Февраль 2011 г. **Том 181, № 2**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Мультипольные разложения в магнитостатике

М.Я. Агре

С использованием математического аппарата алгебры углового момента изучаются мультипольные разложения магнитного поля пространственно ограниченной системы стационарных токов и разложение потенциальной функции этих токов во внешнем магнитном поле. Показывается, что мультипольное разложение вектора магнитной индукции тождественно разложению напряжённости электрического поля электронейтральной системы зарядов и переходит в него при замене магнитных мультипольных моментов на электрические, а тороидная часть мультипольного разложения векторного потенциала в статическом случае может быть опущена в силу её потенциальности. Мультипольное разложение потенциальной функции системы токов во внешнем магнитном поле также оказывается тождественным разложению потенциальной энергии электронейтральной системы зарядов во внешнем электрическом поле. В случае аксиально-симметричных систем выражения для поля и потенциальной энергии электрического и магнитного мультиполей приводятся к простому виду с выделенной явно зависимостью от ориентации оси симметрии.

PACS numbers: 41.20.Cv, 41.20.Gz DOI: 10.3367/UFNr.0181.201102d.0173

Содержание

1. Введение

Простой способ получения мультипольного разложения потенциала электростатического поля φ системы зарядов, распределённых в конечной области пространства с объёмной плотностью $\rho(\mathbf{r})$, хорошо известен (см., например, [1, 2]). Для этого следует в выражение для потенциала поля

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1}$$

подставить разложение ядра интегрального оператора (1) в ряд по полиномам Лежандра $P_l(x)$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^{\,l}}{r^{\,l+1}}\, P_l(\mathbf{n}\,\mathbf{n}')\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, $\mathbf{r}' = r'\mathbf{n}'$, $|\mathbf{n}| = |\mathbf{n}'| = 1$, и использовать теорему сложения для сферических функций $Y_{lm}(\mathbf{n})$

$$P_l(\mathbf{n}\,\mathbf{n}') = 4\pi \sum_m \frac{1}{2l+1}\, Y^*_{lm}(\mathbf{n}')\, Y_{lm}(\mathbf{n})\,. \tag{3}$$

Разложение (2) справедливо при $r' < r$ (в противном случае r' и r в правой части следует поменять местами), так что на достаточном расстоянии от источников поля, где данное условие уже выполняется, получаем в результате указанной подстановки разложение потенциала (1) в ряд по мультиполям (мультипольное разложение):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Q_{lm}\, \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{\,l+1}} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\mathbf{r})\,. \tag{4}$$

Здесь электрический 2^l-польный момент системы зарядов Q_{lm} определён следующим образом:

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^{\,l} \rho(\mathbf{r})\, Y^*_{lm}(\mathbf{n})\, \mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{5}$$

При заданном l набор $(2l+1)$ величин Q^*_{lm}, преобразующихся при поворотах системы координат как сфери-

М.Я. Агре. Национальный университет "Киево-Могилянская академия", ул. Г. Сковороды 2, 04655 Киев, Украина
Тел. (38-044) 425-60-68. E-mail: magrik@ukr.net

Статья поступила 30 апреля 2010 г., после доработки 12 июля 2010 г.

ческие функции Y_{lm}, образует, согласно общепринятой терминологии [3, 4], неприводимый тензор l-го ранга, причём скаляр Q_{00} совпадает с зарядом системы, Q_{1m}^* — со сферическими компонентами её дипольного момента

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,, \tag{6}$$

а Q_{2m}^* выражается через компоненты тензора квадрупольного момента системы [1].

Первые члены мультипольного разложения (4) (поле точечного заряда, поля диполя и квадруполя) нетрудно получить и без применения разложения (2), основанного на понятии производящей функции для полиномов Лежандра. Для этого достаточно разложить $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ в ряд Тейлора по компонентам вектора $\mathbf{r}'$ и подставить результат в подынтегральное выражение (1) [1, 2]. Однако в следующих порядках по r'/r затруднительно таким способом выделить в коэффициентах разложения неприводимые тензоры (5). Напомним также, что мультипольное разложение потенциала особенно удобно на больших расстояниях от системы зарядов – источников поля, где ряд (4) быстро сходится и поле системы в основном определяется его первым неисчезающим членом.

В магнитостатике при рассмотрении поля на большом расстоянии от системы токов обычно ограничиваются первым $\sim r^{-2}$ членом разложения векторного потенциала — полем магнитного диполя, которое выражается через магнитный (магнитный дипольный) момент системы (см., например, [1, 2]). И хотя подразумевается, что аналогичное (4) мультипольное разложение векторного потенциала магнитного поля существует, но, насколько нам известно, оно не приводилось в литературе. Во избежание недоразумений отметим, что разложение векторного потенциала, приведённое, например, в [5], нельзя назвать мультипольным. Оно получается простой подстановкой в выражение для векторного потенциала магнитного поля, которое отличается от (1) заменой ρ на $\mathbf{j}/c$, где $\mathbf{j}$ — плотность тока, c — скорость света в вакууме, разложения $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ в ряд Тейлора по компонентам $\mathbf{r}'$. В результате возникает ряд для векторного потенциала, коэффициенты которого (авторами [5] они названы магнитными мультипольными моментами) не являются неприводимыми тензорами. Кроме того, как будет ясно из нашего дальнейшего рассмотрения, этот ряд содержит бесконечное количество слагаемых (они выражаются через так называемые тороидные моменты системы), которые являются потенциальными и, следовательно, могут быть опущены.

Цель настоящей работы — показать, что мультипольные разложения в магнитостатике действительно существуют, т.е. магнитное поле системы токов, а также потенциальную энергию этой системы во внешнем магнитном поле можно представить в виде рядов, коэффициентами которых являются зависящие от распределения токов неприводимые тензоры. Тем самым известные результаты электростатики будут обобщены на случай магнитостатики.

К написанию данных заметок автора побудило внимательное чтение обзора [6], в котором детально анализируется мультипольное разложение потенциалов поля в теории излучения и вводятся тороидные мультипольные моменты системы, играющие наряду с электрическими и магнитными мультипольными моментами существенную роль в высших порядках длинноволнового приближения. В предельном случае нулевой частоты излучения из формул [6] можно получить выраженное через шаровые векторы мультипольное разложение векторного потенциала магнитного поля стационарных токов, причём тороидная часть получающегося ряда оказывается в статическом случае потенциальной (см. далее раздел 2.2) и не даёт вклада в мультипольное разложение вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$. Последнее разложение может быть получено подобным же предельным переходом из выражения для $\mathbf{B}$, приведённого в известной книге М. Роуза [7], хотя при применении своих результатов в теории излучения Роуз из-за определённых некорректностей потерял вклад тороидных моментов, как справедливо отмечено в [6]. Наш дальнейший анализ показал, что мультипольное разложение в магнитостатике может быть найдено более простым способом — прямым обобщением метода, применяемого в электростатике (см. раздел 2.1). При этом используется математический аппарат алгебры углового момента, и в частности неприводимых тензоров, который широко применяется в атомной и ядерной физике [3, 4], а поля магнитных мультиполей автоматически выражаются не через шаровые векторы, а — эквивалентно — через тензорные произведения неприводимых тензоров, что в ряде случаев оказывается более удобным.

Нами также рассмотрены мультипольные разложения потенциальной энергии системы зарядов или токов во внешнем поле. Разложение потенциальной энергии системы зарядов в ряд по мультипольным моментам приведено в книге [1], так что нам осталось лишь довести этот результат до конца, выразив коэффициенты данного ряда через производные потенциала внешнего электрического поля. В случае же потенциальной функции системы токов во внешнем магнитном поле всю работу пришлось выполнять с нуля. При этом оказалось, что найденное мультипольное разложение потенциальной функции токов тождественно мультипольному разложению энергии электронейтральной системы зарядов во внешнем электрическом поле (как и мультипольные разложения напряжённости электрического поля системы зарядов и вектора $\mathbf{B}$ системы токов) и получается из него заменой электрических мультипольных моментов на магнитные, а напряжённости электрического поля — на вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$.

Наконец, в разделе 4 рассматриваются аксиально-симметричные системы. Аппарат неприводимых тензоров оказывается для таких систем чрезвычайно эффективным и позволяет представить полученные мультипольные разложения в компактной инвариантной форме с явно выделенной зависимостью от всех векторных величин, определяющих поле мультиполя или его энергию во внешнем поле.

2. Разложение поля системы токов

2.1. Мультипольный ряд для векторного потенциала. Магнитный мультипольный момент

Для нахождения мультипольного разложения векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ системы стационарных токов, распределённых в конечной области пространства с плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, подставим в решение векторного уравнения Пуассона, записанное в виде объёмного потенциала [1, 2] (ср. с (1))

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,,$$

разложение (2), (3). В результате такой подстановки получаем для векторного потенциала следующий ряд:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\left(\int r'^{l}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,Y^{*}_{lm}(\mathbf{n}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\right)\frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{A}_l(\mathbf{r})\,. \qquad (7)$$

В случае постоянных токов

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,, \qquad (8)$$

что при учёте условия стационарности тока и равенства нулю нормальной составляющей вектора $\mathbf{j}$ на поверхности, ограничивающей область, где $\mathbf{j}\neq 0$,

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0\,, \qquad j_n\Big|_S = 0\,, \qquad (9)$$

легко проверяется подстановкой в интегральное тождество теоремы Гаусса – Остроградского вектора $(\mathbf{ar})\,\mathbf{j}$, $\mathbf{a}=\mathrm{const}$. Поэтому разложение (7) начинается с $l=1$, т.е. с поля магнитного диполя. Основная же проблема состоит в том, что задаваемые распределением токов коэффициенты (интегральные выражения) ряда (7) не являются неприводимыми тензорами.

