b}^N \delta(x_a - x_b) \Psi(\mathbf{x}; t) \quad (2.7)$$

с начальными условиями

$$\Psi(\mathbf{x}; 0) = \prod_{a=1}^N \delta(x_a). \quad (2.8)$$

Легко видеть, что уравнение (2.7) представляет собой уравнение Шрёдингера с мнимым временем:

$$-\partial_t \Psi(\mathbf{x}; t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{x}; t), \quad (2.9)$$

в котором гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{1}{2\beta} \sum_{a=1}^N \partial_{x_a}^2 - \frac{1}{2} \beta^2 u \sum_{a \neq b}^N \delta(x_a - x_b). \quad (2.10)$$

В такой формулировке мы имеем систему из N бозе-частиц с массой β , парное взаимодействие между которыми представляет собой *притягивающий* потенциал вида $-\beta^2 u \delta(x)$. При этом репличная статистическая сумма исходной задачи (2.5) получается из зависящей от времени волновой функции системы бозонов $\Psi(\mathbf{x}; t)$ в момент времени $t = L$ в точке $x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0$:

$$Z(N, L) = \Psi(\mathbf{0}; L). \quad (2.11)$$

Исторически так сложилось, что при изучении подобного рода систем наибольшее внимание привлекали квантовые бозоны с *отталкиванием* (в гамильтониане (2.10) это соответствует случаю $u < 0$). Главным образом это связано с тем, что именно при таком выборе знака взаимодействия система из N бозонов в *термодинамическом пределе* $N \rightarrow \infty$ обнаруживает "правильную" экстенсивную свободную энергию, $F \propto N$. Собственные функции N -частичного бозонного гамильтониана (2.10) с отталкиванием были выведены в работах Лиеба и Линжера в 1963 г. [39] (структура и свойства этих функций описаны в приложении А; см. также [40, 41]). Система бозонов с притяжением ($u > 0$) осталась значительно менее изученной. Прежде всего это связано с тем, что подобная система имеет "неправильный" термодинамический предел, а именно $F \propto -N^3$, т.е. в пределе $N \rightarrow \infty$ в ней происходит явление "коллапса". Кроме того, как мы увидим ниже, структура состояний системы бозонов с притяжением при произвольном N значительно сложнее, чем в случае отталкивания. Энергетический спектр состояний и некоторые свойства собственных функций системы бозонов с притяжением были найдены в работах Макгюире [42] и Янга [43] в шестидесятых годах прошлого века (см. также [44, 45]). Подробное рассмотрение структуры этих волновых функций, доказательство их ортогональности и вычисление их нормировки читатель может найти в приложении Б этого обзора.

В общем случае собственное состояние N бозонов с притяжением представляет собой M ($1 \leq M \leq N$) "кластеров" $\{\Omega_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, M$) связанных частиц. Каждый

такой кластер характеризуется целочисленным параметром n_α , который показывает, сколько частиц содержится в данном кластере, и импульсом q_α , который описывает свободное движение его центра масс. При этом целочисленные параметры n_α связаны условием $\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha = N$. Соответственно собственная волновая функция такого состояния $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(x_1, \dots, x_N)$ характеризуется M непрерывными параметрами $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_M)$ и M целочисленными параметрами $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_M)$ (см. приложение Б.2, уравнение (Б.27)). Энергетический спектр таких состояний имеет вид

$$E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2\beta} \sum_{\alpha=1}^M n_\alpha q_\alpha^2 - \frac{\kappa^2}{24\beta} \sum_{\alpha=1}^M (n_\alpha^3 - n_\alpha), \quad (2.12)$$

где

$$\kappa = \beta^3 u. \quad (2.13)$$

Таким образом, зависящее от времени решение $\Psi(\mathbf{x}, t)$ уравнения Шрёдингера (2.7) с начальными условиями (2.8), может быть представлено в виде линейной комбинации собственных волновых функций $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ (см. приложение Б.4, уравнение (Б.50)):

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{M=1}^N \sum_{\mathbf{n}} \int' \mathcal{D}\mathbf{q} \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)*}(\mathbf{0}) \exp[-E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n}) t], \quad (2.14)$$

где суммирование по целочисленным параметрам n_α и интегрирование по импульсам q_α выполняются в ограниченном подпространстве (см. (Б.42)–(Б.45) и (Б.51)), которое отражает свойства симметрии собственных функций $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ по отношению к перестановкам параметров q_1, \dots, q_M и n_1, \dots, n_M . Соответственно, согласно условию (2.11), выражение для репличной статистической суммы исходной задачи о направленных полимерах может быть представлено следующим образом (см. приложение Б.4, уравнение (Б.59)):

$$Z(N, L) = \sum_{M=1}^N \frac{1}{M!} \left[\prod_{\alpha=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_\alpha}{2\pi} \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \right] \delta\left(\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha, N\right) \times |\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 \exp[-E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n}) L], \quad (2.15)$$

где благодаря симметрии функции $f(\mathbf{q}, \mathbf{n}) = |\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 \times \exp[-E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n}) L]$ по отношению к любым перестановкам всех её M пар аргументов (q_α, n_α) , интегрирование по M импульсам q_α может быть расширено на всё пространство R_M , а суммирование по целочисленным параметрам n_α связано единственным условием $\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha = N$. Для простоты, ввиду присутствия в этом выражении символа Кронекера $\delta(\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha, N)$, суммирование по параметрам n_α продолжено до бесконечности.

3. Решение задачи об одномерных направленных полимерах

Используя явный вид собственных функций $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ (Б.27), выражение для репличной статистической суммы (2.15) может быть представлено в следующем виде (см. приложение Б.4, уравнения (Б.61), (Б.62)):

$$Z(N, L) = \exp(-\beta N L f_0) \tilde{Z}(N, \lambda), \quad (3.1)$$

где величина $f_0 = (1/24)\beta^4 u^2 - (1/\beta L) \ln(\beta^3 u)$ — это линейная (самоусредняющаяся) плотность свободной энергии (см. уравнение (1.19)), и

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(N, L) = & N! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi\kappa N} \exp \left[-\frac{L}{2\beta} Nq^2 + \frac{\kappa^2 L}{24\beta} N^3 \right] + \\ & + N! \sum_{M=2}^N \frac{1}{M!} \left[\prod_{\alpha=1}^M \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_\alpha}{2\pi\kappa n_\alpha} \right] \times \\ & \times \delta \left(\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha, N \right) \prod_{\alpha < \beta} \frac{|q_\alpha - q_\beta - (i\kappa/2)(n_\alpha - n_\beta)|^2}{|q_\alpha - q_\beta - (i\kappa/2)(n_\alpha + n_\beta)|^2} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{L}{2\beta} \sum_{\alpha=1}^M n_\alpha q_\alpha^2 + \frac{\kappa^2 L}{24\beta} \sum_{\alpha=1}^M n_\alpha^3 \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Первый член в этом выражении представляет собой вклад основного состояния ($M=1$), а все остальные члены ($M \geq 2$) — это вклад от возбуждённых состояний.

Кубические по n_α члены в выражении (3.2) могут быть линейризованы с помощью функции Эйри (см. приложение В):

$$\exp \left(\frac{1}{3} \lambda^3 n^3 \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \operatorname{Ai}(y) \exp(\lambda n). \quad (3.3)$$

Переопределяя импульс $q_\alpha = (\beta\kappa/L)^{1/3} p_\alpha$ и вводя новый параметр

$$\lambda(L) = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\beta} \kappa^2 \right)^{1/3} = \frac{1}{2} (\beta^5 u^2 L)^{1/3}, \quad (3.4)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(N, \lambda) = & N! \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy dp}{4\pi\lambda N} \operatorname{Ai}(y) \exp[\lambda N(y - p^2)] + \\ & + N! \sum_{M=2}^N \frac{1}{M!} \left\{ \prod_{\alpha=1}^M \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_\alpha dp_\alpha}{4\pi\lambda n_\alpha} \operatorname{Ai}(y_\alpha) \times \right. \\ & \times \exp[\lambda n_\alpha(y_\alpha - p_\alpha^2)] \left. \right\} \times \\ & \times \prod_{\alpha < \beta} \frac{|\lambda(n_\alpha - n_\beta) - i(p_\alpha - p_\beta)|^2}{|\lambda(n_\alpha + n_\beta) - i(p_\alpha - p_\beta)|^2} \delta \left(\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha, N \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Сдвигая параметры интегрирования: $y_\alpha \rightarrow y_\alpha + p_\alpha^2$, мы приходим к следующему достаточно компактному выражению:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(N, \lambda) = & N! \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy dp}{4\pi\lambda N} \operatorname{Ai}(y + p^2) \exp(\lambda Ny) + \\ & + N! \sum_{M=2}^N \frac{1}{M!} \left[\prod_{\alpha=1}^M \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_\alpha dp_\alpha}{4\pi\lambda n_\alpha} \times \right. \\ & \times \operatorname{Ai}(y_\alpha + p_\alpha^2) \exp(\lambda n_\alpha y_\alpha) \left. \right] \times \\ & \times \prod_{\alpha < \beta} \frac{|\lambda(n_\alpha - n_\beta) - i(p_\alpha - p_\beta)|^2}{|\lambda(n_\alpha + n_\beta) - i(p_\alpha - p_\beta)|^2} \delta \left(\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha, N \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Теперь, используя тождество Коши (так называемое *Cauchy double alternant identity*)

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{\alpha < \beta} (a_\alpha - a_\beta)(b_\alpha - b_\beta)}{\prod_{\alpha, \beta=1}^M (a_\alpha - b_\beta)} = \\ = (-1)^{M(M-1)/2} \det \left[\frac{1}{a_\alpha - b_\beta} \right]_{\alpha, \beta=1, \dots, M}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где в данном случае $a_\alpha = p_\alpha - i\lambda n_\alpha$ и $b_\alpha = p_\alpha + i\lambda n_\alpha$, предэкспоненциальное произведение в выражении (3.6) может быть представлено в виде детерминанта:

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha < \beta} \frac{|\lambda(n_\alpha - n_\beta) - i(p_\alpha - p_\beta)|^2}{|\lambda(n_\alpha + n_\beta) - i(p_\alpha - p_\beta)|^2} = \\ = \left[\prod_{\alpha=1}^M (2\lambda n_\alpha) \right] \det \left[\frac{1}{\lambda n_\alpha - ip_\alpha + \lambda n_\beta + ip_\beta} \right]_{\alpha, \beta=1, \dots, M}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Теперь, подставляя полученное выражение для репличной статистической суммы $\tilde{Z}(N, \lambda)$ в определение интегральной функции вероятности (1.24), мы можем выполнить суммирование по N , в котором, благодаря наличию символа Кронекера, вклад даёт единственное значение $N = \sum_{\alpha=1}^M n_\alpha$. В результате мы находим

$$\begin{aligned} W(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \sum_{M=1}^{\infty} \frac{(-1)^M}{M!} \left[\prod_{\alpha=1}^M \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_\alpha dp_\alpha}{2\pi} \operatorname{Ai}(y_\alpha + p_\alpha^2) \times \right. \right. \\ \times \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} (-1)^{n_\alpha-1} \exp(\lambda n_\alpha(y_\alpha + x)) \left. \right] \times \\ \times \det \left[\frac{1}{\lambda n_\alpha - ip_\alpha + \lambda n_\beta + ip_\beta} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Нетрудно видеть, что полученное выражение представляет собой разложение детерминанта Фредгольма $\det(1 - \hat{K})$ (см. приложение Г, а также книгу [46]) с ядром

$$\begin{aligned} \hat{K} \equiv K[(n, p); (n', p')] = \\ = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy \operatorname{Ai}(y + p^2) (-1)^{n-1} \exp(\lambda n(y + x)) \right] \times \\ \times \frac{1}{\lambda n - ip + \lambda n' + ip'}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя экспоненциальное представление этого детерминанта, мы получаем

$$W(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \exp \left[- \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M} \operatorname{Tr} \hat{K}^M \right], \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \hat{K}^M = \left[\prod_{\alpha=1}^M \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_\alpha dp_\alpha}{2\pi} \operatorname{Ai}(y_\alpha + p_\alpha^2) \times \right. \\ \times \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} (-1)^{n_\alpha-1} \exp(\lambda n_\alpha(y_\alpha + x)) \left. \right] \times \\ \times \left[(\lambda n_1 - ip_1 + \lambda n_2 + ip_2)(\lambda n_2 - ip_2 + \lambda n_3 + ip_3) \dots \right. \\ \left. \dots (\lambda n_M - ip_M + \lambda n_1 + ip_1) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставляя в это выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda n_\alpha - ip_\alpha + \lambda n_{\alpha+1} + ip_{\alpha+1}} = \\ = \int_0^\infty d\omega_\alpha \exp[-(\lambda n_\alpha - ip_\alpha + \lambda n_{\alpha+1} + ip_{\alpha+1})\omega_\alpha], \end{aligned} \quad (3.13)$$

мы теперь можем легко выполнить суммирование по целочисленным параметрам n_α . Учитывая, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \exp(\lambda n z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\exp(\lambda z)}{1 + \exp(\lambda z)} = \theta(z), \quad (3.14)$$

