

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Импедансный метод решения задач распространения электромагнитных волн в анизотропных и гиротропных средах

А.Г. Шалашов, Е.Д. Господчиков

Предложена удобная и физически прозрачная формулировка метода инвариантного погружения для решения задач распространения электромагнитных волн в сложных средах с анизотропным и гиротропным диэлектрическим или магнитным откликом.

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Jb, 52.35.-g

DOI: DOI: 10.3367/UFNr.0181.201102a.0151

Содержание

1. Введение (151).
2. Переход от граничной волновой задачи к эволюционной задаче (154).
 - 2.1. Граничная задача для уравнений встречных волн. 2.2. Импедансный метод для уравнений встречных волн. 2.3. Альтернативный способ вывода импедансных уравнений.
3. Импедансный метод для уравнений Максвелла в средах без пространственной дисперсии (157).
 - 3.1. Вывод уравнений для тангенциальных полей. 3.2. Разложение поля по локальным волноводным модам. 3.3. Разложение поля по модам на границах. 3.4. Разложение поля по вакуумным модам. 3.5. Резюме.
4. Общие свойства импедансных уравнений (162).
 - 4.1. Связь представлений через локальные волноводные и граничные вакуумные моды. 4.2. Отражение от полупространства, заполненного однородной средой. 4.3. Отражение от слоя, заполненного однородной средой. 4.4. Формальное общее решение для оператора отражения. 4.5. Решение в виде разложения в ряд по степеням отражения.
5. Пример. Распространение электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме (165).
 - 5.1. Постановка задачи для неоднородного плазменного слоя. 5.2. Линейное взаимодействие обыкновенной и необыкновенной волн и брэгговское резонансное рассеяние обыкновенной волны. 5.3. Резонансное рассеяние необыкновенной волны. 5.4. Отражение от однородного полупространства, заполненного плазмой.
6. Заключение (169).

7. Приложение. О законе сохранения энергии в импедансном методе (170).

Список литературы (171).

1. Введение

В данной работе изложен достаточно простой общий способ решения задач распространения и линейной трансформации электромагнитных волн в сложных средах с анизотропным и гиротропным диэлектрическим или магнитным откликом. В качестве примера таких сред можно указать магнитоактивную плазму [1–4], оптически активные кристаллы [5] (в том числе магнитоупорядоченные [6, 7] и жидкие кристаллы [8–10]), магнитные полупроводники [7, 11], искусственные метаматериалы [12], намагниченный вакуум [13, 14] и др. Основная задача, которую мы будем рассматривать, заключается в восстановлении электромагнитного поля внутри неоднородного слоя линейной среды с плоской границей при падении внешнего монохроматического излучения из вакуума или полупространства, заполненного однородной средой. К этой задаче примыкает и проблема определения полей во внешней среде — в волне, отражённой от слоя и прошедшей за слоем.

Чтобы проиллюстрировать идею предлагаемого метода, рассмотрим простейший и хорошо известный случай плоской электромагнитной волны, падающей на неоднородный слой изотропной среды. Допустим, что среда характеризуется диэлектрической $\varepsilon(z)$ и магнитной $\mu(z)$ проницаемостью, зависящей только от одной пространственной координаты z ; слой занимает область $z \in [a, b]$. Требуется найти распределение поля внутри и вне слоя. Распространение монохроматической электромагнитной волны с $\mathbf{E}, \mathbf{H} \propto \exp(i\omega t)$ ($\mathbf{E}, \mathbf{H}$ — напряжённость электрического и магнитного поля соответственно) в такой среде описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -ik_0 \mu(z) \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = ik_0 \varepsilon(z) \mathbf{E},$$

А.Г. Шалашов, Е.Д. Господчиков. Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
Тел. (831) 416-06-23
Факс (831) 416-06-16
E-mail: ags@appl.sci-nnov.ru, eggos@mail.ru

Статья поступила 20 января 2010 г.,
после доработки 29 июля 2010 г.

где $k_0 = \omega/c$ — вакуумное значение волнового вектора. Для простоты будем искать решение уравнений Максвелла в виде плоских волн, распространяющихся вдоль координаты z :

$$\mathbf{E} = E_x(z) \exp(i\omega t) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{H} = H_y(z) \exp(i\omega t) \mathbf{e}_y.$$

Уравнения Максвелла сводятся к

$$\partial_z E_x = -ik_0 \mu H_y, \quad \partial_z H_y = -ik_0 \varepsilon E_x. \quad (1.1)$$

Здесь и далее $\partial_z = \partial/\partial z$ обозначает производную по координате z . Вне слоя справедливы вакуумные решения для полей:

$$E_x = E^+ \exp(-ik_0 z) + E^- \exp(+ik_0 z), \\ H_y = E^+ \exp(-ik_0 z) - E^- \exp(+ik_0 z),$$

где E^+ и E^- равны амплитудам встречных волн, распространяющихся вдоль и против оси z . В силу непрерывности тангенциальных компонент полей, вакуумные решения определяют граничные условия для уравнений Максвелла внутри слоя. Обычно перед слоем задаётся амплитуда падающей волны E^{inc} , а за слоем ставится условие отсутствия волны, распространяющейся назад. В результате мы приходим к следующим граничным условиям:

$$E_x(a) + H_y(a) = E^{\text{inc}}, \quad E_x(b) - H_y(b) = 0. \quad (1.2)$$

При прямом подходе обычно находится семейство решений уравнений Максвелла, удовлетворяющее одному из граничных условий и зависящее от одной неопределённой константы; затем эта константа подбирается так, чтобы удовлетворить второму граничному условию [15, 16]. Однако возможен другой подход, основанный на уравнении для волнового импеданса. В нашем примере импеданс плоской волны определяется как отношение ортогональных полей:

$$\xi(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)}.$$

Нетрудно убедиться, что $\xi = \pm 1$ соответствует бегущим вдоль и против оси z волнам. Подставив $E_x = \xi H_y$ в уравнения Максвелла (1.1), легко получить замкнутое уравнение для волнового импеданса [17]:

$$\partial_z \xi = -ik_0(\mu - \varepsilon \xi^2). \quad (1.3)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка уже не содержит компонент волновых полей, поэтому его решение однозначно определяется одним начальным условием. В качестве начального условия удобно принять условие отсутствия обратной волны на задней границе слоя $\xi(b) = 1$ — это условие эквивалентно второму из граничных условий (1.2). Подставив известный импеданс $\xi(z)$ в уравнения Максвелла, получаем уравнение первого порядка для волнового поля с начальным условием на передней границе слоя, например,

$$\partial_z E_x = -ik_0 \mu \xi^{-1} E_x, \quad E_x(a) = \frac{E^{\text{inc}}}{1 + \xi^{-1}(a)}.$$

Таким образом, исходная краевая задача (1.1), (1.2) разбилась на две эволюционные задачи, которые можно

решать последовательно. Математически приведённая выше процедура эквивалентна известному способу понижения порядка линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка путём перехода к логарифмической производной [18]. Действительно, после исключения одной из компонент поля уравнения Максвелла (1.1) приводят к одномерному уравнению Гельмгольца для оставшейся компоненты поля, например,

$$\partial_z^2 E_x + k_0^2 \varepsilon \mu E_x = 0.$$

Путём замены переменной $V = (\partial_z E_x)/E_x$ это уравнение сводится к комплексному уравнению Риккати

$$\partial_z V + V^2 + k_0^2 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что данное уравнение полностью эквивалентно уравнению для волнового импеданса $\xi = -ik_0 \mu/V$.

В большинстве случаев вместо волнового импеданса удобнее ввести "локальный" коэффициент отражения, связывающий прямую и обратную волну в заданной точке z внутри исходного слоя:

$$R(z) \equiv \frac{E^- \exp(+ik_0 z)}{E^+ \exp(-ik_0 z)} = \frac{\xi(z) - 1}{\xi(z) + 1}.$$

Уравнение для волнового импеданса (1.3) можно переписать как уравнение для коэффициента отражения,

$$\partial_z R = -\frac{ik_0}{2} (\mu(1 - R)^2 - \varepsilon(1 + R)^2), \quad (1.4)$$

с начальным условием $R(b) = 0$. В силу непрерывности тангенциальных компонент полей величину $R(z)$ можно трактовать также и как коэффициент, определяющий амплитуду волны, отражённой от "укороченного" слоя $[z, b]$ в вакуум. Введённый таким образом коэффициент отражения, зависящий от координаты, в дальнейшем мы также будем иногда называть "импедансным" оператором. По сравнению с (1.3) уравнение (1.4) проще и естественнее обобщается на случай более сложных сред. Кроме того, в отличие от истинного волнового импеданса ξ или логарифмической производной поля V , импедансный оператор R оказывается ограниченным в устойчивых средах, что в сложных случаях существенно упрощает численный анализ. Приведённый простейший пример показывает, что волновой импеданс характеризует локальную связь между встречными волнами, распространяющимися в неоднородной среде. Возможность определения этой связи путём решения замкнутого эволюционного уравнения позволяет свести исходную краевую волновую задачу к задаче эволюционного типа.

В настоящей работе приводится обобщение указанного метода на случай анизотропных и гиротропных сред с тензорным диэлектрическим и магнитным откликом. Особенностью таких сред является возможность распространения нескольких нормальных волн с различной поляризацией. В однородной или плавно неоднородной среде нормальные волны не взаимодействуют, однако в общем случае приближение геометрической оптики в пространственно неоднородной среде может нарушаться, в результате чего между нормальными

волнами появляется связь. В этом случае распределение электромагнитного поля описывается векторным волновым уравнением, соответственно вместо скалярного волнового импеданса возникает матричный оператор. Для этого оператора можно построить эволюционное уравнение, аналогичное уравнению (1.4) для изотропной плоскостойкой среды. Такое уравнение может быть получено и в случае трёхмерно неоднородной (не плоскостойкой) среды, однако в этом случае "импеданс" является интегральным линейным оператором, что эквивалентно матрице с бесконечной размерностью. В случае же плоскостойкой анизотропной и гиротропной среды без пространственной дисперсии предложенный подход позволяет свести волновое уравнение к системе конечного числа нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент матрицы волнового импеданса, допускающих простую формулировку граничных условий. Интегрирование этих уравнений позволяет находить коэффициенты отражения, поглощения и прохождения плоской монохроматической волны, падающей из вакуума на плоскостойкую среду, а затем по распределению волнового импеданса внутри среды восстанавливать распределение волнового поля для произвольной зависимости компонент тензора диэлектрической или магнитной проницаемости от координат.

Даже в матричной формулировке рассматриваемый подход является частной формой более общего метода, известного по терминологии, принятой в математической литературе, как метод инвариантного погружения (invariant embedding). Идея метода инвариантного погружения была первоначально предложена в работах В.А. Амбарцумяна [19, 20] и С. Чандрасекара [21] для решения уравнений линейной теории переноса излучения. В настоящее время метод достаточно широко используется как математиками, так и физиками для сведения краевых задач к задачам эволюционного типа с начальными данными, более удобными для решения [19, 22–28]. Достаточно полное представление о методе можно получить по монографии В.И. Кляцкина [27] и приведённым там источникам. Отметим, что этот метод давно и успешно применяется для решения задач радиозондирования ионосферы, требующих достаточно сложных вычислений электромагнитных полей, коэффициентов отражения и прохождения волн в неоднородной магнитоактивной плазме. Первые попытки прямого интегрирования волновых уравнений в ионосфере [29–32] выявили основные вычислительные проблемы, связанные с большими размерами ионосферных слоёв по сравнению с длинами зондирующих волн и с наличием областей непропускания волн, приводящих к развитию численных неустойчивостей. Чтобы обойти указанные трудности, развивались различные варианты метода погружения (хотя сам термин "метод погружения" не принят в ионосферной литературе). При этом использовались уравнения для волнового адмиттанса [33–35], логарифмической производной поля [36, 37], коэффициентов отражения от укороченного слоя [38–42]. В частности, для гиротропной плазмы было получено дифференциальное уравнение для матрицы коэффициентов отражения от укороченного слоя [40, 41], которое является обобщением уравнения (1.4). В квантовой механике метод инвариантного погружения наиболее известен как метод фазовых функций [43–45]. Аналогично волновому уравнению линейные уравнения Шрё-

дингера и Дирака могут быть сведены к нелинейному уравнению типа Риккати. Физическое содержание такого подхода состоит в том, что удовлетворяющая уравнению Риккати функция (фазовая функция) имеет в каждой точке смысл сдвига (по сравнению со случаем свободного движения) фазы волновой функции при рассеянии на обрезанном в этой точке потенциале. Таким образом, становится возможным непосредственное, без нахождения волновой функции, определение фазы рассеяния, что оказывается очень полезным для широкого круга приложений. В последнее время метод активно развивается применительно к задачам взаимодействия квантовых частиц с поверхностью вещества [46–49], определения спектров многоэлектронных систем [50] и др. Использование упрощённой импедансной модели для решения одномерных квантово-механических задач рассматривалось в методической заметке [51].

Отметим основные преимущества импедансного метода по сравнению с "прямым" решением граничной волновой задачи. Во-первых, при построении аналитической теории метод инвариантного погружения позволяет обойти проблему отсутствия "динамической причинности" в исходной задаче (например, отражённая назад волна зависит от тех неоднородностей, которые ещё не пройдены прямой волной). Решения же эволюционных уравнений определяются лишь предыдущими по пространству значениями параметров и не зависят от последующих. Это свойство позволило, в частности, завершить формулировку статистической теории распространения волн в случайно неоднородных средах и обосновать феноменологические уравнения переноса излучения [28]. Во-вторых, метод инвариантного погружения позволяет избежать хорошо известной проблемы нераспространяющихся мод, возникающей при численном решении задач с линейным взаимодействием волн [29, 52]. Для таких задач характерны области непропускания с экспоненциальной зависимостью поля от координат. При прямом численном интегрировании из шумов неизбежно возбуждаются экспоненциально нарастающие решения, которые в случае достаточно протяжённой области непропускания подавляют все остальные физические эффекты. С математической точки зрения это пример "жёсткой" системы. Аналогичные проблемы возникают и при моделировании распространения волн в окрестности резонансов среды из-за наличия сильно поглощающихся мод. После переформулировки таких проблем к уравнениям метода инвариантного погружения экспоненциально растущие решения пропадают, т.е. задача перестаёт быть жёсткой (в устойчивых средах). Таким образом, вычислительные методы, основанные на импедансной технике, могут составить конкуренцию методу конечных элементов [53–55] или FDTD-методу [56], обычно применяемым для моделирования волновых процессов в жёстких средах. И, наконец, вследствие сохранения полной энергии в устойчивых средах, импедансный оператор всегда ограничен, что позволяет эффективно рассчитывать разнообразные "резонансы" среды, в окрестности которых волновые поля либо неограничены, либо могут принимать очень большие значения.

В указанных выше работах метод инвариантного погружения применялся, в основном, к скалярному волновому уравнению. Обобщение метода на случай векторного волнового уравнения в анизотропной и гиротроп-

ной среде идеологически совершенно прозрачно, однако на практике сталкивается с техническими трудностями из-за слишком громоздких выкладок. Поэтому, например, в ионосферных задачах распространение связанных волн в плоскостной плазме рассматривалось, как правило, лишь вдоль градиента неоднородности [38–41]. При попытке получить более общие импедансные уравнения в магнитоактивной плазме были допущены математические ошибки [57, 58], исправленные лишь в более поздней работе [59]. На наш взгляд, можно выделить две основные причины указанных трудностей. С одной стороны, классическое определение метода инвариантного погружения, используемое, например, в монографии Кляцкина [27], несмотря на математическую изящность, всё же остаётся довольно формальным и трудным для человека с "физическим" стилем мышления. С другой стороны, физики при получении уравнений импедансного метода часто с самого начала привязываются к геометро-оптическим модам среды (в каждой пространственной точке находится набор мод однородной среды). В сложных средах, например, в гиротропной плазме, это сопряжено с довольно трудоёмкими вычислениями. Между тем, для импедансного подхода выделение геометро-оптических мод среды не является обязательным, часто задача может быть существенно упрощена переходом к простому вакуумному набору мод [41, 59]. Основной целью настоящей работы является представление физически понятного способа вывода импедансного метода, не зависящего от выбора модового представления электромагнитного поля [59, 60]. При этом эволюционные уравнения метода инвариантного погружения рассматриваются как уравнения для оператора отражения (от укороченного слоя), связывающего встречные волны, распространяющиеся вдоль некоторого выделенного направления в среде. В рамках такого подхода формальное обобщение на случай векторной волновой задачи, в том числе и в трёхмерно неоднородных средах, тривиально, хотя, конечно, тоже может приводить к громоздким выкладкам в конкретных задачах.

Структура настоящей работы следующая. В разделе 2 описан универсальный подход, позволяющий перейти от линейной граничной волновой задачи общего вида к некоторой эволюционной нелинейной задаче для оператора отражения. В результате выводится система импедансных уравнений и анализируется её физический смысл. В разделе 3 данный метод применяется для уравнений Максвелла в средах без пространственной дисперсии. Отдельно рассматриваются случаи одномерно и трёхмерно неоднородных сред. В разделе 4 аналитически исследуются некоторые общие свойства импедансных уравнений. Рассматриваются основные частные случаи, допускающие аналитическое решение, разложение общего решения в асимптотические ряды, законы сохранения для общего решения и т.п. В разделе 5 развитая техника иллюстрируется на примере задачи о распространении электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме с достаточно сложным профилем концентрации. Приводятся результаты численного расчёта волновых полей, возбуждаемых в плазменном слое при падении волны с заданной поляризацией, даётся их качественный анализ. Приведён пример аналитического расчёта матрицы отражения электромагнитного излучения от однородного полупространства, заполнен-

ного магнитоактивной плазмой. В заключении подытожены основные результаты работы.

