Декабрь 2011 г. **Том 181, № 12**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Электромагнитные волны с отрицательной групповой скоростью и тензор энергии-импульса

В.П. Макаров, А.А. Рухадзе

Даётся анализ результатов по проблеме тензора энергии-импульса электромагнитного поля в веществе, опубликованных в работе В.Г. Веселаго [*УФН* **179** 689 (2009)]. *Показано, что утверждения автора относительно тензора Абрагама* (*тензор Абрагама не является тензором и сила Абрагама вводится в теорию искусственно как некое дополнение*) *являются ошибочными. Обсуждая вопрос о тензоре энергии-импульса электромагнитного поля в среде при учёте дисперсии, автор упомянутой работы не принимает во внимание, что этот вопрос уже давно решён: тензор энергии-импульса электромагнитного поля в неподвижной изотропной среде при учёте дисперсии — это симметричный 4-тензор, включающий в себя плотность энергии в форме Бриллюэна, плотность потока энергии — вектор Умова – Пойнтинга, плотность импульса — делённый на* c^2 *вектор Умова – Пойнтинга и тензор напряжений в форме Питаевского. Показано, что пространственные компоненты тензора Полевого – Рытова, который обсуждает автор указанной работы, имеют смысл зависящей от поля части полного тензора напряжений в форме Питаевского для среды, находящейся в условиях механического* (*и теплового*) *равновесия, если в ней распространяется квазимонохроматическая плоская волна. Показано, что сила, с которой электромагнитная волна в изотропной среде действует на твёрдое тело, при любом* (*не только равном нулю*) *коэффициенте отражения выражается через соответствующую компоненту тензора напряжений в форме Полевого – Рытова.*

PACS numbers: **03.30.+p**, 03.50.De, **41.20.–q** DOI: 10.3367/UFNr.0181.201112n.1357

Содержание

1. Введение

Электромагнитные волны с отрицательной групповой скоростью[1] имеют интересные особенности, на которые обратил внимание В.Е. Пафомов [4, 5]. Формула, определяющая эффект Доплера, — соотношение между частотой ω волны, испускаемой некоторым источником, движущимся со скоростью $\mathbf{v}$, и частотой ω_0 волны, испускаемой таким же источником, но неподвижным, может быть записана в виде (см. [6, § 48])

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 \mp \frac{v\cos\theta}{v_{\rm ph}}\right), \tag{1.1}$$

здесь $\mathbf{v}_{\rm ph} = \omega\mathbf{k}/k^2$ — фазовая скорость волны, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, θ — угол между скоростью источника $\mathbf{v}$ и направлением распространения излучения (т.е. вектором плотности потока энергии или групповой скоростью волны $\mathbf{v}_{\rm gr}$); верхний знак относится к случаю положительной ($\mathbf{v}_{\rm gr} \uparrow\uparrow \mathbf{v}_{\rm ph}$) групповой скорости, а нижний — к случаю отрицательной ($\mathbf{v}_{\rm gr} \uparrow\downarrow \mathbf{v}_{\rm ph}$). Из (1.1) видно, что для волны с отрицательной групповой скоростью эффект Доплера будет "обращённым" по отношению к эффекту Доплера для волны с положительной групповой скоростью [4, 5].

Направление, в котором распространяется черенковское излучение, получается из (1.1), если положить $\omega_0 = 0$:

$$\cos\theta = \pm\frac{v_{\rm ph}}{v}\,. \tag{1.2}$$

Излучение распространяется под острым углом к скорости частицы, если групповая скорость положительна ($\mathbf{v}_{\rm gr} \uparrow\uparrow \mathbf{v}_{\rm ph}$), и под тупым углом к скорости частицы, если

[1] В изотропной среде групповая и фазовая скорости волны либо однонаправлены, либо направлены противоположно друг другу. Следуя [1; 2, с. 334; 3, с. 461], мы будем считать, что групповая скорость в первом случае положительна, а во втором отрицательна.

В.П. Макаров, А.А. Рухадзе. Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
ул. Вавилова 38, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 503-83-94, (499) 135-02-47
E-mail: vpmac@ran.gpi.ru, rukh@fpl.gpi.ru

Статья поступила 22 марта 2010 г., после доработки 29 сентября 2011 г.

групповая скорость отрицательна ($\mathbf{v}_{\rm gr}\uparrow\downarrow\mathbf{v}_{\rm ph}$), т.е. эффект Вавилова – Черенкова будет "обращённым" [4, 5].