мы находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{Tr} \hat{K}^M = \prod_{\alpha=1}^M \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy_{\alpha} dp_{\alpha}}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega_{\alpha} \text{Ai}(y_{\alpha} + p_{\alpha}^2) \times \\ \times \theta(y_{\alpha} + x - \omega_{\alpha} - \omega_{\alpha-1}) \exp[ip_{\alpha}(\omega_{\alpha} - \omega_{\alpha-1})], \quad (3.15)$$

где по определению считается, что $\omega_0 \equiv \omega_M$. Сдвигая параметры интегрирования, $y_{\alpha} \rightarrow y_{\alpha} - x + \omega_{\alpha} + \omega_{\alpha-1}$ и $\omega_{\alpha} \rightarrow \omega_{\alpha} + x/2$, мы получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{Tr} \hat{K}^M = \prod_{\alpha=1}^M \int_0^{\infty} dy_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_{\alpha}}{2\pi} \times \\ \times \int_{-x/2}^{\infty} d\omega_{\alpha} \text{Ai}(y_{\alpha} + p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha} + \omega_{\alpha-1}) \exp[ip_{\alpha}(\omega_{\alpha} - \omega_{\alpha-1})]. \quad (3.16)$$

Используя интегральное представление функции Эйри и учитывая, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, $\text{Ai}''(t) = t \text{Ai}(t)$, можно легко доказать следующие интегральные соотношения (см. приложение В):

$$\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \text{Ai}(y + p^2 + \omega + \omega') \exp[ip(\omega - \omega')] = \\ = 2^{-1/3} \int_0^{\infty} dy \text{Ai}(2^{1/3}\omega + y) \text{Ai}(2^{1/3}\omega' + y) = \\ = \frac{\text{Ai}(2^{1/3}\omega) \text{Ai}'(2^{1/3}\omega') - \text{Ai}'(2^{1/3}\omega) \text{Ai}(2^{1/3}\omega')}{\omega - \omega'}. \quad (3.17)$$

Переопределяя $\omega_{\alpha} \rightarrow \omega_{\alpha} 2^{-1/3}$, мы находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{Tr} \hat{K}^M = \iint \dots \int_{-x/2^{2/3}}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_M \times \\ \times K_A(\omega_1, \omega_2) K_A(\omega_2, \omega_3) \dots K_A(\omega_M, \omega_1), \quad (3.18)$$

где

$$K_A(\omega, \omega') = \frac{\text{Ai}(\omega) \text{Ai}'(\omega') - \text{Ai}'(\omega) \text{Ai}(\omega')}{\omega - \omega'} \quad (3.19)$$

— так называемое ядро Эйри. Таким образом, мы доказали, что в термодинамическом пределе интегральная функция вероятности $W(x)$ (см. (1.22)) определяется детерминантом Фредгольма

$$W(x) = \det[1 - \hat{K}_A] \equiv F_2\left(-\frac{x}{2^{2/3}}\right), \quad (3.20)$$

где \hat{K}_A — интегральный оператор, определённый на полубесконечной прямой $[-x/2^{2/3}, \infty)$ с ядром Эйри (3.19). Функция, обычно обозначаемая как $F_2(s)$, и есть распределение Трейси–Видома. Можно показать (см. приложение Г), что эта функция может быть представлена в явном виде следующим образом:

$$F_2(s) = \exp\left(-\int_s^{\infty} dt (t-s) q^2(t)\right), \quad (3.21)$$

где функция $q(t)$ представляет собой решение дифференциального уравнения Панлевэ второго рода $q'' =$

$= tq + 2q^3$ с граничным условием $q(t \rightarrow +\infty) \sim \text{Ai}(t)$. Заметим, что согласно (1.22), (1.32) и (3.20) $P_*(x) = 2^{-2/3} P_{\text{TW}}(-2^{-2/3}x)$.

4. Заключение

Первый прорыв в изучении статистических свойств одномерных направленных полимеров в случайной среде был сделан много лет назад в работе Кардара [29], в которой проблема была сведена к N -частичной системе квантовых бозонов с притягивающим парным взаимодействием. Поскольку главный интерес вызывают свойства системы в термодинамическом пределе, первоначально ограничиться вкладом основного состояния, энергия которого была хорошо известна.

Действительно, каково бы ни было число частиц $N > 1$, в пределе, когда размер системы L стремится к бесконечности, вклады возбуждённых состояний экспоненциально малы по сравнению с вкладом основного состояния. Таким образом, в терминах этого подхода было показано, что при $L \rightarrow \infty$ флуктуации свободной энергии растут как $L^{1/3}$, а типичная величина отклонений направленного полимера растёт как $L^{2/3}$, что, в частности, прекрасно согласовывалось с численными исследованиями.

Более детальное исследование этого подхода показало, однако, что в нём содержатся серьёзные патологии. В частности, оказалось, что *второй кумулянт* свободной энергии, $(\overline{F^2} - \overline{F}^2)$, здесь тождественно равен нулю, а это возможно лишь в двух случаях: либо величина F не является случайной (но тогда, откуда берутся флуктуации, которые растут как $L^{1/3}$?), либо если функция распределения величины F не является положительно определённой, что лишено какого-либо физического смысла. Простой математический анализ показал, что корень этой патологии скрывается в "магии реплик": с одной стороны, все вычисления делаются в предположении, что параметр N (число частиц) является целочисленным, а с другой стороны, оказывается, что в термодинамическом пределе, $L \rightarrow \infty$, область значений параметра N , которая определяет физические свойства исходной неупорядоченной системы, находится в области $N \rightarrow 0$. Другими словами, метод реплик предполагает *аналитическое продолжение* результата, полученного для произвольных целых значений N в область $N \rightarrow 0$. Не говоря уже о том, что такое аналитическое продолжение далеко не всегда однозначно (см., например, [33, 34]), любые приближения при вычислении репличной статистической суммы (при целом значении N) крайне противопоказаны, если имеется в виду изучать область $N \rightarrow 0$.

В рассматриваемом случае репличных вычислений для направленных полимеров, ошибка состоит в том, что неучтённые вклады возбуждённых состояний, экспоненциально малые по L при целых положительных $N > 1$, оказываются существенными в области $N \rightarrow 0$, которая определяет свойства функции распределения флуктуаций свободной энергии $P_*(f) = \lim_{L \rightarrow \infty} P_L(f)$. Другими словами, проблема состоит в том, что два предела $L \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow 0$ не коммутируют друг с другом [47, 48].

Тем не менее приближение, при котором не учитываются возбуждённые состояния N -частичной бозонной

системы, оказалось вполне разумным для вычисления *левого хвоста* функции распределения $P_*(f)$ (т.е. асимптотического поведения этой функции в пределе $f \rightarrow -\infty$). Предполагая, что скейлинг флуктуаций свободной энергии $L^{1/3}$ является универсальным свойством $P_*(f)$, оказалось возможным показать, что левый хвост этой функции распределения совпадает с асимптотикой функции Эйри: $P_*(f \rightarrow -\infty) \sim \exp(-(2/3)|f|^{3/2})$ [49].

Впервые асимптотика *правого хвоста* этой функции распределения, $P_*(f \rightarrow +\infty) \sim \exp[-(\text{const})f^3]$, была выведена в работах Коршунова и Колоколова [50], так называемым методом оптимальной флуктуации. Таким образом было показано, что не только левая, но и правая асимптотика функции распределения свободной энергии направленных полимеров $P_*(f)$ согласуется с распределением Трейси–Видома [1], про которое к тому времени было уже хорошо известно, что оно описывает статистические свойства множества других случайных систем [2–7].

Впервые функция распределения Трейси–Видома для направленных полимеров в случайной среде с локальными корреляциями была выведена в терминах распределения решений уравнения KPZ [8–10], которое, в частности, описывает рост доменных стенок между различными упорядоченными фазами и которое эквивалентно рассматриваемой системе. Практически одновременно с этим было, наконец, найдено точное решение задачи об одномерных направленных полимерах методом реплик, которое в терминах N -частичной системы квантовых бозонов потребовало выполнить суммирование по всему спектру возбуждённых состояний [11–14]. Это вычисление позволило вывести полную функцию распределения флуктуаций свободной энергии системы и доказать, что она совпадает с функцией распределения Трейси–Видома. Первоначально функция распределения Трейси–Видома (уравнение (3.21), рис. 6) была выведена для чисто математической задачи, а именно, как распределение значений максимального собственного значения случайной эрмитовой матрицы размера $N \times N$ в пределе $N \rightarrow \infty$ [1].

Удивительным образом, со временем оказалось, что эта функция описывает статистические свойства множества физических случайных систем, иногда похожих, а иногда и не очень похожих друг на друга. Поскольку речь идёт не о каких-то частных совпадающих свойствах, а о целой универсальной (не содержащей никаких параметров) функции распределения, мы, по-видимому, вправе говорить здесь о явлении "суперуниверсальности" для целого класса случайных систем.

В этом обзоре изложено точное решение задачи, которая оставалась нерешённой в течение почти тридцати лет. Следует подчеркнуть, что это точное решение найдено *методом реплик* — крайне редкий, если не первый случай, когда решение нетривиальной задачи получено без использования столь характерных для этого метода сугубо эвристических "магических операций", из-за которых всегда казалось, что термины "метод реплик" и "точное решение" есть "две вещи несовместные". Конечно, когда найдено точное решение, в этом есть и элемент печали: поставлена точка, можно уходить, и не всегда для этого есть силы и мужество. Но с другой стороны, остаётся созданная этим решением методология, математический аппарат, а рядом — великое множество других задач, ждущих своего решения...

5. Приложение А

Квантовые бозоны с отталкиванием

А.1. Собственные функции

Уравнение на собственные состояния N -частичной системы одномерных квантовых бозонов с δ -взаимодействием имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \partial_{x_a}^2 \Psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \kappa \sum_{a \neq b}^N \delta(x_a - x_b) \Psi(\mathbf{x}) = -\beta E \Psi(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1})$$

(где $\kappa = \beta^3 u$). Благодаря симметрии волновой функции по отношению к любым перестановкам её аргументов достаточно рассмотреть её внутри сектора

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N \quad (\text{A.2})$$

и на его границе. Внутри этого сектора волновая функция $\Psi(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \partial_{x_a}^2 \Psi(\mathbf{x}) = -\beta E \Psi(\mathbf{x}), \quad (\text{A.3})$$

которое описывает N свободных частиц. Его общее решение представляет собой линейную комбинацию N плоских волн, которые характеризуются N импульсами $\{q_1, q_2, \dots, q_N\} \equiv \mathbf{q}$. Интегрируя уравнение (A.1) по переменной $(x_{i+1} - x_i)$ в малом интервале вокруг нуля, так что $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon \rightarrow 0$, и предполагая, что остальные переменные $\{x_j\}$ (где $j \neq i, i+1$) находятся внутри сектора (A.2), легко показать, что волновая функция $\Psi(\mathbf{x})$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$(\partial_{x_{i+1}} - \partial_{x_i} + \kappa) \Psi(\mathbf{x}) \Big|_{x_{i+1}=x_i+0} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Общее выражение для функции, удовлетворяющей как уравнению (A.3), так и граничным условиям (A.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{q_1 \dots q_N}(x_1, \dots, x_N) &\equiv \Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}) = \\ &= C \left(\prod_{a < b}^N [\partial_{x_a} - \partial_{x_b} + \kappa] \right) \det [\exp(iq_c x_d)]_{(c,d)=1, \dots, N}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

где C — нормировочная константа, которую мы определим позднее. Действительно, будучи линейной комбинацией плоских волн, приведённая выше волновая функция очевидным образом удовлетворяет уравнению (A.3). Чтобы показать, что эта функция удовлетворяет граничным условиям (A.4), для простоты рассмотрим случай $i=1$. Согласно уравнению (A.5), волновая функция $\Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x})$ может быть представлена в виде

$$\Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}) = -(\partial_{x_2} - \partial_{x_1} - \kappa) \tilde{\Psi}_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.6})$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}) &= C \left(\prod_{a=3}^N [\partial_{x_1} - \partial_{x_a} + \kappa] [\partial_{x_2} - \partial_{x_a} + \kappa] \right) \times \\ &\times \left(\prod_{3 \leq a < b}^N [\partial_{x_a} - \partial_{x_b} + \kappa] \right) \det [\exp(iq_c x_d)]_{(c,d)=1, \dots, N}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Легко видеть, что эта функция *антисимметрична* по отношению к перестановке x_1 и x_2 . Подставляя (A.6) в

(А.4) (с $i = 1$) мы получаем

$$-[(\partial_{x_2} - \partial_{x_1})^2 - \kappa^2] \tilde{\Psi}_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}) \Big|_{x_2=x_1} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Ввиду антисимметрии левой части уравнения (А.8) по отношению к перестановкам x_1 и x_2 приведённое выше условие действительно удовлетворяется на границе $x_1 = x_2$.