2. Переход от граничной волновой задачи к эволюционной задаче

2.1. Граничная задача для уравнений встречных волн

В данном разделе мы изложим общую идею метода, не привязываясь к задаче распространения электромагнитных волн в сложных средах. Рассмотрим пространственно неоднородную линейную и стационарную среду, в которой может распространяться некоторое волновое поле $\mathcal{E}(t, \mathbf{r})$. Поле будем считать монохроматическим, $\mathcal{E} \sim \exp(i\omega t)$. Допустим, что задача позволяет выделить в среде направление z так, что исходное поле можно искать в виде суперпозиции двух встречных волн, распространяющихся вдоль ($\mathcal{E}^+$) и против ($\mathcal{E}^-$) оси z :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^-.$$

Конкретные способы разбиения поля на встречные волны мы будем обсуждать в следующем разделе на примере уравнений Максвелла. Здесь нам достаточно постулировать, что такое разбиение существует и, поскольку среда линейная, распространение исходного волнового поля полностью определяется двумя уравнениями вида

$$\begin{cases} \partial_z \mathcal{E}^+ = \hat{t}^+ \mathcal{E}^+ + \hat{r}^- \mathcal{E}^-, \\ -\partial_z \mathcal{E}^- = \hat{t}^- \mathcal{E}^- + \hat{r}^+ \mathcal{E}^+. \end{cases} \quad (2.1)$$

Система (2.1) описывает распространение взаимодействующих встречных волн. Рассмотрим, например, первое уравнение. Здесь $\hat{t}^+$ — оператор эволюции "прямой" волны при условии отсутствия "обратной" волны ($\partial_z \mathcal{E}^+ = \hat{t}^+ \mathcal{E}^+$), а $\hat{r}^-$ — оператор рассеяния обратной волны в прямую. Аналогично можно проанализировать и второе уравнение. Знак минус перед производной во втором уравнении возникает из-за того, что волна распространяется против оси z .

Отметим, что $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ здесь могут быть векторами произвольной (но одинаковой) размерности. Например, ниже будет показано, что для электромагнитного поля в среде без пространственной дисперсии эта размерность равна двум. Соответственно коэффициенты $\hat{t}^\pm$ и $\hat{r}^\pm$ уравнения встречных волн в общем случае представляют собой линейные операторы, локальные по координате z . В простейшем случае плоскостной среды (пространственная неоднородность среды зависит только от z) эти операторы вырождаются просто в умножение на матрицы соответствующей размерности, зависящие от z и от поперечного по отношению к направлению неоднородности волнового числа $\mathbf{k}_\perp$, которое в такой геометрии сохраняется. При наличии поперечной неоднородности эти операторы можно представить в виде интегральной свёртки либо по поперечным координатам, либо по поперечным волновым числам, например:

$$\begin{aligned} \hat{t}^+ \mathcal{E}^+(\mathbf{r}_\perp, z) &= \int \hat{t}^+(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, z) \mathcal{E}^+(\mathbf{r}'_\perp, z) d^2 \mathbf{r}'_\perp, \\ \hat{t}^+ \mathcal{E}^+(\mathbf{k}_\perp, z) &= \int \hat{t}^+(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \mathcal{E}^+(\mathbf{k}'_\perp, z) d^2 \mathbf{k}'_\perp, \end{aligned} \quad (2.2)$$

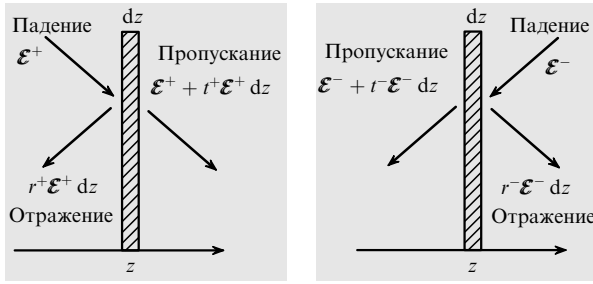


Рис. 1. К пояснению физического смысла дифференциальных операторов отражения и прохождения.

где

$$\mathcal{E}^+(\mathbf{k}_\perp, z) = \int \mathcal{E}^+(\mathbf{r}_\perp, z) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp) d^2 \mathbf{r}_\perp, \quad (2.3)$$

$$\hat{t}^+(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) = \int \hat{t}^+(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, z) \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - i\mathbf{k}'_\perp \mathbf{r}'_\perp) d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{r}'_\perp.$$

В дальнейшем нам будет удобнее работать в фурье-представлении по поперечным координатам, поскольку, как будет показано в следующем разделе, оно позволяет естественным образом отсортировать волны, распространяющиеся в противоположных направлениях относительно оси z .

Для широкого класса задач уравнения встречных волн могут быть получены из естественных физических соображений. В случае неограниченных (не волноводных) сред для этого достаточно, чтобы в *однородной* среде решения уравнений (2.1) соответствовали плоским волнам с определённым направлением распространения. Пусть мы знаем, как происходит взаимодействие поля с бесконечно тонким слоем $[z, z + dz]$ рассматриваемой среды, вырезанным поперёк оси z и окружённым однородной средой (вакуумом). А именно, как показано на рис. 1, волна $\mathcal{E}^+(z)$, падающая на слой из $-\infty$, однозначно определяет поле $\mathcal{E}^+(z + dz)$ в прошедшей волне за слоем и поле $\mathcal{E}^-(z)$ в отражённой волне перед слоем:

$$\mathcal{E}^+(z + dz) = [\hat{I} + \hat{t}^+(z) dz] \mathcal{E}^+(z), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{E}^-(z) = \hat{r}^+(z) dz \mathcal{E}^+(z).$$

Здесь $\hat{I} + \hat{t}^+(z) dz$ и $\hat{r}^+(z) dz$ — линейные операторы, являющиеся обобщением коэффициентов прохождения и отражения поля от бесконечно тонкого слоя, $\hat{I}$ — единичный (тождественный) оператор. Аналогично можно определить и операторы прохождения и отражения для поля $\mathcal{E}^-(z)$, падающего на слой из $+\infty$:

$$\mathcal{E}^-(z - dz) = [\hat{I} + \hat{t}^-(z) dz] \mathcal{E}^-(z), \quad (2.5)$$

$$\mathcal{E}^+(z) = \hat{r}^-(z) dz \mathcal{E}^-(z).$$

Заметим, что в общем случае падение волн "слева" и "справа" не эквивалентно. Поэтому нам пришлось ввести две пары операторов прохождения и отражения, различающихся индексом $\pm$, отвечающих за направление распространения волны. Комбинируя соотношения (2.4) и (2.5), нетрудно получить уравнения для амплитуд встречных волн в форме (2.1). Таким образом, данные уравнения имеют прозрачный физический смысл — амплитуда каждой из волн $\mathcal{E}^\pm$ изменяется из-за "неидеального" прохождения через среду, $\pm \hat{t}^\pm \mathcal{E}^\pm$, и из-за

отражения встречной волны, $\mp \hat{r}^\mp \mathcal{E}^\mp$. Эти процессы обуславливают изменение поляризации волнового поля в процессе распространения в неоднородной среде, в том числе и связанное с линейной конверсией нормальных мод среды, а также поглощение поля в диссипативной среде.

Для определения волнового поля уравнения встречных волн необходимо дополнить граничными условиями. Рассмотрим задачу о падении волны со стороны $z \rightarrow -\infty$ на слой среды, лежащий в интервале $z \in [a, b]$. В этом случае в плоскости $z = a$ перед слоем необходимо задать амплитуду падающей волны $\mathcal{E}^+$, а в плоскости $z = b$ за слоем — условие отсутствия отражённой волны $\mathcal{E}^-$. В результате мы приходим к следующим граничным условиям:

$$\mathcal{E}^+(a) = \mathcal{E}^{\text{inc}}, \quad \mathcal{E}^-(b) = 0, \quad (2.6)$$

где $\mathcal{E}^{\text{inc}}$ обозначает распределение поля падающей волны на поверхности слоя. Таким образом, мы пришли к задаче, в которой начальные амплитуды связанных встречных волн задаются на разных концах исследуемой области. Как уже отмечалось во введении, непосредственное решение такой задачи может представлять определённые трудности как при теоретическом анализе, так и при численном моделировании.

2.2. Импедансный метод

для уравнений встречных волн

Существует простой способ, позволяющий свести рассматриваемую краевую задачу к эволюционной задаче с начальными условиями. Давайте формально определим импедансный оператор, связывающий амплитуды встречных волн в заданном сечении z :

$$\mathcal{E}^-(z) = \hat{R}(z) \mathcal{E}^+(z). \quad (2.7)$$

Этот оператор можно рассматривать как оператор отражения от усечённого слоя $[z, b]$, связывающий падающую со стороны малых z и отражённую волну при условии, что пространство вне слоя заполнено однородной средой. Например, $\hat{R}(a)$ определяет оператор отражения от исходного слоя $[a, b]$. Оператор $\hat{R}(z)$ линеен, поскольку исходная система уравнений для встречных волн линейна. Поэтому данный оператор также имеет структуру типа (2.2). Подставив (2.7) в уравнения (2.1) и (2.6), получаем

$$\partial_z \mathcal{E}^+ = (\hat{t}^+ + \hat{r}^- \hat{R}) \mathcal{E}^+, \quad \mathcal{E}^+(a) = \mathcal{E}^{\text{inc}}, \quad (2.8)$$

$$\partial_z (\hat{R} \mathcal{E}^+) = -(\hat{t}^- \hat{R} + \hat{r}^+) \mathcal{E}^+, \quad \hat{R}(b) \mathcal{E}^+(b) = 0.$$

Второе уравнение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \partial_z (\hat{R} \mathcal{E}^+) &= (\partial_z \hat{R}) \mathcal{E}^+ + \hat{R} \partial_z \mathcal{E}^+ = \\ &= (\partial_z \hat{R} + \hat{R} \hat{t}^+ + \hat{R} \hat{r}^- \hat{R}) \mathcal{E}^+ = -(\hat{t}^- \hat{R} + \hat{r}^+) \mathcal{E}^+, \end{aligned}$$

исключив производную $\partial_z \mathcal{E}^+$. В каждой точке это соотношение должно выполняться при любом $\mathcal{E}^+$, поэтому его можно переписать как *операторное* уравнение для $\hat{R}$:

$$-\partial_z \hat{R} = \hat{R} \hat{r}^- \hat{R} + \hat{R} \hat{t}^+ + \hat{t}^- \hat{R} + \hat{r}^+, \quad \hat{R}(b) = 0. \quad (2.9)$$

Это уравнение, являющееся обобщением скалярного уравнения (1.4) на случай векторной и неодиомерной задачи, уже не содержит амплитуд встречных волн. Данное уравнение приводит к новой эволюционной

задаче, которая может оказаться удобнее исходной краевой задачи.

Сформулируем основной алгоритм импедансного метода. Изменение оператора $\hat{R}(z)$ вдоль координаты z описывается уравнением первого порядка, поэтому начальное условие в (2.9) однозначно определяет решение. Далее, найденное решение для оператора отражения можно подставить в уравнение (2.8) и получить вторую эволюционную задачу, определяющую распределение бегущей волны $\mathcal{E}^+(z)$ для заданной структуры падающего излучения. Заметим, что этим двум эволюционным задачам соответствует разное направление интегрирования — "справа налево", т.е. от b к a для $\hat{R}(z)$ и "слева направо" для $\mathcal{E}^+(z)$; решение второй эволюционной задачи возможно только после решения первой. Наконец, после определения $\hat{R}(z)$ и $\mathcal{E}^+(z)$ с помощью соотношения (2.7) можно восстановить распределение поля обратной волны $\mathcal{E}^-(z)$. Таким образом, мы полностью определяем волновое поле во всей исследуемой области.

За переход от граничной задачи к эволюционной приходится "расплачиваться". Во-первых, для $\hat{R}(z)$ получается нелинейное уравнение вместо исходной системы линейных уравнений. Во-вторых, это уравнение операторное. Последнее обстоятельство не очень обременительно для плоскостной среды, в которой все коэффициенты в уравнении (2.9) являются матрицами; следовательно, оператор $\hat{R}(z)$ также представляется в виде числовой матрицы с элементами, зависящими от z , а уравнения (2.8) и (2.9) сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако в общем случае мы вынуждены иметь дело с операторами вида (2.2), которые приводят к интегро-дифференциальным уравнениям. Приведём их для ясности в явном виде (в фурье-представлении):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^-(\mathbf{k}_\perp, z) &= \int \hat{R}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \mathcal{E}^+(\mathbf{k}'_\perp, z) d^2\mathbf{k}'_\perp, \\ -\partial_z \hat{R}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) &= \\ &= \iint \hat{R}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \hat{r}^-(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \hat{R}(\mathbf{k}''_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) d^2\mathbf{k}''_\perp d^2\mathbf{k}''_\perp + \\ &+ \int [\hat{R}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \hat{r}^+(\mathbf{k}''_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) + \\ &+ \hat{r}^-(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \hat{R}(\mathbf{k}''_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z)] d^2\mathbf{k}''_\perp + \hat{r}^+(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z), \\ \partial_z \mathcal{E}^+(\mathbf{k}_\perp, z) &= \int \left[\int \hat{r}^-(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}''_\perp, z) \hat{R}(\mathbf{k}''_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) d^2\mathbf{k}''_\perp + \right. \\ &\left. + \hat{r}^+(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \right] \mathcal{E}^+(\mathbf{k}'_\perp, z) d^2\mathbf{k}'_\perp. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3. Альтернативный способ вывода импедансных уравнений

Для того чтобы пояснить физический смысл сделанных преобразований, рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть имеется слой среды $z \in [a, b]$, на который падает излучение, распространяющееся вдоль z со стороны $-\infty$. Разобьём слой на два соприкасающихся слоя: $[a, c]$ и $[c, b]$. Задача — найти операторы отражения $\hat{R}^+$ и прохождения $\hat{T}^+$ для исходного слоя $[a, b]$, если известны все характеристики отражения и прохождения излучения для слоёв $[a, c]$ и $[c, b]$ в отдельности.

Введём обозначения. Пусть изолированный слой $[a, c]$ характеризуется операторами отражения $\hat{R}_1^+$, $\hat{R}_1^-$ и

прохождения $\hat{T}_1^+$, $\hat{T}_1^-$ для волн, падающих вдоль и против оси z . Изолированный второй слой характеризуется операторами $\hat{R}_2^+$, $\hat{R}_2^-$, $\hat{T}_2^+$ и $\hat{T}_2^-$. Два слоя вместе представляют собой своеобразный интерферометр Фабри–Перо, в котором возможна многолучевая интерференция. Суммируя вклады всех интерферирующих лучей, можно определить характеристики прошедшего $\mathcal{E}^{\text{pass}}$ и отражённого $\mathcal{E}^{\text{refl}}$ излучения для комбинированного слоя $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{pass}} &\equiv \hat{T}^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} = \hat{T}_2^+ \hat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \hat{T}_2^+ \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \\ &+ \hat{T}_2^+ \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \dots, \\ \mathcal{E}^{\text{refl}} &\equiv \hat{R}^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} = \hat{R}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \hat{T}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \\ &+ \hat{T}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \\ &+ \hat{T}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+ \hat{T}_1^+ \mathcal{E}^{\text{inc}} + \dots \end{aligned}$$

В правых частях можно выделить операторные геометрические прогрессии вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\hat{R}_1^- \hat{R}_2^+)^k = (\hat{I} - \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+)^{-1},$$

операция $(\dots)^{-1}$ здесь обозначает взятие обратного оператора. Учитывая это свойство, нетрудно получить искомые выражения для операторов отражения и прохождения исходного слоя:

$$\begin{aligned} \hat{R}^+ &= \hat{R}_1^+ + \hat{T}_1^- \hat{R}_2^+ (\hat{I} - \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+)^{-1} \hat{T}_1^+, \\ \hat{T}^+ &= \hat{T}_2^+ (\hat{I} - \hat{R}_1^- \hat{R}_2^+)^{-1} \hat{T}_1^+. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Покажем, что эти операторные соотношения приводят к уравнениям (2.8), (2.9) импедансного метода. Допустим, что один из рассматриваемых слоёв бесконечно тонкий, например,

$$[a, c] = [z - dz, z], \quad [c, b] = [z, b].$$

Тогда, в соответствии с введёнными выше определениями,

$$\begin{aligned} \hat{R}_1^\pm &= \hat{r}^\pm dz, & \hat{T}_1^\pm &= \hat{I} + \hat{t}^\pm dz, \\ \hat{R}_2^+ &= \hat{R}(z), & \hat{T}_2^+ &= \hat{T}(z), \\ \hat{R}^+ &= \hat{R}(z - dz), & \hat{T}^+ &= \hat{T}(z - dz). \end{aligned}$$

Во второй строке по аналогии с ранее введённым оператором отражения $\hat{R}(z)$ мы определили оператор прохождения $\hat{T}(z)$ волны через усечённый слой $[z, b]$. Подставим приведённые операторы в соотношения (2.11):

$$\begin{aligned} \hat{R}(z - dz) &= \hat{r}^+ dz + \\ &+ (\hat{I} + \hat{t}^- dz) \hat{R}(z) (\hat{I} - \hat{r}^- \hat{R}(z) dz)^{-1} (\hat{I} + \hat{t}^+ dz), \\ \hat{T}(z - dz) &= \hat{T}(z) (\hat{I} - \hat{r}^- \hat{R}(z) dz)^{-1} (\hat{I} + \hat{t}^+ dz). \end{aligned}$$

Разлагая эти соотношения в ряд Тейлора по dz , получаем выражения для изменения операторов отражения и прохождения в первом порядке:

$$\begin{aligned} -d\hat{R} &= (\hat{R}\hat{r}^- \hat{R} + \hat{R}\hat{t}^+ + \hat{t}^- \hat{R} + \hat{r}^+) dz, \\ -d\hat{T} &= \hat{T}(\hat{t}^+ + \hat{r}^- \hat{R}) dz. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Первое уравнение в точности соответствует уравнению (2.9). Как и следовало ожидать, наше основное эволю-

ционное уравнение описывает изменение оператора отражения при добавлении бесконечно тонкого слоя со стороны падающего излучения. Учитывая тождество $d(\hat{T}\hat{T}^{-1}) = d\hat{T}\hat{T}^{-1} + \hat{T}d\hat{T}^{-1} = 0$, второе уравнение можно переписать в виде

$$d\hat{T}^{-1} = (\hat{i}^+ + \hat{i}^- \hat{R}) \hat{T}^{-1} dz,$$

эквивалентном уравнению для бегущей волны (2.8). Это совпадение является следствием сохранения величины $\hat{T}(z)\mathcal{E}^+(z)$, которая по определению оператора $\hat{T}(z)$ характеризует прошедшее поле на задней границе слоя. Таким образом, рассматривая задачу о добавлении бесконечно тонкого слоя к неоднородному слою, мы снова приходим к уравнениям (2.8) и (2.9). Этот альтернативный способ менее изящен в математическом отношении, зато, на наш взгляд, более естествен с точки зрения физика.