Для выделения в (7) неприводимых тензоров, определяющихся распределением токов системы, т.е. для преобразования данного разложения векторного потенциала в мультипольное, воспользуемся аппаратом алгебры углового момента. Далее мы будем использовать ряд стандартных определений и обозначений этого аппарата [3], которые приводим здесь для удобства изложения. Сферические компоненты произвольного вектора $\mathbf{a}$, образующие неприводимый тензор первого ранга, выражаются через его декартовы компоненты следующим образом:

$$a_0 = a_z\,, \qquad a_{\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm \mathrm{i}a_y)\,.$$

Из двух неприводимых тензоров A_{lm} и $B_{l'm'}$ рангов l и l' соответственно с помощью коэффициентов Клебша – Гордана $C^{LM}_{lml'm'}$ составляются неприводимые тензоры (тензорные произведения неприводимых тензоров) рангов $L=|l-l'|, |l-l'|+1,\ldots,l+l'$ по правилу

$$\{A_l\otimes B_{l'}\}_{LM} = \sum_{m,m'} C^{LM}_{lml'm'}A_{lm}B_{l'm'}\,. \qquad (10)$$

При $l=l'$ из двух тензоров можно составить скаляр (неприводимый тензор нулевого ранга), пропорциональный скалярному произведению двух тензоров, которое мы будем обозначать круглыми скобками:

$$(A_l\,B_l) = \sum_m(-1)^m A_{l,-m}B_{l,m} = (-1)^l\sqrt{2l+1}\,\{A_l\otimes B_l\}_{00}\,. \qquad (11)$$

Отметим также, что неприводимые тензоры нулевого и первого рангов, составленные из двух векторов, пропорциональны их скалярному и векторному произведениям соответственно:

$$\{\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{ab}\,, \qquad \{\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\}_1 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,. \qquad (12)$$

Используя обозначение (11), запишем выражение для сферических компонент векторов $\mathbf{A}_l$, входящих в разложение (7), следующим образом:

$$(A_l)_m = \frac{4\pi(-1)^l}{c\sqrt{2l+1}}\,\frac{1}{r^{l+1}}\int r'^{l} j_m\big\{Y_l(\mathbf{n}')\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_{00}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\,. \qquad (13)$$

Для преобразования (13) к искомому виду можно было бы с помощью коэффициентов Клебша – Гордана разложить прямое произведение неприводимых тензоров $j_m Y_{lm'}(\mathbf{n}')$ по неприводимым тензорам $\{\mathbf{j}\otimes Y_l(\mathbf{n}')\}_{JM}$, а затем представить подынтегральное выражение (13) в виде суммы неприводимых тензоров, составленных из этих тензоров и $Y_{lm'}(\mathbf{n})$. Тот же результат получится, если по стандартной методике [3, 4] в подынтегральном выражении (13) изменить схему связи моментов. Тогда после вычисления возникающих при изменении схемы связи $6j$-символов найдем, что

$$j_m\big\{Y_l(\mathbf{n}')\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_{00} = \Big\{\mathbf{j}\otimes\big\{Y_l(\mathbf{n}')\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_0\Big\}_{1m} =$$

$$= \sum_{J=l,l\pm1}(-1)^{1+l+J}\sqrt{\frac{2J+1}{3(2l+1)}}\Big\{\{\mathbf{j}\otimes Y_l(\mathbf{n}')\}_J\otimes Y_l(\mathbf{n})\Big\}_{1m}.$$

Учитывая данное тождество, получаем для вектора $\mathbf{A}_l$ (13) искомое представление:

$$(A_l)_m = \frac{4\pi}{c(2l+1)\sqrt{3}}\,\frac{1}{r^{l+1}}\sum_{J=l,l\pm1}(-1)^{J+1}\sqrt{2J+1}\,\times$$

$$\times\left\{\int r'^{l}\{\mathbf{j}\otimes Y_l(\mathbf{n}')\}_J\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\otimes Y_l(\mathbf{n})\right\}_{1m}. \qquad (14)$$

Зависящие от распределения токов параметры, которыми определяется потенциал $\mathbf{A}_l(\mathbf{r})$ (14), являются неприводимыми тензорами рангов $J=l, l\pm1$. Так, $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ выражается через неприводимые тензоры

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int r\{\mathbf{j}\otimes Y_1(\mathbf{n})\}_{Jm}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int\{\mathbf{j}\otimes\mathbf{r}\}_{Jm}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,, \qquad (15)$$

$J=0,1,2$. Используя тождество

$$\int j_{m_1}r_{m_2}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = -\int j_{m_2}r_{m_1}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

которое при учёте (9) легко обосновывается с помощью теоремы Гаусса – Остроградского, и свойство симметрии коэффициентов Клебша – Гордана, легко проверить (см. определение (10)), что при $J=0$ и 2 тензоры (15) обращаются в нуль. Принимая, кроме того, во внимание вторую из формул (12), находим, что

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3cr^2}\left\{\int r'\{\mathbf{j}\otimes Y_1(\mathbf{n}')\}_1\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\otimes Y_1(\mathbf{n})\right\}_1 =$$

$$= \frac{1}{cr^3}\left\{\int\{\mathbf{j}\otimes\mathbf{r}'\}_1\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\otimes\mathbf{r}\right\}_1$$

записывается в хорошо известном виде потенциала поля магнитного диполя [1, 2]

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{r}}{r^3}\,, \qquad (16)$$

где

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\int (\mathbf{r}\times\mathbf{j})\,\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{17}$$

— магнитный дипольный момент токов.

Потенциалы полей старших мультиполей ($l > 1$) определяются согласно (14) неприводимыми тензорами

$$\int r^l \big\{\mathbf{j}\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_{Jm}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

$J = l, l\pm 1$. Покажем, что при $J = l+1$ данный тензор обращается в нуль. Проще всего в этом убедиться следующим образом. Введём шаровые векторы [7, 8]

$$\mathbf{Y}_{Llm}(\mathbf{n}) = \sum_{m_1 m_2} C^{Lm}_{lm_1 1m_2} Y_{lm_1}(\mathbf{n})\mathbf{e}_{m_2}\,, \tag{18}$$

где образующие так называемый спиральный базис единичные векторы $\mathbf{e}_m$, $m = 0, \pm 1$, выражаются через орты декартовой системы координат $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z\,, \qquad \mathbf{e}_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm \mathrm{i}\mathbf{e}_y)\,.$$

Учитывая определения (10), (18) и приняв во внимание, что $j_m = \mathbf{j}\mathbf{e}_m$, записываем искомый тензор через шаровой вектор:

$$\int r^l \big\{\mathbf{j}\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_{l+1,\,m}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int r^l\,\mathbf{j}\mathbf{Y}_{l+1,\,l,\,m}(\mathbf{n})\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Далее используем тождество (см., например, [7])

$$\nabla\big(\phi(\mathbf{r})\,Y_{Lm}(\mathbf{n})\big) = -\sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} - \frac{L}{r}\,\phi\right)\mathbf{Y}_{L,\,L+1,\,m}(\mathbf{n}) + \\ + \sqrt{\frac{L}{2L+1}}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} + \frac{L+1}{r}\,\phi\right)\mathbf{Y}_{L,\,L-1,\,m}(\mathbf{n})\,. \tag{19}$$

Полагая в нём $L = l+1$, $\phi(r) = r^{l+1}$, находим, что

$$r^l\mathbf{Y}_{l+1,\,l,\,m}(\mathbf{n}) = \nabla f\,, \qquad f(\mathbf{r}) = \frac{r^{l+1}}{\sqrt{(l+1)(2l+3)}}\,Y_{l+1,\,m}(\mathbf{n})\,.$$

После этого с помощью теоремы Гаусса–Остроградского и условий (9), которым удовлетворяют стационарные токи, приходим к заключению, что

$$\int r^l \big\{\mathbf{j}\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_{l+1,\,m}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int \mathbf{j}\nabla f\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_S f j_n\,\mathrm{d}S = 0\,.$$

Итак, в сумме (14), определяющей потенциал $\mathbf{A}_l$ при $l > 1$, остаётся только два слагаемых, соответствующих $J = l$ и $l-1$.

Введём магнитный 2^l-польный момент системы токов M_{lm}, $l = 1, 2, 3, \ldots$, определённый таким образом, что

$$M^*_{lm} = \frac{\mathrm{i}}{c}\sqrt{\frac{4\pi l}{(l+1)(2l+1)}}\int r^l\,\big\{\mathbf{j}\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_{lm}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \\ = -\frac{\mathrm{i}}{c}\sqrt{\frac{4\pi l}{(l+1)(2l+1)}}\int r^l\,\mathbf{j}\mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n})\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,, \tag{20}$$

и тороидный 2^l-польный момент T_{lm}, $l = 1, 2, 3, \ldots$:

$$T^*_{lm} = -\frac{\sqrt{4\pi/(l+1)}}{c(2l+3)}\int r^{l+1}\,\big\{\mathbf{j}\otimes Y_{l+1}(\mathbf{n})\big\}_{lm}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \\ = -\frac{\sqrt{4\pi/(l+1)}}{c(2l+3)}\int r^{l+1}\,\mathbf{j}\mathbf{Y}_{l,\,l+1,\,m}(\mathbf{n})\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \tag{21}$$

Из определений (20), (21) следует, что

$$M^*_{lm} = (-1)^m M_{l,\,-m}\,, \qquad T^*_{lm} = (-1)^m T_{l,\,-m}$$

являются неприводимыми тензорами l-го ранга, причём (см. (12)) $M^*_{1m} = \mu_m$, где $\boldsymbol{\mu}$ — магнитный дипольный момент (17), а векторный потенциал $\mathbf{A}_l$ (14) при $l > 1$ представляется в виде

$$\mathbf{A}_l(\mathbf{r}) = \mathbf{A}^{\mathrm{M}}_l(\mathbf{r}) + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{l-1}(\mathbf{r})\,. \tag{22}$$

Здесь

$$\mathbf{A}^{\mathrm{M}}_l(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^l\mathrm{i}}{r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi(l+1)}{3l}}\,\big\{M^*_l\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_1 \tag{23}$$

— векторный потенциал магнитного 2^l-поля, а

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{l-1}(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^{l+1}}{r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi l(2l-1)}{3}}\,\big\{T^*_{l-1}\otimes Y_l(\mathbf{n})\big\}_1 \tag{24}$$

определяет потенциал поля соответствующего тороидного момента. Отметим, что (22) даёт также правильное выражение для вектора $\mathbf{A}_1$, так как в этом случае T^*_{00} (21) вместе с тензором (15) при $J = 0$ обращается в нуль, второе слагаемое в (22) исчезает, а первое (см. (23)) даёт известное выражение для потенциала поля магнитного диполя (16).

Потенциалы (23) и (24) записываются также в эквивалентной форме через шаровые векторы (18). Так, используя определения (10), (18) и свойства симметрии коэффициентов Клебша–Гордана, можно посредством сравнения сферических компонент векторов убедиться в том, что

$$\mathbf{A}^{\mathrm{M}}_l(\mathbf{r}) = -\frac{\mathrm{i}}{r^{l+1}}\sqrt{\frac{4\pi(l+1)}{l(2l+1)}}\sum_m M_{lm}\mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n})\,, \tag{25}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{l-1}(\mathbf{r}) = -\frac{\sqrt{4\pi l}}{r^{l+1}}\sum_m T_{l-1,\,m}\mathbf{Y}_{l-1,\,l,\,m}(\mathbf{n})\,. \tag{26}$$

Именно в таком виде эти поля войдут в мультипольное разложение, если в выражении для векторного потенциала поля излучающей системы [6] перейти к статическому пределу, т.е. к нулевой частоте излучения. При этом записанное через шаровой вектор выражение для магнитного мультипольного момента (20) совпадает с определением магнитного мультипольного момента, приведённым в [6], после исправления очевидной опечатки в множителе. Выражение же для тороидного мультипольного момента в [6] состоит из двух слагаемых и, на первый взгляд, не совпадает с (21), однако, используя технику алгебры углового момента и свойства сферических функций, можно показать, что в условиях стационарности токов (9) эти выражения эквивалентны. Мы не приводим здесь соответствующего обоснования, так как уже в следующем разделе 2.2 будет показано, что поле (24), (26), являясь потенциальным, не даёт вклада в вектор магнитной индукции, и, соответственно, тороидная часть векторного потенциала в статическом случае может быть опущена в мультипольном разложении.

Итак, полученное нами мультипольное разложение векторного потенциала имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{A}_l(\mathbf{r})\,,$$

где векторы $\mathbf{A}_l$ определяются выражениями (22)–(24) либо эквивалентными им — (22), (25) и (26).