Поскольку собственная функция $\Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x})$, удовлетворяющая уравнению (А.1), должна быть *симметричной* по отношению к перестановкам её аргументов, функция (А.5) может быть легко продолжена за пределы сектора (А.2) на всё пространство переменных $\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in R_N$:

$$\Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}) = C \left(\prod_{a < b}^N [-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b)] \right) \times \det [\exp(iq_c x_d)]_{(c,d)=1,\dots,N}, \quad (\text{A.9})$$

где, по определению, дифференциальный оператор ∂_{x_a} действует лишь на экспоненциальные члены и не действует на функции $\operatorname{sgn}(x)$ в предэкспоненциальном факторе. Для дальнейшего удобства мы произвели переопределение нормировочной константы: $i^{N(N-1)/2} C \rightarrow C$. В явном виде детерминант в уравнении (А.9) может быть записан следующим образом

$$\det [\exp(iq_c x_d)]_{(c,d)=1,\dots,N} = \sum_P (-1)^{|P|} \exp \left[i \sum_{a=1}^N q_{p_a} x_a \right], \quad (\text{A.10})$$

где суммирование производится по всем возможным перестановкам N импульсов $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ по N частицам $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, а $|P|$ обозначает чётность перестановки. Таким образом, волновые функции (А.9) приобретают вид

$$\Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}) = C \sum_P (-1)^{|P|} \times \left(\prod_{a < b}^N [-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b)] \right) \exp \left[i \sum_{a=1}^N q_{p_a} x_a \right]. \quad (\text{A.11})$$

Производя дифференцирование, мы получаем

$$\Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}) = C \sum_P (-1)^{|P|} \left(\prod_{a < b}^N [q_{p_a} - q_{p_b} + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b)] \right) \times \exp \left[i \sum_{a=1}^N q_{p_a} x_a \right]. \quad (\text{A.12})$$

Очевидно, что волновые функции $\Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x})$ *антисимметричны* по отношению к перестановкам импульсов q_1, \dots, q_N . Наконец, подставляя выражение для волновой функции (А.5) (которое справедливо в секторе (А.2)) в уравнение (А.3), мы находим энергетический спектр:

$$E(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\beta} \sum_{a=1}^N q_a^2. \quad (\text{A.13})$$

А.2. Ортонормальность собственных функций

Покажем, что найденные выше собственные функции с различными значениями импульсов ортогональны друг

другу. Рассмотрим две функции $\Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x})$ и $\Psi_{\mathbf{q}'}^{(N)}(\mathbf{x})$, предполагая, что

$$q_1 < q_2 < \dots < q_N, \quad (\text{A.14})$$

$$q'_1 < q'_2 < \dots < q'_N.$$

Используя представление (А.11), для *перекрытия* этих двух функций мы находим следующее выражение

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{\mathbf{q}'}^{(N)*}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x})} &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \Psi_{\mathbf{q}'}^{(N)*}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x}) = \\ &= |C|^2 \sum_{P, P'} (-1)^{|P|+|P'|} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \left\{ \left(\prod_{a < b}^N [i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b)] \right) \exp \left[-i \sum_{a=1}^N q'_{p'_a} x_a \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \left(\prod_{a < b}^N [-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b)] \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[i \sum_{a=1}^N q_{p_a} x_a \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{\mathbf{q}'}^{(N)*}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x})} &= \\ &= |C|^2 \sum_{P, P'} (-1)^{|P|+|P'|} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \exp \left[-i \sum_{a=1}^N q'_{p'_a} x_a \right] \times \\ &\quad \times \left(\prod_{a < b}^N [-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) - i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b)] \right) \times \\ &\quad \times [-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b)] \exp \left[i \sum_{a=1}^N q_{p_a} x_a \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

или

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{\mathbf{q}'}^{(N)*}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x})} &= \\ &= |C|^2 \sum_{P, P'} (-1)^{|P|+|P'|} \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \exp \left[-i \sum_{a=1}^N q'_{p'_a} x_a \right] \times \\ &\quad \times \left(\prod_{a < b}^N [-(\partial_{x_a} - \partial_{x_b})^2 + \kappa^2] \right) \exp \left[i \sum_{a=1}^N q_{p_a} x_a \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Производя дифференцирование и интегрируя по координатам, мы находим

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{\mathbf{q}'}^{(N)*}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{q}}^{(N)}(\mathbf{x})} &= \\ &= |C|^2 \sum_{P, P'} (-1)^{|P|+|P'|} \left(\prod_{a < b}^N [(q_{p_a} - q_{p_b})^2 + \kappa^2] \right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \exp \left[i \sum_{a=1}^N (q_{p_a} - q'_{p'_a}) x_a \right] = \\ &= |C|^2 \sum_{P, P'} (-1)^{|P|+|P'|} \left(\prod_{a < b}^N [(q_{p_a} - q_{p_b})^2 + \kappa^2] \right) \times \\ &\quad \times \left[\prod_{a=1}^N (2\pi) \delta(q_{p_a} - q'_{p'_a}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Учитывая, что значения импульсов ограничены секторами (А.14), легко видеть, что ненулевой вклад в этом выражении дают лишь члены с совпадающими перестановками импульсов, $P = P'$, и все эти вклады одинаковы. Учитывая, что общее число перестановок равно $N!$, мы получаем выражение, являющееся условием ортогональности собственных волновых функций:

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{q'}^{(N)*}(\mathbf{x}) \Psi_q^{(N)}(\mathbf{x})} &= \\ &= |C|^2 N! \left(\prod_{a < b}^N [(q_a - q_b)^2 + \kappa^2] \right) \left[\prod_{a=1}^N (2\pi) \delta(q_a - q'_a) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Таким образом, для того чтобы этот набор функций был ортонормальным, нормировочная константа должна иметь следующее значение:

$$|C(\mathbf{q})|^2 = \frac{1}{N! \prod_{a < b}^N [(q_a - q_b)^2 + \kappa^2]}. \quad (\text{A.20})$$

Доказательство *полноты* этого набора функций можно найти в книге [41]. Следует отметить, что рассмотренные выше собственные волновые функции проблемы (А.1) представляют собой ортонормальный набор при любом знаке параметра взаимодействия κ , т.е. как для случая отталкивания, $\kappa < 0$, так и для случая притяжения, $\kappa > 0$. Важно, однако, что только лишь в случае отталкивания этот набор является *полным*. Оказывается, что в случае притяжения, при $\kappa > 0$, кроме решений вида (А.11), которые описывают непрерывный спектр, или состояния свободных частиц, имеется целое семейство дискретных решений совершенно другого типа, которые описывают связанные состояния частиц. Детальному рассмотрению состояний этого типа посвящено математическое приложение Б.

Приложение Б Квантовые бозоны с притяжением

Б.1. Основное состояние

Простейшим примером связанного состояния уравнения (А.1) (с $\kappa > 0$) является волновая функция, в которой все N частиц связаны в один "кластер":

$$\Psi_q^{(1)}(\mathbf{x}) = C \exp \left[i q \sum_{a=1}^N x_a - \frac{1}{4} \kappa \sum_{a,b=1}^N |x_a - x_b| \right]. \quad (\text{Б.1})$$

Здесь C — нормировочная константа, которую мы определим позднее, а параметр q — импульс, который описывает свободное движение центра масс всех N частиц. Подставляя эту функцию в уравнение (А.1), легко проверить, что это действительно собственная функция рассматриваемой задачи, а энергия этого состояния дается выражением

$$E = -\frac{1}{2\beta} \sum_{a=1}^N \left[i q - \frac{1}{2} \kappa \sum_{b=1}^N \text{sgn}(x_a - x_b) \right]^2. \quad (\text{Б.2})$$

Поскольку величина энергии E в выражении (Б.2) не зависит от порядка расположения частиц, предположим для простоты, что частицы упорядочены согласно праву (А.2). В этом случае, подставляя хорошо известные

соотношения

$$\sum_{b=1}^N \text{sgn}(x_a - x_b) = -(N+1-2a), \quad (\text{Б.3})$$

$$\sum_{a=1}^N a = \frac{1}{2} N(N+1), \quad (\text{Б.4})$$

$$\sum_{a=1}^N a^2 = \frac{N}{6} (N+1)(2N+1) \quad (\text{Б.5})$$

в выражение (Б.2), мы получаем

$$E = \frac{N}{2\beta} q^2 - \frac{\kappa^2}{24\beta} (N^3 - N) \equiv E_1(q, N). \quad (\text{Б.6})$$

Нормировочная константа C определяется условием ортонормированности

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{q'}^{(1)*}(\mathbf{x}) \Psi_q^{(1)}(\mathbf{x})} &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_N \Psi_{q'}^{(1)*}(\mathbf{x}) \Psi_q^{(1)}(\mathbf{x}) = \\ &= (2\pi) \delta(q - q'). \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Подставляя сюда (Б.1), получаем

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{q'}^{(1)*}(\mathbf{x}) \Psi_q^{(1)}(\mathbf{x})} &= |C|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_N \times \\ &\times \exp \left[i(q - q') \sum_{a=1}^N x_a - \frac{1}{2} \kappa \sum_{a,b=1}^N |x_a - x_b| \right] = \\ &= |C|^2 N! \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{x_1}^{+\infty} dx_2 \dots \\ &\dots \int_{x_{N-1}}^{+\infty} dx_N \exp \left[i(q - q') \sum_{a=1}^N x_a + \kappa \sum_{a=1}^N (N+1-2a)x_a \right], \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

где для частиц, упорядоченных согласно (А.2), мы использовали соотношение

$$\frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N |x_a - x_b| = -\sum_{a=1}^N (N+1-2a)x_a. \quad (\text{Б.9})$$

Интегрируя по x_N , затем по x_{N-1} и так далее вплоть до x_1 , находим

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{q'}^{(1)*}(\mathbf{x}) \Psi_q^{(1)}(\mathbf{x})} &= |C|^2 N! \left(\prod_{r=1}^{N-1} \frac{1}{r[(N-r)\kappa - i(q - q')]} \right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \exp [iN(q - q')x_1] = \\ &= |C|^2 N! \left(\prod_{r=1}^{N-1} \frac{1}{r(N-r)\kappa} \right) (2\pi) \delta(N(q - q')) = \\ &= |C|^2 \frac{N\kappa}{N! \kappa^N} (2\pi) \delta(q - q'). \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

Согласно условию (Б.7) этот результат определяет величину нормировочной константы:

$$C = \sqrt{\frac{\kappa^N N!}{\kappa^N}} \equiv C^{(1)}(q). \quad (\text{Б.11})$$

Заметим, что рассмотренное выше собственное состояние с волновой функцией (Б.1) существует только для системы частиц с притяжением, $\kappa > 0$. В противном случае, при $\kappa < 0$, эта волновая функция расходится на бесконечности и, следовательно, не является нормируемой.

Следует отметить, что волновая функция (Б.1) может быть также получена из общего выражения для волновых функций (А.12), если мы допустим, что у импульсов q_a может существовать мнимая часть. Предположим снова, что положения частиц упорядочены согласно (А.2) и определим значения импульсов следующим образом:

$$q_a = q - \frac{i}{2} \kappa(N + 1 - 2a). \quad (\text{Б.12})$$

Подставляя эти значения q_a в общее выражение (А.12), мы находим

$$\begin{aligned} \Psi_q^{(1)}(x_1 < x_2 < \dots < x_N) \propto & \sum_P (-1)^{|P|} \left(\prod_{a < b}^N \left[\left(q - \frac{i}{2} \kappa(N + 1 - 2P_a) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(q - \frac{i}{2} \kappa(N + 1 - 2P_b) \right) - i\kappa \right] \right) \times \\ & \times \exp \left[iq \sum_{a=1}^N x_a + \frac{\kappa}{2} \sum_{a=1}^N (N + 1 - 2P_a)x_a \right] \propto \\ & \propto \sum_P (-1)^{|P|} \left(\prod_{a < b}^N [P_b - P_a + 1] \right) \times \\ & \times \exp \left[iq \sum_{a=1}^N x_a + \frac{\kappa}{2} \sum_{a=1}^N (N + 1 - 2P_a)x_a \right]. \quad (\text{Б.13}) \end{aligned}$$

Легко видеть, что благодаря присутствию предэкспоненциального фактора $\prod_{a < b}^N [P_b - P_a + 1]$ при суммировании по всем перестановкам ненулевой вклад даёт лишь "тривиальная" перестановка $P_a = a$ (если мы поменяем местами любые два числа в последовательности $1, 2, \dots, N$, мы всегда сможем найти два таких номера $a < b$, что $P_b = P_a - 1$). Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi_q^{(1)}(x_1 < x_2 < \dots < x_N) \propto & \exp \left[iq \sum_{a=1}^N x_a + \frac{\kappa}{2} \sum_{a=1}^N (N + 1 - 2a)x_a \right]. \quad (\text{Б.14}) \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (Б.9), мы получаем волновую функцию (Б.1), которая благодаря симметрии по отношению к любым перестановкам её N аргументов, может быть легко продолжена за пределы сектора (А.2). Наконец, подставляя (Б.12) в общее выражение для спектра энергий (А.13), мы находим

$$E = \frac{1}{2\beta} \sum_{a=1}^N \left[q - \frac{i}{2} \kappa(N + 1 - 2a) \right]^2. \quad (\text{Б.15})$$

Простое суммирование (с использованием соотношений (Б.4) и (Б.5)) приводит к результату (Б.6).