Подчеркнём ещё раз, что описанный способ решения граничной волновой задачи достаточно универсален. В частности, несмотря на то, что при выводе импедансных уравнений было выделено некоторое основное направление распространения волн вдоль оси z , методика не ограничивается плоскостойкими средами (хотя в плоскостойких средах уравнения упрощаются). Для применения импедансного метода в каждой конкретной задаче достаточно определить операторы отражения и прохождения для дифференциально тонкого слоя среды. В следующем разделе мы покажем, как это можно сделать в случае электромагнитных волн, распространяющихся в среде с анизотропным и гиротропным диэлектрическим и магнитным откликом.

3. Импедансный метод для уравнений Максвелла в средах без пространственной дисперсии

В данном разделе мы рассмотрим способы приведения уравнений Максвелла к эквивалентным уравнениям для встречных волн (2.1), т.е. к виду, адаптированному для применения импедансной техники. Заметим сразу, что решение этой задачи — не единственное, поскольку у нас существует некоторая свобода в выборе поля $\mathcal{E}$, описывающего электромагнитные волны. С физической точки зрения вывод уравнений встречных волн сводится к определению операторов отражения $\hat{i}^\pm$ и прохождения $\hat{i}^\pm$ монохроматических электромагнитных волн, взаимодействующих с бесконечно тонким слоем заданной среды. Конечно, в каждой конкретной задаче возможен непосредственный расчёт этих операторов, основанный на сшивке решений уравнений Максвелла. Примеры такого расчёта для изотропных сред можно найти в большинстве учебников по электродинамике, например, в [15–17]. Однако в сколь-либо сложной анизотропной или гиротропной среде этот путь приводит к очень громоздким выкладкам. Мы рассмотрим более изящный и при этом достаточно компактный общий способ получения уравнений встречных волн, основанный на формальных преобразованиях уравнений Максвелла.

3.1. Вывод уравнений для тангенциальных полей

Рассмотрим среду с анизотропным и гиротропным диэлектрическим и магнитным откликом, заданным материальными уравнениями вида $\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \hat{\mu}\mathbf{H}$. Здесь $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ — комплексные векторы электромагнит-

ного поля, пропорциональные $\exp(i\omega t)$; $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости среды, зависящие от частоты ω и трёх пространственных координат. Пространственную дисперсию мы не учитываем¹, поэтому в правых частях материальных уравнений стоят локальные операторы — умножение вектора поля на матрицу. В развёрнутом виде эти соотношения следует понимать как

$$D_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) E_\beta(\mathbf{r}), \quad B_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) H_\beta(\mathbf{r}),$$

где индексы α и β , пробегающие значения x , y и z , обозначают проекции на соответствующие декартовы координатные оси.

Распространение монохроматических электромагнитных волн в указанной среде описывается уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -ik_0 \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = ik_0 \mathbf{D}$$

или, в развёрнутом виде,

$$\partial_z E_x = -ik_0 B_y + \partial_x E_z, \quad \partial_z E_y = ik_0 B_x + \partial_y E_z, \quad (3.1)$$

$$\partial_z H_x = ik_0 D_y + \partial_x H_z, \quad \partial_z H_y = -ik_0 D_x + \partial_y H_z, \quad (3.2)$$

$$ik_0 B_z = \partial_y E_x - \partial_x E_y, \quad ik_0 D_z = \partial_x H_y - \partial_y H_x. \quad (3.3)$$

Напомним, что $k_0 = \omega/c$ соответствует модулю волнового вектора для электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме. В соответствии с общей идеологией импедансного метода выделим направление вдоль оси z , относительно которого будут определены приходящие и убегавшие волны, необходимые для определения граничных условий. Уравнения Максвелла не содержат производных продольных компонент полей вдоль этого направления, что позволяет выразить продольные поля через поперечные поля и их производные. Из уравнений (3.3) получаем

$$E_z = -\epsilon_{zz}^{-1}(\epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \hat{n}_x H_y - \hat{n}_y H_x),$$

$$H_z = -\mu_{zz}^{-1}(\mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y - \hat{n}_x E_y + \hat{n}_y E_x),$$

где $\hat{n}_x = -ik_0^{-1} \partial/\partial x$, $\hat{n}_y = -ik_0^{-1} \partial/\partial y$. Подставляя параметры продольных полей в оставшиеся уравнения (3.1) и (3.2), получаем замкнутое дифференциальное уравнение для эволюции поперечных полей. В матричной форме это уравнение принимает следующий вид:

$$\partial_z \Psi = ik_0 \hat{M} \Psi, \quad \Psi = [E_x, E_y, H_x, H_y]. \quad (3.4)$$

Здесь Ψ — вектор, состоящий из компонент поперечных полей, а матричный оператор $\hat{M}$ есть

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{n}_x \epsilon'_{zx} + \mu'_{yz} \hat{n}_y & \hat{n}_x \epsilon'_{zy} - \mu'_{yz} \hat{n}_x & -\hat{n}_x \epsilon_{zz}^{-1} \hat{n}_y - \mu''_{yx} & \hat{n}_x \epsilon_{zz}^{-1} \hat{n}_x - \mu''_{yy} \\ \hat{n}_y \epsilon'_{zx} - \mu'_{xz} \hat{n}_y & \hat{n}_y \epsilon'_{zy} + \mu'_{xz} \hat{n}_x & -\hat{n}_y \epsilon_{zz}^{-1} \hat{n}_y + \mu''_{xx} & \hat{n}_y \epsilon_{zz}^{-1} \hat{n}_x + \mu''_{xy} \\ \epsilon''_{yx} + \hat{n}_x \mu_{zz}^{-1} \hat{n}_y & \epsilon''_{yy} - \hat{n}_x \mu_{zz}^{-1} \hat{n}_x & \epsilon'_{yz} \hat{n}_y + \hat{n}_x \mu'_{zx} & -\epsilon'_{yz} \hat{n}_x + \hat{n}_x \mu'_{zy} \\ -\epsilon''_{xx} + \hat{n}_y \mu_{zz}^{-1} \hat{n}_y & -\epsilon''_{xy} - \hat{n}_y \mu_{zz}^{-1} \hat{n}_x & -\epsilon'_{xz} \hat{n}_y + \hat{n}_y \mu'_{zx} & \epsilon'_{xz} \hat{n}_x + \hat{n}_y \mu'_{zy} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

¹ Обобщение предложенной методики для учёта пространственной дисперсии не представляет принципиальных трудностей, однако сильно зависит от конкретной модели дисперсии. Примеры применения импедансной техники для моделирования волновых процессов в горячей магнитоактивной плазме с сильной пространственной дисперсией можно найти в [59, 60].

где $\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon_{zz}^{-1} \varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon''_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha z} \varepsilon_{zz}^{-1} \varepsilon_{z\beta}$, $\mu'_{\alpha\beta} = \mu_{zz}^{-1} \mu_{\alpha\beta}$, $\mu''_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} - \mu_{\alpha z} \mu_{zz}^{-1} \mu_{z\beta}$ — новые функции, зависящие от трёх пространственных координат. Заметим, что $\hat{M}$ является дифференциальным оператором второго порядка по поперечным координатам.

Приведённые выше соотношения были получены в $\mathbf{r}$ -пространстве. Сделав преобразование Фурье по поперечным координатам, аналогичное (2.3), нетрудно перейти в $\mathbf{k}$ -пространство. Найдём, для примера, первый диагональный элемент этого оператора:

$$\begin{aligned} M_{11}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) &= -ik_0^{-1} \int [\delta'(x - x') \varepsilon'_{zx}(\mathbf{r}'_\perp) + \\ &+ \delta'(y - y') \mu'_{yz}(\mathbf{r}'_\perp)] \exp[i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp - \mathbf{k}'_\perp \mathbf{r}'_\perp)] d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{r}'_\perp = \\ &= \frac{k_x}{k_0} \int \varepsilon_{zz}^{-1}(\mathbf{r}_\perp) \varepsilon_{zx}(\mathbf{r}_\perp) \exp[i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \mathbf{r}_\perp] d^2 \mathbf{r}_\perp + \\ &+ \frac{k'_y}{k_0} \int \mu_{zz}^{-1}(\mathbf{r}_\perp) \mu_{yz}(\mathbf{r}_\perp) \exp[i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \mathbf{r}_\perp] d^2 \mathbf{r}_\perp. \end{aligned}$$

Таким образом, в общем случае мы приходим к интегродифференциальному эволюционному уравнению для тангенциальных компонент полей

$$\partial_z \Psi(\mathbf{k}_\perp, z) = ik_0 \int \hat{M}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \Psi(\mathbf{k}'_\perp, z) d^2 \mathbf{k}'_\perp.$$

Свертка по $\mathbf{k}'_\perp$ отражает тот факт, что в поперечно-неоднородной среде фурье-гармоники не являются независимыми. В простейшем (но важном для приложений) случае плоскостойкой среды, неоднородной только вдоль оси z , каждая фурье-гармоника распространяется независимо с постоянным поперечным волновым вектором $\mathbf{k}_\perp$. Формально это выражается в том, что волновой оператор $\hat{M}$ вырождается в умножение на числовую матрицу, зависящую от $\mathbf{k}_\perp$ и z . Эта матрица задаётся формулой (3.5), в которой под $\hat{n}_x$ и $\hat{n}_y$ следует понимать соответствующие проекции сохраняющегося вектора $\mathbf{k}_\perp/k_0$.

Уравнение (3.4) можно привести к эквивалентному виду, описывающему взаимодействие встречных волн. Допустим, что мы знаем представление исходного волнового поля Ψ через встречные волны $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$, которое можно представить в виде

$$\Psi = \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Здесь $\hat{U}$ — линейный оператор, определяющий преобразование "новых" полей к "старым"; $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ — два векторных поля, которые однозначно характеризуют распределение исходного волнового поля и соответствуют волнам, распространяющимся вдоль и навстречу оси z ; объект в квадратных скобках представляет собой вектор, составленный из компонент сначала поля $\mathcal{E}^+$, затем поля $\mathcal{E}^-$. Оператор $\hat{U}$ может зависеть от продольной координаты, но только локальным образом (т.е. он не содержит производных по z). После подстановки (3.6) в (3.4) получим, что новые поля должны удовлетворять уравнению

$$\partial_z \left(\hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} \right) = ik_0 \hat{M} \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\partial_z \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} = \hat{D} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$\hat{D} = ik_0 \hat{U}^{-1} \hat{M} \hat{U} - \hat{U}^{-1} \partial_z \hat{U}. \quad (3.8)$$

Очевидно, что уравнение (3.7) в точности эквивалентно уравнениям для встречных волн (2.1) с коэффициентами $\hat{t}^\pm$ и $\hat{r}^\pm$, заданными соотношениями

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} +\hat{t}^+ & \vdots & +\hat{r}^- \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{r}^+ & \vdots & -\hat{t}^- \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Таким образом, соотношение (3.8) определяет относительно простой общий способ вычисления операторов отражения и прохождения дифференциально тонкого слоя, полностью определяющих уравнения встречных волн для среды с заданными распределениями $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и $\hat{\mu}(\mathbf{r})$. Для этого необходимо сначала найти операторную матрицу $\hat{D}$, а затем разбить её на четыре квадранта одинакового размера и сопоставить каждый квадрант одному из четырёх операторов отражения и прохождения по формуле (3.9). Например, в плоскостойкой среде оператор $\hat{D}$ представляет собой матрицу 4×4 , в этом случае

$$\begin{aligned} \hat{t}^+ &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, & \hat{t}^- &= -\begin{bmatrix} D_{33} & D_{34} \\ D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}, \\ \hat{r}^+ &= -\begin{bmatrix} D_{31} & D_{32} \\ D_{41} & D_{42} \end{bmatrix}, & \hat{r}^- &= \begin{bmatrix} D_{13} & D_{14} \\ D_{23} & D_{24} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поставленная в начале раздела задача формально решена.

Для применения импедансного метода к уравнениям Максвелла с граничными условиями (2.6) нам осталось только определить конкретный способ представления исходного волнового поля Ψ через встречные волны. В разделах 3.2–3.4 рассмотрены два различных подхода для построения такого представления.

3.2. Разложение поля

по локальным волноводным модам

Для того чтобы определить направление распространения волны, рассмотрим уравнение (3.4) в приближении геометрической оптики, т.е. пренебрежём зависимостью волнового оператора от продольной координаты и предположим, что

$$\Psi = \tilde{\Psi}(z) \exp\left(-i \int k_z(z) dz\right),$$

где $\tilde{\Psi}$ — медленно меняющаяся функция координаты z , зависящая также от поперечных координат в $\mathbf{r}$ - или $\mathbf{k}$ -пространстве. Тогда исходное уравнение сводится к уравнению

$$-ik_z(z) \tilde{\Psi}(z) = ik_0 \hat{M}(z) \tilde{\Psi}(z). \quad (3.10)$$

Продольная координата z входит в эти уравнения как параметр. В каждом сечении z данные уравнения следует рассматривать как уравнения для собственных волноводных мод в локально однородной вдоль координаты z среде. Теория таких уравнений развита, например, в [17, 61–63]. В большинстве физических задач можно до-

пустить, что уравнения определяют дискретный спектр собственных мод $\tilde{\Psi}_i$, образующих полный базис в пространстве векторов Ψ в каждом сечении по продольной координате (более подробно этот вопрос обсуждается в приложении).

Разобьём множество собственных мод на две группы в соответствии с направлением распространения вдоль оси z . К первой группе отнесём моды, распространяющиеся или экспоненциально спадающие (скиннруемые) в положительном направлении оси z , ко второй группе отнесём моды, распространяющиеся или экспоненциально спадающие в противоположном направлении. Введём обозначения $\tilde{\Psi}_i^+$ и $k_{z,i}^+$ для мод первой группы и соответствующих собственных значений, $\tilde{\Psi}_i^-$ и $k_{z,i}^-$ для мод и собственных значений второй группы. В общем случае классификация мод по направлению распространения должна проводиться в соответствии с направлением вектора групповой скорости, которое может не совпадать с направлением волнового вектора в анизотропных или гиротропных диспергирующих средах. Часто этим отклонением можно пренебречь и провести классификацию, основываясь на анализе направления волнового вектора. В этом случае модам $\tilde{\Psi}_i^+$ отвечают волновые векторы с $\text{Re } k_z^+ > 0$ (распространение вдоль оси z) и с $\text{Re } k_z^+ = 0, \text{Im } k_z^+ < 0$ (экспоненциальный спад в положительном направлении оси z), модам $\tilde{\Psi}_i^-$ отвечают волновые векторы с $\text{Re } k_z^- < 0$ (распространение навстречу оси z) и с $\text{Re } k_z^- = 0, \text{Im } k_z^- > 0$ (экспоненциальный спад в отрицательном направлении оси z). Очевидно, что таким образом мы переберём все моды. За исключением специальных случаев, каждой моде, распространяющейся в заданном направлении, соответствует мода, распространяющаяся навстречу.

Поскольку совокупность собственных мод образует полный базис, в каждом сечении по продольной координате решение уравнения (3.4) можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_\perp, z) = \sum_i \mathcal{E}_i^+(z) \tilde{\Psi}_i^+(\mathbf{r}_\perp, z) + \sum_i \mathcal{E}_i^-(z) \tilde{\Psi}_i^-(\mathbf{r}_\perp, z), \quad (3.11a)$$

или

$$\Psi(\mathbf{k}_\perp, z) = \sum_i \mathcal{E}_i^+(z) \tilde{\Psi}_i^+(\mathbf{k}_\perp, z) + \sum_i \mathcal{E}_i^-(z) \tilde{\Psi}_i^-(\mathbf{k}_\perp, z), \quad (3.11b)$$

где $\mathcal{E}_i^+$ и $\mathcal{E}_i^-$ — новые переменные, однозначно характеризующие распределение поля и соответствующие волнам с определённым направлением распространения. Проведённая процедура является наиболее прямым способом разбиения исходного волнового поля на волны, распространяющиеся вдоль и навстречу оси z . Приведём обозначения в соответствии с формулой (3.6) — переменные $\mathcal{E}_i^+$ и $\mathcal{E}_i^-$ будем рассматривать как элементы векторов $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ соответственно, а векторы $\tilde{\Psi}_i^+$ и $\tilde{\Psi}_i^-$ — как столбцы матрицы $\hat{U}$:

$$\mathcal{E}^+ = [\mathcal{E}_1^+, \mathcal{E}_2^+, \dots], \quad \mathcal{E}^- = [\mathcal{E}_1^-, \mathcal{E}_2^-, \dots], \\ \hat{U} = [\tilde{\Psi}_1^+, \tilde{\Psi}_2^+, \dots, \tilde{\Psi}_1^-, \tilde{\Psi}_2^-, \dots].$$

Теперь, используя соотношения (3.8) и (3.9), можно найти оператор $\hat{D}$ и получить уравнения импедансного метода.