Случай отрицательной групповой скорости волны ещё раньше исследовал Л.И. Мандельштам [1; 2, с. 334; 3, с. 461] в связи с задачей об отражении и преломлении электромагнитной волны при её падении на плоскую границу раздела двух сред. Выберем в качестве координатной плоскости xy плоскость раздела сред и ось z направим из 1-й среды во 2-ю. Пусть в 1-й среде распространяется без затухания волна с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}_0$. Ось y выберем так, чтобы плоскость zx совпадала с плоскостью падения ($k_{0y}=0$), а ось x направим так, чтобы выполнялось условие $k_{0x}\geqslant 0$. (Для определённости полагаем, что в 1-й среде волны с частотой ω имеют положительную групповую скорость.) Из однородности условий в плоскости раздела следует, что для волновых векторов падающей ($\mathbf{k}_0$), отражённой ($\mathbf{k}_1$) и преломлённой ($\mathbf{k}_2$) волн справедливы соотношения

$$k_{1x}=k_{2x}=k_{0x}\geqslant 0\,,\qquad k_{1y}=k_{2y}=k_{0y}=0\,. \tag{1.3}$$

По условию, $k_{0x}=k_1\sin\theta_0\geqslant 0$, где θ_0 — угол падения, $k_{0z}=k_1\cos\theta_0\geqslant 0$ и $k_0=k_1$, поэтому $k_{1x}=k_1\sin\theta_0$, $k_{1z}=-k_{0z}$ и угол отражения $\theta_1=\theta_0$. Будем полагать, что затуханием преломлённой волны тоже можно пренебречь. Тогда знак в выражении $k_{2z}=\pm(k_2^2-k_1^2\sin^2\theta_0)^{1/2}$ определяется из требования, чтобы энергия преломлённой волны оттекала от границы в глубь 2-й среды или чтобы проекция на ось z групповой скорости преломлённой волны была положительна, $v_{{\rm gr}z}>0$. Поэтому если групповая скорость волны во 2-й среде положительна ($\mathbf{v}_{\rm gr}\uparrow\uparrow\mathbf{v}_{\rm ph}\uparrow\uparrow\mathbf{k}_2$), то $k_{2x}, v_{{\rm gr}x}>0$, $v_{{\rm gr}z}, k_{2z}>0$ и лучи преломлённой и падающей волн лежат по разные стороны от нормали к поверхности раздела. Если, напротив, групповая скорость волны во 2-й среде отрицательна ($\mathbf{v}_{\rm gr}\uparrow\downarrow\mathbf{v}_{\rm ph}\uparrow\uparrow\mathbf{k}_2$), то $k_{2x}, v_{{\rm ph}x}>0$, $v_{{\rm gr}x}<0$, $v_{{\rm gr}z}>0$, $k_{2z}, v_{{\rm ph}z}<0$ и преломлённый и падающий лучи лежат по одну сторону от нормали к поверхности раздела. Л.И. Мандельштам называл первый случай "обычным преломлением", а второй — "необычным преломлением"; в большинстве работ второй случай называется отрицательным преломлением; мы предложили называть его (по аналогии с [4, 5]) "обращённым" преломлением [7].

Электродинамические свойства изотропной негиротропной среды при учёте частотной дисперсии характеризуются двумя функциями — диэлектрической $\varepsilon(\omega)$ и магнитной $\mu(\omega)$ проницаемостями. Поэтому вопрос о знаке групповой скорости волны с частотой ω связан с поведением функций $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Как отмечается в [8], правильный ответ на этот вопрос впервые дан в работе Д.В. Сивухина [9]: волна в среде распространяется без затухания, если только (при вещественных значениях диэлектрической и магнитной проницаемостей) произведение $\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)>0$, причём

$$\varepsilon(\omega),\mu(\omega)>0\Rightarrow\mathbf{v}_{\rm gr}\uparrow\uparrow\mathbf{v}_{\rm ph}\,,\qquad \varepsilon(\omega),\mu(\omega)<0\Rightarrow\mathbf{v}_{\rm gr}\uparrow\downarrow\mathbf{v}_{\rm ph}\,. \tag{1.4}$$

Заметим, однако, что в дальнейшем Д.В. Сивухин, по существу, отказывается от этого результата — в [10, § 64] утверждается: "Можно показать, что в случае электромагнитных волн в изотропных средах направления распространения фазы и энергии совпадают". Условия (1.4) затем были получены В.Е. Пафомовым в [4, 5]. Автор [4, 5] повторил простые и ясные (в отличие от таковых в [9]) вычисления, приведённые в первом (1957 г.) издании *Электродинамики сплошных сред* (см. [11, § 83]), сняв лишь изначальные ограничения на знаки $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ (см. раздел 4, в котором будет показано, что $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ могут принимать отрицательные значения только при учёте дисперсии).