2.2. Вектор магнитной индукции магнитного мультиполя

Для нахождения мультипольного разложения вектора магнитной индукции $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ вычислим ротор каждого из двух слагаемых, образующих вектор $\mathbf{A}_l$ (22).

Прежде всего покажем, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_{l-1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}) = 0 \,. \tag{27}$$

Проще всего в этом убедиться (см. также приложение 1), исходя из представления $\mathbf{A}_{l-1}^{T}$ в форме (26) и используя тождество (19). Подставляя в это тождество $L = l - 1$ и $\phi(r) = r^{-l}$, находим, что

$$\frac{1}{r^{l+1}}\, \mathbf{Y}_{l-1,\,l,\,m}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{l(2l-1)}}\, \nabla\left(\frac{1}{r^l}\, Y_{l-1,\,m}(\mathbf{n})\right),$$

откуда и следует (27). Таким образом, тороидные моменты и соответствующие поля тороидных мультиполей не дают вклада в статическое магнитное поле. С неформальной точки зрения этот результат обсуждается в разделе 2.3.

Для вычисления ротора вектора $\mathbf{A}_l^{\mathrm{M}}$, записанного в форме (25), можно использовать известное (см., например, [7, 8]) представление шарового вектора

$$\mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n}) = -\frac{\mathrm{i}\, \mathbf{r} \times \boldsymbol{\nabla}\, Y_{lm}(\mathbf{n})}{\sqrt{l(l+1)}} \,. \tag{28}$$

Тогда, применяя тождество (19) и учитывая, что функция $Y_{lm}(\mathbf{r})/r^{l+1}$ удовлетворяет уравнению Лапласа, нетрудно показать, что (см. также приложение 1)

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r^{l+1}}\, \mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n})\right) = -\mathrm{i}\, \frac{\sqrt{l(2l+1)}}{r^{l+2}}\, \mathbf{Y}_{l,\,l+1,\,m}(\mathbf{n}) \,. \tag{29}$$

С помощью (29) и (25) находим записанное через шаровые векторы выражение для вектора магнитной индукции магнитного 2^l-поля:

$$\mathbf{B}_l(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}_l^{\mathrm{M}}(\mathbf{r}) = -\frac{\sqrt{4\pi(l+1)}}{r^{l+2}} \sum_m M_{lm} \mathbf{Y}_{l,\,l+1,\,m}(\mathbf{n}) \,. \tag{30}$$

Этот результат получится и при корректном переходе к статическому пределу в соответствующих формулах [7].

Если учесть определения (18), (10) и свойства симметрии коэффициентов Клебша–Гордана, то можно показать, что поле $\mathbf{B}_l$ (30) записывается также в эквивалентной форме через неприводимое тензорное произведение двух неприводимых тензоров:

$$\mathbf{B}_l(\mathbf{n}) = \frac{(-1)^l}{r^{l+2}} \sqrt{\frac{4\pi(l+1)(2l+1)}{3}} \left\{M_l^* \otimes Y_{l+1}\right\}_1 . \tag{31}$$

В приложении 1 показано, как (31) можно получить прямым вычислением ротора векторного потенциала поля магнитного мультиполя, представленного в виде (23).

В случае поля магнитного диполя $\mathbf{B}_1$ выражение (31) нетрудно свести к хорошо известной форме [1, 2]

$$\mathbf{B}_1 = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\,\boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}}{r^3} \,, \tag{32}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — магнитный момент системы (17). С этой целью достаточно подставить в (31) сферическую функцию в виде (см., например, [3])

$$Y_{2m}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\}_{2m}$$

и $M_1^* = \boldsymbol{\mu}$, записав $\mathbf{B}_1$ как

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\sqrt{15}}{r^3}\, \left\{\boldsymbol{\mu} \otimes \{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\}_2\right\}_1 ,$$

а затем применить тождество

$$\left\{\boldsymbol{\mu} \otimes \{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\}_2\right\}_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} \left[\frac{1}{3}\, \mathbf{n}^2 \boldsymbol{\mu} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\,\boldsymbol{\mu})\right],$$

которое получится, если в неприводимом тензоре $\{\{\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{n}\}_0 \otimes \mathbf{n}\}_1$ изменить схему связи моментов,

$$\left\{\{\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{n}\}_0 \otimes \mathbf{n}\right\}_1 = \frac{1}{3}\, \left\{\boldsymbol{\mu} \otimes \{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\}_0\right\}_1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \left\{\boldsymbol{\mu} \otimes \{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\}_2\right\}_1 ,$$

и использовать соотношения (12).

Итак, мультипольное разложение вектора магнитной индукции имеет вид

$$\mathbf{B} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{B}_l \,,$$

где поле магнитного 2^l-поля $\mathbf{B}_l$ определяется выражениями (30) или (31), а магнитный 2^l-польный момент M_{lm} — формулой (20).

2.3. Магнито-электростатические аналогии

Хорошо известно, что выражение для напряжённости поля электрического диполя по форме аналогично выражению (32) для вектора магнитной индукции магнитного диполя и получается из него заменой магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ (17) на дипольный момент системы зарядов $\mathbf{d}$ (6) (см., например, [1, 2]). Покажем, что данная аналогия сохраняется и во всех следующих членах мультипольного разложения.

Мультипольное разложение напряжённости электростатического поля системы зарядов получается из соответствующего разложения потенциала поля (4):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{E}_l \,, \tag{33}$$

где $\mathbf{E}_l = -\nabla\varphi_l$,

$$\varphi_l = \frac{1}{r^{l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_m Q_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{34}$$

— потенциал поля электрического 2^l-поля. Вычисляя $\nabla(Y_{lm}(\mathbf{n})/r^{l+1})$ с помощью тождества (19), находим напряжённость электрического поля 2^l-поля

$$\mathbf{E}_l = -\frac{\sqrt{4\pi(l+1)}}{r^{l+2}} \sum_m Q_{lm} \mathbf{Y}_{l,\,l+1,\,m}(\mathbf{n}) \,. \tag{35}$$

При $l \geqslant 1$ $\mathbf{E}_l$ (35) действительно получается из выражения (30) для вектора магнитной индукции магнитного 2^l-поля формальной заменой магнитного 2^l-польного момента M_{lm} (20) на электрический Q_{lm} (5). Вектор $\mathbf{E}_l$, очевидно, можно записать и через неприводимое тензорное произведение двух неприводимых тензоров (ср. с (31)):

$$\mathbf{E}_l = \frac{(-1)^l}{r^{l+2}} \sqrt{\frac{4\pi(l+1)(2l+1)}{3}} \left\{ Q_l^* \otimes Y_{l+1}(\mathbf{n}) \right\}_1 . \qquad (36)$$

Первый член $\mathbf{E}_0$ мультипольного разложения (33) совпадает с полем точечного заряда Q_{00}, что легко увидеть, подставив в (36) при $l = 0$ $Y_{1m}(\mathbf{n}) = \sqrt{3/(4\pi)}\, n_m$. Остальная же часть этого ряда тождественна мультипольному разложению вектора $\mathbf{B}$ и переходит в него формальной заменой $Q_{lm} \to M_{lm}$. Тождественность структуры мультипольных разложений напряжённости поля $\mathbf{E}$ в электростатике и вектора $\mathbf{B}$ в магнитостатике не является случайной. Действительно, вне системы токов — источников поля, где только и применимо мультипольное разложение, магнитное поле удовлетворяет системе уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 , \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 ,$$

позволяющих ввести скалярный потенциал поля ψ, $\mathbf{B} = -\nabla\psi$, для которого, как и в электростатике вне системы зарядов, получаем уравнение Лапласа. Убывающее же при $r \to \infty$ решение этого уравнения можно разложить в ряд по сферическим функциям:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} a_{lm} \frac{Y_{lm}(\mathbf{n})}{r^{l+1}} .$$

Применяя далее формулу (19), находим

$$\mathbf{B} = -\nabla\psi = -\sum_{l,m} \frac{\sqrt{(l+1)(2l+1)}}{r^{l+2}}\, a_{lm} \mathbf{Y}_{l,\,l+1,\,m}(\mathbf{n}) . \qquad (37)$$

Сходство структуры ряда (37) с мультипольным разложением (33), (35) в электростатике очевидно. В магнитостатике лишь отсутствует в силу (8) слагаемое $\sim 1/r^2$ в разложении $\mathbf{B}$ и соответствующее слагаемое $\sim 1/r$ в разложении (7) векторного потенциала $\mathbf{A}$, так что мультипольные разложения начинаются с $l = 1$. Сравнение членов ряда (37) с $\mathbf{B}_l$ (30) показывает, что

$$a_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, M_{lm} .$$

Отметим в заключение, что приведённые здесь соображения позволяют ещё одним неформальным, основанным на электромагнитостатических аналогиях, способом убедиться в том, что тороидные моменты в магнитостатике не дают вклада в мультипольное разложение вектора магнитной индукции. Действительно, слагаемое $\sim 1/r^{l+1}$ в мультипольном разложении векторного потенциала определяется двумя неприводимыми тензорами, характеризующими распределение токов-источников поля: тензором l-го ранга — магнитным мультипольным моментом — и тензором $(l-1)$-го ранга — тороидным мультипольным моментом (см. (22)–(26)). В то же время из (37) следует, что соответствующее $\sim 1/r^{l+2}$ слагаемое в мультипольном разложении $\mathbf{B}$ задаётся только одним тензором — тензором l-го ранга a_{lm}, т.е. тороидные моменты не могут входить в разложение $\mathbf{B}$.

3. Мультипольные разложения энергии системы во внешнем поле

При нахождении мультипольного разложения энергии системы мы будем полагать, что в области пространства, где она находится, нет источников внешнего поля (нет внешних зарядов при рассмотрении электростатической задачи либо, соответственно, нет внешних токов в магнитостатике). Если внешнее поле является к тому же квазиоднородным, что возможно только при сделанном здесь предположении, то мультипольное разложение представляет собой, как известно, быстросходящийся ряд, и энергия системы с достаточной точностью определяется его первым неисчезающим членом.

3.1. Система зарядов во внешнем электрическом поле

Мультипольное разложение энергии системы зарядов во внешнем поле можно было бы получить, подставляя в выражение

$$U = \int \rho(\mathbf{r})\, \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r})\, \mathrm{d}\mathbf{r} , \qquad (38)$$

которым определяется эта энергия, разложение потенциала φ в ряд Тейлора с центром разложения в некоторой точке $\mathbf{R}$ внутри системы:

$$\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l} \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \ldots \nabla_{i_l}\, \varphi(\mathbf{R}) . \qquad (39)$$

Первые члены мультипольного разложения (энергия точечного заряда, энергия диполя и энергия квадруполя) действительно легко находятся в результате данной подстановки [1, 2], однако выделение неприводимых тензоров — электрических мультипольных моментов — в следующих членах ряда при такой процедуре становится затруднительным. Поэтому используется следующий приём [1]. В области расположения системы, где нет зарядов — источников внешнего поля, потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа, поэтому как регулярное при $r \to 0$ решение данного уравнения его можно разложить в ряд по сферическим функциям:

$$\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = \sum_{l,m} a_{lm}\, r^l\, Y_{lm}(\mathbf{n}) . \qquad (40)$$

Подставляя далее (40) в (38), учитывая, что $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$ и вводя в соответствии с определением (5) электрические 2^l-польные моменты, представляем энергию системы в виде ряда

$$U = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, Q_{lm} (-1)^m a_{l,-m} . \qquad (41)$$

Разложение (41) получено в книге Ландау и Лифшица [1] и таким образом показано, что энергия системы зарядов представляется в виде ряда по её мультипольным моментам. Для приведения мультипольного разложения энергии к окончательной форме следует ещё найти коэффициенты этого ряда, что и будет сделано ниже.