Поскольку встречные волны $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ составлены из амплитуд нормальных мод, являющихся собственными векторами волнового оператора $\hat{M}$, уравнение для

встречных волн и импедансные уравнения представляют собой систему в общем случае бесконечного числа связанных *обыкновенных* дифференциальных уравнений, уже не содержащих нелокальных операторов — интегральных свёрток или дифференцирования по поперечным координатам. Действительно, в представлении нормальных волн первое слагаемое в (3.8) является диагональной матрицей, составленной из собственных значений волнового оператора:

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} -i\hat{k}_z^+ & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & -i\hat{k}_z^- \end{bmatrix} - \hat{U}^{-1} \partial_z \hat{U}, \quad (3.12) \\ \hat{k}_z^\pm = \text{diag}(k_{z,1}^\pm, k_{z,2}^\pm, \dots).$$

Видно, что оператор $\hat{D}$ представляет собой *числовую* матрицу. То же относится и к операторам (матрицам) отражения и прохождения дифференциально тонкого слоя, $\hat{t}^\pm$ и $\hat{r}^\pm$. Напомним физический смысл элементов матрицы рассеяния:

$$r_{ij}^+ \text{ — коэффициент отражения моды } \tilde{\Psi}_i^+ \text{ в моду } \tilde{\Psi}_j^-, \\ r_{ij}^- \text{ — коэффициент отражения моды } \tilde{\Psi}_i^- \text{ в моду } \tilde{\Psi}_j^+, \\ t_{ij}^+ \text{ — коэффициент прохождения моды } \tilde{\Psi}_i^+ \text{ в моду } \tilde{\Psi}_j^+, \\ t_{ij}^- \text{ — коэффициент прохождения моды } \tilde{\Psi}_i^- \text{ в моду } \tilde{\Psi}_j^-.$$

Внедиагональные члены в матрицах прохождения определяют связь мод с различными индексами i и j (кросс-поляризацию мод). Заметим, что отражение и кросс-поляризация собственных мод возможны только в неоднородной по z среде. Этот очевидный с физической точки зрения факт легко установить и из формулы (3.12). Действительно, первое слагаемое в указанной формуле отвечает за распространение по законам геометрической оптики, описываемое матрицами $\hat{t}^\pm = \mp i\hat{k}_z^\pm$, $\hat{r}^\pm = 0$. Все поправки, связанные с отклонением от геометрической оптики, учитываются вторым слагаемым, возникающим вследствие изменения поляризации локальных собственных мод среды в пространстве. Эти поправки как раз и сводятся к отражению и линейному взаимодействию мод.

Найденным матрицам $\hat{t}^\pm$ и $\hat{r}^\pm$ можно сопоставить уравнения (2.8) и (2.9) и применить импедансный метод, описанный в предыдущем разделе, для восстановления электромагнитных полей. При этом оператор $\hat{R}$ оказывается квадратной числовой матрицей, составленной из коэффициентов отражения i -й моды в j -ю моду. Заметим, что, несмотря на то что для разложения волнового поля используются моды, полученные в *приближении* геометрической оптики, импедансный метод даёт *строгое* решение исходной волновой проблемы до тех пор, пока для полей $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ строго выполняются граничные условия (2.6). Для этого, очевидно, достаточно, чтобы рассматриваемая область была погружена в однородную среду — тогда на границах области геометро-оптическое приближение становится строгим.

Рассмотрим более подробно случай плоскостойкой среды, изменяющейся только в продольном направлении. В этом случае решение волнового уравнения можно искать в виде $\tilde{\Psi} \sim \exp(-i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp)$, где $\mathbf{k}_\perp$ играет роль сохраняющегося параметра. Уравнение (3.10) при этом вырождается в линейное *алгебраическое* уравнение для собственных мод локально однородной среды. Числовая матрица $\hat{M}$ в этом случае имеет размерность 4×4 .

Поэтому, за исключением специальных случаев вырождения, существуют четыре собственных вектора, которые отвечают двум модам, распространяющимся навстречу друг другу. Таким образом, встречные волны $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ задаются двухкомпонентными векторами, составленными из комплексных амплитуд нормальных мод, отвечающих определённому направлению распространения, операторы $\hat{U}$ и $\hat{D}$ представляются числовыми 4×4 -матрицами, а операторы отражения и прохождения $\hat{t}^\pm$, $\hat{r}^\pm$ и $\hat{R}$ представляются числовыми 2×2 -матрицами. Первое уравнение импедансного метода (2.9) вырождается в систему из четырёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, а уравнение (2.8) — в систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если среда неоднородна в некотором поперечном направлении, то вместо сохраняющегося вдоль этого направления волнового вектора возникает бесконечный набор дискретных мод, отвечающих "квантованию" вдоль заданного направления. Наоборот, если среда однородна в некотором поперечном направлении, то вместо соответствующего дискретного индекса появляется сохраняющееся продольное волновое число. Это соответствует двумерно неоднородной задаче. Таким образом, в плоскостной среде мы имеем $\Psi_i^\pm(k_x, k_y)$, в двумерно неоднородной среде — $\Psi_{ij}^\pm(k_x)$, в трёхмерно неоднородной среде — $\Psi_{ijk}^\pm$. Здесь k_x и k_y — сохраняющиеся поперечные волновые векторы, индекс i принимает всего два значения, индексы j и k пробегает бесконечное число дискретных значений. Таким образом, в задаче с поперечной неоднородностью представление исходного поля через локальные волноводные моды автоматически навязывает "спектральный" способ решения исходной нелокальной (интегральной или дифференциальной) задачи. В результате получаются импедансные уравнения в виде системы бесконечного числа связанных обыкновенных дифференциальных уравнений (хотя, конечно, в практических расчётах всегда можно ограничиться конечным числом мод).

3.3. Разложение поля по модам на границах

Рассмотренное представление встречных волн через амплитуды локальных нормальных мод — не единственное. Для практических расчётов может оказаться удобным более простое представление встречных волн через амплитуды "граничных" мод, структура которых не меняется вдоль координаты z . Прежде чем перейти к этому представлению, заметим, что для применения импедансного метода требуется соответствие полей $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ волнам с определённым направлением распространения *только на границах рассматриваемого слоя*, где это необходимо для задания граничных условий. Во всех остальных точках достаточно, чтобы эти поля однозначно характеризовали распределение исходного волнового поля, при этом они могут не соответствовать волнам с определённым направлением распространения. С этой точки зрения поля $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ можно рассматривать как формальную замену переменных в уравнениях Максвелла, выбранную так, чтобы граничные условия записывались наиболее просто.

Предположим, что на границах слоя поперечная неоднородность исчезает. Это естественное и не слишком ограничивающее физическое допущение, поскольку мы всегда можем доопределить неоднородный слой на

границах так, чтобы оно выполнялось. Тогда волновое поле может быть разложено по собственным модам однородной задачи на границах слоя:

$$\Psi(\mathbf{k}_\perp, z) = \sum_{i=1,2} \mathcal{E}_{0i}^+(\mathbf{k}_\perp, z) \tilde{\Psi}_{0i}^+(\mathbf{k}_\perp) + \sum_{i=1,2} \mathcal{E}_{0i}^-(\mathbf{k}_\perp, z) \tilde{\Psi}_{0i}^-(\mathbf{k}_\perp).$$

В качестве базиса в этом разложении можно использовать собственные моды $\tilde{\Psi}_{0i}^+$, определённые на границе слоя $z = a$ и отвечающие $\text{Re } k_z > 0$ или $\text{Re } k_z = 0$, $\text{Im } k_z < 0$,

$$-ik_z(\mathbf{k}_\perp) \tilde{\Psi}_0^+(\mathbf{k}_\perp) = ik_0 \hat{M}(\mathbf{k}_\perp, a) \tilde{\Psi}_0^+(\mathbf{k}_\perp), \quad (3.13a)$$

и собственные моды $\tilde{\Psi}_{0i}^-$, определённые на другой границе $z = b$ и отвечающие $\text{Re } k_z < 0$ или $\text{Re } k_z = 0$, $\text{Im } k_z > 0$,

$$-ik_z(\mathbf{k}_\perp) \tilde{\Psi}_0^-(\mathbf{k}_\perp) = ik_0 \hat{M}(\mathbf{k}_\perp, b) \tilde{\Psi}_0^-(\mathbf{k}_\perp). \quad (3.13b)$$

Эти моды не зависят от продольной координаты, имеют более простую структуру по сравнению с волноводными модами, получаются в результате решения алгебраической задачи, и их число конечно (и равно четырём за исключением случаев вырождения). Данные моды определяют матрицу перехода

$$\hat{U}_0 = [\tilde{\Psi}_{01}^+, \tilde{\Psi}_{02}^+, \tilde{\Psi}_{01}^-, \tilde{\Psi}_{02}^-]$$

от полей $\mathcal{E}_0^+$ и $\mathcal{E}_0^-$ к исходному волновому полю по формуле, аналогичной (3.6). Поля $\mathcal{E}_0^+$ и $\mathcal{E}_0^-$ введены так, что они удовлетворяют граничным условиям (2.6), поэтому к этим полям можно применять импедансную технику. То, что поля $\mathcal{E}_0^+$ и $\mathcal{E}_0^-$ не соответствуют встречным волнам *внутри слоя*, не является существенным ограничением, при необходимости локальные моды можно восстановить (см. раздел 4.1). Поскольку матрица $\hat{U}_0$ не зависит от продольной координаты, выражение (3.8) упрощается:

$$\hat{D} = ik_0 \hat{U}_0^{-1} \hat{M} \hat{U}_0. \quad (3.14)$$

При этом сама матрица $\hat{D}$ и, следовательно, импедансные уравнения выглядят намного проще, чем в представлении локальных волноводных мод, поскольку моды на границе, как правило, имеют существенно более простую структуру.

Ещё одним достоинством данного метода является то обстоятельство, что в задаче с поперечной неоднородностью встречные волны $\mathcal{E}_0^+(\mathbf{k}_\perp, z)$, $\mathcal{E}_0^-(\mathbf{k}_\perp, z)$ и матрица перехода $\hat{U}_0(\mathbf{k}_\perp)$ определяются точно так же, как и в плоскостной среде — встречные волны задаются двумерными векторами, а матрица перехода имеет конечную размерность 4×4 . Отличие от одномерного случая проявляется лишь в структуре оператора $\hat{D}$, определяемого формулой (3.14). В неоднородном случае это нелокальный оператор, поскольку исходный оператор $\hat{M}$ нелокальный. В явном виде действие оператора на произвольную функцию $\phi(\mathbf{k}_\perp)$ можно представить как

$$\hat{D}\phi(\mathbf{k}_\perp) = ik_0 \int \hat{U}_0^{-1}(\mathbf{k}_\perp) \hat{M}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \hat{U}_0(\mathbf{k}'_\perp) \phi(\mathbf{k}'_\perp) d^2 \mathbf{k}'_\perp.$$

Нелокальность отражает отсутствие сохранения поперечного волнового вектора в неоднородной среде. Разбивая в соответствии с формулой (3.9) этот матричный оператор на четыре матрицы 2×2 , находим уравнение для встречных волн и импедансные уравнения в фурье-

представлении. Эти уравнения получаются в форме интегро-дифференциальных соотношений для векторов и матриц с конечной размерностью (2 и 2×2 соответственно). В плоскостой среде уравнения вырождаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

3.4. Разложение поля по вакуумным модам

Рассмотрим предложенный выше метод в наиболее естественной постановке, когда оба конца слоя граничат с вакуумом. Для наглядности рассмотрим сначала случай плоскостой геометрии. Допустим, что плоская электромагнитная волна $\propto \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ падает на слой из вакуума под углом ϑ к нормали. Для упрощения таким образом, чтобы волновой вектор падающей волны лежал в плоскости xz , т.е.

$$k_x = k_0 \sin \vartheta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k_0 \cos \vartheta.$$

Напомним, что k_x и k_y сохраняются в процессе распространения волны, поскольку задача однородна в плоскости $xу$. В результате в вакууме волновой оператор $\hat{M}$ переходит в

$$\hat{M}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\cos^2 \vartheta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \vartheta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

которому соответствует простая матрица собственных мод:

$$\hat{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cos \vartheta & 0 & -\cos \vartheta \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos \vartheta & 0 & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \tilde{\Psi}_{01}^+ & \tilde{\Psi}_{02}^+ & \tilde{\Psi}_{01}^- & \tilde{\Psi}_{02}^- \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

В силу непрерывности тангенциальных электромагнитных полей, образующих вектор Ψ , эти же собственные моды можно использовать для разложения полей на встречные волны на границах слоя. Применяя преобразования (3.14), находим матрицу $\hat{D}$, затем разбиваем её на четыре части согласно формуле (3.9). В результате получаем четыре искомых оператора отражения и прохождения дифференциально тонкого слоя:

$$\begin{aligned} \hat{r}^+ &= \frac{ik_0}{2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} M_{23} \cos \vartheta - M_{32} \sec \vartheta - M_{22} + M_{33}, & -M_{21} \cos \vartheta - M_{34} \sec \vartheta - M_{24} - M_{31} \\ M_{43} \cos \vartheta + M_{12} \sec \vartheta - M_{13} - M_{42}, & -M_{41} \cos \vartheta + M_{14} \sec \vartheta + M_{11} - M_{44} \end{bmatrix}, \\ \hat{r}^- &= \frac{ik_0}{2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} M_{23} \cos \vartheta - M_{32} \sec \vartheta + M_{22} - M_{33}, & -M_{21} \cos \vartheta - M_{34} \sec \vartheta + M_{24} + M_{31} \\ M_{43} \cos \vartheta + M_{12} \sec \vartheta + M_{13} + M_{42}, & -M_{41} \cos \vartheta + M_{14} \sec \vartheta - M_{11} + M_{44} \end{bmatrix}, \\ \hat{t}^+ &= \frac{ik_0}{2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -M_{23} \cos \vartheta - M_{32} \sec \vartheta + M_{22} + M_{33}, & M_{21} \cos \vartheta - M_{34} \sec \vartheta + M_{24} - M_{31} \\ -M_{43} \cos \vartheta + M_{12} \sec \vartheta - M_{13} + M_{42}, & M_{41} \cos \vartheta + M_{14} \sec \vartheta + M_{11} + M_{44} \end{bmatrix}, \\ \hat{t}^- &= \frac{ik_0}{2} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -M_{23} \cos \vartheta - M_{32} \sec \vartheta - M_{22} - M_{33}, & M_{21} \cos \vartheta - M_{34} \sec \vartheta - M_{24} + M_{31} \\ -M_{43} \cos \vartheta + M_{12} \sec \vartheta + M_{13} - M_{42}, & M_{41} \cos \vartheta + M_{14} \sec \vartheta - M_{11} - M_{44} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Эти выражения можно представить в более компактном виде как

$$\begin{aligned} \hat{r}^\pm &= \hat{\mu}_1 \cos \vartheta + \hat{\mu}_2 \sec \vartheta \mp \hat{\mu}_3 \pm \hat{\mu}_4, \\ \hat{t}^\pm &= -\hat{\mu}_1 \cos \vartheta + \hat{\mu}_2 \sec \vartheta \pm \hat{\mu}_3 \pm \hat{\mu}_4, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} M_{23} & -M_{21} \\ M_{43} & -M_{41} \end{bmatrix}, & \hat{\mu}_2 &= \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} -M_{32} & -M_{34} \\ M_{12} & M_{14} \end{bmatrix}, \\ \hat{\mu}_3 &= \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} M_{22} & M_{24} \\ M_{42} & M_{44} \end{bmatrix}, & \hat{\mu}_4 &= \frac{ik_0}{2} \begin{bmatrix} M_{33} & -M_{31} \\ -M_{13} & M_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь M_{ij} обозначает элементы матрицы (3.5), в которой $n_x = \sin \vartheta$, $n_y = 0$. В рассматриваемом случае $M_{21} = M_{43} = 0$, однако эти слагаемые оставлены для симметрии и для обобщения на случай трёхмерно неоднородной среды. Заметим, что при $\hat{\mu}_3 = \hat{\mu}_4$ матрицы отражения не зависят от направления распространения волны (от индекса $\pm$), при $\hat{\mu}_3 = -\hat{\mu}_4$ матрицы прохождения не зависят от направления распространения волны. Интересно, что при выполнении этих условий автоматически обеспечивается равенство коэффициентов отражения и прохождения в кросс-поляризации, поскольку в плоскостой геометрии матрица $\hat{\mu}_1$ диагональна.

Предложенное представление поля в виде суперпозиции вакуумных мод имеет ясный физический смысл. Для плоских волн в вакууме $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$. Отсюда нетрудно убедиться, что собственные моды $\Psi_{01}^\pm$, заданные первым и третьим столбцами матрицы (3.15), соответствуют вакуумным плоским волнам с единичной амплитудой, в которых вектор электрического поля не имеет составляющей вдоль нормали к границе слоя. Такие волны обычно называют ТЕ (поперечно-электрически) поляризованными по отношению к плоской границе слоя. Собственные моды $\Psi_{02}^\pm$, заданные вторым и четвёртым столбцами матрицы (3.15), соответствуют ТМ (поперечно-магнитно) поляризованным вакуумным плоским волнам с единичной амплитудой². Такому набору собственных мод соответствуют матрицы отражения, состоящие из коэффициентов отражения по амплитуде для ТЕ- и ТМ-волн и определяющие, например,

r_{11}^+ — отражение ТЕ-волны, падающей из $-\infty$, в ТЕ-волну,
 r_{11}^- — отражение ТЕ-волны, падающей из $+\infty$, в ТЕ-волну,
 r_{22}^+ — отражение ТМ-волны, падающей из $-\infty$, в ТМ-волну,
 r_{12}^+ — отражение ТМ-волны, падающей из $-\infty$, в ТЕ-волну,
 r_{21}^+ — отражение ТЕ-волны, падающей из $-\infty$, в ТМ-волну

и так далее. Аналогично интерпретируются компоненты матриц прохождения $\hat{t}^\pm$. Как видно, рассматриваемое представление приводит к классической постановке задачи об отражении и прохождении волны через слой,

² Для ТЕ-волн $E_x = E_z = H_y = 0$, для ТМ-волн $H_x = H_z = E_y = 0$. Таким образом, в выбранной системе координат амплитуды ТЕ- и ТМ-волн характеризуются соответственно E_y и H_y . Нетрудно заметить, что именно эти компоненты полей составляют вектор $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^-$, для которого был развит импедансный метод, описанный в разделе 2.

в которой излучение вне слоя разбивается на ТЕ- и ТМ-поляризованные волны. Заметим, что недиагональные элементы операторов отражения и прохождения определяют кросс-поляризацию ТЕ- и ТМ-волн, которую можно рассматривать как линейное взаимодействие этих волн, возникающее при падении на анизотропную и/или гиротропную среду.