В работе [12] В.Г. Веселаго обращается к известным результатам [13] С.М. Рытова относительно тензора энергии-импульса квазимонохроматической плоской электромагнитной волны. Согласно [13], направление плотности импульса волны совпадает с направлением её фазовой (а не групповой) скорости. Исходя из этого автор [12] делает вывод, что волна с частотой ω в среде с отрицательными $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ при нормальном падении на некоторое полностью отражающее тело не отталкивает, а притягивает его[2].

В недавно опубликованной в *УФН* статье [15] В.Г. Веселаго переходит к обсуждению общих вопросов электродинамики сплошных сред, связанных с тензором энергии-импульса электромагнитного поля. Большинство утверждений, содержащихся в работе [15], противоречит результатам других работ (в частности, нашей работы [16]) и, как будет показано ниже, является ошибочным.

Имеет смысл напомнить, в чём, собственно, заключается проблема тензора энергии-импульса электромагнитного поля в сплошной среде [17, § 35]. Уравнения Максвелла для полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ имеют вид (см. [11, § 75])

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho^{\rm ext}\,,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,\\ &\operatorname{div}\mathbf{B}=0\,,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{\rm ext}\,,\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\rho^{\rm ext}$ — плотность сторонних (по отношению к рассматриваемому веществу) зарядов, $\mathbf{j}^{\rm ext}$ — плотность тока сторонних зарядов. Из уравнений (1.5) можно строго получить уравнение для работы поля над сторонними зарядами

$$\mathbf{j}^{\rm ext}\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)-\operatorname{div}\mathbf{S}^{\rm P}\,,\qquad \mathbf{S}^{\rm P}=\frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{S}^{\rm P}$ — вектор Умова – Пойнтинга, и уравнение для силы $\mathbf{f}^{\rm ext}=\rho^{\rm ext}\mathbf{E}+(1/c)\,\mathbf{j}^{\rm ext}\times\mathbf{B}$, действующей со стороны поля на сторонние заряды в единице объёма[3],

$$\begin{aligned}&\rho^{\rm ext}E_i+\frac{1}{c}(\mathbf{j}^{\rm ext}\times\mathbf{B})_i=-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}_i)+\sigma_i'^{\rm M}-\\ &\quad-\frac{1}{8\pi}\left[\left(\mathbf{D}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial r_i}-\mathbf{E}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial r_i}\right)+\left(\mathbf{B}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial r_i}-\mathbf{H}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial r_i}\right)\right],\\ &\sigma_i'^{\rm M}=\frac{\partial\sigma_{ij}^{\rm M}}{\partial r_j}\,,\quad \sigma_{ij}^{\rm M}=\frac{1}{4\pi}\left[(E_iD_j+H_iB_j)-\frac{1}{2}\,\delta_{ij}(\mathbf{ED}+\mathbf{HB})\right],\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\sigma_{ij}^{\rm M}$ — тензор напряжений, введённый Минковским.

[2] В работе [14] сообщается о наблюдении обращённого эффекта Вавилова – Черенкова, предсказание которого авторы связывают с [12]. На самом деле эффект предсказан, как мы отмечали выше, В.Е. Пафомовым [4, 5].

[3] По всем дважды повторяющимся индексам $i, j, k, \ldots = x, y, z$ везде подразумевается суммирование.

В микроскопической электродинамике ($\mathbf{D}=\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mathbf{H}$) уравнения (1.6), (1.7) приводятся к уравнениям, эквивалентным закону сохранения энергии и импульса (см. [6, §§ 31 – 33]):

$$\mathbf{j}^{\text{ext}}\mathbf{E} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{S}\,, \qquad \mathbf{f}^{\text{ext}} = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma}'\,, \qquad \sigma_i' = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j}\,; \tag{1.8}$$

$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)\,, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S}^{\text{P}}\,, \qquad \mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{S}^{\text{P}}\,, \tag{1.9}$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \frac{1}{4\pi}\left[(E_iE_j + H_iH_j) - \frac{1}{2}\,\delta_{ij}(E^2 + H^2)\right].$$