Выразим коэффициенты a_{lm} ряда (40) через производные потенциала φ в точке $\mathbf{R}$. С этой целью заметим, что данный ряд можно рассматривать как эквивалентное представление ряда (39). Записав сферическую функцию $Y_{lm}(\mathbf{n})$ через неприводимый тензор l-го ранга, составленный из единичного вектора $\mathbf{n}$ [3], представим входящее в

(40) произведение r^l на Y_{lm} в виде

$$r^l Y_{lm}(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{(2l+1)!!}{4\pi l!}} \left\{ \ldots \{\{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\}_2 \otimes \mathbf{r}\}_3 \ldots \otimes \mathbf{r} \right\}_{lm} . \quad (42)$$

Учтём также, что, как показано в приложении 2, действие дифференциальных операторов, входящих в ряд (39), на гармоническую, т.е. удовлетворяющую уравнению Лапласа, функцию φ можно представить в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l} \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \ldots \nabla_{i_l} \varphi(\mathbf{R}) &= \Big(\left\{ \ldots \{\{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\}_2 \otimes \mathbf{r}\}_3 \ldots \otimes \mathbf{r} \right\}_l \times \\ &\times \left\{ \ldots \{\{\nabla \otimes \nabla\}_2 \otimes \nabla\}_3 \ldots \otimes \nabla \right\}_l \Big) \varphi(\mathbf{R}) = \\ &= \sum_m (-1)^m \left\{ \ldots \{\{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}\}_2 \otimes \mathbf{r}\}_3 \ldots \otimes \mathbf{r} \right\}_{lm} \times \\ &\times \left\{ \ldots \{\{\nabla \otimes \nabla\}_2 \otimes \nabla\}_3 \ldots \otimes \nabla \right\}_{l,-m} \varphi(\mathbf{R}) . \quad (43) \end{aligned}$$

Подставляя далее (42) в (40), а (43) в (39) и приравнивая в образовавшихся выражениях коэффициенты при одинаковых компонентах неприводимых тензоров, составленных из вектора $\mathbf{r}$, получим искомое представление для коэффициентов a_{lm}:

$$\begin{aligned} &(-1)^m a_{l,-m} = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)!!\,l!}} \left\{ \ldots \{\{\nabla \otimes \nabla\}_2 \otimes \nabla\}_3 \ldots \otimes \nabla \right\}_{lm} \varphi(\mathbf{R}) . \end{aligned} \quad (44)$$

Мультипольное разложение энергии системы зарядов во внешнем поле получаем подстановкой (44) в (41):

$$\begin{aligned} &U = \sum_{l=0}^{\infty} U_l , \qquad U_l = \frac{1}{\sqrt{l!(2l-1)!!}} \times \\ &\times \left(Q_l^* \left\{ \ldots \{\{\nabla \otimes \nabla\}_2 \otimes \nabla\}_3 \ldots \otimes \nabla \right\}_l \right) \varphi(\mathbf{R}) . \quad (45) \end{aligned}$$

Первое слагаемое (45) (здесь следует положить $(2l-1)!! = 1$ при $l = 0$)

$$U_0 = Q_{00} \varphi(\mathbf{R})$$

определяет энергию точечного заряда во внешнем поле. При $l \geqslant 1$ энергию соответствующего 2^l-поля можно также записать через напряжённость $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ внешнего поля:

$$\begin{aligned} &U_{l \geqslant 1} = -\frac{1}{\sqrt{l!(2l-1)!!}} \times \\ &\times \left(Q_l^* \left\{ \left\{ \ldots \{\{\nabla \otimes \nabla\}_2 \otimes \nabla\}_3 \ldots \otimes \nabla \right\}_{l-1} \otimes \mathbf{E} \right\}_l \right) . \quad (46) \end{aligned}$$

Второе слагаемое U_1 (46) мультипольного разложения (45) представляет собой хорошо известное выражение для энергии диполя с дипольным моментом $\mathbf{d}$ (6) во внешнем поле [1, 2]:

$$U_1 = -(Q_1^* \, \mathbf{E}) = -\mathbf{d}\mathbf{E} . \quad (47)$$

Для приведения третьего слагаемого U_2 к известному виду энергии квадруполя во внешнем поле заметим, что 2^2-польный момент Q_{2m} (5) связан с тензором квадрупольного момента, декартовы компоненты которого

$$D_{ij} = \int 3(x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \, \rho(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathbf{r} \quad (48)$$

[1, 2], следующим образом:

$$Q_{2m}^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{m_1, m_2} C_{1m_1 1m_2}^{2m} D_{m_1 m_2} . \quad (49)$$

Соотношение (49) проще всего получить подстановкой под знак интеграла (5), определяющего Q_{2m}^*, $r^2 Y_{2m}(\mathbf{n})$ в виде (42). При этом следует также учесть, что в силу инвариантности единичного тензора δ_{ij} составленный из его компонент неприводимый тензор второго ранга, очевидно, обращается в нуль. Тензор (48) симметричен и имеет нулевой след, так что из него можно составить только один отличный от нуля неприводимый тензор — тензор второго ранга (49). Поэтому можно ввести вспомогательные тензоры

$$q_{lm} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{m_1, m_2} C_{1m_1 1m_2}^{lm} D_{m_1 m_2} , \qquad q_{2m} = Q_{2m}^* ,$$

$$q_{1m} = 0 , \quad q_{00} = 0$$

и представить U_2 (45) в виде

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{l,m} (-1)^{l-m} q_{l,-m} \{\nabla \otimes \nabla\}_{lm} \, \varphi .$$

Используя далее свойство симметрии коэффициента Клебша – Гордана и соотношение, обратное (10), легко привести U_2 к стандартному виду [1, 2]:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{6} \sum_{m_1, m_2} (-1)^{m_1+m_2} D_{m_1 m_2} \nabla_{-m_1} \nabla_{-m_2} \, \varphi = \\ &= \frac{1}{6} \, D_{ik} \nabla_i \nabla_k \, \varphi = -\frac{1}{6} \, D_{ik} \nabla_i E_k . \quad (50) \end{aligned}$$

3.2. Система токов во внешнем магнитном поле

Роль потенциальной энергии системы токов $\mathbf{j}$ во внешнем магнитном поле, задаваемом векторным потенциалом $\mathbf{A}$, играет, как известно, так называемая потенциальная функция токов [2], которая определяется выражением

$$V = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \, \mathbf{A}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathbf{r} , \quad (51)$$

отличающимся знаком от энергии взаимодействия токов с внешним полем. Для потенциальной функции V в данном разделе и будет получено мультипольное разложение.

Если подставить в (51) разложение векторного потенциала в ряд Тейлора с центром в некоторой точке $\mathbf{R}$ внутри системы,

$$\mathbf{A}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \, x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l} \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \ldots \nabla_{i_l} \mathbf{A}(\mathbf{R}) , \quad (52)$$

то нетрудно найти первый, соответствующий $l = 1$, член мультипольного разложения потенциальной функции, который выражается через магнитный дипольный момент системы токов (17) и вектор магнитной индукции внешнего магнитного поля [2]:

$$V_1 = -\boldsymbol{\mu} \mathbf{B} . \quad (53)$$

Слагаемое, соответствующее $l = 0$ в (52), не даёт вклада в это разложение в силу (8). В следующих членах ряда выделить таким прямым способом неприводимые тензоры — магнитные 2^l-польные моменты — затруднительно. Поэтому обобщим на случай векторного поля $\mathbf{A}$

метод, использованный в предыдущем разделе для нахождения мультипольного разложения энергии в электростатике.

При наложении калибровочного условия

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \tag{54}$$

потенциал внешнего магнитного поля в области токов $\mathbf{j}$, где по предположению нет источников внешнего поля, удовлетворяет уравнению Лапласа. Регулярными при $r \to 0$ решениями векторного уравнения Лапласа являются пропорциональные шаровым векторам (18) векторы

$$r^l\mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n})\,, \quad r^{l-1}\mathbf{Y}_{l,\,l-1,\,m}(\mathbf{n}) \quad \text{и} \quad r^{l+1}\mathbf{Y}_{l,\,l+1,\,m}\,. \tag{55}$$

Шаровые векторы $\mathbf{Y}_{l\lambda m}(\mathbf{n})$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$, $\lambda = l, l \pm 1$ при $l \neq 0$ и $\lambda = 1$ при $l = 0$, образуют, как известно [7], полный ортонормированный набор на единичной сфере. Поэтому регулярное при $r \to 0$ решение векторного уравнения Лапласа может быть разложено в ряд по векторам (55). В нашем случае данное разложение упрощается. Действительно, используя определение шаровых векторов (18) и тождество (19), нетрудно показать (см. также [7]), что дивергенция двух первых векторов (55) обращается в нуль, в то время как

$$\operatorname{div}\left(r^{l+1}\mathbf{Y}_{l,\,l+1,\,m}(\mathbf{n})\right) = -\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\,(2l+3)\, r^l\, Y_{lm}(\mathbf{n})\,.$$

Следовательно, третий вектор (55) не удовлетворяет условию калибровки (54) и не может входить в разложение векторного потенциала $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}+\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[a_{lm}r^l\mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n}) + b_{lm}r^{l-1}\mathbf{Y}_{l,\,l-1,\,m}(\mathbf{n})\right]. \tag{56}$$

Второе слагаемое под знаком суммы (56) является потенциальным и, следовательно, не даёт вклада ни в магнитное поле $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, ни в потенциальную функцию тока (51). В его потенциальности можно убедиться прямым вычислением

$$\operatorname{rot}\left(r^{l-1}\mathbf{Y}_{l,\,l-1,\,m}(\mathbf{n})\right) = 0\,,$$

применив метод, описанный в приложении 1, либо на основании тождества (19), из которого следует, что

$$r^{l-1}\mathbf{Y}_{l,\,l-1,\,m}(\mathbf{n}) = \frac{\nabla\left(r^l\, Y_{lm}(\mathbf{n})\right)}{\sqrt{l(2l+1)}}\,.$$

После этого с помощью теоремы Гаусса–Остроградского и условий (9), которым удовлетворяет стационарный ток, нетрудно показать, что отмеченные члены ряда (56) не дают вклада в (51). Подставляя далее (56) в (51), вводя определённые в соответствии с (20) магнитные 2^l-польные моменты и принимая во внимание очевидное для шаровых векторов (18) тождество

$$\mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n}) = (-1)^{1-m}\mathbf{Y}^*_{l,\,l,\,-m}(\mathbf{n})\,,$$

приходим к следующему ряду для потенциальной функции токов:

$$V = -\sum_{l,m}\mathrm{i}\sqrt{\frac{(l+1)(2l+1)}{4\pi l}}\, M_{lm}(-1)^m a_{l,\,-m}\,. \tag{57}$$

Таким образом, показано, что потенциальная функция (51) раскладывается в ряд по магнитным мультипольным моментам, и для приведения этого разложения к окончательному виду следует определить коэффициенты a_{lm} ряда (57).