В заключение рассмотрим поперечно-неодномерную среду. В плоскостой среде существовал произвол в выборе направления осей x и y , поэтому вакуумные собственные моды были определены для случая, когда вектор $\mathbf{k}_\perp$ направлен вдоль оси x . В неодномерной задаче такая свобода отсутствует, поэтому нам необходимо обобщить выражения для ТЕ- и ТМ-мод на случай произвольной ориентации волнового вектора:

$$k_x = k_0 \cos \varphi \sin \vartheta, \quad k_y = k_0 \sin \varphi \sin \vartheta, \quad k_z = k_0 \cos \vartheta.$$

Нетрудно убедиться, что такое обобщение достигается простым поворотом поперечных координат на угол φ . Матрица вакуумных мод может быть получена как

$$\hat{U}_0(\varphi, \vartheta) = \begin{bmatrix} \hat{T}_\varphi & 0 \\ 0 & \hat{T}_\varphi \end{bmatrix} \hat{U}_0(0, \vartheta), \quad \hat{T}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

где $\hat{U}_0(0, \vartheta)$ определена формулой (3.15), а $\hat{T}_\varphi$ — матрица поворота в плоскости xu на угол φ . После несложной алгебры ядро интегрального оператора $\hat{D}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{D}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) = & \hat{U}_0^{-1}(0, \vartheta) \begin{bmatrix} \hat{T}_{-\varphi} & 0 \\ 0 & \hat{T}_{-\varphi} \end{bmatrix} \times \\ & \times ik_0 \hat{M}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) \begin{bmatrix} \hat{T}_{\varphi'} & 0 \\ 0 & \hat{T}_{\varphi'} \end{bmatrix} \hat{U}_0(0, \vartheta'). \end{aligned}$$

Здесь φ', ϑ' соответствуют вектору $\mathbf{k}'_\perp$. Отсюда находим операторы отражения и прохождения, определяющие коэффициенты в нелокальных уравнениях импедансного метода (2.10):

$$\begin{aligned} \hat{r}^\pm(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) = & \hat{T}_{-\varphi}(\hat{\mu}_1 \cos \vartheta' + \hat{\mu}_2 \sec \vartheta \mp \hat{\mu}_3 \pm \hat{\mu}_4) \hat{T}_{\varphi'}, \\ \hat{t}^\pm(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z) = & \hat{T}_{-\varphi}(-\hat{\mu}_1 \cos \vartheta' + \hat{\mu}_2 \sec \vartheta \pm \hat{\mu}_3 \pm \hat{\mu}_4) \hat{T}_{\varphi'}, \end{aligned}$$

где $\hat{\mu}_j = \hat{\mu}_j(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp, z)$ — ядра интегральных матричных операторов, определённых соотношениями (3.17).

3.5. Резюме

Итак, мы рассмотрели два способа разложения поля — через локальные волноводные и граничные вакуумные моды. В одномерной плоскостой задаче представление поля через локальные и вакуумные моды приводит к похожему импедансным уравнениям, различающимся только коэффициентами. Представление через локальные моды более физическое, поскольку оно в явном виде содержит разделение эффектов геометрической оптики и эффектов рассеяния и кросс-поляризации волн вследствие неоднородности среды. Однако это представление часто приводит к очень громоздким выражениям из-за сложной поляризации нормальных мод и необходимости дифференцировать векторы поляризации. Для аналитических выкладок более удобен второй подход, позволяющий избежать вычисления нормальных мод среды. Однако при использовании разложения по

вакуумным модам возникают дополнительные трудности в интерпретации решений, которые, как правило, требуется "перевести" в термины мод среды. С точки зрения численного решения импедансных уравнений обе задачи технически эквивалентны; при численном интегрировании усложнение импедансных уравнений, связанное с переходом к модам среды, не является принципиальным. Поэтому вопрос выбора конкретного представления здесь не очень важен.

В неодномерном случае ситуация меняется — два представления поля приводят к различной структуре импедансных уравнений. Разложение поля через локальные волноводные моды автоматически навязывает спектральный подход, основанный на разложении решений по собственным функциям нелокального волнового оператора и сведении задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты разложения. В неодномерной задаче второй способ, использующий граничные вакуумные моды, представляется более гибким, поскольку он приводит к интегро-дифференциальным уравнениям. Мы сами можем выбрать способ решения получившейся нелокальной задачи, например, использовать вариационный метод [64], метод последовательных приближений, оптимизированные схемы численного решения интегро-дифференциальных задач [65] и т.д. В том числе, можно использовать и спектральный метод, основанный на разложении решений по собственным функциям оператора (3.14) — в этом случае получается бесконечная система уравнений на коэффициенты разложения, аналогичная уравнениям первого метода.

4. Общие свойства импедансных уравнений

В данном разделе мы рассмотрим некоторые общие свойства решений волнового уравнения, следующие из импедансного метода для произвольной анизотропной и гиротропной среды. Помимо общефизического интереса, эти свойства оказываются полезными для проверки численных алгоритмов решения импедансных уравнений.

4.1. Связь представлений через локальные волноводные и граничные вакуумные моды

В разделе 3 уравнения Максвелла были сведены к двум эквивалентным формулировкам — задаче о взаимодействии полей $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$, определяющих разложение исходного поля по поляризациям локальных геометро-оптических мод, и задаче о взаимодействии полей $\mathcal{E}_0^+$ и $\mathcal{E}_0^-$, определяющих разложение исходного поля по поляризациям вакуумных ТЕ- и ТМ-мод. Эти две задачи связаны соотношением

$$\Psi = \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} = \hat{U}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{E}_0^+ \\ \mathcal{E}_0^- \end{bmatrix}.$$

Данное соотношение позволяет ввести матрицу перехода $\hat{G}$ от одного представления к другому, играющую важную роль в теории:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_0^+ \\ \mathcal{E}_0^- \end{bmatrix} = \hat{G} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \hat{U}_0^{-1} \hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

В частности, зная матрицу отражения $\hat{R}$ для локальных мод среды, можно найти матрицу отражения $\hat{R}_0$ для вакуумных ТЕ- и ТМ-мод по формуле

$$\hat{R}_0 = (\hat{g}_{21} + \hat{g}_{22}\hat{R})(\hat{g}_{11} + \hat{g}_{12}\hat{R})^{-1}, \quad (4.2)$$

которая следует из соотношения

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_0^+ \\ \hat{R}_0 \mathcal{E}_0^+ \end{bmatrix} = \hat{G} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \hat{R} \mathcal{E}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{g}_{11} + \hat{g}_{12}\hat{R}) \mathcal{E}^+ \\ (\hat{g}_{21} + \hat{g}_{22}\hat{R}) \mathcal{E}^+ \end{bmatrix},$$

где $\hat{g}_{ij}$ обозначает один из четырёх квадрантов матрицы $\hat{G}$. Вычисление матриц $\hat{g}_{ij}$ в определённом смысле эквивалентно вычислению матриц отражения и прохождения дифференциально тонкого слоя в представлении полей $\mathcal{E}_0^+$ и $\mathcal{E}_0^-$, поскольку из соотношений (3.12) и (3.14) следует их простая связь:

$$\begin{bmatrix} +\hat{t}^+ & \vdots & +\hat{t}^- \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{r}^+ & \vdots & -\hat{t}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \vdots & \hat{g}_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_{21} & \vdots & \hat{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \vdots & \hat{g}_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_{21} & \vdots & \hat{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\hat{k}_z^+ & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & -i\hat{k}_z^- \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) отражает тот факт, что $\hat{G}^{-1}\hat{D}\hat{G} = i\hat{k}_0\hat{U}^{-1}\hat{M}\hat{U}$ есть диагональная матрица.

4.2. Отражение от полупространства, заполненного однородной средой

Достаточно часто требуется найти матрицу отражения от полубесконечного пространства, заполненного однородной вдоль координаты z средой. Для определённости будем считать, что матрица отражения сформулирована для вакуумных ТЕ- и ТМ-мод. Нетрудно убедиться, что эта матрица должна удовлетворять квадратному матричному уравнению

$$\hat{R}_0\hat{r}^- - \hat{R}_0 + \hat{R}_0\hat{t}^+ + \hat{t}^- \hat{R}_0 + \hat{r}^+ = 0, \quad (4.4)$$

следующему из импедансного уравнения (2.9) при $\partial_z \hat{R} = 0$. Действительно, если перед полупространством добавить слой из той же среды, то ничего не поменяется — именно это свойство матрицы отражения и выражает приведённое уравнение. Коэффициенты в этом уравнении представляют собой операторные матрицы 2×2 , вычисленные по формулам (3.9), (3.14). Если среда также однородна и в поперечном направлении, то эти коэффициенты представляют собой числовые матрицы.

Решение рассматриваемого матричного уравнения определяется соотношением (4.2), в правую часть которого подставлено $\hat{R} = 0$:

$$\hat{R}_0 = \hat{g}_{21}\hat{g}_{11}^{-1}. \quad (4.5)$$

Это решение может быть построено из физических соображений. Условие $\hat{R} = 0$ означает, что в *представлении локальных нормальных мод* отражение внутри однородной среды отсутствует, поскольку со стороны среды нет приходящей к границе полупространства волны. Тангенциальные поля на границе полупространства непрерывны, поэтому они должны быть связаны соотношением (4.1), из которого следует применимость формулы (4.2) для пересчёта матрицы отражения в представление вакуумных мод. Заметим, что матрицу отражения в виде (4.5) можно получить сразу из (4.1),

если в левую часть подставить вакуумные поля $\mathcal{E}_0^+$ и $\mathcal{E}_0^- = \hat{R}_0 \mathcal{E}_0^+$, в правую часть — поля в среде, выраженные через амплитуды нормальных волн в среде $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^- = 0$, и исключить $\mathcal{E}^+$.

Нетрудно убедиться, что выражение (4.5) действительно удовлетворяет исходному уравнению (4.4). Заметим, что коэффициенты уравнения (4.4) удовлетворяют матричному соотношению (4.3). Исключая $\hat{k}_z^+$ из этого соотношения, получаем

$$\hat{t}^+ \hat{g}_{11} + \hat{r}^- \hat{g}_{21} = -\hat{g}_{11} \hat{g}_{21}^{-1} (\hat{t}^- \hat{g}_{21} + \hat{r}^+ \hat{g}_{11}).$$

Умножая это равенство на $\hat{g}_{21} \hat{g}_{11}^{-1}$ слева и на $\hat{g}_{11}^{-1}$ справа, приходим в точности к уравнению (4.4) для $\hat{R}_0 = \hat{g}_{21} \hat{g}_{11}^{-1}$.

Интересно, что решение (4.5) позволяет получить условия, при которых при определённой поляризации падающего излучения отражение отсутствует, $\hat{R}_0 \mathcal{E}_0^+ = 0$. В изотропных средах это явление известно как эффект Брюстера [16]. Необходимым и достаточным условием существования безотражательной поляризации падающего излучения является вырожденность матрицы отражения, $\det \hat{R}_0 = 0$. Очевидно, что это возможно, если одновременно $\det \hat{g}_{21} = 0$ и $\det \hat{g}_{11} \neq 0$. Эти два условия определяют угол Брюстера в произвольной анизотропной и гиротропной среде.

Приведённый способ определения матрицы отражения от однородного в продольном направлении полупространства основан на вычислении собственных мод среды, необходимых для определения матрицы $\hat{U}$, что не всегда удобно. В случае полностью однородной среды (и в продольном, и в поперечном направлении) можно избежать разложения по собственным модам среды, если воспользоваться общим методом аналитического решения квадратного матричного уравнения, предложенного в работе Гельфанда [66]. Однако в этом случае возникает проблема выбора "физического" решения среди паразитных решений (в отсутствие вырождения уравнение (4.4) может иметь от одного до шести различных решений).

4.3. Отражение от слоя, заполненного однородной средой

Аналогичный подход можно применить при построении аналитического решения для матрицы отражения слоя конечной толщины, заполненного однородной вдоль координаты z средой. Здесь удобнее работать в представлении локальных поляризаций среды, поскольку в этом представлении отражение внутри слоя отсутствует, а коэффициенты прохождения определяются диагональными матрицами $\hat{k}_z^\pm$ (см. формулу (3.12)). В итоге, в однородной среде импедансное уравнение (2.9) вырождается в линейное уравнение

$$\partial_z \hat{R} = i\hat{k}_z^+ \hat{R} - i\hat{k}_z^- \hat{R},$$

которое имеет очевидное решение

$$\hat{R}(z) = \hat{Q}^-(z) \hat{R}(b) \hat{Q}^+(z), \quad \hat{Q}^\pm(z) = \exp [\pm i\hat{k}_z^\pm (z - b)]. \quad (4.6)$$

Здесь экспоненты от диагональных матриц также являются диагональными матрицами. Начальное значение $\hat{R}(b)$ определяется из физического условия, заключающегося в том, что за слоем отражённая волна

отсутствует. Фактически это означает, что матрица отражения, определяемая соотношением (4.2), на границе слоя обращается в нуль, что возможно при $\hat{R}(b) = -\hat{g}_{22}^{-1}\hat{g}_{21}$. Действительно, в силу непрерывности тангенциальные поля на границе слоя должны быть связаны соотношением (4.1), в котором слева стоят вакуумные поля $\mathcal{E}_0^+$ и $\mathcal{E}_0^- = 0$, а справа — поля в среде $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^- = \hat{R}(b)\mathcal{E}^+$, откуда следует приведённое начальное значение для матрицы отражения. Применяя преобразование (4.2) к найденной матрице отражения $\hat{R}(z)$ в представлении локальных мод, найдем матрицу отражения в представлении вакуумных волн:

$$\hat{R}_0(z) = [\hat{g}_{21} - \hat{g}_{22}\hat{Q}^-(z)\hat{g}_{22}^{-1}\hat{g}_{21}\hat{Q}^+(z)] \times [\hat{g}_{11} - \hat{g}_{12}\hat{Q}^-(z)\hat{g}_{22}^{-1}\hat{g}_{21}\hat{Q}^+(z)]^{-1}. \quad (4.7)$$

Это обобщение известного соотношения для резонатора Фабри–Перо на случай произвольной анизотропной и гиротропной среды. При $b \rightarrow +\infty$ и при наличии бесконечно малой диссипации эта формула переходит в соотношение (4.5) для матрицы отражения от полупространства.

4.4. Формальное общее решение для оператора отражения

Нелинейное уравнение (2.9), определяющее оператор $\hat{R}(z)$, относится к уравнениям типа Риккати [67]. Общее решение таких уравнений может быть найдено, если известно любое частное решение $\hat{R}_1(z)$. Это остаётся верным и в нашем случае, несмотря на наличие в уравнении некоммутирующих операторов. Будем искать решение в виде

$$\hat{R} = \hat{R}_V + \hat{R}_1.$$

Если $\hat{R}_1$ является решением (2.9), то $\hat{R}_V$ удовлетворяет уравнению

$$-\partial_z \hat{R}_V = \hat{R}_V \hat{r}^- \hat{R}_V + \hat{R}_V \hat{t}_V^+ + \hat{t}_V^- \hat{R}_V, \quad (4.8)$$

где $\hat{t}_V^+ = \hat{t}^+ + \hat{r}^- \hat{R}_1$, $\hat{t}_V^- = \hat{t}^- + \hat{R}_1 \hat{r}^-$. Это уравнение того же типа, что и исходное, но без свободного члена $\hat{r}^+$. Прямой подстановкой можно убедиться, что уравнение (4.8) имеет общее решение

$$\hat{R}_V(z) = \hat{Q}^- \left[\hat{R}_V^{-1}(b) + \int_b^z \hat{Q}^- \hat{r}^- \hat{Q}^+ dz' \right]^{-1} \hat{Q}^+, \quad (4.9)$$

$$\hat{Q}^\pm = \exp \left(- \int_b^z \hat{t}_V^\pm dz' \right).$$

Вычисление операторных экспонент эквивалентно решению линейных дифференциальных задач $-\partial_z \hat{Q}^\pm = \hat{t}_V^\pm \hat{Q}^\pm$ с "единичными" начальными условиями $\hat{Q}^\pm(b) = \hat{I}$.

Для кусочно-однородной среды данное решение переходит в решения, полученные ранее из физических соображений. Проще всего в этом убедиться, используя представление локальных мод среды, в котором $\hat{r}^\pm = 0$ и $\hat{t}_V^\pm = \hat{t}^\pm = \text{const}$, поэтому формула для $\hat{R}_V$ в точности переходит в выражение (4.6). Несколько труднее это показать в представлении вакуумных мод. Для этого в качестве частного решения можно взять однородное распределение (4.5), удовлетворяющее стационарному импедансному уравнению, и выбрать $\hat{R}_V^{-1}(b) = -\hat{g}_{11}\hat{g}_{21}^{-1}$. Тогда, проделав некоторые алгебраические преобразо-

вания с использованием соотношений (4.3), мы опять приходим к уравнению (4.7).

В неоднородном случае общее решение может оказаться полезным, если мы знаем какое-либо частное решение импедансного уравнения. Тогда с помощью формул (4.8) и (4.9) можно "поправить" это решение, построив физическое решение, отвечающее любому заданному наперед граничному условию. Например, если выбрать $\hat{R}_V(b) = -\hat{R}_1(b)$, то для $\hat{R}$ будет выполняться граничное условие, требуемое для применения импедансного метода, $\hat{R}(b) = 0$. В качестве ещё одной иллюстрации приведём следующую задачу. Допустим, что нам известно решение импедансного уравнения для некоторого слоя $[a, b]$, окружённого вакуумом. Обозначим его $\hat{R}_1(z)$. Требуется найти решение для того же слоя, если в области $z > b$ вакуум заменить некоторой подложкой — полупространством с известным оператором отражения $\hat{R}_0$, который может быть найден, например, методом, изложенным в разделе 4.2. Решение для слоя с подложкой будет определяться формулами (4.8) и (4.9), если выбрать $\hat{R}_V(b) = \hat{R}_0$.