Б.2. Собственные функции

В общем случае волновая функция системы из N бозонов с притяжением описывается N параметрами $\{q_a\}$ ($a = 1, 2, \dots, N$), которые могут иметь мнимую часть. Для того чтобы описать общую структуру этих параметров, их удобно сгруппировать в виде M ($1 \leq M \leq N$) "векторных" импульсов,

$$q_r^\alpha = q_\alpha - \frac{i}{2} \kappa(n_\alpha + 1 - 2r), \quad (\text{Б.16})$$

где q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, M$) — непрерывные вещественные параметры, а дискретные мнимые компоненты каждого

такого "вектора" описываются индексом $r = 1, 2, \dots, n_\alpha$. При этом целочисленные параметры n_α этой структуры должны удовлетворять условию

$$\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha = N. \quad (\text{Б.17})$$

Таким образом, в общем случае собственное состояние описывается тремя типами параметров: целочисленным параметром M ($1 \leq M \leq N$), который фиксирует число "векторных" импульсов; набором из M целочисленных параметров $\{n_1, n_2, \dots, n_M\} \equiv \mathbf{n}$, которые фиксируют число мнимых компонент в каждом таком векторе; и, наконец, набором из M непрерывных вещественных импульсов $\{q_1, q_2, \dots, q_M\} \equiv \mathbf{q}$.

Общее выражение для волновой функции даётся в уравнениях (А.9)–(А.12). Чтобы понять структуру детерминанта $N \times N$ матрицы $\exp(iq_a x_b)$, который определяет эту волновую функцию, все N комплексных импульса q_a , (Б.16), могут быть упорядочены следующим образом:

$$\begin{aligned} \{q_a\} & \equiv \{q_r^\alpha\} = \\ & = \{q_1^1, q_2^1, \dots, q_{n_1}^1; q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n_2}^2; \dots; q_1^M, q_2^M, \dots, q_{n_M}^M\}. \quad (\text{Б.18}) \end{aligned}$$

По определению,

$$\det [\exp(iq_a x_c)]_{(c,d)=1, \dots, N} = \sum_P (-1)^{|P|} \exp \left[i \sum_{a=1}^N q_{P_a} x_a \right], \quad (\text{Б.19})$$

где суммирование производится по всем перестановкам N комплексных импульсов $\{q_a\}$, (Б.18), по N частицам $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, а $[P]$ обозначает чётность перестановки. Для данной перестановки P частица номер a получает компоненту импульса $q_{r(a)}^{\alpha(a)}$. Будем говорить, что частицы, получающие компоненты с одним и тем же значением индекса α (т.е. имеющие одинаковую вещественную часть q_α), принадлежат одному кластеру Ω_α . Тем самым, для данной перестановки P частицы, принадлежащие одному кластеру, нумеруются, "внутренним" индексом $r = 1, \dots, n_\alpha$. Таким образом, согласно (А.11),

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x}) & = \\ & = C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} \sum_P (-1)^{|P|} \left(\prod_{a < b}^N [-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b)] \right) \times \\ & \times \exp \left[i \sum_{c=1}^N q_{r(c)}^{\alpha(c)} x_c \right], \quad (\text{Б.20}) \end{aligned}$$

где $C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}$ — нормировочная константа, которую мы определим позднее. Подставляя сюда явные выражения для комплексных импульсов (Б.16) после взятия производных, мы находим:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x}) & = \\ & = C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} \sum_P (-1)^{|P|} \prod_{a < b}^N \left[\left(q_{\alpha(a)} - \frac{i\kappa}{2} [n_{\alpha(a)} + 1 - 2r(a)] \right) - \right. \\ & \left. - \left(q_{\alpha(b)} - \frac{i\kappa}{2} [n_{\alpha(b)} + 1 - 2r(b)] \right) + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b) \right] \times \\ & \times \exp \left[i \sum_{c=1}^N q_{\alpha(c)} x_c + \frac{\kappa}{2} \sum_{c=1}^N (n_{\alpha(c)} + 1 - 2r(c)) x_c \right]. \quad (\text{Б.21}) \end{aligned}$$

В этом выражении предэкспоненциальный фактор содержит два типа сомножителей: пары точек (a, b) , принадлежащих различным кластерам ($\alpha(a) \neq \alpha(b)$), и пары точек, принадлежащих одному и тому же кластеру ($\alpha(a) = \alpha(b)$). В последнем случае произведение P_x по парам точек, принадлежащим кластеру Ω_x , сводится к выражению

$$P_x \propto \prod_{a < b \in \Omega_x} [r(b) - r(a) - \text{sgn}(x_a - x_b)]. \quad (\text{Б.22})$$

Так же, как и в случае волновой функции основного состояния (уравнения (Б.13)–(Б.14)), легко видеть, что при суммировании по "внутренним" перестановкам $r(a)$ внутри кластера Ω_x ненулевое значение произведения P_x возможно лишь для одной единственной перестановки. Для того чтобы это показать, отметим сначала, что ввиду симметрии волновой функции $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ по отношению к перестановкам её N аргументов $\{x_a\}$, достаточно рассмотреть лишь случай, при котором положения частиц упорядочены простейшим способом: $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. При этом положения частиц $\{x_{a_k}\}$ ($k = 1, 2, \dots, n_x$), принадлежащих кластеру Ω_x , также будут упорядочены: $x_{a_1} < x_{a_2} < \dots < x_{a_{n_x}}$ (где $a_1 < a_2 < \dots < a_{n_x}$). В этом случае

$$P_x \propto \prod_{k < l}^{n_x} [r(l) - r(k) + 1]. \quad (\text{Б.23})$$

Очевидно, что это произведение не равно нулю лишь в случае тривиальной перестановки $r(k) = k$. Действительно, если в последовательности $1, 2, \dots, n_x$ мы поменяем местами любые два числа, то всегда сможем найти два числа с номерами $k < l$, для которых $r(l) = r(k) - 1$. В случае тривиальной перестановки

$$P_x \propto \prod_{k < l}^{n_x} [l - k + 1]. \quad (\text{Б.24})$$

Включая значения всех этих "внутренних" произведений кластеров в величину переопределённой нормировочной константы $C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}$, мы приходим к следующему выражению для волновой функции (Б.21):

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x}) = & C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} \sum_P' (-1)^{|P|} \prod_{\substack{a < b \\ \alpha(a) \neq \alpha(b)}}^N \left[\left(q_{x(a)} - \frac{i\kappa}{2} n_{x(a)} \right) - \right. \\ & \left. - \left(q_{x(b)} - \frac{i\kappa}{2} n_{x(b)} \right) + i\kappa(r(a) - r(b) - 1) \right] \times \\ & \times \exp \left[i \sum_{c=1}^N q_{x(c)} x_c + \frac{\kappa}{2} \sum_{c=1}^N (n_{x(c)} + 1 - 2r(c)) x_c \right], \quad (\text{Б.25}) \end{aligned}$$

где теперь произведение идёт лишь по парам частиц, принадлежащих разным кластерам, а символ \sum_P' означает, что суммирование производится не по всем перестановкам P , а лишь по таким, при которых "внутренние" индексы $r(a)$ кластеров упорядочены по возрастанию.

Принимая во внимание симметрию волновой функции $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ по отношению к перестановкам её аргументов, выражение в уравнении (Б.25) может быть легко продолжено за пределы сектора $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ на

всё пространство R_N . Используя соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Omega_x} (n_x + 1 - 2r(a)) x_a &= \sum_{k=1}^{n_x} (n_x + 1 - 2k) x_{a_k} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^{n_x} |x_{a_k} - x_{a_l}| \quad (\text{Б.26}) \end{aligned}$$

(где $x_{a_1} < x_{a_2} < \dots < x_{a_{n_x}}$), мы находим следующее достаточно компактное выражение для волновой функции $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$, в котором положение частиц является произвольным:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x}) = & C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} \sum_P' (-1)^{|P|} \prod_{\substack{a < b \\ \alpha(a) \neq \alpha(b)}}^N [-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \text{sgn}(x_a - x_b)] \times \\ & \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^M q_{\alpha} \sum_{c \in \Omega_x} x_c - \frac{\kappa}{4} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{c, c' \in \Omega_x} |x_c - x_{c'}| \right]. \quad (\text{Б.27}) \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку в этой структуре взаимное положение частиц, принадлежащих разным кластерам, может быть произвольным, кластеры могут перекрываться и проходить друг через друга. Другими словами, термин "кластер", вообще говоря, не означает пространственно компактных изолированных образований.

Ну и, наконец, для получения энергетического спектра рассмотренных выше собственных состояний достаточно подставить выражение для импульсов (Б.16) в уравнение (А.13). Простое суммирование (с использованием соотношений (Б.4) и (Б.5)) приводит к следующему результату

$$\begin{aligned} E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n}) &= \frac{1}{2\beta} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{r=1}^{n_x} (q_{\alpha}^r)^2 = \\ &= \frac{1}{2\beta} \sum_{\alpha=1}^M n_{\alpha} q_{\alpha}^2 - \frac{\kappa^2}{24\beta} \sum_{\alpha=1}^M (n_{\alpha}^3 - n_{\alpha}). \quad (\text{Б.28}) \end{aligned}$$

Б.3. Ортонормальность собственных функций

Перекрывание волновых функций двух собственных состояний, которые описываются двумя наборами параметров $(M, \mathbf{n}, \mathbf{q})$ и $(M', \mathbf{n}', \mathbf{q}')$, определяется следующим образом:

$$Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}^{(M, M')}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \Psi_{\mathbf{q}', \mathbf{n}'}^{(M')*}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x}). \quad (\text{Б.29})$$

Подставляя сюда (Б.27), получаем

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}^{(M, M')}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = & C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} C_{\mathbf{q}', \mathbf{n}'}^{(M')*} \sum_P' \sum_{P'}' (-1)^{|P|+|P'|} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \left(\prod_{\substack{a < b \\ \alpha'(a) \neq \alpha'(b)}}^N \left[i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) - i\kappa \text{sgn}(x_a - x_b) \right] \right) \times \\ & \times \exp \left[-i \sum_{\alpha=1}^{M'} q'_{\alpha} \sum_{c \in \Omega'_x} x_c - \frac{\kappa}{4} \sum_{\alpha=1}^{M'} \sum_{c, c' \in \Omega'_x} |x_c - x_{c'}| \right] \times \\ & \times \left(\prod_{\substack{a < b \\ \alpha(a) \neq \alpha(b)}}^N \left[-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \text{sgn}(x_a - x_b) \right] \right) \times \\ & \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^M q_{\alpha} \sum_{c \in \Omega_x} x_c - \frac{\kappa}{4} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{c, c' \in \Omega_x} |x_c - x_{c'}| \right], \quad (\text{Б.30}) \end{aligned}$$

где $\{\Omega_x\}$ и $\{\Omega'_x\}$ обозначают кластеры, образованные перестановками P и P' соответственно. После интегрирования по частям это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}^{(M, M')}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} C_{\mathbf{q}', \mathbf{n}'}^{(M')*} \sum_P' \sum_{P'}' (-1)^{[P]+[P']} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \exp \left[-i \sum_{\alpha=1}^{M'} q'_\alpha \sum_{c \in \Omega'_\alpha} x_c - \frac{\kappa}{4} \sum_{\alpha=1}^{M'} \sum_{c, c' \in \Omega'_\alpha} |x_c - x_{c'}| \right] \times \\ &\times \left(\prod_{\substack{a < b \\ \alpha'(a) \neq \alpha'(b)}}^N \left[-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) - i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b) \right] \right) \times \\ &\times \left(\prod_{\substack{a < b \\ \alpha(a) \neq \alpha(b)}}^N \left[-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b) \right] \right) \times \\ &\times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^M q_\alpha \sum_{c \in \Omega_\alpha} x_c - \frac{\kappa}{4} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{c, c' \in \Omega_\alpha} |x_c - x_{c'}| \right]. \quad (\text{Б.31}) \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай, когда целочисленные параметры двух состояний совпадают, т.е. $M = M'$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$, и кроме того, будем считать, что среди M целочисленных параметров $\{n_\alpha\}$ нет одинаковых, т.е. $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_M$.

При суммировании по перестановкам P и P' в уравнении (Б.31) мы находим два типа членов:

- а) "диагональные" члены, в которых две перестановки совпадают, $P = P'$;
- б) "недиагональные" члены, в которых две перестановки отличаются, $P \neq P'$.