Здесь w — плотность энергии, $\mathbf{S}$ — плотность потока энергии, $\mathbf{g}$ — плотность импульса, σ_{ij} — максвелловский тензор напряжений. Все эти величины объединяются в 4-тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ поля ($r_\alpha = (\mathbf{r}, \mathrm{i}ct)$):

$$T_{ij} = \sigma_{ij}\,, \quad T_{j4} = -\mathrm{i}cg_j\,, \quad T_{4j} = -\frac{\mathrm{i}}{c}\,S_j\,, \quad T_{44} = w\,. \tag{1.10}$$

Вводя 4-силу $f_\alpha^{\text{ext}} = (\mathbf{f}^{\text{ext}}, \mathrm{i}\,\mathbf{j}^{\text{ext}}\mathbf{E}/c)$, уравнения (1.8) можно записать в виде[4]

$$f_\alpha^{\text{ext}} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta}\,. \tag{1.11}$$

Можно, следуя Минковскому, ввести 4-тензор поля $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$: $F_{ij} = e_{ijk}H_k$, $F_{4j} = -F_{j4} = \mathrm{i}E_j$, тогда тензор энергии-импульса поля в вакууме (1.9), (1.10) принимает вид

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\alpha\gamma}F_{\gamma\beta} - \frac{1}{4}\,\delta_{\alpha\beta}F_{\gamma\nu}F_{\nu\gamma}\right). \tag{1.12}$$

В макроскопической электродинамике из уравнений (1.6), (1.7) строго получить уравнения вида (1.8) невозможно. Тем не менее полагают (см. [17, § 35]), что уравнения, эквивалентные законам сохранения энергии-импульса системы "вещество плюс поле", существуют и имеют вид, аналогичный уравнениям (1.8) и (1.11):

$$\mathbf{j}^{\text{ext}}\mathbf{E} + \mathbf{f}\mathbf{v} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{S}\,, \qquad \mathbf{f}^{\text{ext}} + \mathbf{f} = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma}'\,, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} = f_\alpha^{\text{ext}} + f_\alpha\,. \tag{1.14}$$

где $(\mathbf{f}, \mathrm{i}\mathbf{f}\mathbf{v}/c)$ — 4-сила, действующая со стороны поля на вещество в единице объёма, $\mathbf{v}$ — скорость вещества.

При выборе выражения для $T_{\alpha\beta}$ непременно должны быть выполнены следующие условия: 1) $T_{\alpha\beta}$ должен быть действительно тензором, т.е. при всех преобразованиях, входящих в группу Лоренца, $T_{\alpha\beta}$ должен преобразовываться так же, как преобразуется произведение двух 4-векторов; 2) в предельном случае, когда вещество отсутствует ($\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{E} = \mathbf{D}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$), тензор $T_{\alpha\beta}$ должен совпадать с тензором (1.9), (1.10) или (1.12) микроскопической электродинамики; 3) уравнения (1.13) не должны противоречить уравнениям (1.6), (1.7), которые строго получаются из уравнений Максвелла; 4) выражения для силы, которые определяются из двух уравнений (1.13), могут различаться только слагаемым, перпендикулярным к скорости среды $\mathbf{v}$ (и не дающим вклада в работу $\mathbf{f}\mathbf{v}$); 5) сила $\mathbf{f}$, получаемая из (1.13), не должна противоречить уравнениям движения вещества (уравнениям гидродинамики или теории упругости).

В 1908 г. Г. Минковский в работе [18] ввёл два 4-тензора поля, $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ и $H_{\alpha\beta} = -H_{\beta\alpha}$ (см. [11, § 76], [17, § 33]):

$$F_{ij} = e_{ijk}B_k\,, \qquad F_{4j} = -F_{j4} = \mathrm{i}E_j;$$
$$H_{ij} = e_{ijk}H_k\,, \quad H_{4j} = -H_{j4} = \mathrm{i}D_j\,, \tag{1.15}$$

использование которых позволяет записать уравнения Максвелла (1.5) в явно релятивистски инвариантном виде:

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial r_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial r_\beta} = 0\,, \qquad \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} = \frac{4\pi}{c}\,j_\alpha^{\text{ext}}\,. \tag{1.16}$$