Выразим a_{lm}, которые являются также коэффициентами ряда (56) для векторного потенциала, через производные компонент вектора магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \sum_{l,m} a_{lm}\operatorname{rot}\left(r^l\,\mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n})\right). \tag{58}$$

Входящий в (58) ротор первого из векторов (55) можно вычислить стандартным способом, представив шаровой вектор в виде (28), либо применить метод, описанный в приложении 1. Результат имеет вид

$$\operatorname{rot}\left(r^l\,\mathbf{Y}_{llm}(\mathbf{n})\right) = \mathrm{i}\sqrt{(l+1)(2l+1)}\; r^{l-1}\,\mathbf{Y}_{l,\,l-1,\,m}(\mathbf{n})\,,$$

так что разложение $\mathbf{B}$ (58) будет содержать только векторы второго типа (55), являющиеся, как и само поле $\mathbf{B}$ в области токов $\mathbf{j}$, потенциальными и соленоидальными:

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}+\mathbf{r}) = \sum_{l,m} a_{lm}\mathrm{i}\sqrt{(l+1)(2l+1)}\; r^{l-1}\,\mathbf{Y}_{l,\,l-1,\,m}(\mathbf{n})\,. \tag{59}$$

Сравним теперь выражение для сферической компоненты B_M вектора (59) с разложением этой же компоненты в ряд Тейлора:

$$B_M(\mathbf{R}+\mathbf{r}) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-(l+1)}^{l+1} a_{l+1,\,m}\mathrm{i}\sqrt{(l+2)(2l+3)}\; r^l\left(Y_{l+1,\,l,\,m}(\mathbf{n})\right)_M = \\ = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\, x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_l}\,\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}\ldots\nabla_{i_l}\, B_M(\mathbf{R})\,.$$

При сравнении следует учесть, что выражение для сферической компоненты шарового вектора в соответствии с его определением (18) имеет вид

$$\left(Y_{l+1,\,l,\,m}(\mathbf{n})\right)_M = \sum_{m_1} C^{l+1,\,m}_{lm_1 1,\,-M}(-1)^M\, Y_{lm_1}(\mathbf{n})\,,$$

использовать для $r^l\, Y_{lm_1}(\mathbf{n})$ представление (42), а для гармонической функции B_M — тождество (П.5):

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_l}\,\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}\ldots\nabla_{i_l}\, B_M(\mathbf{R}) = \\ = \sum_{m_1}(-1)^{m_1}\Big\{\ldots\big\{\{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\}_2\otimes\mathbf{r}\big\}_3\ldots\otimes\mathbf{r}\Big\}_{lm_1}\times \\ \times\Big\{\ldots\big\{\{\nabla\otimes\nabla\}_2\otimes\nabla\big\}_3\ldots\nabla\Big\}_{l,\,-m_1} B_M(\mathbf{R})\,.$$

В результате приходим к системе уравнений для коэффициентов a_{lm}:

$$\frac{1}{l!}\Big\{\ldots\big\{\{\nabla\otimes\nabla\}_2\otimes\nabla\big\}_3\ldots\otimes\nabla\Big\}_{l,\,-m_1} B_M(\mathbf{R}) = \\ = \mathrm{i}\sqrt{\frac{(l+2)(2l+3)!!}{4\pi l!}}\sum_m a_{l+1,\,m}(-1)^{M-m_1}C^{l+1,\,m}_{lm_1 1,\,-M}\,. \tag{60}$$

Для нахождения этих коэффициентов следует умножить (60) на

$$C^{l+1,\,m'}_{l,\,-m_1 1M} = C^{l+1,\,-m'}_{lm_1 1,\,-M}$$

и, просуммировав по m_1 и M, образовать в левой части неприводимый тензор, а в правой — использовать условие ортогональности коэффициентов Клебша – Гордана. В итоге искомые коэффициенты окажутся выраженными через производные поля $\mathbf{B}$:

$$(-1)^m a_{l,-m} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{4\pi}{(l+1)(2l+1)!!(l-1)!}}\times \\ \times\left\{\left\{\ldots\{\{\nabla\otimes\nabla\}_2\otimes\nabla\}_3\ldots\otimes\nabla\right\}_{l-1}\otimes\mathbf{B}\right\}_{lm}, \quad (61)$$

где $l = 1, 2, 3, \ldots$

Подставляя (61) в (57), находим окончательное выражение для мультипольного разложения потенциальной функции системы токов во внешнем магнитном поле:

$$V = \sum_{l=1}^{\infty} V_l\,, \qquad V_l = -\frac{1}{\sqrt{l!(2l-1)!!}}\times \\ \times\left(M_l^*\left\{\left\{\ldots\{\{\nabla\otimes\nabla\}_2\otimes\nabla\}_3\ldots\otimes\nabla\right\}_{l-1}\otimes\mathbf{B}\right\}_l\right). \quad (62)$$

Здесь учтено, что $M_{lm} = (-1)^m M^*_{l,-m}$, и в соответствии с определением (11) введено скалярное произведение двух неприводимых тензоров. Разложение (62), очевидно, аналогично мультипольному разложению энергии электронейтральной системы зарядов во внешнем электрическом поле, причём потенциальная функция магнитного 2^l-поля V_l получается из выражения для энергии электрического 2^l-поля (46) заменой $Q_{lm}\to M_{lm}$, $\mathbf{E}\to\mathbf{B}$. Отметим, что для потенциальной функции магнитного диполя (53) этот результат хорошо известен.

Потенциальную функцию магнитного квадруполя V_2 (62),

$$V_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(M_2^*\{\nabla\otimes\mathbf{B}\}_1\right),$$

можно представить также в виде, аналогичном (50)[1]:

$$V_2 = -\frac{1}{6}\,\mu_{ik}\nabla_i B_k\,, \quad (63)$$

где в полной аналогии с тензором электрического квадрупольного момента D_{ik} (48) введён тензор магнитного квадрупольного момента μ_{ik}, сферические компоненты которого связаны с M^*_{2m} соотношением вида (49):

$$M^*_{2m} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{m_1,m_2} C^{2m}_{1m_1 1m_2}\mu_{m_1m_2}\,. \quad (64)$$

Явное выражение для компонент симметричного тензора μ_{ik}, имеющего нулевой след, легко найти, воспользовавшись определением M^*_{2m} (20). Подставляя в (20) $r^2 Y_{2m}(\mathbf{n})$ в виде (42), изменяя схему связи моментов и используя второе из тождеств (12), приведём выражение для M^*_{2m} к виду (64), где

$$\mu_{ik} = \frac{1}{c}\int\left([\mathbf{r}\times\mathbf{j}]_i\,x_k + [\mathbf{r}\times\mathbf{j}]_k\,x_i\right)\mathrm{d}\mathbf{r}\,. \quad (65)$$

В заключение данного раздела заметим, что совпадение мультипольных разложений энергии в электростатике и магнитостатике не является случайным. Действительно, скалярная конструкция, определяющая U_l (46) и V_l (62), представляет собой единственный скаляр, который можно составить из неприводимого тензора ранга l (2^l-польного момента) и производных $(l-1)$-го порядка компонент вектора $\mathbf{E}$ или $\mathbf{B}$ соответственно. Совпадение же коэффициентов перед скалярными произведениями неприводимых тензоров в (46) и (62) связано с определением электрических и магнитных мультипольных моментов. Последние определены таким образом, что мультипольные разложения электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{B}$ выглядят одинаково (см. раздел 2.3). В то же время энергия (электрическая или магнитная) взаимодействия двух систем является, как известно, симметричной в том смысле, что её можно вычислять как энергию системы 1 в поле системы 2 либо, наоборот, как энергию системы 2 в поле системы 1 [2] (так, энергия взаимодействия 2^{l_1}-поля системы 1 с внешним полем 2^{l_2}-поля системы 2 должна совпадать с энергией 2^{l_2}-поля системы 2 во внешнем поле 2^{l_1}-поля системы 1). Поэтому коэффициент перед скалярными произведениями в (46) и (62), обеспечивающий указанную симметрию, мог бы отличаться от $[l!(2l-1)!!]^{-1/2}$ лишь одинаковым для всех l множителем.

4. Аксиально-симметричные системы

Предположим, что распределение зарядов или токов является аксиально-симметричным с осью симметрии Z, направление которой задаётся единичным вектором $\mathbf{k}$. В этом случае существенно упрощаются как мультипольные разложения поля системы, так и разложение энергии данной системы во внешнем поле. Аппарат неприводимых тензоров оказывается для подобных систем чрезвычайно эффективным и позволяет, в частности, явно выделить во всех формулах зависимость от направления оси симметрии $\mathbf{k}$.

4.1. Мультипольные моменты аксиально-симметричных систем

Из определения 2^l-польного электрического (магнитного) момента Q_{lm} (M_{lm}) следует, что набор комплексно сопряжённых ему величин преобразуется по неприводимому представлению группы вращения размерности $2l+1$, образуя неприводимый тензор l-го ранга. Таким образом, при поворотах системы координат (СК) мультипольный момент (для определённости будем записывать соответствующие формулы для электрического момента Q_{lm}) преобразуется по закону

$$Q_{lm} = \sum_M Q_{lM} D^{(l)*}_{Mm}(\gamma,\beta,\alpha)\,, \quad (66)$$

где Q_{lM} — компоненты 2^l-польного момента в СК XYZ, а Q_{lm} — в СК xyz, (γ,β,α) — углы Эйлера, задающие ориентацию СК XYZ относительно СК xyz, $D^{(l)}_{Mm}$ — матрица конечных вращений (D-функция Вигнера) [9]. Пусть XYZ в (66) — собственная СК нашей аксиально-симметричной системы, ось Z которой совпадает с осью

[1] В работе [6, приложение 1] приводится выражение для V_2, полученное прямым разложением векторного потенциала внешнего поля в ряд Тейлора:

$$V_2 = -m_{ik}\nabla_i B_k\,.$$

Введённый авторами [6] тензор магнитного квадрупольного момента m_{ik} отличается от μ_{ik} (65) множителем:

$$m_{ik} = \frac{1}{3}\,\mu_{ik}\,.$$

Сравнение этих выражений с (63) показывает, что в [6] потерян множитель $1/2$.