Вклад "диагональных" членов имеет вид:

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}}^{(M, M)^{(A)}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} C_{\mathbf{q}', \mathbf{n}}^{(M)*} \sum_P' \int_{-\infty}^{+\infty} d^N \mathbf{x} \times \\ &\times \exp \left[-i \sum_{\alpha=1}^M q'_\alpha \sum_{c \in \Omega_\alpha} x_c - \frac{\kappa}{4} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{c, c' \in \Omega_\alpha} |x_c - x_{c'}| \right] \times \\ &\times \left(\prod_{\substack{a < b \\ \alpha(a) \neq \alpha(b)}}^N \left[-(\partial_{x_a} - \partial_{x_b})^2 + \kappa^2 \right] \right) \times \\ &\times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^M q_\alpha \sum_{c \in \Omega_\alpha} x_c - \frac{\kappa}{4} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{c, c' \in \Omega_\alpha} |x_c - x_{c'}| \right]. \quad (\text{Б.32}) \end{aligned}$$

Очевидно, что в этом выражении вклад всех перестановок является одинаковым, поэтому будет достаточно рассмотреть лишь "тривиальную" перестановку, представленную в (Б.18). Кластеры, соответствующие этой перестановке, мы обозначим символом $\alpha_0(a)$. Теперь мы можем изменить порядок суммирования по частицам, а именно, вместо простого суммирования "по ряд" $a = 1, 2, \dots, N$, мы будем производить суммирование с помощью двух индексов (α, r) : $\{x_a\} \rightarrow \{x_r^\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, M$; $r = 1, \dots, n_\alpha$). Это позволяет видеть, какому кластеру α принадлежит данная частица и какой её "внутренний порядковый номер" r внутри кластера. Благодаря симметрии подынтегрального выражения (Б.32) по отношению к перестановкам частиц внутри кластеров, достаточно вычислить вклад от интегрирования по секторам $x_1^\alpha < x_2^\alpha < \dots < x_{n_\alpha}^\alpha$. Таким образом, используя соотношение (Б.26), мы получаем

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}}^{(M, M)^{(A)}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} C_{\mathbf{q}', \mathbf{n}}^{(M)*} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_M!} \times \\ &\times \left[\prod_{\alpha=1}^M \left(n_\alpha! \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1^\alpha \int_{x_1^\alpha}^{+\infty} dx_2^\alpha \dots \int_{x_{n_\alpha-1}^\alpha}^{+\infty} dx_{n_\alpha}^\alpha \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[-i \sum_{\alpha=1}^M q'_\alpha \sum_{r=1}^{n_\alpha} x_r^\alpha + \frac{\kappa}{2} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{r=1}^{n_\alpha} (n_\alpha + 1 - 2r) x_r^\alpha \right] \times \\ &\times \left(\prod_{\alpha < \beta}^M \prod_{r=1}^{n_\alpha} \prod_{r'=1}^{n_\beta} \left[-(\partial_{x_r^\alpha} - \partial_{x_{r'}^\beta})^2 + \kappa^2 \right] \right) \times \\ &\times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^M q_\alpha \sum_{r=1}^{n_\alpha} x_r^\alpha + \frac{\kappa}{2} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{r=1}^{n_\alpha} (n_\alpha + 1 - 2r) x_r^\alpha \right], \quad (\text{Б.33}) \end{aligned}$$

где фактор $N! / n_1! \dots n_M!$ — это полное число перестановок M кластеров, состоящих из n_1, n_2, \dots, n_M элементов, по N частицам. Производя дифференцирование, мы находим:

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}}^{(M, M)^{(A)}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} C_{\mathbf{q}', \mathbf{n}}^{(M)*} N! \left(\prod_{\alpha < \beta}^M \prod_{r=1}^{n_\alpha} \prod_{r'=1}^{n_\beta} \left| \left(q_\alpha - \frac{i\kappa}{2} n_\alpha \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(q_\beta - \frac{i\kappa}{2} n_\beta \right) + i\kappa (r - r' - 1) \right|^2 \right) \times \\ &\times \prod_{\alpha=1}^M \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1^\alpha \int_{x_1^\alpha}^{+\infty} dx_2^\alpha \dots \int_{x_{n_\alpha-1}^\alpha}^{+\infty} dx_{n_\alpha}^\alpha \times \right. \\ &\left. \times \exp \left[i(q_\alpha - q'_\alpha) \sum_{r=1}^{n_\alpha} x_r^\alpha + \kappa \sum_{r=1}^{n_\alpha} (n_\alpha + 1 - 2r) x_r^\alpha \right] \right\}. \quad (\text{Б.34}) \end{aligned}$$

Простое интегрирование по координатам частиц x_r^α (аналогичное тому, что делалось в (Б.8)–(Б.10)) приводит к следующему результату

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}}^{(M, M)^{(A)}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= |C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}|^2 N! \left(\prod_{\alpha < \beta}^M \prod_{r=1}^{n_\alpha} \prod_{r'=1}^{n_\beta} \left| \left(q_\alpha - \frac{i\kappa}{2} n_\alpha \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(q_\beta - \frac{i\kappa}{2} n_\beta \right) + i\kappa (r - r' - 1) \right|^2 \right) \times \\ &\times \prod_{\alpha=1}^M \left[\frac{n_\alpha \kappa}{(n_\alpha!)^2 \kappa^{n_\alpha}} (2\pi) \delta(q_\alpha - q'_\alpha) \right]. \quad (\text{Б.35}) \end{aligned}$$

Теперь мы собираемся показать, что "недиагональные" члены в выражении (Б.31), в которых перестановки P и P' не совпадают, дают нулевой вклад. Здесь мы снова можем считать одну из перестановок, скажем P , "тривиальной", как показано в (Б.18), и нумерацию кластеров, соответствующих этой перестановке, мы снова обозначим символом $\alpha_0(a)$. Ввиду симметрии волновых функций будет достаточно рассмотреть вклад от сектора $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Согласно представлению (Б.31), мы имеем

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}}^{(M, M)^{(B)}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &\propto \sum_{P'}' (-1)^{[P']} \int_{x_1 < \dots < x_N} d^N \mathbf{x} \times \\ &\times \exp \left[-i \sum_{\alpha=1}^M q'_\alpha \sum_{a \in \Omega'_\alpha} x_a - \frac{\kappa}{4} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{a, b \in \Omega'_\alpha} |x_a - x_b| \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\prod_{\substack{a < b \\ \alpha_0(a) \neq \alpha_0(b)}}^N \left[-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) + i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b) \right] \right) \times \\ & \times \left(\prod_{\substack{a < b \\ \alpha'(a) \neq \alpha'(b)}}^N \left[-i(\partial_{x_a} - \partial_{x_b}) - i\kappa \operatorname{sgn}(x_a - x_b) \right] \right) \times \\ & \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^M q_\alpha \sum_{a \in \Omega_\alpha^o} x_a + \frac{\kappa}{2} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{a \in \Omega_\alpha^o} (n_\alpha + 1 - 2r(a)) x_a \right]. \end{aligned} \tag{Б.36}$$

Здесь символ $\{\Omega_\alpha^o\}$ обозначает кластеры тривиальной перестановки. Поскольку $P' \neq P$, некоторые из кластеров Ω'_α перестановки P' должны отличаться от кластеров Ω_α^o . В качестве иллюстрации рассмотрим случай с числом частиц $N = 10$ и числом кластеров $M = 3$. Число частиц в первом кластере пусть будет $n_1 = 5$, и этот кластер мы обозначим символом "○"; число частиц во втором кластере пусть будет $n_2 = 2$, и этот кластер мы обозначим символом "×"; наконец, число частиц в третьем кластере пусть будет $n_3 = 3$, и этот кластер мы обозначим символом "△":

Номер частицы a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Перестановка $\alpha_0(a)$	○	○	○	○	○	×	×	△	△	△
Перестановка $\alpha'(a)$	○	○	○	△	○	×	×	○	△	△

Здесь в перестановке $\alpha'(a)$ частица $a = 4$ принадлежит кластеру $\alpha = 3$ (а не кластеру $\alpha = 1$ как в перестановке $\alpha_0(a)$), с другой стороны, частица $a = 8$ принадлежит кластеру $\alpha = 1$ (а не кластеру $\alpha = 3$, как в перестановке $\alpha_0(a)$). Теперь рассмотрим внимательно структуру произведений в выражении (Б.36). В отличие от первого произведения, которое не содержит "внутренних" произведений между парами частиц кластера Ω_1^o , второе произведение такие пары содержит. Кроме того, знак дифференциальных операторов $(\partial_{x_a} - \partial_{x_b})$ в этом втором произведении противоположен "правильному" (исходному) знаку таких дифференциальных операторов в первом произведении. Именно эти два фактора — наличие "внутренних" произведений и "неправильный" знак дифференциальных операторов — приводят к тому, что недиагональные вклады (Б.36) оказываются равными нулю. Действительно, в приведённом выше примере второе произведение содержит множитель

$$\begin{aligned} \Pi'_{4,5} & \equiv \left[-i(\partial_{x_4} - \partial_{x_5}) + i\kappa \right] \times \\ & \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^3 q_\alpha \sum_{a \in \Omega_\alpha^o} x_a + \frac{\kappa}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{a \in \Omega_\alpha^o} (n_\alpha + 1 - 2r(a)) x_a \right] \end{aligned} \tag{Б.37}$$

(напомним, что положения частиц в кластерах Ω_α^o упорядочены, и, в частности, $x_4 < x_5$). Производя дифференцирование, мы получаем

$$\begin{aligned} \Pi'_{4,5} & \propto \left[-\left(i q_1 + \frac{\kappa}{2} (n_1 + 1 - 2r(4)) - i q_1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\kappa}{2} (n_1 + 1 - 2r(5)) \right) + \kappa \right] \propto [r(4) - r(5) + 1] = 0, \end{aligned} \tag{Б.38}$$

так как в первом кластере $r(a) = a$.

Нетрудно понять, что приведённый выше частный пример отражает общую ситуацию. Поскольку мы пока условились считать, что все размеры кластеров n_α различны, какова бы ни была перестановка $\alpha'(a)$, мы всегда можем найти кластер Ω_α^o , такой, что некоторые из его частиц принадлежат кластеру номер α в перестановке $\alpha'(a)$, тогда как другие его частицы (кластера Ω_α^o) в перестановке $\alpha'(a)$ этому кластеру не принадлежат. В этом случае достаточно рассмотреть вклад от произведения двух соседних точек

$$\begin{aligned} \Pi'_{k,k+1} & = \left[-i(\partial_{x_k} - \partial_{x_{k+1}}) + i\kappa \right] \times \\ & \times \exp \left[i \sum_{\alpha=1}^M q_\alpha \sum_{a \in \Omega_\alpha^o} x_a + \frac{\kappa}{2} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{a \in \Omega_\alpha^o} (n_\alpha + 1 - 2r(a)) x_a \right], \end{aligned} \tag{Б.39}$$

где в перестановке $\alpha'(a)$ частица номер k принадлежит кластеру номер α , тогда как частица номер $(k + 1)$ принадлежит какому-либо другому кластеру. В результате, производя дифференцирование, мы находим

$$\Pi'_{k,k+1} \propto [r(k) - r(k + 1) + 1] = 0, \tag{Б.40}$$

так как здесь $r(a)$ — "внутренний" номер частицы в кластере Ω_α^o , для которого $r(k + 1) = r(k) + 1$.

Таким образом, единственный ненулевой вклад в перекрытие (Б.29) двух волновых функций $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ и $\Psi_{\mathbf{q}', \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ (имеющих одинаковое число кластеров M и имеющих один и тот же набор целочисленных параметров $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_M$) возникает благодаря "диагональным" членам (Б.35):

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}}^{(M, M)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') & = |C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}|^2 M! \prod_{\alpha=1}^M \left[\frac{n_\alpha \kappa}{(n_\alpha!)^2 \kappa^{n_\alpha}} \right] \times \\ & \times \left(\prod_{\alpha < \beta}^M \prod_{r=1}^{n_\alpha} \prod_{r'=1}^{n_\beta} \left| \left(q_\alpha - \frac{i\kappa}{2} n_\alpha \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(q_\beta - \frac{i\kappa}{2} n_\beta \right) + i\kappa (r - r' - 1) \right|^2 \right) \prod_{\alpha=1}^M [(2\pi) \delta(q_\alpha - q'_\alpha)]. \end{aligned} \tag{Б.41}$$

В случае, если некоторые из кластеров имеют одинаковое число частиц, ситуация становится несколько более сложной. Рассмотрим перекрытие двух волновых функций $\Psi_{\mathbf{q}', \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ и $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ (имеющих, как и раньше, одни и те же целочисленные параметры M и \mathbf{n}) такие, что среди M целочисленных параметров n_1, n_2, \dots, n_M имеются два одинаковых, скажем, $n_{\alpha_1} = n_{\alpha_2}$ (где $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Пусть в собственном состоянии $(\mathbf{q}', \mathbf{n})$ эти два кластера имеют импульсы центра масс q'_{α_1} и q'_{α_2} , а в собственном состоянии (\mathbf{q}, \mathbf{n}) — соответственно q_{α_1} и q_{α_2} . Выше мы доказали, что ненулевой вклад при суммировании по перестановкам $\alpha(a)$ и $\alpha'(a)$ в уравнении (Б.31) возникает только если кластеры $\{\Omega_\alpha\}$ перестановки $\alpha(a)$ совпадают с кластерами $\{\Omega'_\alpha\}$ перестановки $\alpha'(a)$. В случае, если все целочисленные параметры n_α различны, это возможно лишь в случае, если перестановка $\alpha(a)$ совпадает с перестановкой $\alpha'(a)$. Однако в случае, если имеются два одинаковых целочисленных параметра $n_{\alpha_1} = n_{\alpha_2}$, возникают два ненулевых вклада. Первый из них, как и раньше, даётся "диагональными" членами с совпадающими перестановками, $\alpha(a) = \alpha'(a)$, и этот вклад пропорционален $\delta(q_{\alpha_1} - q'_{\alpha_1}) \delta(q_{\alpha_2} - q'_{\alpha_2})$. Второй вклад даётся такой пере-

становкой $\alpha'(a)$, в которой кластер Ω'_{α_1} (перестановки $\alpha'(a)$) совпадает с кластером Ω_{α_2} (перестановки $\alpha(a)$), а кластер Ω'_{α_2} (перестановки $\alpha'(a)$) совпадает с кластером Ω_{α_1} (перестановки $\alpha(a)$). При этом все остальные кластеры этих двух перестановок должны быть одинаковы: $\Omega'_\alpha = \Omega_\alpha$ ($\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2$). Легко понять, что этот второй вклад будет пропорционален $\delta(q_{\alpha_1} - q'_{\alpha_2}) \delta(q_{\alpha_2} - q'_{\alpha_1}) (-1)^{n_{\alpha_1}}$. В действительности, наличие таких двух эквивалентных вкладов является прямым следствием симметрии волновой функции $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$. Это очевидно из общего выражения для собственных волновых функций (А.9), в котором перестановка двух импульсов q_{α_1} и q_{α_2} , принадлежащих кластерам, имеющим одинаковый размер $n_{\alpha_1} = n_{\alpha_2}$, представляет собой просто перестановку n_{α_1} столбцов матрицы $\exp(iq_a x_b)$, что приводит к появлению фактора $(-1)^{n_{\alpha_1}}$. Таким образом, состояния, отличающиеся перестановкой импульсов, принадлежащих кластерам одинакового размера, можно назвать эквивалентными. Если же мы будем изучать перекрытия волновых функций только между неэквивалентными состояниями, то в рассмотренной выше ситуации мы должны ограничиться сектором $q_{\alpha_1} < q_{\alpha_2}; q'_{\alpha_1} < q'_{\alpha_2}$. В этом случае второй вклад $\delta(q_{\alpha_1} - q'_{\alpha_2}) \delta(q_{\alpha_2} - q'_{\alpha_1})$ тождественно равен нулю, что возвращает нас к результату (Б.41).