В работах [18, 19] Г. Минковский выбрал тензор энергии-импульса поля в виде, аналогичном выражению (1.12) в микроскопической электродинамике:

$$T_{\alpha\beta}^{\text{M}} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\alpha\gamma}H_{\gamma\beta} - \frac{1}{4}\,F_{\gamma\nu}H_{\nu\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) \tag{1.17}$$

или, согласно (1.10) и (1.15), σ_{ij}^{M} в виде (1.7) и

$$\mathbf{g}^{\text{M}} = \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{D}\times\mathbf{B}\,, \qquad \mathbf{S}^{\text{M}} = \mathbf{S}^{\text{P}} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,,$$
$$w^{\text{M}} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,. \tag{1.18}$$

Тензорный характер $T_{\alpha\beta}^{\text{M}}$ (1.17) очевиден; также очевидно, что в пределе $\mathbf{E} = \mathbf{D}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ в микроскопической электродинамике тензор $T_{\alpha\beta}^{\text{M}}$ приводится к виду (1.12). Заметим, что в (1.17) материальные уравнения, связывающие поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, не используются, т.е. тензор Минковского записывается для любой (не обязательно изотропной) среды и для сколь угодно сильных полей.

Тензор Минковского (1.17), в отличие от тензора энергии-импульса в микроскопической электродинамике (1.12), не симметричен. М. Абрагам [20, 21] (см. также [17, § 35]) предложил симметричную форму тензора энергии-импульса электромагнитного поля $T_{\alpha\beta}^{\text{A}}$ в веществе. В сопутствующей системе отсчёта (относительно которой вещество покоится)[5]

$$\bar\sigma_{ij}^{\text{A}} = \bar\sigma_{ji}^{\text{A}} = \frac{1}{2}(\bar\sigma_{ij}^{\text{M}} + \bar\sigma_{ji}^{\text{M}})\,, \qquad \bar{\mathbf{g}}^{\text{A}} = \frac{1}{c^2}\,\bar{\mathbf{S}}^{\text{P}}\,,$$
$$\bar{\mathbf{S}}^{\text{A}} = \bar{\mathbf{S}}^{\text{P}}\,, \qquad \bar w^{\text{A}} = \bar w^{\text{M}}\,. \tag{1.19}$$

Первые два результата статьи [15] касаются тензора Абрагама $T_{\alpha\beta}^{\text{A}}$. Эти результаты обсуждаются в разделах 2 и 3.

2. Тензор энергии-импульса в форме Абрагама

Первый результат статьи [15] формулируется в аннотации к этой статье так: "Указано, что тензор энергии-импульса в форме Абрагама, по сути дела, не является

[4] По всем дважды повторяющимся индексам $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, 3, 4$ везде подразумевается суммирование.

[5] Величины, относящиеся к сопутствующей системе отсчёта, мы надчёркиваем.

тензором, *так как не является релятивистски инвариантным*" (курсив наш. — *Авторы*). В статье [15] в качестве доказательства этого результата приводятся только слова [15, с. 693]: "... он легко проверяется прямым расчётом". Если в приведённом выше результате опустить выделенные курсивом слова, то смысл утверждения станет понятным, но это утверждение, как мы покажем "прямым расчётом", — ошибочное. Если же принимать во внимание и выделенную курсивом часть, то это "указание" можно рассматривать только как следствие некоего недоразумения: инвариантным может быть только тензор нулевого ранга, т.е. скаляр.

В явно ковариантной форме (справедливой в любой инерциальной системе отсчёта) тензор Абрагама был записан в 1913 г. Р. Граммелем [22] (приведён, например, в книге В. Паули [17, § 35]). В таком же виде этот тензор записывается и в современных работах (см., например, [23]). В этой записи, однако, присутствуют диэлектрическая и магнитная проницаемости, т.е. подразумевается, что поля достаточно слабы (по сравнению с внутренним, атомным, полем), а среда — изотропная. По этой причине может создаться впечатление, что тензор Минковского $T^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta}$ в определённом смысле предпочтительнее тензора Абрагама. Мы покажем, что и тензор Абрагама может быть записан так, что в нём, как и в тензоре Минковского (1.17), материальные уравнения не будут использоваться.