4.5. Решение в виде разложения в ряд по степеням отражения

Нередко в приложениях отражённая обратная волна мала по сравнению с прямой волной. Тогда при вычислении распространения прямой волны в нулевом приближении можно пренебречь отражённой волной, а затем развить теорию возмущений по степеням дифференциальных операторов отражения $\hat{r}^\pm$. Уравнения встречных волн (2.1) с граничными условиями (2.6) можно представить в интегральном виде

$$\mathcal{E}^+ = \int_a^z \exp \left(\int_{z'}^z \hat{t}^+(z'') dz'' \right) \hat{r}^-(z') \mathcal{E}^-(z') dz' +$$

$$+ \exp \left(\int_a^z \hat{t}^+ dz' \right) \mathcal{E}^{\text{inc}},$$

$$\mathcal{E}^- = \int_z^b \exp \left(\int_z^{z'} \hat{t}^-(z'') dz'' \right) \hat{r}^+(z') \mathcal{E}^+(z') dz'.$$

По аналогии с теорией рассеяния решение этих уравнений можно построить методом итераций в виде ряда $\mathcal{E}^\pm = \sum \mathcal{E}_n^\pm$, где

$$\mathcal{E}_0^+ = \exp \left(\int_a^z \hat{t}^+ dz' \right) \mathcal{E}^{\text{inc}}, \quad \mathcal{E}_0^- = 0,$$

а каждый последующий член ряда получается из предыдущего преобразованием

$$\mathcal{E}_{n+1}^+ = \int_a^z \exp \left(\int_{z'}^z \hat{t}^+ dz'' \right) \hat{r}^- \mathcal{E}_n^- dz',$$

$$\mathcal{E}_{n+1}^- = \int_z^b \exp \left(\int_z^{z'} \hat{t}^- dz'' \right) \hat{r}^+ \mathcal{E}_n^+ dz'.$$

С точки зрения физики эта процедура означает разложение по кратности взаимного рассеяния встречных волн — каждое слагаемое $\mathcal{E}_n^\pm \sim O[(\hat{r}^\pm)^n]$ определяет вклад n -кратного рассеяния в уравнениях (2.1).

Если нас интересует поглощение и линейное взаимодействие волн, распространяющихся только в положительном направлении оси z , можно ограничиться нулевым приближением $\mathcal{E}_0^+$ для прямых волн. Соответствующ-

щая обратная волна $\mathcal{E}_1^-$ появится лишь в первом порядке; поправка к прямой волне, связанная с наличием отражения, появляется во втором порядке. Условие применимости сделанного приближения имеет вид $\|\mathcal{E}_0^+\| \gg \|\hat{r}^-\mathcal{E}_1^-\| \sim O[\hat{r}^-\hat{r}^+]$.

Нетрудно убедиться, что прямая и обратная волны связаны соотношением

$$\mathcal{E}_1^-(z) = \left[\int_z^b \exp \left(\int_z^{z'} \hat{t}^- dz'' \right) \times \right. \\ \left. \times \hat{r}^+ \exp \left(\int_z^{z'} \hat{t}^+ dz'' \right) dz' \right] \mathcal{E}_0^+(z).$$

Оператор в квадратных скобках есть в точности оператор отражения $\hat{R}_1$ в первом приближении, получающийся в результате решения импедансного уравнения (2.9) при $\hat{r}^- = 0$, т.е. без учёта нелинейного члена. Следующие члены разложения можно определить по рекуррентной формуле

$$\hat{R}_{n+2} = \int_z^b \exp \left(\int_z^{z'} \hat{t}^- dz'' \right) \left(\sum_{k=1}^n \hat{R}_k \hat{r}^+ \hat{R}_{n-k+1} \right) \times \\ \times \exp \left(\int_z^{z'} \hat{t}^+ dz'' \right) dz'$$

для нечётных n , члены с чётными индексами равны нулю. Все три сомножителя под интегралом имеют прозрачный физический смысл — распространение прямой волны до точки отражения z' , отражение и распространение обратной волны до точки наблюдения z .

5. Пример.

Распространение электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме

В данной методической работе мы не ставили цели дать обзор всех возможных применений импедансного метода в электродинамических задачах. Интересующимся читателям мы можем порекомендовать обратиться к специальным публикациям, цитированным во введении. Здесь же мы ограничимся близким для нас классом задач о распространении электромагнитных волн электронно-циклотронного (ЭЦ) диапазона в холодной магнитоактивной плазме. Для упрощения выкладок рассмотрим одномерную конфигурацию, в которой параметры плазмы изменяются только вдоль координаты z . Более подробно применение импедансного метода для этого класса задач можно найти в [38–42, 58–60].

5.1. Постановка задачи

для неоднородного плазменного слоя

Для иллюстрации возможностей метода рассмотрим плазменный слой с достаточно сложным профилем концентрации, изображённым на рис. 2. Положим, что внешнее магнитное поле постоянно и направлено вдоль координаты x . Нас будет интересовать отражение, прохождение и поглощение высокочастотных электромагнитных волн с заданной поляризацией, падающих на плазменный слой. Данная конфигурация приближённо моделирует геометрию тороидальных магнитных ловушек в области ЭЦ-резонанса, при этом когерентная квазипериодическая модуляция плотности плазмы отра-

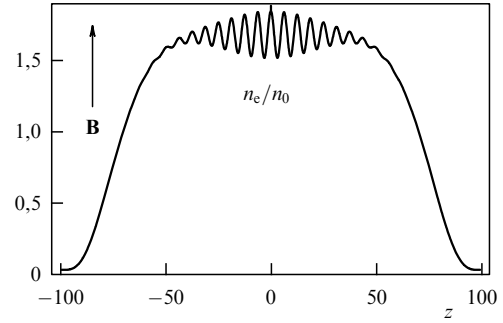


Рис. 2. Профиль концентрации плазмы, $n_e(z) = 1,7n_0[(1-z^2/100)^4 + 0,1 \exp(-z^2/100) \cos z]$, используемый для численного примера в разделе 5. Здесь и на остальных рисунках координата z нормирована на некоторое $k_{00} = \omega_0/c$, определяющее также характерную плотность $n_0 = m_e \omega_0^2 / 4\pi e^2$ — так называемую критическую плотность, начиная с которой возникает отсечка электромагнитного излучения в изотропной плазме.

жает влияние магнитогидродинамических возмущений плазменного шнура.

Для волн с частотами много большими всех ионных частот рассматриваемая среда описывается следующим тензором диэлектрической проницаемости [1–4]:

$$\hat{\varepsilon}(z, \omega) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & -ig \\ 0 & ig & \varepsilon_{\perp} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

где

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - iv)}, \quad \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(1 - iv/\omega)}{(\omega - iv)^2 - \omega_{ce}^2}, \\ g = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - iv)^2 - \omega_{ce}^2}, \quad \varepsilon'_{\perp} = \varepsilon_{\perp} - \sin^2 \vartheta,$$

$\omega_{ce} = eB/m_e c$ и $\omega_{pe} = [4\pi e^2 n_e(z)/m_e]^{1/2}$ — циклотронная и плазменная частоты электронов соответственно, $v \ll \omega$ — диссипация, введённая для того, чтобы устранить сингулярность в области верхнего гибридного резонанса при численном интегрировании. Напомним, что волновой вектор падающей волны лежит в плоскости xz , т.е. в задаче сохраняются $k_x = k_0 \sin \vartheta$ и $k_y = 0$. В соответствии с (3.5) волновой оператор $\hat{M}$ однозначно определяется по диэлектрическому тензору:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0 & ig \sin \vartheta / \varepsilon_{\perp} & 0 & -\varepsilon'_{\perp} / \varepsilon_{\perp} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{\perp} - g^2 / \varepsilon_{\perp} & 0 & ig \sin \vartheta / \varepsilon_{\perp} \\ -\varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица также может быть получена как частный случай оператора Клеммова–Баддена–Хидинга [33].

Для расчётов мы будем использовать разложение поля через вакуумные ТЕ- и ТМ-волны. В этом представлении матрицы отражения и прохождения (3.16) приобретают следующий вид:

$$\hat{r}^{\pm} = ik_0 \begin{bmatrix} (g^2 / \varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\perp} + 1) \sec \vartheta & -ig \tan \vartheta / \varepsilon_{\perp} \\ ig \tan \vartheta / \varepsilon_{\perp} & \varepsilon_{\parallel} \cos \vartheta - \varepsilon'_{\perp} \sec \vartheta / \varepsilon_{\perp} \end{bmatrix}, \\ \hat{t}^{\pm} = \hat{r}^{\pm} - ik_0 \cos \vartheta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

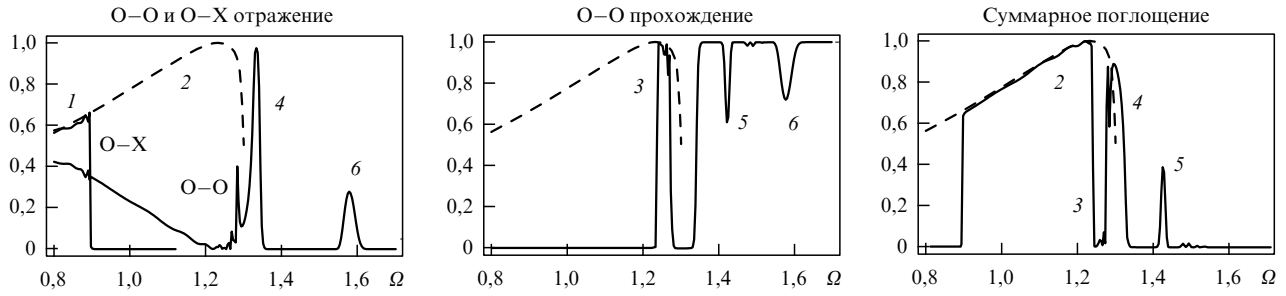


Рис. 3. Коэффициенты отражения по интенсивности в обыкновенную $|R_{O-O}^2|$ и необыкновенную $|R_{O-X}^2|$ волны, коэффициент прохождения в обыкновенную волну $|T_{O-O}^2|$ и суммарное поглощение $Q = 1 - |R_{O-O}^2| - |R_{O-X}^2| - |T_{O-O}^2| - |T_{O-X}^2|$ в зависимости от частоты в случае падения обыкновенной волны с фиксированным углом падения $\vartheta = 40^\circ$ на плазменный слой, показанный на рис. 2. Штриховой линией изображён коэффициент связи обыкновенной и необыкновенной волн, следующий из формулы (5.6). Коэффициент прохождения обыкновенной волны в необыкновенную очень мал, $|T_{O-X}^2| \sim 10^{-4}|T_{O-O}^2|$, поэтому не показан. Магнитное поле соответствует $\omega_{ce}/\omega_0 = 0,9$, нормированная частота $\Omega = \omega/\omega_0$.

В данном случае распространение волн "вперед" и "назад" характеризуется одинаковыми матрицами.

Для интерпретации результатов найдём связь вакуумных волн с электромагнитными нормальными модами холодной плазмы. Плазменные моды определяются как собственные векторы волнового оператора. Соответствующее дисперсионное уравнение

$$\det(ik_0\hat{M} + ik_z\hat{I}) = 0$$

можно представить в виде биквадратного уравнения относительно "поперечного показателя преломления" $N = k_z/k_0$,

$$N^4 - pN^2 + q = 0, \quad p = \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} + 1\right)\varepsilon'_{\perp} - \frac{g^2}{\varepsilon_{\perp}}, \quad q = (\varepsilon'_{\perp} - g^2)\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}, \quad (5.3)$$

с решениями $N^2 = p/2 \pm \text{sign } \varepsilon_{\perp} \sqrt{p^2/4 - q}$. Знаки плюс и минус соответствуют обыкновенной (О) и необыкновенной (Х) волнам замагниченной плазмы³. Отметим, что в рамках геометрической оптики поглощение в окрестности верхнего гибридного резонанса может испытывать только необыкновенная волна, обыкновенная волна "не замечает" этот резонанс. Векторы поляризации нормальных волн получаются из выражения

$$\tilde{\Psi} = [igN \sin \vartheta, \varepsilon_{\parallel}\varepsilon'_{\perp} - N^2\varepsilon_{\perp}, -n_z(\varepsilon_{\parallel}\varepsilon'_{\perp} - N^2\varepsilon_{\perp}), ig\varepsilon_{\parallel} \sin \vartheta], \quad (5.4)$$

в которое надо подставить четыре корня дисперсионного соотношения, после чего нормировать получившиеся векторы. Зная векторы поляризаций, можно построить матрицу $\hat{G} = \hat{U}_0^{-1}\hat{U}$, задающую связь нормальных волн с амплитудами вакуумных ТЕ- и ТМ-волн (4.1). Общее выражение для матрицы $\hat{G}$ довольно громоздко, однако нам понадобится знать лишь так называемые предельные поляризации входящих из вакуума и выходящих в вакуум нормальных волн. Вычисляя $\lim \hat{G}$ при $\omega_{pe} \rightarrow 0$,

можно найти простую связь амплитуд $\mathcal{E}_O$ и $\mathcal{E}_X$ обыкновенной и необыкновенной волн и амплитуд $\mathcal{E}_{TE}$ и $\mathcal{E}_{TM}$ вакуумных волн на границах плазменного слоя, плавно переходящего в вакуум:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_O^{\pm} \\ \mathcal{E}_X^{\pm} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \begin{bmatrix} 1 & i\gamma \\ i\gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{TE}^{\pm} \\ \mathcal{E}_{TM}^{\pm} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\gamma = \frac{2\omega \sin \vartheta}{\omega_{ce} \cos^2 \vartheta - \sqrt{\omega_{ce}^2 \cos^4 \vartheta + 4\omega^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Эта формула совпадает с аналогичными выражениями, полученными в [1–4].

Итак, схема решения задачи о падении плоской электромагнитной волны на плазменный слой выглядит следующим образом. Для заданного распределения плотности плазмы численно интегрируются импедансное уравнение (2.9) с матричными коэффициентами (5.2) и нулевым начальным условием и уравнение (2.8) для прямой волны с двумя разными начальными условиями, соответствующими падению вакуумных ТЕ- и ТМ-мод. В результате находятся матрицы отражения и прохождения для ТЕ- и ТМ-мод, а также структуры полей в слое, соответствующие падению ТЕ- и ТМ-мод. Для практических приложений, как правило, требуется найти решения в терминах плазменных мод. Используя линейность исходной задачи, решения, отвечающие падению обыкновенной или необыкновенной волны, можно построить как линейные комбинации решений, отвечающих падению ТЕ- и ТМ-мод, в соответствии с соотношением для предельных поляризаций (5.5). Аналогичным образом можно пересчитать матрицы отражения и прохождения.

5.2. Линейное взаимодействие

обыкновенной и необыкновенной волн

и брэгговское резонансное рассеяние обыкновенной волны

С точки зрения физики наиболее интересен случай падения обыкновенной волны на слой закритической плазмы с модуляцией плотности. Примеры численного расчёта этого случая даны на рис. 3 и 4. На рисунке 3 приведены коэффициенты отражения, прохождения и поглощения по мощности в зависимости от частоты обыкновенной волны с фиксированным углом падения. Характерные области в спектрах отмечены цифрами от 1

³ Вообще говоря, это утверждение может не совпадать со стандартной номенклатурой нормальных волн, основанной на решении Эпплтона–Хартри для фиксированного угла распространения волны [1–3], в узкой окрестности поверхности плазменного резонанса $\omega_{pe} = \omega$. Более подробно этот вопрос разобран в [68].

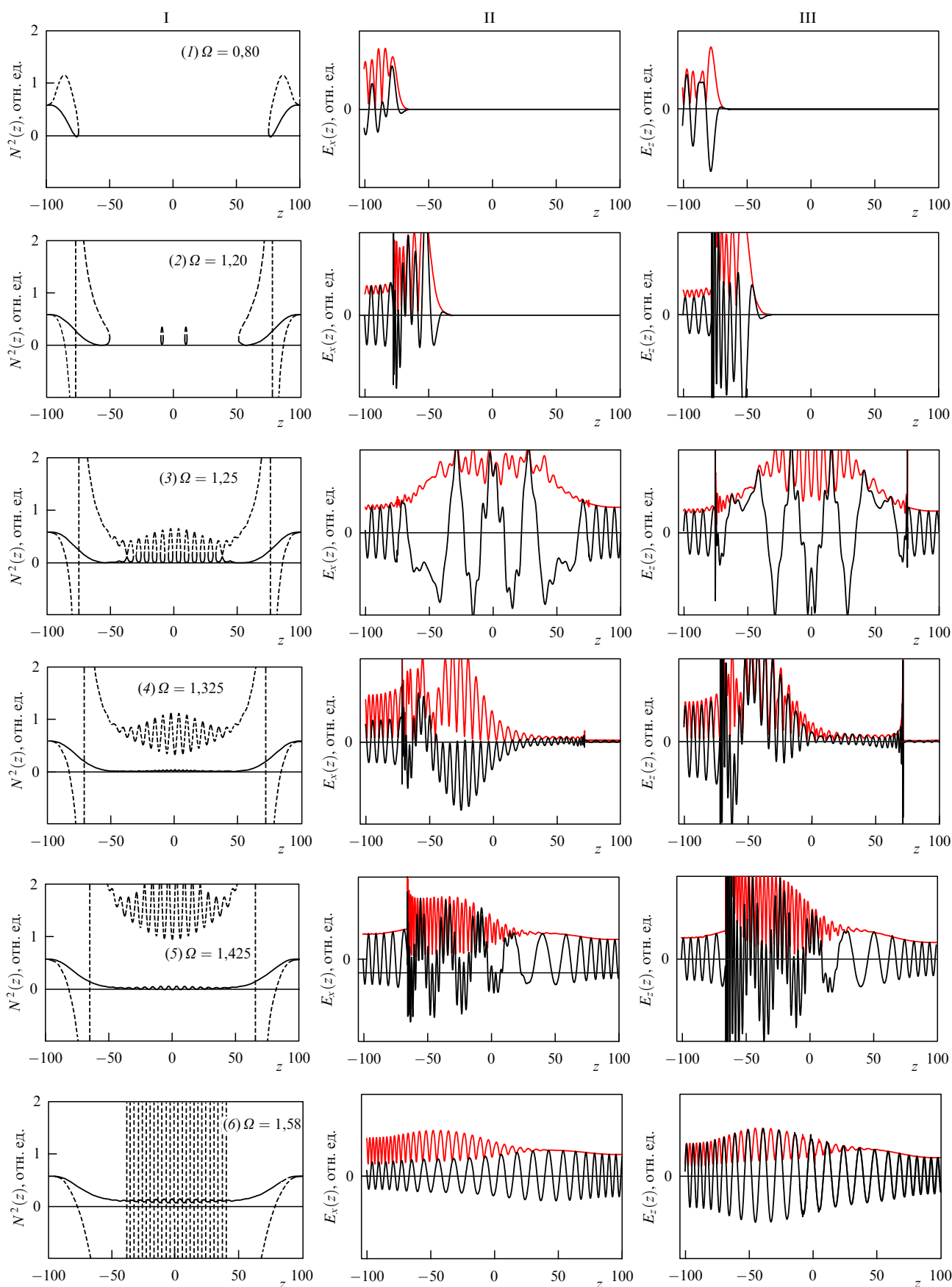


Рис. 4. I — дисперсионные кривые $N^2(z) = \omega^2 k_z^2 / c^2$ для обыкновенной волны (сплошные линии) и необыкновенной волны (штриховые линии), соответствующие областям 1–6, отмеченным на рис. 3. Распределения полей $\text{Re } E_x(z)$ (II) и $\text{Re } E_z(z)$ (III). Бледными линиями построены $|E_x|$ и $|E_z|$, отсутствие модуляции этих линий соответствует бегущим волнам, а глубокая гармоническая модуляция — стоячим волнам. Дальнейшие комментарии приведены в тексте.