Таким образом, в общем случае, собственное состояние (\mathbf{q}, \mathbf{n}) , имеющее M кластеров, нужно описывать несколько более детально, выделяя кластеры, имеющие одинаковый размер. А именно, пусть среди M кластеров имеется s_1 кластеров, имеющих один и тот же размер m_1 , s_2 кластеров, имеющих один и тот же размер m_2 , и т.д. То есть собственное состояние будет характеризоваться некоторым числом k ($1 \leq k \leq M$) *отличающихся* между собой размеров кластеров. При этом каждый такой размер m_i характеризуется параметром "вырождения" s_i , который говорит, сколько имеется кластеров одного и того же размера m_i . Подобную структуру можно представить следующим образом:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{n}) = \left\{ \underbrace{(q_1, m_1), \dots, (q_{s_1}, m_1)}_{s_1}; \underbrace{(q_{s_1+1}, m_2), \dots, (q_{s_1+s_2}, m_2)}_{s_2}; \dots; \underbrace{(q_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}, m_k), \dots, (q_{s_1+\dots+s_k}, m_k)}_{s_k} \right\}, \quad (\text{Б.42})$$

где $s_1 + s_2 + \dots + s_k = M$, и все k целочисленных параметров $\{m_i\}$ различны:

$$1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k. \quad (\text{Б.43})$$

Для данного значения параметра k ,

$$\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha = \sum_{i=1}^k s_i m_i = N. \quad (\text{Б.44})$$

Состояния, отличающиеся перестановками импульсов между кластерами, имеющими одинаковый размер, являются эквивалентными. Поэтому свойство ортонормированности следует изучать лишь для неэквивалентных состояний, для которых значения импульсов ограничены секторами:

$$\begin{aligned} q_1 < q_2 < \dots < q_{s_1}; \\ q_{s_1+1} < q_{s_1+2} < \dots < q_{s_1+s_2}; \\ \dots \dots \dots \\ q_{s_1+\dots+s_{k-1}+1} < q_{s_1+\dots+s_{k-1}+2} < \dots < q_{s_1+\dots+s_{k-1}+s_k}. \end{aligned} \quad (\text{Б.45})$$

В этом представлении мы снова возвращаемся к результату (Б.41).

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда два состояния характеризуются *разными* наборами целочисленных параметров: $\mathbf{n}' \neq \mathbf{n}$. В этом случае всё очень просто. То, что два набора кластеров отличаются друг от друга, означает, что при суммировании по парам перестановок P и P' в уравнении (Б.31) не существует такой пары перестановок, для которых эти два набора кластеров $\{\Omega_\alpha\}$ и $\{\Omega'_\alpha\}$ совпадают. В соответствии с приведённым выше анализом, это означает, что в данном случае выражение (Б.31) равно нулю. Заметим, что условие $M' \neq M$ автоматически означает, что $\mathbf{n}' \neq \mathbf{n}$.

Таким образом, мы доказали, что

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}^{(M, M')}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') &= |C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}|^2 \delta(M, M') \left(\prod_{\alpha=1}^M \delta(n_\alpha, n'_\alpha) \right) \times \\ &\times \left(\prod_{\alpha=1}^M (2\pi) \delta(q_\alpha - q'_\alpha) \right) N! \prod_{\alpha=1}^M \left[\frac{n_\alpha \kappa}{(n_\alpha!)^2 \kappa^{n_\alpha}} \right] \times \\ &\times \prod_{\alpha < \beta}^M \prod_{r=1}^{n_\alpha} \prod_{r'=1}^{n_\beta} \left| \left(q_\alpha - \frac{i\kappa}{2} n_\alpha \right) - \left(q_\beta - \frac{i\kappa}{2} n_\beta \right) + i\kappa (r - r' - 1) \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{Б.46})$$

где целочисленные параметры $\{n_\alpha\}$ и $\{n'_\alpha\}$ имеют структуру, показанную в (Б.42)–(Б.44), а значения импульсов $\{q_\alpha\}$ и $\{q'_\alpha\}$, принадлежащих кластерам, имеющим одинаковый размер, ограничены секторами (Б.45). В соответствии с этим результатом, условие ортонормальности определяет величину нормировочной константы:

$$\begin{aligned} |C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}|^2 &= \frac{1}{N!} \left[\prod_{\alpha=1}^M \frac{(n_\alpha!)^2 \kappa^{n_\alpha}}{n_\alpha \kappa} \right] \times \\ &\times \prod_{\alpha < \beta}^M \prod_{r=1}^{n_\alpha} \prod_{r'=1}^{n_\beta} \left| \left(q_\alpha - \frac{i\kappa}{2} n_\alpha \right) - \left(q_\beta - \frac{i\kappa}{2} n_\beta \right) + i\kappa (r - r' - 1) \right|^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.47})$$

Б.4. Пропагатор

Зависящее от времени решение уравнения Шрёдингера

$$\beta \partial_t \Psi(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \partial_{x_a}^2 \Psi(\mathbf{x}; t) + \frac{1}{2} \kappa \sum_{a \neq b}^N \delta(x_a - x_b) \Psi(\mathbf{x}; t) \quad (\text{Б.48})$$

с начальными условиями

$$\Psi(\mathbf{x}; 0) = \prod_{a=1}^N \delta(x_a) \quad (\text{Б.49})$$

может быть представлено в виде линейной комбинации собственных волновых функций $\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x})$ (Б.27):

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{M=1}^N \sum_{\mathbf{n}} \int' \mathcal{D}\mathbf{q} \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)*}(\mathbf{0}) \exp[-E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n})t], \quad (\text{Б.50})$$

где спектр энергии представлен в уравнении (Б.28). Суммирование по целочисленным параметрам n_α производится здесь в терминах параметров $\{s_i, m_i\}$, представленных в уравнениях (Б.42)–(Б.44):

$$\sum_{\mathbf{n}}' \equiv \sum_{k=1}^M \sum_{s_1 \dots s_k=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m_1 \dots < m_k}^{\infty} \delta\left(\sum_{i=1}^k s_i, M\right) \delta\left(\sum_{i=1}^k s_i m_i, N\right), \tag{Б.51}$$

где $\delta(n, l)$ — (дискретный) символ Кронекера. Заметим, что благодаря присутствию в этом выражении символов Кронекера, суммирование по положительным целочисленным параметрам m_i и s_i может быть продолжено до бесконечности. Символ $\int' \mathcal{D}\mathbf{q}$ в выражении (Б.50) обозначает интегрирование по M импульсам q_x в секторах, представленных в (Б.45).

Репличная статистическая сумма $Z(N, L)$ исходной задачи о направленных полимерах в случайном потенциале получается из волновой функции $\Psi(\mathbf{x}; t)$ при нулевых граничных условиях:

$$Z(N, L) = \Psi(\mathbf{0}; L) = \sum_{M=1}^N \sum_{\mathbf{n}}' \int' \mathcal{D}\mathbf{q} |\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 \exp[-E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n})L]. \tag{Б.52}$$

Согласно выражению (Б.27), при $M \geq 2$,

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0}) &= C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} \sum_{\mathbf{p}}' (-1)^{|\mathbf{p}|} \times \\ &\times \prod_{\substack{a < b \\ \alpha(a) \neq \alpha(b)}}^N \left[\left(q_{\alpha(a)} - \frac{i\kappa}{2} [n_{\alpha(a)} + 1 - 2r(a)] \right) - \right. \\ &\left. - \left(q_{\alpha(b)} - \frac{i\kappa}{2} [n_{\alpha(b)} + 1 - 2r(b)] \right) \right] = \\ &= C_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_M!} \prod_{\alpha < \beta}^M \prod_{r=1}^{n_{\alpha}} \prod_{r'=1}^{n_{\beta}} \left[\left(q_{\alpha} - \frac{i\kappa}{2} n_{\alpha} \right) - \right. \\ &\left. - \left(q_{\beta} - \frac{i\kappa}{2} n_{\beta} \right) + i\kappa(r - r') \right]. \end{aligned} \tag{Б.53}$$

Подставляя сюда значение нормировочной константы (Б.47), мы находим

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 &= \frac{N! \kappa^N}{\left(\prod_{\alpha=1}^M \kappa n_{\alpha}\right)} \times \\ &\times \prod_{\alpha < \beta}^M \frac{\prod_{r=1}^{n_{\alpha}} \prod_{r'=1}^{n_{\beta}} |(q_{\alpha} - (i\kappa/2)n_{\alpha}) - (q_{\beta} - (i\kappa/2)n_{\beta}) + i\kappa(r - r')|^2}{\prod_{r=1}^{n_{\alpha}} \prod_{r'=1}^{n_{\beta}} |(q_{\alpha} - (i\kappa/2)n_{\alpha}) - (q_{\beta} - (i\kappa/2)n_{\beta}) + i\kappa(r - r' - 1)|^2}. \end{aligned} \tag{Б.54}$$

Это выражение можно несколько упростить. Сдвигая произведение по r' в числителе на единицу, получаем:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 &= \frac{N! \kappa^N}{\left(\prod_{\alpha=1}^M \kappa n_{\alpha}\right)} \times \\ &\times \prod_{\alpha < \beta}^M \frac{\prod_{r=1}^{n_{\alpha}} |(q_{\alpha} - (i\kappa/2)n_{\alpha}) - (q_{\beta} - (i\kappa/2)n_{\beta}) + i\kappa(r - 1)|^2}{\prod_{r=1}^{n_{\alpha}} \prod_{r'=1}^{n_{\beta}} |(q_{\alpha} - (i\kappa/2)n_{\alpha}) - (q_{\beta} - (i\kappa/2)n_{\beta}) + i\kappa(r - n_{\beta} - 1)|^2}. \end{aligned} \tag{Б.55}$$

Переопределяя параметр произведения r в знаменателе, $r \rightarrow n_{\alpha} + 1 - r$, и заменяя полученное выражение в знаменателе на комплексно сопряженное, имеем:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 &= \frac{N! \kappa^N}{\left(\prod_{\alpha=1}^M \kappa n_{\alpha}\right)} \times \\ &\times \prod_{\alpha < \beta}^M \frac{\prod_{r=1}^{n_{\alpha}} |(q_{\alpha} - (i\kappa/2)n_{\alpha}) - (q_{\beta} - (i\kappa/2)n_{\beta}) + i\kappa(r - 1)|^2}{\prod_{r=1}^{n_{\alpha}} \prod_{r'=1}^{n_{\beta}} |(q_{\alpha} - (i\kappa/2)n_{\alpha}) - (q_{\beta} - (i\kappa/2)n_{\beta}) + i\kappa r|^2}. \end{aligned} \tag{Б.56}$$

Наконец, сдвигая произведение по r в числителе на единицу, мы находим:

$$|\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 = \frac{N! \kappa^N}{\left(\prod_{\alpha=1}^M \kappa n_{\alpha}\right)} \prod_{\alpha < \beta}^M \frac{|q_{\alpha} - q_{\beta} - (i\kappa/2)(n_{\alpha} - n_{\beta})|^2}{|q_{\alpha} - q_{\beta} - (i\kappa/2)(n_{\alpha} + n_{\beta})|^2}. \tag{Б.57}$$