симметрии, при этом β и α — полярный и азимутальный углы оси Z в СК xyz — будут задавать направление $\mathbf{k}$. Нам понадобятся также выражения для D-функции в частных случаях:

$$D^{(l)}_{Mm}(\gamma, 0, 0) = \exp(\mathrm{i}M\gamma)\,\delta_{Mm}\,, \tag{67}$$

$$D^{(l)}_{0m}(\gamma, \beta, \alpha) = D^{(l)}_{0m}(0, \beta, \alpha) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{lm}(\mathbf{k})\,. \tag{68}$$

Аксиальная симметрия системы означает, что при повороте СК на произвольный угол γ вокруг оси Z компоненты мультипольного момента Q_{lM} не изменяются, поэтому на основании закона преобразования (66) и формулы (67) получаем

$$Q_{lM} = Q_{lM}\exp(\mathrm{i}\gamma M)\,. \tag{69}$$

Соотношение (69) показывает, что в собственной СК только нулевая компонента 2^l-польного момента $Q_{l0} \equiv Q^{(k)}_l$ отлична от нуля:

$$Q_{lM} = Q^{(k)}_l \delta_{M0}\,. \tag{70}$$

Подставляя (70) в (66) и учитывая связь D-функции со сферической функцией (68), устанавливаем зависимость Q_{lm} от ориентации оси симметрии системы:

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Q^{(k)}_l\,Y^*_{lm}(\mathbf{k})\,. \tag{71}$$

Из формул (5) и (20), определяющих электрические и магнитные мультипольные моменты, следует, что

$$Q^*_{lm} = (-1)^m Q_{l,-m}\,, \qquad M^*_{lm} = (-1)^m M_{l,-m}\,.$$

Поэтому нулевые компоненты этих тензоров вещественны, и в соответствии с (71)

$$Q^*_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Q^{(k)}_l\,Y_{lm}(\mathbf{k})\,, \qquad M^*_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,M^{(k)}_l\,Y_{lm}(\mathbf{k})\,. \tag{72}$$

Формулы (72) определяют мультипольные моменты аксиально-симметричной системы в произвольно ориентированной СК, начало которой находится на оси симметрии системы. Можно также сказать, что эти формулы устанавливают зависимость мультипольных моментов, определённых относительно точки, которая лежит на оси симметрии системы, от ориентации этой оси. При этом $Q^{(k)}_l$ и $M^{(k)}_l$ зависят, вообще говоря, от положения точки, по отношению к которой определены мультипольные моменты.

Обсудим также случай, когда ось $\mathbf{k}$ является лишь осью симметрии n-го порядка, т.е. распределение зарядов (токов), а с ними и мультипольные моменты не изменяются при поворотах на угол $\gamma_n = 2\pi/n$ вокруг этой оси. В этом случае имеем, согласно (69),

$$Q_{lM} = Q_{lM}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}2\pi M}{n}\right),$$

так что из $Q_{lM} \neq 0$ следует, что $M = 0, \pm n, \pm 2n, \ldots$ Если вспомнить, что при заданном l $M = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$, то станет ясно: при $l < n$ только нулевая компонента 2^l-польного момента отлична от нуля в собственной СК. В произвольно же ориентированной СК, начало которой расположено на оси симметрии системы, Q_{lm} и M_{lm} при $l < n$ определяются выражениями (72). Данный результат очевиден для электрического или магнитного диполя ($l = 1$), задаваемого вектором $\mathbf{d}$ или $\boldsymbol{\mu}$ соответственно: при наличии оси симметрии даже наименьшего второго порядка вектор, характеризующий систему в точке, лежащей на оси симметрии, должен быть направлен вдоль этой оси, т.е. он имеет всего одну ненулевую компоненту в собственной СК. Итак, если система имеет ось симметрии n-го порядка, то поля 2^l-поля такой и аксиально-симметричной систем при $l < n$ совпадают; то же можно сказать и о взаимодействии 2^l-поля с внешним полем.

В качестве примера рассмотрим симметричное тороидное распределение токов. Система представляет собой n одинаковых равноотстоящих витков, намотанных на тор, по которым течёт одинаковый ток (n-симметричный тороид). В предельном случае $n \to \infty$ получаем тороидный соленоид. При конечном n система, очевидно, имеет ось симметрии n-го порядка, совпадающую с осью тора, так что при $l < n$ $M_{lM} = M^{(k)}_l \delta_{M0}$, как показано выше. В то же время из определения (20) с учётом выражения (28) для шарового вектора следует, что

$$M^{(k)}_l = M_{l0} = \frac{\sqrt{4\pi/(2l+1)}}{c(l+1)}\int r^l(\mathbf{r}\times\mathbf{j})\,\nabla Y_{l0}(\mathbf{n})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,,$$

так как $Y_{l0}(\theta, \varphi)$ не зависит от угла φ, и в результате векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{j}$ и ∇Y_{l0} оказываются компланарными. Таким образом, для тороида с осью симметрии n-го порядка $M_{lm} = 0$ при $l < n$. В случае магнитного дипольного момента этот результат очевиден: магнитный момент каждого из витков перпендикулярен плоскости витка, в то время как полный магнитный момент тороида должен быть направлен вдоль его оси. Отметим, что у рассматриваемой здесь системы отличны от нуля тороидные мультипольные моменты [6] (в статическом случае их можно вычислять по формуле (21)), которые, однако, не играют роли в магнитостатике, не давая вклада в мультипольное разложение вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$ (см. раздел 2.2). Итак, мультипольное разложение поля n-симметричного тороида начинается с поля магнитного 2^n-поля, поэтому на больших расстояниях $\mathbf{B}$ убывает как $1/r^{n+2}$ (см. (30), (31)). В случае же аксиально-симметричного тороидного тока ($n \to \infty$) все магнитные мультипольные моменты обращаются в нуль, и, соответственно, вне системы магнитное поле отсутствует. Отсутствие магнитного поля вне тороидного соленоида с бесконечно густой намоткой — хорошо известный результат, который приводится во многих учебниках общего курса физики и обосновывается при учёте симметрии системы с помощью закона Ампера (теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции).

4.2. Электрическое поле аксиально-симметричной системы зарядов

Потенциал поля электрического мультиполя определяется формулой (34). Подставляя в неё электрический 2^l-польный момент в виде (71) и применяя теорему сложения для сферических функций (3), находим потенциал поля аксиально-симметричного 2^l-поля:

$$\varphi_l(\mathbf{r}) = \frac{Q^{(k)}_l}{r^{l+1}}\,P_l(\mathbf{kn})\,, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{73}$$

где

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2-1)^l$$

— полином Лежандра.

Напряжённость поля можно найти из (73): $\mathbf{E}_l = -\nabla\varphi_l$. Мы, тем не менее, воспользуемся полученным ранее общим выражением для $\mathbf{E}_l$ (36) и, подставив в него Q^*_{lm} (72), найдём для аксиально-симметричной системы

$$\mathbf{E}_l = \frac{(-1)^l}{r^{l+2}}\, 4\pi \sqrt{\frac{l+1}{3}}\, Q_l^{(k)} \big\{ Y_l(\mathbf{k}) \otimes Y_{l+1}(\mathbf{n}) \big\}_1 \,. \qquad (74)$$

Неприводимый тензор, составленный из двух сферических функций, в литературе называют биполярной гармоникой (БГ) [3]. В (74) входит БГ первого ранга. Как показано в работе [10], БГ заданного ранга, составленная из сферических функций произвольных рангов, может быть редуцирована к простейшим БГ этого ранга с наименьшими возможными рангами сферических функций, причём коэффициенты разложения исходной БГ по таким простейшим БГ выражаются через полиномы Лежандра (теорему сложения для сферических функций можно рассматривать как простейшую из подобного рода редукций). Так, для интересующей нас БГ формула редукции имеет следующий вид:

$$\big\{ Y_l(\mathbf{k}) \otimes Y_{l'}(\mathbf{n}) \big\}_1 = \\ = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{3}{l_{\max}}} \left[(-1)^l P_l^{(1)}(x)\mathbf{k} + (-1)^{l'} P_{l'}^{(1)}(x)\mathbf{n} \right], \quad (75)$$

где

$$l' = l \pm 1\,, \quad l_{\max} = \max(l, l')\,, \quad P_l^{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x}\,, \quad x = \mathbf{kn}\,.$$

Далее нам понадобится формула редукции ещё одной БГ [10]:

$$\big\{ Y_l(\mathbf{k}) \otimes Y_l(\mathbf{n}) \big\}_1 = \frac{\mathrm{i}(-1)^{l+1}}{4\pi} \sqrt{\frac{3(2l+1)}{l(l+1)}}\, P_l^{(1)}(x)\, \mathbf{k} \times \mathbf{n}\,. \qquad (76)$$

Тождество (75) позволяет получить для напряжённости поля аксиально-симметричного 2^l-поля (74) достаточно простое выражение:

$$\mathbf{E}_l = \frac{Q_l^{(k)}}{r^{l+2}} \left[P_{l+1}^{(1)}(\mathbf{kn})\mathbf{n} - P_l^{(1)}(\mathbf{kn})\mathbf{k} \right], \quad l = 0, 1, 2, \ldots \qquad (77)$$

Приведём для примера формулы, к которым сводятся (73) и (77) в частных случаях $l = 1$ и 2. Для записи результатов нам понадобятся явные выражения для трёх простейших полиномов Лежандра:

$$P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,.$$

При $l = 1$ имеем

$$\varphi_1 = \frac{Q_1^{(k)}}{r^2}\, \mathbf{kn}\,, \qquad \mathbf{E}_1 = \frac{Q_1^{(k)}}{r^3} \left[3(\mathbf{kn})\mathbf{n} - \mathbf{k} \right].$$

В соответствии с определением (5) $Q_1^{(k)} = Q_{10}$ совпадает с z-компонентой дипольного момента системы (6) в собственной СК, и приведённые здесь формулы воспроизводят хорошо известные выражения для потенциала и напряжённости электрического поля диполя с дипольным моментом $\mathbf{d} = Q_1^{(k)}\mathbf{k}$ [1, 2]. Таким образом, в случае поля диполя аксиальная симметрия системы не приводит к каким-либо упрощениям. Последнее связано, очевидно, с тем обстоятельством, что в СК, ось Z которой направлена вдоль вектора дипольного момента $\mathbf{d}$, только одна из его компонент $d_z = Q_{10}$ отлична от нуля и, следовательно, Q_{1M} имеет вид (70) и в отсутствие симметрии.

Потенциал и напряжённость поля аксиально-симметричного квадруполя записываются на основании (73) и (77) в следующем виде:

$$\varphi_2 = \frac{Q_2^{(k)}}{2r^3} \left[3(\mathbf{kn})^2 - 1 \right], \qquad (78)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3Q_2^{(k)}}{2r^4} \Big\{ \left[5(\mathbf{kn})^2 - 1 \right]\mathbf{n} - 2(\mathbf{kn})\mathbf{k} \Big\}\,. \qquad (79)$$

Входящая в эти выражения величина $Q_2^{(k)} = Q_{20}$ пропорциональна, согласно (5), z-компоненте тензора квадрупольного момента системы D_{ij} (48) в собственной СК (т.е. третьему главному значению этого тензора):

$$Q_2^{(k)} = \frac{1}{2}\, D_{zz}\,. \qquad (80)$$

При учёте соотношения (80) φ_2 (78) совпадает с выражением для потенциала поля аксиально-симметричного квадруполя, которое приведено в [1, 2].

4.3. Магнитное поле аксиально-симметричной системы токов

Сходство мультипольных разложений напряжённости электрического поля и вектора магнитной индукции подробно обсуждалось в разделе 2.3. Простое сравнение формул (31) и (36) показывает, что вектор магнитной индукции 2^l-поля аксиально-симметричной системы токов $\mathbf{B}_l$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, должен определяться выражением (77), в котором компоненту электрического мультипольного момента $Q_l^{(k)}$ следует заменить на соответствующую компоненту магнитного мультипольного момента $M_l^{(k)}$ (см. (72)):

$$\mathbf{B}_l = \frac{M_l^{(k)}}{r^{l+2}} \left[P_{l+1}^{(1)}(\mathbf{kn})\mathbf{n} - P_l^{(1)}(\mathbf{kn})\mathbf{k} \right].$$

В частности, поле магнитного квадруполя $\mathbf{B}_2$ определяется формулой (79) с заменой $Q_2^{(k)}$ на

$$M_2^{(k)} = \frac{1}{2}\, \mu_{zz}\,,$$

где вследствие (49) и (64) соотношение между $M_2^{(k)}$ и главным z-значением тензора магнитного квадрупольного момента μ_{ij} (65) дублирует (80).