до 6, соответствующие этим областям дисперсионные кривые и распределения полей приведены на рис. 4.

Области 1–3 соответствуют эффективной линейной трансформации обыкновенной волны в необыкновенную в окрестности поверхности плазменного резонанса $\omega_{pe} = \omega$. В данном случае процесс линейной трансформации сводится к "туннелированию" электромагнитного излучения через область непрозрачности, в которой $k_z^2 < 0$. Коэффициент связи нормальных волн (по интенсивности) в этой области хорошо аппроксимируется известной квантово-механической формулой для вероятности подбарьерного туннелирования [69] (для электромагнитных задач [2, 70, 71]):

$$|C_{0-X}^2| = \exp \left\{ \int_{\text{Im } k_z < 0} 2 \text{Im } k_z dz \right\}.$$

Применительно к нашему случаю эта формула сводится к выражению

$$|C_{0-X}^2| = \exp \left\{ -\pi \sqrt{2} k_0 \left(\frac{d \ln n_e}{dz} \right)^{-1} \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^{3/2} \times \right. \\ \left. \times \left(\sqrt{\frac{\omega}{\omega_{ce}}} + 1 \sin \vartheta - 1 \right)^2 \right\}, \quad (5.6)$$

полученному в работах [72–74]. Коэффициент связи обыкновенной и необыкновенной волн (5.6) показан на рис. 3 штриховой линией. Видно, что результаты численного расчёта хорошо совпадают с аналитической формулой на спектрах отражения для случая 1 и поглощения для случая 2. Случай 1 отвечает частичной конверсии падающей обыкновенной волны в быструю необыкновенную волну, распространяющуюся в обратном направлении и беспрепятственно выходящую в вакуум (см. график $N^2(z)$ на рис. 4 (1)). Этому случаю соответствует $\omega < \omega_{ce}$. В области частот $\omega > \omega_{ce}$ происходит переход к случаю 2. В плазме возникает область верхнего гибридного резонанса, выглядящая как сингулярность на графиках $N^2(z)$ на рис. 4. При отражении от критического слоя плазмы обыкновенная волна частично трансформируется в медленную необыкновенную волну, которая разворачивается навстречу падающей волне и распространяется к верхнему гибриднему резонансу, где эффективно поглощается (см. рис. 4 (2)). В плотной горячей плазме это поглощение сопровождается генерацией квазиэлектростатических плазменных колебаний, которые беспрепятственно распространяются в закритической плазме; этот эффект используется для нагрева и диагностики плотной плазмы в сферических токамаках и оптимизированных стеллараторах [75]. При увеличении частоты точка разворота необыкновенной волны пропадает, в результате эта волна пересекает плазменный слой и достигает симметричной поверхности плазменного резонанса $\omega_{pe} = \omega$, где происходит обратная трансформация необыкновенной волны в обыкновенную. В результате реализуется случай 3, в котором основная часть излучения выходит из слоя в виде обыкновенной волны, хотя внутри слоя излучение распространяется в виде необыкновенной волны (это можно увидеть и по структуре полей на рис. 4 (3)). Этот случай характеризуется низким уровнем поглощения излучения и отражения в кросс-моду (О–Х). Тонкая структура в спектрах отражения и прохождения на

основной моде возникает из-за зеркальной симметрии областей линейной трансформации, формирующих своеобразный интерферометр Фабри–Перо, резонансы которого и проявляются как тонкая структура линий.

Заметим, что в случаях 1 и 2 линейная трансформация волн происходит на склоне профиля плотности, где периодическая модуляция плотности не существенна. Начиная с режима 3 излучение проникает в центральную область плазменного слоя, при этом появляется возможность для рассеяния в условиях брэгговского резонанса с пространственной решёткой плотности [76]. Так, в режиме 4 реализуется почти полное резонансное рассеяние обыкновенной волны во встречную необыкновенную волну в условиях $k_z^X - k_z^O = k_z^{pl}$, где индексы "X", "O" и "pl" относятся соответственно к волновому вектору необыкновенной волны, обыкновенной волны и решётки плотности плазмы. По распределениям электромагнитного поля на рис. 4 (4) можно увидеть, что рассеяние происходит преимущественно назад. Рассеянная необыкновенная волна заперта в плотной плазме, поэтому она полностью поглощается в окрестности верхнего гибридного резонанса. Нерассеянная часть излучения отражается от поверхности $\omega_{pe} = \omega$ в виде обыкновенной волны, формируя пик в спектре отражения.

При дальнейшем увеличении частоты плазменный слой становится прозрачным для обыкновенной волны, т.е. всюду выполняется неравенство $\omega < \omega_{pe}$. Область 5 соответствует брэгговскому резонансу на второй пространственной гармонике $k_z^X - k_z^O = 2k_z^{pl}$. В этом случае даже в оптимальных условиях в необыкновенную волну рассеивается лишь часть падающего излучения, что приводит к провалу в спектре пропускания. Рассеянное излучение достигает верхнего гибридного резонанса и полностью поглощается, что соответствует пику в спектре поглощения.

В области 6 реализуется "классическое" брэгговское рассеяние — обыкновенная волна рассеивается во встречную обыкновенную волну в условиях $2k_z^O = k_z^{pl}$. Это приводит к пику в спектре отражения и провалу в спектре пропускания при отсутствии какого-либо возмущения в спектре поглощения.

Рассмотренные эффекты резонансного рассеяния в замагниченной плазме могут играть важную роль для диагностики термоядерной плазмы методами микроволновой резонансной доплеровской рефлектометрии [77, 78] и коллективного рассеяния микроволнового излучения [79–81].

5.3. Резонансное рассеяние необыкновенной волны

Случай падения необыкновенной волны на плазменный слой с модуляцией плотности менее богат возможными физическими эффектами, однако важен для практических применений, например, в микроволновом зондировании плазмы. Для параметров, использованных в примере раздела 5.2, случай падения необыкновенной волны особенно прост — необыкновенная волна отражается от слоя плазмы при $\omega < \omega_{ce}$ с частичной конверсией в обыкновенную волну в соответствии с формулой (5.6) или без конверсии при $\omega > \omega_{ce}$ и $\omega_{pe}^2 > (\omega - \omega_{ce})\omega$. При этом излучение не проникает в центральную область слоя, где возможно резонансное брэгговское рассеяние.

На рисунке 5 рассмотрен другой пример, соответствующий более сильному магнитному полю, удовлетворяющему неравенству $\omega_{ce} > \omega_{pe}$. В этом случае в

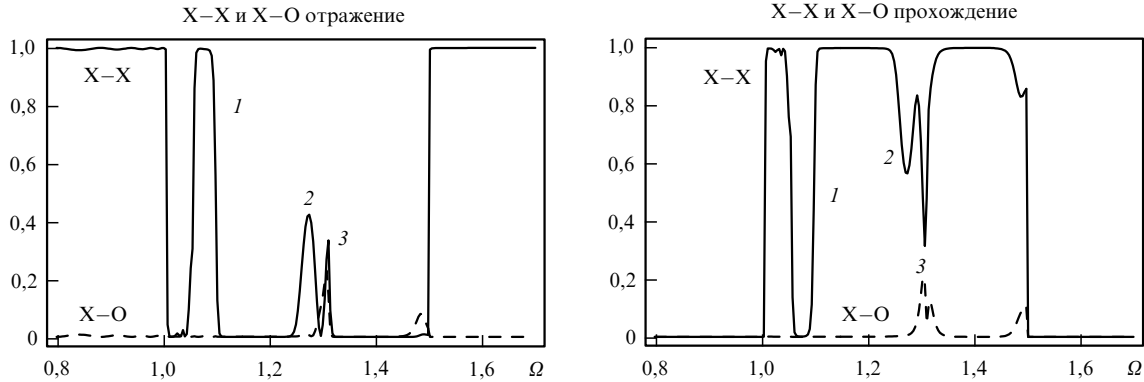


Рис. 5. Коэффициенты отражения и прохождения по интенсивности необыкновенной волны в необыкновенную (сплошная линия) и обыкновенную (штриховая линия) волну в зависимости от частоты для плазменного слоя, показанного на рис. 2. Угол падения $\vartheta = 35^\circ$, магнитное поле соответствует $\omega_{ce}/\omega_0 = 1,5$, нормированная частота $\Omega = \omega/\omega_0$.

плазме существует окно прозрачности, в котором может эффективно проявляться резонансное рассеяние. На рисунке построены спектры отражения и прохождения необыкновенной волны. Коэффициент поглощения для данных параметров меньше 1%, поэтому не приведён. Мы выделили три характерные области в спектрах. Область 1 соответствует рассеянию необыкновенной волны в саму себя, $2k_z^X = k_z^{pl}$. Область 2 соответствует рассеянию необыкновенной волны в саму себя на второй гармонике, $2k_z^X = 2k_z^{pl}$. Область 3 соответствует рассеянию необыкновенной волны в попутную обыкновенную волну, $k_z^O - k_z^X = k_z^{pl}$. Это видно по появлению пика кросс-поляризации в спектре прохождения. Резонансы 2 и 3 перекрываются, поэтому рассеянная необыкновенная волна испытывает вторичное рассеяние в обыкновенную волну. Это приводит к пику кросс-поляризации в спектре отражения (с одновременным подавлением отражения в основную моду).

5.4. Отражение от однородного полупространства, заполненного плазмой

В заключение приведём пример аналитического расчёта, основанного на описанной в разделе 4 методике. Рассмотрим отражение в вакуум от полубесконечного слоя, заполненного однородной плазмой с диэлектрическим тензором (5.1). Матрица отражения определяется формулой (4.6). В данном случае вычисления могут быть проведены до конца: по известным векторам поляризации (5.4) вычисляется матрица $\hat{G}$, затем выделяются левые верхний ($\hat{g}_{11}$) и нижний ($\hat{g}_{21}$) квадранты этой матрицы и вычисляется матрица отражения $\hat{R}_0 = \hat{g}_{21}\hat{g}_{11}^{-1}$. После несложных алгебраических преобразований ответ для компонент матрицы отражения можно представить в компактном виде:

$$R_{0,11} = \frac{\varepsilon_{\parallel} p(\cos \vartheta - p) - pq \sec \vartheta + (\varepsilon_{\parallel} + 1)(q + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon'_{\perp}/\varepsilon_{\perp})}{\varepsilon_{\parallel} p(\cos \vartheta + p) + pq \sec \vartheta - (\varepsilon_{\parallel} - 1)(q + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon'_{\perp}/\varepsilon_{\perp})},$$

$$R_{0,22} = \frac{\varepsilon_{\parallel} p(\cos \vartheta + p) - pq \sec \vartheta - (\varepsilon_{\parallel} + 1)(q + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon'_{\perp}/\varepsilon_{\perp})}{\varepsilon_{\parallel} p(\cos \vartheta + p) + pq \sec \vartheta - (\varepsilon_{\parallel} - 1)(q + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon'_{\perp}/\varepsilon_{\perp})},$$

$$R_{0,12} = -R_{0,21} = \frac{i\varepsilon_{\perp}}{2g \sin \vartheta} \times$$

$$\times \frac{[p^2 - 2q - \varepsilon_{\parallel} \varepsilon'_{\perp}/\varepsilon_{\perp}]^2 - p^2(p^2 - 4q)}{\varepsilon_{\parallel} p(\cos \vartheta + p) + pq \sec \vartheta - (\varepsilon_{\parallel} - 1)(q + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon'_{\perp}/\varepsilon_{\perp})},$$

где p и q — коэффициенты биквадратного дисперсионного уравнения (5.3). Напомним, что данная матрица отражения сформулирована для вакуумных ТЕ- и ТМ-мод. Аналогичным образом можно аналитически найти матрицу отражения от интерферометра Фабри–Перо, заполненного однородной замагниченной плазмой.

6. Заключение

В данной работе мы рассмотрели метод инвариантного погружения применительно к задачам распространения электромагнитных волн в сложных средах с тензорным электромагнитным откликом. Особенностью таких сред является возможность распространения нескольких связанных нормальных волн с разными поляризациями. В основе метода лежит разбиение совокупности нормальных волн на две группы встречных волн. Если задача допускает такое разделение, то существует возможность определения матричного импедансного оператора, характеризующего связь между различными встречными волнами, распространяющимися в неоднородной среде. Этот оператор можно найти путём решения нелинейного эволюционного уравнения с универсальными (нулевыми) граничными условиями, не зависящими от деталей падающего на слой излучения. Соответственно импедансный оператор также не зависит от деталей падающего излучения. Если импедансный оператор известен, то для любой заданной структуры падающего излучения можно восстановить поле во всём пространстве путём тривиальной линейной операции.

В задачах с одномерной неоднородностью предложенный метод позволяет свести волновое уравнение к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент матрицы отражения. Эта система характеризуется низкой размерностью (равной квадрату числа нормальных мод, распространяющихся в одну сторону в данной среде). Практически во всех мыслимых ситуациях эта система может быть с лёгкостью численно проинтегрирована на персональном компьютере. Вследствие своей простоты и малой требовательности к вычислительным ресурсам такой подход может быть удобным инструментом для изучения распространения и линейной трансформации электромагнитных волн в ситуациях, когда из-за резкой пространственной зависимости параметров среды нару-

шается приближение геометрической оптики. Кроме того, импедансный метод в одномерной постановке можно использовать для быстрых тестов результатов более сложных электродинамических расчётов в ситуациях, когда стандартные приближённые методы, основанные на трассировке лучей или квазиоптическом уравнении, неприменимы.

В двух- или трёхмерно неоднородных средах импедансный метод приводит или к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с бесконечной размерностью (отвечающей бесконечному набору поперечных мод), или к системе интегро-дифференциальных уравнений с низкой размерностью. Численное решение и той, и другой задачи нетривиально, однако для большого класса задач этот подход всё же удобнее непосредственного решения граничной задачи для уравнений Максвелла. В первую очередь это связано с эволюционным характером решаемых уравнений. Кроме того, немало важно, что в рамках предложенного подхода автоматически и независимо от структуры падающего излучения точно учитывается условие излучения для проходящей волны за слоем.

Предложенный метод обобщается на случай сред с пространственной дисперсией, описываемой производными конечного порядка в тензорах диэлектрической или магнитной проницаемости. Идея такого обобщения достаточно проста — связанное с пространственной дисперсией повышение порядка уравнений Максвелла учитывается увеличением размерности вектора Ψ в уравнении (3.4). В результате уравнения Максвелла вновь сводятся к форме (3.4), однако волновой оператор $\hat{M}$ имеет более сложный вид, зависящий от характера дисперсии. После этого можно вновь развивать импедансный метод в описанной нами форме. Интересно, что при этом автоматически решается проблема дополнительных граничных условий, связанных с повышением размерности волновых уравнений [82], по крайней мере, для сред, плавно переходящих в однородные на границах. Пример такого анализа для магнитоактивной плазмы можно найти в [59].

Работа выполнена в рамках государственного контракта № 14.740.11.0607 с Министерством образования и науки РФ при поддержке РФФИ (гранты №№ 09-02-00972 и 10-02-00411).

7. Приложение. О законе сохранения энергии в импедансном методе

В среде без пространственной дисперсии плотность потока электромагнитной энергии определяется вектором Умова – Пойнтинга $\mathbf{S} \equiv (c/4\pi)[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ [15]. Отсюда усреднённый по высокочастотным осцилляциям поля поток энергии вдоль координаты z может быть определён как

$$S_z = \frac{c}{8\pi} \int \text{Re} (E_x H_y^* - E_y H_x^*) d^2 \mathbf{r}_\perp.$$

Изменение потока энергии определяет плотность диссипации электромагнитной энергии на единицу длины $\partial_z S_z = q_z$, где

$$q_z = \frac{1}{16\pi} \int \text{Im} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}) d^2 \mathbf{r}_\perp. \quad (\text{П.1})$$

В среде без диссипации поток энергии сохраняется, формально это следует из эрмитовости тензоров $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$, обеспечивающих равенство нулю диссипации (П.1). Посмотрим, как выглядит соотношение $\partial_z S_z = q_z$ в переменных, введённых в разделе 3.