Для $M = 1$, согласно уравнениям (Б.1) и (Б.11),

$$|\Psi_q^{(1)}(\mathbf{0})|^2 = \frac{\kappa^N N!}{\kappa N}. \tag{Б.58}$$

Поскольку функция $f(\mathbf{q}, \mathbf{n}) = |\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 \exp[-E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n})L]$ в уравнении (Б.52) является симметричной по отношению к перестановкам всех M пар её аргументов (q_x, n_x) , интегрирование по импульсам q_x может быть продолжено за пределы секторов, представленных в (Б.45), на всё пространство R_M . В результате исчезает необходимость отличать одинаковые и различные значения параметров n_x , единственным ограничением для которых остаётся условие (Б.17). Заметим, однако, что подобное упрощение справедливо лишь для волновой функции в нуле $\Psi(\mathbf{0}; t)$, (Б.52), но не для функции общего вида $\Psi(\mathbf{x}; t)$, (Б.50), зависящей от N произвольных координат x_1, \dots, x_N . Таким образом, вместо выражения (Б.52) мы получаем

$$\begin{aligned} Z(N, L) &= \sum_{M=1}^N \frac{1}{M!} \left[\prod_{\alpha=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_{\alpha}}{2\pi} \sum_{n_{\alpha}=1}^{\infty} \right] \delta\left(\sum_{\alpha=1}^M n_{\alpha}, N\right) \times \\ &\times |\Psi_{\mathbf{q}, \mathbf{n}}^{(M)}(\mathbf{0})|^2 \exp[-E_M(\mathbf{q}, \mathbf{n})L]. \end{aligned} \tag{Б.59}$$

Подставляя сюда выражения (Б.28), (Б.57) и (Б.58), мы находим следующее достаточно компактное представление репличной статистической суммы:

$$\begin{aligned} Z(N, L) &= \\ &= N! \kappa^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi \kappa N} \exp\left[-\frac{L}{2\beta} Nq^2 + \frac{\kappa^2 L}{24\beta} (N^3 - N)\right] + \right. \\ &+ \sum_{M=2}^N \frac{1}{M!} \left[\prod_{\alpha=1}^M \sum_{n_{\alpha}=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_{\alpha}}{2\pi \kappa n_{\alpha}} \right] \delta\left(\sum_{\alpha=1}^M n_{\alpha}, N\right) \times \\ &\times \prod_{\alpha < \beta}^M \frac{|q_{\alpha} - q_{\beta} - (i\kappa/2)(n_{\alpha} - n_{\beta})|^2}{|q_{\alpha} - q_{\beta} - (i\kappa/2)(n_{\alpha} + n_{\beta})|^2} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{L}{2\beta} \sum_{\alpha=1}^M n_{\alpha} q_{\alpha}^2 + \frac{\kappa^2 L}{24\beta} \sum_{\alpha=1}^M (n_{\alpha}^3 - n_{\alpha})\right] \left. \right\}. \end{aligned} \tag{Б.60}$$

Первый член в этом выражении — это вклад основного состояния ($M = 1$), а остальные члены с ($M \geq 2$) представляют собой вклад возбуждённых состояний. Путём простых алгебраических преобразований приведённая выше репличная статистическая сумма может быть также представлена в следующем виде:

$$Z(N, L) = \exp(-\beta N L f_0) \tilde{Z}(N, \lambda), \tag{Б.61}$$

где

$$f_0 = \frac{1}{24} \beta^4 u^2 - \frac{1}{\beta L} \ln(\beta^3 u),$$

а

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(N, L) = & N! \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi\kappa N} \exp \left[-\frac{L}{2\beta} Nq^2 + \frac{\kappa^2 L}{24\beta} N^3 \right] + \right. \\ & + \sum_{M=2}^N \frac{1}{M!} \left[\prod_{\alpha=1}^M \sum_{n_\alpha=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_\alpha}{2\pi\kappa n_\alpha} \right] \delta \left(\sum_{\alpha=1}^M n_\alpha, N \right) \times \\ & \times \prod_{\alpha < \beta}^M \frac{|q_\alpha - q_\beta - (i\kappa/2)(n_\alpha - n_\beta)|^2}{|q_\alpha - q_\beta - (i\kappa/2)(n_\alpha + n_\beta)|^2} \times \\ & \left. \times \exp \left[-\frac{L}{2\beta} \sum_{\alpha=1}^M n_\alpha q_\alpha^2 + \frac{\kappa^2 L}{24\beta} \sum_{\alpha=1}^M n_\alpha^3 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (B.62)$$

Приложение В
Интегральные соотношения для функции Эйри

Функция Эйри Ai(x) представляет собой решение дифференциального уравнения

$$y''(x) = xy(x) \quad (B.1)$$

с граничным условием $y(x \rightarrow +\infty) = 0$. При $x \rightarrow +\infty$ эта функция экспоненциально стремится к нулю,

$$Ai(x \rightarrow +\infty) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \quad (B.2)$$

а при $x \rightarrow -\infty$ она осциллирует и стремится к нулю степенным образом:

$$Ai(x \rightarrow -\infty) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right). \quad (B.3)$$

Функция Эйри может быть также представлена в интегральном виде:

$$Ai(x) = \int_C \frac{dz}{2\pi i} \exp\left(\frac{1}{3}z^3 - zx\right), \quad (B.4)$$

где контур интегрирования C в комплексной плоскости начинается на бесконечности с аргументом в секторе $-\pi/2 < \theta_{(-)} < -\pi/3$ и заканчивается на бесконечности с аргументом в секторе $\pi/3 < \theta_{(+)} < \pi/2$. Фиксируя $\theta_{(-)} = -\pi/2 + \epsilon$ и $\theta_{(+)} = \pi/2 - \epsilon$, где положительный параметр $\epsilon \rightarrow 0$ вводится, для того чтобы обеспечить сходимость интеграла, контур интегрирования в (B.4) может быть проведён вдоль мнимой оси $z = iy$.

Аналогично преобразованию Хаббарда–Стратоновича, в котором используется гауссова функция для линеаризации квадратичных выражений в экспоненте,

$$\exp\left(\frac{1}{2}F^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \exp(Fx), \quad (B.5)$$

функция Эйри используется для линеаризации кубических выражений:

$$\exp\left(\frac{1}{3}F^3\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx Ai(x) \exp(Fx), \quad (B.6)$$

где в соотношении (B.6) предполагается, что величина F неотрицательна. Это соотношение легко доказать, ис-

пользуя интегральное представление функции Эйри (B.4). Предположим сначала, что величина F является чисто мнимой: $F \rightarrow iF$, и в интегральном представлении функции Эйри выберем контур интегрирования C вдоль мнимой оси $z = iy$. Тогда интегрирование по x в правой части соотношения (B.6) даёт $\delta(F - y)$. Последующее тривиальное интегрирование по y приводит к результату $\exp(-iF^3/3)$. Наконец, производя аналитическое продолжение по величине F обратно к вещественным значениям $F \rightarrow -iF$, мы находим левую часть соотношения (B.6).

Теперь мы докажем два других интегральных соотношения с функцией Эйри:

$$\begin{aligned} I_1 & \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dp Ai(p^2 + \omega_1 + \omega_2) \exp[ip(\omega_1 - \omega_2)] = \\ & = 2^{2/3}\pi Ai(2^{1/3}\omega_1) Ai(2^{1/3}\omega_2), \end{aligned} \quad (B.7)$$

$$\begin{aligned} I_2 & \equiv \int_0^\infty dy Ai(y + \omega_1) Ai(y + \omega_2) = \\ & = \frac{Ai(\omega_1) Ai'(\omega_2) - Ai'(\omega_1) Ai(\omega_2)}{\omega_1 - \omega_2}. \end{aligned} \quad (B.8)$$

Используя интегральное представление функции Эйри (B.4), имеем

$$\begin{aligned} I_1 & = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \times \\ & \times \int_C \frac{dz}{2\pi i} \exp\left(\frac{1}{3}z^3 - p^2z - \omega_1z - \omega_2z + ip\omega_1 - ip\omega_2\right). \end{aligned} \quad (B.9)$$

Вводя обозначения $z \equiv z_1$ и $ip \equiv z_2$, это выражение может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 & = 2\pi \iint_C \frac{dz_1 dz_2}{(2\pi i)^2} \times \\ & \times \exp\left(\frac{1}{3}z_1^3 + z_1z_2^2 - \omega_1(z_1 - z_2) - \omega_2(z_1 + z_2)\right), \end{aligned} \quad (B.10)$$

где контур интегрирования C в комплексной плоскости проходит вдоль мнимой оси. Вводя вместо z_1 и z_2 новые переменные интегрирования:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 & = \xi, \\ z_1 + z_2 & = \eta, \end{aligned} \quad (B.11)$$

мы получаем

$$I_1 = \pi \int_C \frac{d\xi}{2\pi i} \int_C \frac{d\eta}{2\pi i} \exp\left(\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{6}\eta^3 - \omega_1\xi - \omega_2\eta\right). \quad (B.12)$$

Переопределяя $\xi \rightarrow 2^{1/3}\xi$ и $\eta \rightarrow 2^{1/3}\eta$, мы находим

$$\begin{aligned} I_1 & = 2^{2/3}\pi \int_C \frac{d\xi}{2\pi i} \exp\left(\frac{1}{3}\xi^3 - 2^{1/3}\omega_1\xi\right) \times \\ & \times \int_C \frac{d\eta}{2\pi i} \exp\left(\frac{1}{3}\eta^3 - 2^{1/3}\omega_2\eta\right) = \\ & = 2^{2/3}\pi Ai(2^{1/3}\omega_1) Ai(2^{1/3}\omega_2), \end{aligned} \quad (B.13)$$

что доказывает соотношение (B.7).

Чтобы доказать соотношение (B.8), достаточно учесть, что функция Эйри удовлетворяет дифференци-

альному уравнению (В.1). Подставляя

$$Ai(y + \omega) = \frac{1}{y + \omega} Ai''(y + \omega) \tag{В.14}$$

в левую часть соотношения (В.8), мы находим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty dy \frac{1}{(y + \omega_1)(y + \omega_2)} Ai''(y + \omega_1) Ai''(y + \omega_2) = \\ &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \int_0^\infty dy \left[\frac{1}{y + \omega_2} - \frac{1}{y + \omega_1} \right] \times \\ &\times Ai''(y + \omega_1) Ai''(y + \omega_2) = \\ &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \int_0^\infty dy \left[\frac{Ai''(y + \omega_2)}{y + \omega_2} Ai''(y + \omega_1) - \right. \\ &\left. - \frac{Ai''(y + \omega_1)}{y + \omega_1} Ai''(y + \omega_2) \right]. \end{aligned} \tag{В.15}$$

Подставляя $Ai''(y + \omega_2) = (y + \omega_2) Ai'(y + \omega_2)$ в первый член в квадратных скобках и $Ai''(y + \omega_1) = (y + \omega_1) Ai'(y + \omega_1)$ во второй член в квадратных скобках, получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left[\int_0^\infty dy Ai''(y + \omega_1) Ai'(y + \omega_2) - \right. \\ &\left. - \int_0^\infty dy Ai''(y + \omega_2) Ai'(y + \omega_1) \right]. \end{aligned} \tag{В.16}$$

Простое интегрирование по частям приводит к результату

$$I_2 = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} [-Ai'(\omega_1) Ai(\omega_2) + Ai'(\omega_2) Ai(\omega_1)], \tag{В.17}$$

который доказывает соотношение (В.8).

Приложение Г Детерминант Фредгольма с ядром Эйри и распределение Трейси – Видома

В несколько упрощённой формулировке детерминант Фредгольма $\det(1 - \hat{K})$ определяется следующим образом (математически строгое определение можно найти, например, в [46]):

$$\begin{aligned} \det(1 - \hat{K}) &= \\ &= 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \iint \dots \int_a^b dt_1 dt_2 \dots dt_n \det [K(t_i, t_j)]_{(i,j)=1,\dots,n}, \end{aligned} \tag{Г.1}$$

где *ядро* $\hat{K} \equiv K(t, t')$ — это функция двух переменных, которая определена в некоторой заданной области $a \leq (t, t') \leq b$. С другой стороны, детерминант Фредгольма может быть представлен в экспоненциальном виде:

$$\det(1 - \hat{K}) = \exp \left[- \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \text{Tr} \hat{K}^n \right], \tag{Г.2}$$

где

$$\text{Tr} \hat{K}^n \equiv \iint \dots \int_a^b dt_1 dt_2 \dots dt_n K(t_1, t_2) K(t_2, t_3) \dots K(t_n, t_1). \tag{Г.3}$$

В этом приложении мы изложим формальное доказательство [1], показывающее, что детерминант Фредгольма с так называемым ядром Эйри, обозначаемый обычно как $F_2(s)$, может быть представлен в терминах решения уравнения Панлевэ второго рода, а именно,

$$F_2(s) \equiv \det [1 - \hat{K}_A] = \exp \left[- \int_s^\infty dt (t - s) q^2(t) \right], \tag{Г.4}$$

где \hat{K}_A — *ядро Эйри*, которое определяется на полу-бесконечной прямой $[s, \infty)$:

$$K_A(t_1, t_2) = \frac{Ai(t_1) Ai'(t_2) - Ai'(t_1) Ai(t_2)}{t_1 - t_2}, \tag{Г.5}$$

а функция $q(t)$ — это решение уравнения Панлевэ второго рода

$$q'' = tq + 2q^3 \tag{Г.6}$$

с граничным условием, $q(t \rightarrow +\infty) \sim Ai(t)$.