Тензор (1.19) в сопутствующей системе отсчёта можно представить в виде

$$\bar{T}^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{T}^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta} + \bar{T}^{\mathrm{M}}_{\beta\alpha}) + \bar{A}_{\alpha\beta}\,, \tag{2.1}$$

где

$$\bar{A}_{ij} = \bar{A}_{44} = 0\,, \qquad \bar{A}_{j4} = \bar{A}_{4j} = \frac{\mathrm{i}}{8\pi}(\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}})_j = \\ = \frac{1}{8\pi}(\bar{H}_{jk}\bar{F}_{k4} - \bar{F}_{jk}\bar{H}_{k4}) \tag{2.2}$$

(мы использовали (1.15) и (1.18)).

Составим величины

$$A_{\alpha\beta} = L_{\alpha\gamma}L_{\beta\nu}\bar{A}_{\gamma\nu}\,, \tag{2.3}$$

где $L_{\alpha\beta}$ — коэффициенты в преобразованиях Лоренца при переходе от сопутствующей системы отсчёта к лабораторной системе отсчёта:

$$r_\alpha = L_{\alpha\beta}\,\bar{r}_\beta\,, \quad \bar{r}_\alpha = L_{\beta\alpha}\,r_\beta\,, \quad L_{\alpha\gamma}L_{\beta\gamma} = L_{\gamma\alpha}L_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{2.4}$$

Подставляя в (2.3) $\bar{A}_{\alpha\beta}$ из (2.2), после простых вычислений получим

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}(L_{\alpha4}L_{\beta j} + L_{\alpha j}L_{\beta4})(\bar{H}_{j\gamma}\bar{F}_{\gamma4} - \bar{F}_{j\gamma}\bar{H}_{\gamma4})\,. \tag{2.5}$$

Используя (2.4) и учитывая антисимметричность 4-тензоров $F_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, приводим (2.5) к виду

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\,L_{\gamma4}\big[L_{\alpha4}(H_{\beta\nu}F_{\nu\gamma} - F_{\beta\nu}H_{\nu\gamma}) + \\ + L_{\beta4}(H_{\alpha\nu}F_{\nu\gamma} - F_{\alpha\nu}H_{\nu\gamma})\big]. \tag{2.6}$$

Преобразования Лоренца при произвольном направлении скорости $\mathbf{v}$ сопутствующей системы отсчёта относительно координатных осей имеют вид (см. [17, § 4])

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \gamma\mathbf{v}\bar{t} + \frac{\gamma - 1}{v^2}\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\bar{\mathbf{r}})\,, \\ t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{\mathbf{v}\bar{\mathbf{r}}}{c^2}\right), \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{2.7}$$

Отсюда и из (2.4) следует, что $L_{\alpha4}$ выражаются через 4-скорость u_α:

$$L_{\alpha4} = -\mathrm{i}u_\alpha\,, \qquad u_\alpha = \gamma\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\,,\,\mathrm{i}\right). \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.8) находим

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} = \frac{1}{8\pi}\,u_\gamma\big[u_\alpha(F_{\beta\nu}H_{\nu\gamma} - H_{\beta\nu}F_{\nu\gamma}) + \\ + u_\beta(F_{\alpha\nu}H_{\nu\gamma} - H_{\alpha\nu}F_{\nu\gamma})\big]\,. \tag{2.9}$$

Так как u_α — 4-вектор, а $F_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ — 4-тензоры, то $A_{\alpha\beta}$ (2.9) — симметричный тензор 2-го ранга, следовательно,

$$T^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(T^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta} + T^{\mathrm{M}}_{\beta\alpha}) + A_{\alpha\beta} \tag{2.10}$$

является симметричным тензором 2-го ранга. В сопутствующей системе отсчёта $\bar{T}^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}$ записывается в виде (1.19) или (2.1).

Таким образом, тензор энергии-импульса Абрагама $T^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}$ действительно является тензором, как и тензор энергии-импульса Минковского $T^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta}$, т.е. при любых преобразованиях из группы Лоренца они преобразуются как произведения двух 4-векторов.

В письме в редакцию *УФН* [24] (в ответ на нашу работу [16]) авторы пытаются разъяснить результат [15], касающийся тензора Абрагама. Авторы [24] приводят некие вычисления, которые, по их мнению, показывают, что "тензор Минковского в любой инерциальной системе координат одинаково зависит от компонент полей в этой же системе, а тензор Абрагама этому требованию не удовлетворяет". (Имеются в виду поля **E**, **H**, **D**, **B**.) На самом деле тензор Абрагама $T^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}$ (2.10) имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта (как и тензор Минковского (1.17)). Однако, в отличие от тензора Абрагама $T^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}$ (2.10), тензор Минковского $T^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta}$ (1.17) не содержит скорости среды, как, впрочем, не содержат скорости среды и уравнения Максвелла для четырёх полей **E**, **H**, **D**, **B** (1.5) или (1.16). В том, что тензор Минковского (1.17) не зависит от скорости среды, В.Г. Веселаго, по-видимому, и усматривает преимущество тензора $T^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta}$ перед тензором Абрагама $T^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}$.