Для нахождения векторного потенциала поля магнитного мультиполя аксиально-симметричной системы подставляем в выражение для $\mathbf{A}_l^{\mathrm{M}}$ (23) 2^l-польный магнитный момент в форме (72):

$$\mathbf{A}_l^{\mathrm{M}} = \frac{(-1)^l\, \mathrm{i}}{r^{l+1}}\, 4\pi \sqrt{\frac{l+1}{3l(2l+1)}}\, M_l^{(k)} \big\{ Y_l(\mathbf{k}) \otimes Y_l(\mathbf{n}) \big\}_1 \,.$$

Применяя далее формулу редукции БГ (76), приходим к окончательному результату:

$$\mathbf{A}_l^{\mathrm{M}} = \frac{M_l^{(k)}}{l r^{l+1}}\, P_l^{(1)}(\mathbf{kn})\, \mathbf{k} \times \mathbf{n}\,, \quad l = 1, 2, 3, \ldots \qquad (81)$$

В частности, при $l=1$ (81) сводится к известному выражению для потенциала поля магнитного диполя (16) с магнитным моментом $\boldsymbol{\mu} = M_1^{(k)}\mathbf{k}$. Векторный потенциал аксиально-симметричного магнитного квадруполя определяется, согласно (81), выражением

$$\mathbf{A}_2^{\mathrm{M}} = \frac{3M_2^{(k)}}{2r^3}(\mathbf{kn})\,\mathbf{k}\times\mathbf{n}\,.$$

Отметим, что при любой мультипольности l векторный потенциал $\mathbf{A}_l^{\mathrm{M}}$ (81) коллинеарен векторному произведению $\mathbf{k}\times\mathbf{n}$.

4.4. Энергия аксиально-симметричной системы во внешнем поле

Упростим сначала выражение (45) для энергии электрического мультиполя во внешнем поле. Подставляя в (45) электрический 2^l-польный момент в виде (72) и записывая, кроме того, соответствующую сферическую функцию через неприводимый тензор, составленный из единичного вектора $\mathbf{k}$ (см. (42)), представим энергию взаимодействия аксиально-симметричного мультиполя с внешним полем в следующем виде:

$$U_l = \frac{1}{l!}\,Q_l^{(k)}\Big(\big\{\ldots\{\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}\}_2\ldots\otimes\mathbf{k}\big\}_l\times \\ \times\big\{\ldots\{\nabla\otimes\nabla\}_2\ldots\nabla\big\}_l\Big)\,\varphi(\mathbf{R})\,. \qquad (82)$$

Для дифференциального оператора, действующего на гармоническую функцию φ (потенциал внешнего поля) в (82), можно воспользоваться представлением (П.5), что позволяет записать U_l в окончательной достаточно простой форме:

$$U_l = \frac{1}{l!}\,Q_l^{(k)}k_{i_1}k_{i_2}\ldots k_{i_l}\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}\ldots\nabla_{i_l}\,\varphi(\mathbf{R}) = \\ = \frac{1}{l!}\,Q_l^{(k)}(\mathbf{k}\nabla)^l\,\varphi(\mathbf{R})\,. \qquad (83)$$

При $l=0$ (83) сводится к энергии точечного заряда $Q_0^{(k)}$, равного полному заряду системы, во внешнем поле,

$$U_0 = Q_0^{(k)}\varphi\,,$$

а при $l\geqslant 1$ U_l можно также записать через напряжённость этого поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$:

$$U_l = -\frac{1}{l!}\,Q_l^{(k)}(\mathbf{k}\nabla)^{l-1}(\mathbf{kE})\,. \qquad (84)$$

Потенциал и напряжённость внешнего поля в (83) и (84) берутся в точке $\mathbf{R}$, находящейся на оси симметрии системы, так как относительно этой точки определены мультипольные моменты. Если ось Z направить вдоль оси симметрии системы, задаваемой вектором $\mathbf{k}$, то выражения (83) при $l\geqslant 1$ и (84) примут следующий вид:

$$U_l = \frac{1}{l!}\,Q_l^{(k)}\,\frac{\partial^l\varphi}{\partial z^l} = -\frac{1}{l!}\,Q_l^{(k)}\,\frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}}\,E_z\,. \qquad (85)$$

При $l=1$ (84) переходит в известное выражение (47) для энергии диполя с дипольным моментом $\mathbf{d} = Q_1^{(k)}\mathbf{k}$ в поле $\mathbf{E}$, энергия же аксиально-симметричного квадруполя

$$U_2 = \frac{1}{4}\,D_{zz}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,,$$

как следует из (85) при учёте соотношения (80).

В заключение приведём выражение для потенциальной функции аксиально-симметричного магнитного мультиполя во внешнем поле $\mathbf{B}$. Сравнение найденных ранее в общем случае формул для энергии электрического мультиполя U_l (46) и потенциальной функции магнитного мультиполя V_l (62) показывает, что искомое выражение можно получить из (84), (85) простой заменой $\mathbf{E}\to\mathbf{B}$, $Q_l^{(k)}\to M_l^{(k)}$:

$$V_l = -\frac{1}{l!}\,M_l^{(k)}(\mathbf{k}\nabla)^{l-1}(\mathbf{kB}) = -\frac{1}{l!}\,M_l^{(k)}\,\frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}}\,B_z\,,$$

$l = 1,2,3,\ldots$

5. Заключение

Основные результаты нашего исследования представлены формулами (23) или (25) для векторного потенциала и (30) или (31) для вектора магнитной индукции поля магнитного мультиполя, а также выражением (62) для потенциальной энергии магнитного мультиполя во внешнем магнитном поле. Магнитное поле произвольной системы стационарных токов определяется за её пределами рядом, отдельные члены которого представляют собой поля магнитных мультиполей, а потенциальная энергия этой системы во внешнем магнитном поле записывается в виде мультипольного разложения (62). При этом магнитный 2^l-польный момент задаётся неприводимым тензором l-го ранга (20). Мультипольные разложения в магнитостатике тождественны мультипольным разложениям для электронейтральной системы зарядов в электростатике.

Оценивая данные результаты, нельзя не задать себе вопрос, как могло получиться, что в такой, казалось бы, хорошо разработанной области классической электродинамики — магнитостатике — вопросы мультипольных разложений оставались до конца не исследованными. Это тем более удивительно в связи с тем, что в электростатике подобные разложения хорошо известны, и исключение составляет, пожалуй, лишь приведённое здесь выражение (45) для потенциальной энергии электрического мультиполя произвольного ранга во внешнем поле. Причина, по-видимому, кроется в том, что для полного исследования мультипольных разложений в магнитостатике следует, как мы видели, систематически использовать мощный и в то же время изящный математический аппарат, основанный на результатах теории представлений группы вращения, — аппарат неприводимых тензоров. И хотя в классической и квантовой теории излучения этот аппарат применяется уже довольно давно (см. [7, 8], а также [6]), в такой простой области классической электродинамики, как магнитостатика, применение данного математического аппарата считалось, скорее всего, неуместным. А между тем само понятие электрического или магнитного мультипольного момента, компоненты которого образуют неприводимый тензор, составляет органическую часть этого аппарата.

Заметим, что нахождение мультипольного разложения потенциала поля в электростатике представляет собой более простую задачу ввиду скалярности этого потенциала. И хотя математический аппарат неприводимых тензоров при этом также неявно используется, но, как мы кратко напомнили во введении, для получения разложения достаточно воспользоваться лишь хорошо известными свойствами сферических функций. Поэтому мультипольное разложение электростатического потенциала (4) приводится уже в учебной литературе. Правда, при записи общего выражения для напряжённости поля электрического мультиполя необходимо использовать либо шаровые векторы (см. (35)), либо тензорное произведение неприводимых тензоров (см. (36)). А именно эти выражения (нам они ранее в литературе не встречались) необходимы для того, чтобы можно было отождествить весь мультипольный ряд для напряжённости электрического поля электронейтральной системы зарядов с мультипольным разложением вектора магнитной индукции системы токов, а не ограничиться лишь констатацией совпадения полей электрического и магнитного диполей.

В заключение хотелось бы отметить, что выполненное здесь исследование имеет не только академический интерес. Мультипольное разложение магнитного поля является представленным в форме ряда решением магнитостатической задачи. Этот ряд сходится уже на конечном расстоянии от системы токов — источников поля, так что для расчёта поля, вообще говоря, необходимы все члены этого ряда. На больших расстояниях от источников мультипольное разложение становится особенно эффективным, так как ряд быстро сходится, и для нахождения поля, как правило, достаточно ограничиться его первым неисчезающим членом. Столь же эффективным становится и мультипольное разложение потенциальной функции токов в квазиоднородном внешнем магнитном поле. Однако первый член мультипольных разложений отнюдь не всегда дипольный. Система с нулевым магнитным дипольным моментом, а также с равными нулю несколькими старшими магнитными мультипольными моментами не является экзотической и не сводится лишь к обсуждавшемуся в конце раздела 4.1 n-симметричному тороиду. Так, достаточно взять систему токов, состоящую из двух подсистем с равными по величине и антипараллельными магнитными дипольными моментами (в простейшем случае это два антипараллельных магнитных листка, т.е. одинаковых плоскопараллельных витка с равными по величине, но противоположно направленными токами), и мы получим систему, магнитные свойства которой уже будут определяться магнитным квадрупольным моментом. Нетрудно представить себе систему, у которой и магнитный дипольный, и магнитный квадрупольный моменты обращаются в нуль, и т.д. И во всех подобных случаях поле системы и её поведение во внешнем магнитном поле будут определяться старшими членами мультипольных разложений. Наконец заметим, что магнитные эффекты высшей мультипольности в принципе могут проявляться и при взаимодействии квантовых систем как между собой, так и с неоднородным внешним магнитным полем, однако относительная величина этих эффектов достаточно мала, и возможность в каждом конкретном случае их экспериментального наблюдения требует отдельного обсуждения.