Введём новую функцию $R(t)$, такую, что

$$F_2(s) = \exp \left[- \int_s^\infty dt R(t) \right] \tag{Г.7}$$

или, в соответствие с определением (Г.4),

$$R(s) = \frac{d}{ds} \ln [\det(1 - \hat{K}_A)]. \tag{Г.8}$$

Здесь логарифм детерминанта может быть выражен в виде следа:

$$\begin{aligned} \ln [\det(1 - \hat{K}_A)] &= - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \text{Tr} \hat{K}_A^n \equiv \\ &\equiv - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \int_s^\infty dt_1 \int_s^\infty dt_2 \dots \\ &\dots \int_s^\infty dt_n K_A(t_1, t_2) K_A(t_2, t_3) \dots K_A(t_n, t_1). \end{aligned} \tag{Г.9}$$

Дифференцируя это выражение по переменной s , получаем

$$\begin{aligned} R(s) &= - \int_s^\infty dt (1 - \hat{K}_A)^{-1}(s, t) K_A(t, s) \equiv \\ &\equiv -K_A(s, s) - \sum_{n=2}^\infty \int_s^\infty dt_1 \int_s^\infty dt_2 \dots \\ &\dots \int_s^\infty dt_{n-1} K_A(s, t_1) K_A(t_1, t_2) \dots K_A(t_{n-1}, s). \end{aligned} \tag{Г.10}$$

Подставляя сюда интегральное представление ядра Эйри (Г.5),

$$K_A(t_1, t_2) = \int_0^\infty dz Ai(t_1 + z) Ai(t_2 + z), \tag{Г.11}$$

после простых алгебраических преобразований получаем:

$$R(s) = \int_s^\infty dt_1 \int_s^\infty dt_2 Ai(t_1) (1 - \hat{K}_A)^{-1}(t_1, t_2) Ai(t_2). \tag{Г.12}$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по переменной s и производя надлежащие алгебраические преобразования, можно показать, что

$$\frac{d}{ds} R(s) = -q^2(s), \quad (\text{Г.13})$$

где

$$q(s) = \int_s^\infty dt (1 - \hat{K}_A)^{-1}(s, t) \text{Ai}(t). \quad (\text{Г.14})$$

Из уравнения (Г.13) следует, что

$$R(s) = \int_s^\infty dt q^2(t). \quad (\text{Г.15})$$

Введём ещё две вспомогательные функции:

$$v(s) = \int_s^\infty dt_1 \int_s^\infty dt_2 \text{Ai}(t_1) (1 - \hat{K}_A)^{-1}(t_1, t_2) \text{Ai}'(t_2), \quad (\text{Г.16})$$

$$p(s) = \int_s^\infty dt (1 - \hat{K}_A)^{-1}(s, t) \text{Ai}'(t). \quad (\text{Г.17})$$

Дифференцируя функции $q(s)$, $v(s)$ и $p(s)$, (Г.14), (Г.16) и (Г.17), в результате простых, но несколько громоздких алгебраических преобразований, можно доказать, что производные этих функций удовлетворяют следующим трём уравнениям:

$$q' = p - Rq, \quad (\text{Г.18})$$

$$p' = sq - pR - 2qv, \quad (\text{Г.19})$$

$$v' = -pq. \quad (\text{Г.20})$$

Дифференцируя выражение $(R^2 - 2v)$ и используя уравнения (Г.13) и (Г.20), легко показать, что

$$\frac{d}{ds} (R^2 - 2v) = 2q(p - Rq). \quad (\text{Г.21})$$

С другой стороны, умножая обе части уравнения (Г.18) на $2q$, мы находим

$$\frac{d}{ds} q^2 = 2q(p - Rq). \quad (\text{Г.22})$$

Сравнивая уравнения (Г.21) и (Г.22) и учитывая, что в пределе $s \rightarrow \infty$ все введённые выше функции стремятся к нулю, мы получаем следующее простое соотношение

$$R^2 - 2v = q^2. \quad (\text{Г.23})$$

Наконец, дифференцируя обе части уравнения (Г.18) и используя уравнения (Г.13), (Г.18), (Г.19) и (Г.23), легко показать, что вторая производная функции $q(s)$ удовлетворяет уравнению

$$q'' = 2q^3 + sq, \quad (\text{Г.24})$$

которое есть частный случай уравнения Панлевэ второго рода [37, 38, 53]. Таким образом, подставляя (Г.15) в (Г.7), мы получаем результат (Г.4), где функция $q(s)$ есть решение дифференциального уравнения (Г.24). В пределе $s \rightarrow \infty$, в соответствие с определением (Г.14) функция $q(s)$ стремится к нулю. В этом случае уравнение (Г.24) превращается в дифференциальное уравнение $q'' = sq$

функции Эйри. Таким образом, в этом пределе

$$q(s \rightarrow +\infty) \simeq \text{Ai}(s) \sim \exp\left[-\frac{2}{3}s^{3/2}\right]. \quad (\text{Г.25})$$

С другой стороны, можно доказать [54], что в противоположном пределе, при $s \rightarrow -\infty$, асимптотическое поведение решения уравнения Панлевэ (Г.24) (у которого правая асимптотика совпадает с функцией Эйри (Г.25)) имеет вид

$$q(s \rightarrow -\infty) \simeq \sqrt{-\frac{1}{2}s}. \quad (\text{Г.26})$$

Функция распределения Трейси–Видома $P_{\text{TW}}(t)$ связана с описанной выше функцией $F_2(s)$ следующим образом. По определению, функция $F_2(s)$ даёт вероятность того, что некоторая случайная величина t , которая описывается распределением $P_{\text{TW}}(t)$, имеет величину меньше, чем заданный параметр s :

$$F_2(s) = \int_{-\infty}^s dt P_{\text{TW}}(t). \quad (\text{Г.27})$$

Дифференцируя обе части этого определения и используя результат (Г.4), мы получаем

$$P_{\text{TW}}(s) = \exp\left[-\int_s^\infty dt (t-s) q^2(t)\right] \int_s^\infty dt q^2(t), \quad (\text{Г.28})$$

где функция $q(s)$ есть решение дифференциального уравнения (Г.24).

Подставляя в (Г.28) явный вид асимптотического поведения функции $q(s)$ при $s \rightarrow +\infty$ и $s \rightarrow -\infty$ (уравнения (Г.25) и (Г.26)), можно легко оценить правую и левую асимптотику функции распределения Трейси–Видома $P_{\text{TW}}(s)$:

$$P_{\text{TW}}(s \rightarrow +\infty) \sim \exp\left[-\frac{4}{3}s^{3/2}\right], \quad (\text{Г.29})$$

$$P_{\text{TW}}(s \rightarrow -\infty) \sim \exp\left[-\frac{1}{12}|s|^3\right]. \quad (\text{Г.30})$$

Список литературы

1. Tracy C A, Widom H *Commun. Math. Phys.* **159** 151 (1994)
2. Baik J, Deift P, Johansson K *J. Am. Math. Soc.* **12** 1119 (1999)
3. Majumdar S N, Nechaev S *Phys. Rev. E* **72** 020901(R) (2005)
4. Johansson K *Commun. Math. Phys.* **209** 437 (2000)
5. Prähofer M, Spohn H *Phys. Rev. Lett.* **84** 4882 (2000)
6. Gravner J, Tracy C A, Widom H *J. Stat. Phys.* **102** 1085 (2001)
7. Majumdar S N, Nechaev S *Phys. Rev. E* **69** 011103 (2004)
8. Kardar M, Parisi G, Zhang Y-C *Phys. Rev. Lett.* **56** 889 (1986)
9. Sasamoto T, Spohn H *J. Stat. Phys.* **140** 209 (2010); arXiv:1002.1873; *Nucl. Phys. B* **834** 523 (2010); arXiv:1002.1879; *Phys. Rev. Lett.* **104** 230602 (2010); arXiv:1002.1883
10. Amir G, Corwin I, Quastel J, arXiv:1003.0443
11. Dotsenko V, Klumov B *J. Stat. Mech.* P03022 (2010)
12. Dotsenko V *Europhys. Lett.* **90** 20003 (2010)
13. Dotsenko V *J. Stat. Mech.* P07010 (2010)
14. Calabrese P, Le Doussal P, Rosso A *Europhys. Lett.* **90** 20002 (2010); arXiv:1002.4560
15. Halpin-Healy T, Zhang Y-C *Phys. Rep.* **254** 215 (1995)
16. Lemerle S et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 849 (1998)
17. Blatter G et al. *Rev. Mod. Phys.* **66** 1125 (1994)

18. Wilkinson D, Willemsen J F *J. Phys. A Math. Gen.* **16** 3365 (1983)
19. Burgers J M *The Nonlinear Diffusion Equation* (Dordrecht: D. Reidel, 1974)
20. Ulam S M, in *Modern Mathematics for the Engineers* (Ed. E F Beckenbach) (New York: McGraw-Hill, 1961)
21. Вершик А М, Керов С В *ДАН СССР* **233** 1024 (1977) [Ver-shik A M, Kerov S V *Sov. Math. Dokl.* **18** 527 (1977)]
22. Aldous D, Diaconis P *Bull. Am. Math. Soc.* **36** 413 (1999)
23. Ferrari P L "Shape fluctuations of crystal facets and surface growth in one dimension", PhD Thesis (München: Technische Univ., 2004)
24. Takeuchi K A, Sano M *Phys. Rev. Lett.* **104** 230601 (2010)
25. Krug J, Meakin P, Halpin-Healy T *Phys. Rev. A* **45** 638 (1992)
26. Huse D A, Henley C L, Fisher D S *Phys. Rev. Lett.* **55** 2924 (1985)
27. Huse D A, Henley C L *Phys. Rev. Lett.* **54** 2708 (1985)
28. Kardar M, Zhang Y-C *Phys. Rev. Lett.* **58** 2087 (1987)
29. Kardar M *Nucl. Phys. B* **290** 582 (1987)
30. Доценко В С *УФН* **165** 481 (1995) [Dotsenko V S *Phys. Usp.* **38** 457 (1995)]
31. Dotsenko V *Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems* (New York: Cambridge Univ. Press, 2001)
32. Verbaarschot J J M, Zirnbauer M R *J. Phys. A Math. Gen.* **18** 1093 (1985)
33. Dotsenko V "One more discussion of the replica trick: the examples of exact solutions", arXiv: 1010.3913
34. Derrida B *Phys. Rev. B* **24** 2613 (1981)
35. Wigner E P *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47** 790 (1951)
36. Tracy C A, Widom H *Commun. Math. Phys.* **177** 727 (1996)
37. Painlevé P "Sur les équation différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme" *Acta. Math.* **25** 1 (1902)
38. Clarkson P A *J. Comput. Appl. Math.* **153** 127 (2003)
39. Lieb E H, Liniger W *Phys. Rev.* **130** 1605 (1963)
40. Korepin V E, Bogoliubov N M, Izergin A G *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993); Боголюбов Н М, Изергин А Г, Корепин В Е *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи* (М.: Наука, 1992)
41. Gaudin M *La fonction d'onde de Bethe* (Paris: Masson, 1983)
42. McGuire J B *J. Math. Phys.* **5** 622 (1964)
43. Yang C N *Phys. Rev.* **168** 1920 (1968)
44. Takahashi M *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999)
45. Calabrese P, Caux J-S *Phys. Rev. Lett.* **98** 150403 (2007)
46. Mehta M L *Random Matrices* (Amsterdam: Elsevier, 2004)
47. Medina E, Kardar M *J. Stat. Phys.* **71** 967 (1993)
48. Dotsenko V S et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 050601 (2008)
49. Zhang Y-C *Europhys. Lett.* **9** 113 (1989)
50. Kolokolov I V, Korshunov S E *Phys. Rev. B* **75** 140201(R) (2007)
51. Kolokolov I V, Korshunov S E *Phys. Rev. B* **78** 024206 (2008)
52. Kolokolov I V, Korshunov S E *Phys. Rev. E* **80** 031107 (2009)
53. Iwasaki K et al. *From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions* (Braunschweig: Vieweg, 1991)
54. Hastings S P, McLeod J B *Arch. Ration. Mech. Anal.* **73** 31 (1980)

Universal randomness

V.S. Dotsenko

*LPTMC, Université Paris VI, 75252 Paris, France,
L.D. Landau Institute for Theoretical Physics,
ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation
E-mail: victor-dotsenko@yandex.ru*

In the last two decades it has been established that in many cases a single universal probability distribution function, known as the Tracy–Widom (TW) distribution, provides a macroscopic-level description of the statistical properties of microscopically different systems, including both purely mathematical ones, such as increasing subsequences in random permutations, and quite physical ones, such as directed polymers in random media or polynuclear crystal growth. The first part of this review uses a number of models to examine this phenomenon at a simple qualitative level and then considers the exact solution for one-dimensional directed polymers in a random environment, showing that free energy fluctuations in such a system are described by the universal TW distribution. The second part provides detailed appendix material containing mathematical background necessary for the first part.

PACS numbers: 02.50.Cw, **02.90.+p**, **05.20.-y**, **05.40.-a**, 61.41.+e

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201103b.0269

Bibliography — 54 references

Received 16 July 2010

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (3) 269–292 (2011)

Physics–Uspekhi **54** (3) (2011)