Введём скалярное произведение векторных полей, зависящих от поперечных координат или волновых векторов в фурье-представлении:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \int \sum_i a_i b_i^* d^2 \mathbf{r}_\perp \quad \text{или} \quad \int \sum_i a_i b_i^* d^2 \mathbf{k}_\perp.$$

Данное скалярное произведение определяет понятие эрмитово-сопряжённого оператора $(\mathbf{a}, \hat{A}\mathbf{b}) = (\hat{A}^* \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Легко убедиться, что поток энергии может быть выражен через следующее скалярное произведение:

$$S_z = (\Psi, \hat{\sigma}\Psi), \quad \hat{\sigma} = \frac{c}{16\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Диссипацию электромагнитной энергии на единицу длины проще всего получить из уравнения (3.4), из которого следует закон изменения потока энергии в следующей форме:

$$\begin{aligned} q_z &= \partial_z (\Psi, \hat{\sigma}\Psi) = (ik_0 \hat{M}\Psi, \hat{\sigma}\Psi) + (\Psi, ik_0 \hat{\sigma}\hat{M}\Psi) = \\ &= -2k_0 \text{Im} (\Psi, \hat{\sigma}\hat{M}\Psi). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались эрмитовостью матрицы $\hat{\sigma}$. Используя введённую в разделе 3 матрицу перехода (3.6), поток и диссипацию энергии можно выразить через амплитуды встречных волн:

$$\begin{aligned} S_z &= \left(\begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}, \hat{U}^* \hat{\sigma} \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} \right), \\ q_z &= -2k_0 \text{Im} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix}, \hat{U}^* \hat{\sigma} \hat{M} \hat{U} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^+ \\ \mathcal{E}^- \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Из приведённых соотношений видно, что диссипация в среде отсутствует, если оператор $\hat{\sigma}\hat{M}$ эрмитов. Этот же вывод можно сделать более громоздким путём непосредственно из определения волнового оператора (3.5) и из того, что в недиссипативной среде тензоры $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ эрмитовы. Если потребовать ограниченность волнового поля в поперечных направлениях, то эрмитовость оператора $\hat{\sigma}\hat{M}$ гарантирует существование полного дискретного спектра собственных векторов уравнения (3.10), используемого для определения нормальных мод. В среде с диссипацией дискретного базиса может не существовать, однако в этом случае для определения нормальных мод можно пренебречь диссипацией. Для этого вместо оператора $\hat{M}$ нужно использовать оператор $\hat{M}'$, соответствующий эрмитовой части $\hat{\sigma}\hat{M}$:

$$\hat{M}' = \frac{\hat{\sigma}^{-1} [\hat{\sigma}\hat{M} + (\hat{\sigma}\hat{M})^*]}{2} = \hat{M} + \frac{\hat{\sigma}\hat{M}^* \hat{\sigma} - \hat{M}}{2}.$$

Разложение по вакуумным модам автоматически удовлетворяет условиям эрмитовости, поэтому является полным.

К законам сохранения полезно прийти и непосредственно из уравнений для встречных волн (2.1). Пусть для простоты моды, используемые для разбиения поля на

встречные волны, нормированы так, что единичной амплитуде $\mathcal{E}_i^\pm$ отвечает мода с "единичным" потоком энергии. В частности, это условие выполнено для вакуумных ТЕ- и ТМ-мод. Тогда с точностью до размерного нормировочного множителя суммарный поток энергии есть разность потоков энергии всех мод, распространяющихся вдоль и навстречу оси z . В наших обозначениях

$$S_z = \text{const} \{ (\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^+) - (\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^-) \};$$

для ТЕ- и ТМ-мод, определённых матрицей (3.15), константа равна $(c/8\pi) \cos \vartheta$. Используя правило дифференцирования скалярного произведения

$$\partial_z (\mathcal{E}^\pm, \mathcal{E}^\pm) = (\partial_z \mathcal{E}^\pm, \mathcal{E}^\pm) + (\mathcal{E}^\pm, \partial_z \mathcal{E}^\pm) = 2 \text{Re} (\partial_z \mathcal{E}^\pm, \mathcal{E}^\pm),$$

из уравнений (2.1) нетрудно получить закон изменения потока энергии в виде

$$\begin{aligned} \partial_z \{ (\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^+) - (\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^-) \} = \\ = 2 \text{Re} \{ (\mathcal{E}^+, \hat{r}^+ \mathcal{E}^+) + (\mathcal{E}^-, \hat{r}^- \mathcal{E}^-) + (\mathcal{E}^-, [\hat{r}^+ + (\hat{r}^-)^*] \mathcal{E}^+) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Это частный случай, следующий из общих соотношений (П.2). В правой части записана диссипация. Непосредственной подстановкой в (3.16), (3.17) можно убедиться, что если оператор $\hat{M}$ эрмитов, то дифференциальные операторы прохождения антиэрмитовы, а операторы отражения антиэрмитово-сопряжённые:

$$\hat{r}^+ + (\hat{r}^+)^* = 0, \quad \hat{t}^- + (\hat{t}^-)^* = 0, \quad \hat{r}^+ + (\hat{r}^-)^* = 0. \quad (\text{П.4})$$

Отсюда сразу следует, что в среде без диссипации правая часть уравнения (П.3) обращается в нуль, обеспечивая сохранение потока энергии в каждом сечении поперёк продольной координаты:

$$(\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^+) - (\mathcal{E}^-, \mathcal{E}^-) = \text{const}.$$

Ещё более сильное утверждение можно сделать относительно операторов отражения $\hat{R}(z)$ и прохождения $\hat{T}(z)$ конечного слоя $[z, b]$. Из соотношений (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} -\partial_z (\hat{R}^* \hat{R}) &= [\hat{R}^* \hat{R} (\hat{r}^+ + \hat{r}^- \hat{R}) + \hat{R}^* \hat{t}^- \hat{R} + \hat{R}^* \hat{r}^+] + \text{э.с.}, \\ -\partial_z (\hat{T}^* \hat{T}) &= \hat{T}^* \hat{T} (\hat{r}^+ + \hat{r}^- \hat{R}) + \text{э.с.}, \end{aligned}$$

где э.с. обозначает эрмитово сопряжение предыдущего слагаемого. Подчёркнём, что это операторные соотношения — в частности, в левых частях здесь записаны не скалярные произведения, а новые операторы, получающиеся последовательным применением оператора отражения или прохождения и его эрмитово-сопряжённого. В среде без диссипации в силу свойств (П.4) слагаемое $\hat{R}^* \hat{r}^- \hat{R}$ сокращается со своим эрмитово-сопряжённым, поэтому его можно опустить, а слагаемое $\hat{R}^* \hat{r}^+$ можно заменить на $(\hat{R}^* \hat{r}^+)^* - \hat{r}^+ = -(\hat{r}^+ + \hat{r}^- \hat{R})$; здесь $\hat{r}^+$ тоже не даёт вклада вместе со своим э.с. После этого сложим два уравнения, в результате получим

$$-\partial_z (\hat{R}^* \hat{R} + \hat{T}^* \hat{T}) = (\hat{R}^* \hat{R} + \hat{T}^* \hat{T} - \hat{I})(\hat{r}^+ + \hat{r}^- \hat{R}) + \text{э.с.}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять физическим начальным условиям: слой нулевой толщины

ничего не отражает, $\hat{R}(b) = 0$, и всё пропускает, $\hat{T}(b) = \hat{I}$. Очевидным решением, удовлетворяющим этим условиям, является

$$\hat{R}^* \hat{R} + \hat{T}^* \hat{T} = \hat{I}.$$

Это универсальное свойство операторов отражения и прохождения неоднородной недиссипативной среды имеет ясный физический смысл — сумма потоков энергии отражённой и прошедшей волны должна равняться потоку энергии в падающей волне. Если, например, операторы заданы матрицами $n \times n$, это соотношение определяет n^2 алгебраических связей.

Список литературы

1. Stix T H *The Theory of Plasma Waves* (New York: McGraw-Hill, 1962) [Стикс Т *Теория плазменных волн* (М.: Мир, 1965)]
2. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967) [Ginzburg V L *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* 2nd ed. (Oxford: Pergamon Press, 1970)]
3. Железняков В В *Излучение в астрофизической плазме* (М.: Янус-К, 1997); Zheleznyakov V V *Radiation in Astrophysical Plasma* (Dordrecht: Kluwer, 1996)
4. Brambilla M *Kinetic Theory of Plasma Waves: Homogeneous Plasmas* (Oxford: Clarendon Press, 1998)
5. Yariv A, Yeh P *Optical Waves in Crystals* (New York: Wiley, 1984) [Ярив А, Юх П *Оптические волны в кристаллах* (М.: Мир, 1987)]
6. Смоленский Г А, Писарев Р В, Синий И Г *УФН* **116** 231 (1975) [Smolenskii G A, Pisarev R V, Sinii I G *Sov. Phys. Usp.* **18** 410 (1975)]
7. Кричик Г С *Физика магнитных явлений* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976)
8. de Gennes P G *The Physics of Liquid Crystals* (Oxford: Clarendon Press, 1974) [де Жен П *Физика жидких кристаллов* (М.: Мир, 1977)]
9. Chandrasekhar S *Liquid Crystals* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977) [Чандрасекар С *Жидкие кристаллы* (М.: Мир, 1980)]
10. Блинов Л М *Электро- и магнитооптика жидких кристаллов* (М.: Наука, 1978) [Blinov L M *Electro-Optical and Magneto-Optical Properties of Liquid Crystals* (Chichester: Wiley, 1983)]
11. Сизов Ф Ф, Уханов Ю И *Магнитооптические эффекты Фарадея и Фогта в применении к полупроводникам* (Киев: Наукова думка, 1979)
12. Агранович В М, Гартштейн Ю Н *УФН* **176** 1051 (2006) [Agranovich V M, Gartstein Yu N *Phys. Usp.* **49** 1029 (2006)]
13. Гнедин Ю Н, Павлов Г Г, Шибанов Ю А *Письма в ЖЭТФ* **27** 325 (1978) [Gnedin Yu N, Pavlov G G, Shibanov Yu A *JETP Lett.* **27** 305 (1978)]
14. Железняков В В, Литвинчук А А *Физика плазмы* **9** 553 (1983) [Zheleznyakov V V, Litvinchuk A A *Sov. J. Plasma Phys.* **9** 322 (1983)]
15. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1962) [Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)]
16. Stratton J A *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill, 1941) [Страттон Дж *Теория электромагнетизма* (М.: Мир, 1949)]
17. Каценеленбаум Б З *Высокочастотная электродинамика* (М.: Наука, 1966)
18. Korn G A, Korn T M *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill, 1968) [Корн Г, Корн Т *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: Наука, 1970) с. 265]
19. Амбарцумян В А *ДАН СССР* **38** 257 (1943)
20. Амбарцумян В А *ЖЭТФ* **13** 323 (1943)
21. Chandrasekhar S *Radiative Transfer* (Oxford: Clarendon Press, 1950) [Чандрасекар С *Перенос лучистой энергии* (М.: ИЛ, 1953)]
22. Scott M R *Invariant Imbedding and Its Applications to Ordinary Differential Equations: An Introduction* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973)
23. Casti J, Kalaba R *Imbedding Methods in Applied Mathematics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973) [Касти Дж, Калаба Р

- Методы погружения в прикладной математике* (М.: Мир, 1976)]
24. Kagiwada H H, Kalaba R *Integral Equations via Imbedding Methods* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1974)
 25. Bellman R, Wing G M *An Introduction to Invariant Imbedding* (New York: Wiley, 1975)
 26. Цапенко Н Е *Уравнение Риккати и волновые процессы* (М.: Изд-во Московского гос. горного ун-та, 2008)
 27. Кляцкин В И *Метод погружения в теории распространения волн* (М.: Наука, 1986)
 28. Кляцкин В И *Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах* (М.: Наука, 1980)
 29. Pitteway M L V *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **257** 219 (1965)
 30. Chessel C I J. *Atmos. Terr. Phys.* **33** 1515 (1971)
 31. Chessel C I J. *Atmos. Terr. Phys.* **33** 1803 (1971)
 32. Miller K L, Smith L G J. *Atmos. Terr. Phys.* **39** 899 (1977)
 33. Budden K G *Lectures on Magnetoionic Theory* (London: Gordon and Breach, 1964)
 34. Smith M S J. *Atmos. Terr. Phys.* **35** 51 (1973)
 35. Smith M S J. *Atmos. Terr. Phys.* **36** 1165 (1974)
 36. Куницын В Е, Смородинов В А, Усачев А Б *Радиотехника и электроника* **34** 233 (1989)
 37. Куницын В Е, Усачев А Б *Изв. вузов. Радиотехника* **33** 267 (1990) [Kunitsyn V E, Smorodinov V A, Usachev A B *Radiophys. Quantum Electron.* **33** 198 (1990)]
 38. Nygren T *Planet. Space Sci.* **29** 521 (1981)
 39. Nygrén T *Planet. Space Sci.* **30** 427 (1982)
 40. Zhang D Y *Radio Sci.* **26** 1415 (1991)
 41. Куницын В Е, Нестеров И А, Стефанчук А Д *Радиотехника и электроника* **44** 1445 (1999) [Kunitsyn V E, Nesterov I A, Stefanchuk A D *J. Commun. Technol. Electron.* **44** 1331 (1999)]
 42. Голикова Е В и др. *Радиотехника и электроника* **50** 794 (2005) [Golikova E V et al. *J. Commun. Technol. Electron.* **50** 724 (2005)]
 43. Бабилов В В *УФН* **92** 3 (1967) [Babikov V V *Sov. Phys. Usp.* **10** 271 (1967)]
 44. Бабилов В В *Метод фазовых функций в квантовой механике* (М.: Наука, 1968)
 45. Calogero F *Variable Phase Approach to Potential Scattering* (New York: Academic Press, 1967) [Калоджеро Ф *Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния* (М.: Мир, 1972)]
 46. Glazov L G, Pázsit I *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **215** 509 (2004)
 47. Figueroa C, Brizuela H, Heluana S P J. *Appl. Phys.* **99** 044909 (2006)
 48. Figueroa C, Nieva N, Heluani S P *Physica B* **398** 356 (2007)
 49. Glazov L G, Pázsit I *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B* **256** 638 (2007)
 50. Guo Q et al. *Eur. Phys. J. B* **9** 29 (1999)
 51. Нелин Е А *УФН* **177** 307 (2007) [Nelin E A *Phys. Usp.* **50** 293 (2007)]
 52. Swanson D G *Nucl. Fusion* **20** 949 (1980)
 53. Appert K et al. *Comput. Phys. Commun.* **40** 73 (1986)
 54. Appert K et al. *Comput. Phys. Commun.* **43** 125 (1986)
 55. Brambilla M *Plasma Phys. Control. Fusion* **41** 1 (1999)
 56. Köhn A et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **50** 085018 (2008)
 57. Kim K, Lee D-H, Lim H *Europhys. Lett.* **69** 207 (2005)
 58. Kim K, Lee D-H *Phys. Plasmas* **13** 042103 (2006)
 59. Shalashov A G, Gospodchikov E D *Plasma Phys. Control. Fusion* **52** 025007 (2010)
 60. Shalashov A G, Gospodchikov E D “Impedance technique for modeling of electromagnetic wave propagation in anisotropic and gyrotropic media”, in *Proc. of 21st Joint Russian–German Workshop on ECRH and Gyrotrons (STC-Meeting)*, Greifswald, Germany, 2009
 61. Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988)
 62. Reed M, Simon B *Methods of Modern Mathematical Physics* Vol. 1 *Functional Analysis* (New York: Academic Press, 1972); Vol. 2 *Fourier Analysis. Self-Adjointness* (New York: Academic Press, 1975); Vol. 3 *Scattering Theory* (New York: Academic Press, 1979); Vol. 4 *Analysis of Operators* (New York: Academic Press, 1978) [Рид М, Саймон Б *Методы современной математической физики* Т. 1 *Функциональный анализ* (М.: Мир, 1977); Т. 2 *Гармонический анализ. Самосопряженность* (М.: Мир, 1978); Т. 3 *Теория рассеяния* (М.: Мир, 1982); Т. 4 *Анализ операторов* (М.: Мир, 1982)]
 63. Краснов М Л *Интегральные уравнения. Введение в теорию* (М.: Наука, 1975)
 64. Васильева А Б и др. *Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление: в примерах и задачах* (Курс высшей математики и математической физики, Вып. 10) (М.: Физматлит, 2003)
 65. Демидович Б П, Марон И А, Шувалова Э З *Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения* (Под ред. Б П Демидовича) (М.: Наука, 1967)
 66. Гельфанд С И, в сб. *Глобус. Общественно-математический семинар* Вып. 1 (Под ред. В В Прасолова, М А Цфасмана) (М.: Изд-во МЦНМО, 2004) с. 124
 67. Kamke E *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen* (Leipzig: Geest & Portig, 1951) [Камке Э *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (М.: Наука, 1971)]
 68. Балакина М А, Шалашов А Г, Господчиков Е Д, Смолякова О Б *Изв. вузов. Радиотехника* **49** 686 (2006) [Balakina M A, Shalashov A G, Gospodchikov E D, Smolyakova O B *Radiophys. Quantum Electron.* **49** 617 (2006)]
 69. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
 70. Budden K G *The Propagation of Radio Waves* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985)
 71. Cairns R A, Lashmore-Davies C N *Phys. Fluids* **26** 1268 (1983)
 72. Жаров А А *Физика плазмы* **10** 1109 (1984) [Zharov A A *Sov. J. Plasma Phys.* **10** 642 (1984)]
 73. Mjølhus E J. *Plasma Phys.* **31** 7 (1984)
 74. Токман М Д *Физика плазмы* **11** 1205 (1985) [Tokman M D *Sov. J. Plasma Phys.* **11** 689 (1985)]
 75. Laqua H P *Plasma Phys. Control. Fusion* **49** R1 (2007)
 76. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
 77. Boucher I et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **40** 1489 (1998)
 78. Gusakov E Z, Heuraux S, Popov A Yu *Plasma Phys. Control. Fusion* **51** 065018 (2009)
 79. Suvorov E V et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **37** 1207 (1995)
 80. Suvorov E V et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **39** (12B) B337 (1997)
 81. Suvorov E V et al. *Nucl. Fusion* **38** 661 (1998)
 82. Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (М.: Наука, 1965) [Agranovich V M, Ginzburg V L *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)]

Impedance technique for modeling of electromagnetic wave propagation in anisotropic and gyrotropic media

A.G. Shalashov, E.D. Gospodchikov

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
Tel. (7-831) 416-06 23. Fax (7-831) 416-06 16
E-mail: ags@appl.sci-nnov.ru, eggos@mail.ru*

Friendly and physically unambiguous interpretation of the invariant embedding technique is discussed in application to problems of electromagnetic wave propagation in complex media characterized by anisotropic and gyrotropic dielectric or magnetic response.

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Jb, **52.35.**—g

Bibliography — 82 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (2) 151–172 (2011)

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201102a.0151

Received 20 January 2010, revised 29 July 2010

Physics—Uspekhi **54** (2) (2011)