6. Приложения

6.1. Приложение 1

При нахождении вектора магнитной индукции по векторному потенциалу, выраженному через шаровые векторы в форме (25), (26), приходится вычислять ротор вектора $\mathbf{Y}_{Llm}(\mathbf{n})/r^{l+1}$. Поясним кратко технику вычисления. Вначале с учётом второй из формул (12) записываем сферическую компоненту ротора в виде

$$\operatorname{rot}_v\left(\frac{1}{r^{l+1}}\,\mathbf{Y}_{Llm}(\mathbf{n})\right) = -\mathrm{i}\sqrt{2}\left\{\nabla\otimes\frac{1}{r^{l+1}}\,\mathbf{Y}_{Llm}(\mathbf{n})\right\}_{1v}. \qquad (\text{П}.1)$$

Далее используем определения (10), (18), тождество для градиента (19) и преобразовываем стандартным образом [3, 4] возникающую сумму произведений трёх коэффициентов Клебша – Гордана в произведение коэффициента Клебша – Гордана и $6j$-символа. В итоге, для (П.1) получаем следующее выражение:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r^{l+1}}\,\mathbf{Y}_{Llm}(\mathbf{n})\right) = -\mathrm{i}\,\frac{(2l+1)\sqrt{6(l+1)}}{r^{l+2}}\begin{Bmatrix} l+1 & L & 1\\ 1 & 1 & l\end{Bmatrix}\mathbf{Y}_{L,\,l+1,\,m}(\mathbf{n})\,. \qquad (\text{П}.2)$$

При преобразованиях следует помнить, что сферическую компоненту a_v вектора $\mathbf{a}$ можно записать в виде скалярного произведения $\mathbf{a}\mathbf{e}_v$. В случае $L = l-1$ $6j$-символ, а с ним и всё выражение (П.2) обращаются в нуль, что отвечает потенциальности поля (26) (см. раздел 2.2). В случае же $L = l$ (П.2) сводится после вычисления $6j$-символа к формуле (29) основного текста статьи.

Покажем также, каким образом можно находить ротор векторов вида (23) и (24). Введём с этой целью вектор

$$\mathbf{R}_L = \operatorname{rot}\left\{a_L\otimes\frac{1}{r^{l+1}}\,Y_l(\mathbf{n})\right\}_1,$$

где неприводимый тензор L-го ранга a_L не зависит от $\mathbf{r}$. Используя второе из тождеств (12) и возможность сопровождающейся умножением на $(-1)^{L+l+l'}$ перестановки сомножителей в неприводимом тензорном произведении вида (10), представляем $\mathbf{R}_L$ в виде

$$\mathbf{R}_L = -\mathrm{i}\sqrt{2}\left\{\nabla\otimes\left\{a_L\otimes\frac{1}{r^{l+1}}\,Y_l(\mathbf{n})\right\}_1\right\}_1 = (-1)^{L+l}\mathrm{i}\sqrt{2}\left\{\nabla\otimes\left\{\frac{1}{r^{l+1}}\,Y_l(\mathbf{n})\otimes a_L\right\}_1\right\}_1.$$

После изменения в последнем выражении схемы связи моментов находим, что

$$\mathbf{R}_L = \mathrm{i}\sqrt{6}\sum_J\sqrt{2J+1}\begin{Bmatrix} J & 1 & l\\ 1 & L & 1\end{Bmatrix}\times \left\{\left\{\nabla\otimes\frac{1}{r^{l+1}}\,Y_l(\mathbf{n})\right\}_J\otimes a_L\right\}_1. \qquad (\text{П}.3)$$

Далее с помощью тождества (19), определения шарового вектора (18) и условия ортогональности для коэффициентов Клебша – Гордана находим неприводимый тензор

$$\left\{\nabla\otimes\frac{1}{r^{l+1}}\,Y_l(\mathbf{n})\right\}_{JM} = -\frac{2l+1}{r^{l+2}}\sqrt{\frac{l+1}{2l+3}}\,Y_{l+1,\,M}(\mathbf{n})\delta_{J,\,l+1}$$

и, подставляя это выражение в (П.3), получаем окончательный результат:

$$\mathbf{R}_L = \operatorname{rot}\left\{a_L\otimes\frac{1}{r^{l+1}}\,Y_l(\mathbf{n})\right\}_1 = -\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{6(l+1)}\,(2l+1)}{r^{l+2}}\times \begin{Bmatrix} l+1 & 1 & l\\ 1 & L & 1\end{Bmatrix}\left\{Y_{l+1}(\mathbf{n})\otimes a_L\right\}_1. \qquad (\text{П}.4)$$

При $L = l-1$ $6j$-символ в (П.4), а с ним и $\mathbf{R}_{L-1}$ обращаются в нуль, что соответствует потенциальности вектора (24). Подставляя же в (П.4) $L = l$, $a_l = M_l^*$ и вычисляя $6j$-символ, находим, что

$$\operatorname{rot}\left\{M_l^* \otimes \frac{1}{r^{l+1}}\, Y_l(\mathbf{n})\right\}_1 = -\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{l(2l+1)}}{r^{l+2}}\left\{M_l^* \otimes Y_{l+1}(\mathbf{n}\right\}_1,$$

и в результате ротор вектора $\mathbf{A}_l^M(\mathbf{r})$ (23) записывается в виде (31).

6.2. Приложение 2

Покажем, что для гармонической функции φ, т.е. функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа, выполняется следующее тождество:

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l} \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \ldots \nabla_{i_l} \varphi = \left(\left\{\ldots\left\{\{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\}_2 \otimes \mathbf{r}\right\}_3 \ldots \otimes \mathbf{r}\right\}_l \times \right.$$
$$\left. \times \left\{\ldots\left\{\{\nabla\otimes\nabla\}_2 \otimes \nabla\right\}_3 \ldots \otimes \nabla\right\}_l\right)\varphi\,. \qquad (\text{П.5})$$

Для доказательства запишем прежде всего оператор, входящий в левую часть (П.5), через сферические компоненты векторов:

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l} \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \ldots \nabla_{i_l} =$$
$$= \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_l} (-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_l} x_{m_1} x_{m_2} \ldots x_{m_l} \nabla_{-m_1} \nabla_{-m_2} \ldots \nabla_{-m_l}\,. \qquad (\text{П.6})$$

Обращая далее соотношение (10), которое определяет неприводимое тензорное произведение двух неприводимых тензоров, находим, что

$$x_{m_1} x_{m_2} = \sum_{l_1, M_1} C^{l_1 M_1}_{1 m_1 1 m_2} \{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\}_{l_1 M_1}\,,$$

и, продолжая подобную процедуру, придём к соотношению

$$x_{m_1} x_{m_2} \ldots x_{m_l} =$$
$$= \sum_{l_1, M_1, l_2, M_2, \ldots, l_{l-1}, M} C^{l_1 M_1}_{1 m_1 1 m_2} C^{l_2 M_2}_{l_1 M_1 1 m_3} \ldots C^{l_{l-1} M}_{l_{l-2} M_{l-2} 1 m_l} \times$$
$$\times \left\{\ldots\left\{\{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\}_{l_1} \otimes \mathbf{r}\right\}_{l_2} \ldots \otimes \mathbf{r}\right\}_{l_{l-1} M}\,. \qquad (\text{П.7})$$

После подстановки (П.7) в правую часть (П.6), использования свойства симметрии коэффициентов Клебша – Гордана и определения (10) получим эквивалентное представление оператора (П.6):

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l} \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \ldots \nabla_{i_l} = \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{l-1}} (-1)^{l-l_{l-1}} \times$$
$$\times \sum_M (-1)^M \left\{\ldots\left\{\{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\}_{l_1} \otimes \mathbf{r}\right\}_{l_2} \ldots \otimes \mathbf{r}\right\}_{l_{l-1}, M} \times$$
$$\times \left\{\ldots\left\{\{\nabla\otimes\nabla\}_{l_1} \otimes \nabla\right\}_{l_2} \ldots \otimes \nabla\right\}_{l-1, -M} =$$
$$= \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{l-1}} (-1)^{l-l_{l-1}} \left(\left\{\ldots\left\{\{\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\}_{l_1} \otimes \mathbf{r}\right\}_{l_2} \ldots \otimes \mathbf{r}\right\}_{l_{l-1}} \times \right.$$
$$\left. \times \left\{\ldots\left\{\{\nabla\otimes\nabla\}_{l_1} \otimes \nabla\right\}_{l_2} \otimes \nabla\right\}_{l_{l-1}}\right)\,. \qquad (\text{П.8})$$

Сравним теперь ряд Тейлора (39) с разложением гармонической функции в ряд (40). Слагаемые с заданным l (слагаемые $\sim r^l$) в (39) и (40) должны, очевидно, совпадать. Примем также во внимание, что, как нетрудно показать, неприводимый тензор l-го ранга, зависящий только от единичного вектора $\mathbf{n}$, сводится с точностью до множителя к сферической функции $Y_{lm}(\mathbf{n})$. Поэтому составленные из вектора $\mathbf{r}$ неприводимые тензоры с меньшими, чем в (42), промежуточными и конечным l_{l-1} моментами, которые входят в (П.8), пропорциональны сферическим функциям $Y_{l_{l-1}, M}(\mathbf{n})$. Однако в (40) при заданном l нет сферических функций, ранг которых был бы меньше, чем l (здесь l — максимально возможный конечный момент в указанных неприводимых тензорах). Следовательно, действие оператора (П.8) на гармоническую функцию действительно сводится к (П.5).

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1994)]
2. Бредов М М, Румянцев В В, Топтыгин И Н *Классическая электродинамика* (М.: Наука, 1985)
3. Варшалович Д А, Москалев А Н, Херсонский В К *Квантовая теория углового момента* (Л.: Наука, 1975) [Varshalovich D A, Moskalev A N, Khersonskii V K *Quantum Theory of Angular Momentum* (Singapore: World Sci. Publ., 1988)]
4. Собельман И И *Введение в теорию атомных спектров* (М.: Наука, 1977); Sobelman I I, Vainshtein L A, Yukov E A *Excitation of Atoms and Broadening of Spectral Lines* (Berlin: Springer-Verlag, 1981)
5. Терлецкий Я П, Рыбаков Ю П *Электродинамика* (М.: Высшая школа, 1990)
6. Дубовик В М, Чешков А А *ЭЧАЯ* **5** 791 (1974) [Dubovik V M, Cheshkov A A *Sov. J. Part. Nucl.* **5** 318 (1974)]
7. Rose M E *Multipole Fields* (New York: Wiley, 1955) [Роуз М *Поля мультиполей* (М.: ИЛ, 1957)]
8. Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1981) [Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (New York: Intersci. Publ., 1965)]
9. Edmonds A R *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957)
10. Manakov N L, Marmo S I, Meremianin A V *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **29** 2711 (1996)

Multipole expansions in magnetostatics

M.Ya. Agre
National University of "Kyiv-Mohyla Academy", str. G. Skovorody 2, 04655 Kyiv, Ukraine
Tel. (38-044) 425-60 68. E-mail: magrik@ukr.net

Multipole expansion for the magnetic field of a spatially restricted system of stationary currents and that for the potential function of such currents in an external magnetic field are studied using angular momentum algebraic techniques. It is found that the expansion for the magnetic induction vector is made identical to that for the electric field strength of a neutral system of charges by substituting electric for magnetic multipole moments. The toroidal part of the multipole expansion for the magnetic field vector potential can, due to its potential nature, be omitted in the static case. Also the potential function of a system of currents in an external magnetic field and the potential energy of a neutral system of charges in an external electric field have identical multipole expansions. For axially-symmetric systems, the expressions for the field and those for the potential energy of electric and magnetic multipoles are reduced to simple forms, with symmetry axis orientation dependence separated out.

PACS numbers: 41.20.Cv, 41.20.Gz
Bibliography — 10 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (2) 173 – 186 (2011)

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201102d.0173
Received 30 April 2010, revised 12 July 2010
Physics – Uspekhi **54** (2) (2011)