Однако, следуя В. Паули [17, § 33], можно сказать, что уравнения Максвелла, как и тензоры энергии-импульса в любой форме, содержащие все четыре поля, **E**, **H**, **D**, **B**, "образуют лишь пустую схему, пока не введены соотношения, устанавливающие связь между **E**, **H** и **D**, **B**", т.е. пока не введены материальные уравнения, которые уже зависят от скорости среды (см. [11, § 76], [17, § 33]). После того как введены материальные уравнения, от скорости среды будут зависеть и уравнения Максвелла (только для двух полей **E** и **H**), и тензор энергии-импульса Минковского, как и тензор Абрагама.

Действительно важное отличие тензора Минковского от тензора Абрагама состоит в том, что $T^{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}$ симметричен, а тензор $T^{\mathrm{M}}_{\alpha\beta}$ несимметричен. Симметричность тензора энергии-импульса связана с законом сохранения

4-тензора момента импульса (см. [6, § 32]), поэтому несимметричность тензора Минковского является его существенным недостатком. В. Паули [17, § 35] считал, что макроскопический тензор энергии-импульса не может быть несимметричным, так как он получается в результате усреднения микроскопического тензора энергии-импульса, который является симметричным, а "при образовании среднего свойства симметрии тензора не теряются". Заметим также, что в соответствующем разделе *Электродинамики сплошных сред* [11, § 75] тензор Минковского (как альтернатива тензору Абрагама) вовсе не обсуждается, как мы полагаем, именно потому, что он несимметричен.

Относительно вычислений, приведённых в [24], заметим, что они могут быть корректными, если только должным образом дополнить постановку задачи. Авторы пишут: "Рассмотрим две системы координат: K и K′. Пусть K′ движется относительно K со скоростью v вдоль оси Ox". На самом деле эти инерциальные системы отсчёта — не произвольные: система K — это сопутствующая система отсчёта (относительно которой вещество покоится), а система K′ — лабораторная, так что скорость v отличается знаком от скорости вещества.

3. Сила, действующая на вещество в электромагнитном поле при отсутствии дисперсии

Второй результат работы [15] касается уравнения (1.14) (в [15] это уравнение (22)[6]) для изотропной негиротропной неподвижной среды при пренебрежении дисперсией ε и μ и в отсутствие сторонних зарядов ($\rho^{\text{ext}} = 0$, $\mathbf{j}^{\text{ext}} = 0$): "Если для тензора Минковского использование (22) не вызывало каких-либо дополнительных замечаний, то при использовании для определения сил тензора Абрагама оказывается необходимым дополнить равенство (22) так называемой силой Абрагама... *Невозможность прямого использования тензора Абрагама в форме* (22) *следует также из того, что тензор Абрагама не является релятивистски инвариантным*" (курсив наш. — *Авторы*). Отсутствие смысла в выделенном курсивом предложении мы отмечали в разделе 2. Доказательство же самого результата, как полагает автор [15], дано в работе [25], но в [25] этот результат отсутствует. Поэтому нам остаётся показать прямым расчётом, что же на самом деле следует из уравнения (1.14), если в него подставить тензор Минковского $T^{\text{M}}_{\alpha\beta}$ или тензор Абрагама $T^{\text{A}}_{\alpha\beta}$.

Сначала запишем уравнения (1.6), (1.7) для рассматриваемого здесь случая $\rho^{\text{ext}} = 0, \mathbf{j}^{\text{ext}} = 0$, учитывая, кроме того, что для покоящейся[7] среды $\partial\varepsilon/\partial t = \partial\mu/\partial t = 0$ и $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$:

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) + \operatorname{div}\mathbf{S}^{\text{P}} = 0\,, \tag{3.1}$$

$$-\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} + \boldsymbol{\sigma}'^{\text{M}} + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2\nabla\varepsilon + \mathbf{H}^2\nabla\mu) = 0\,, \tag{3.2}$$

где теперь

$$\sigma^{\text{M}}_{ij} = \sigma^{\text{M}}_{ji} = \frac{1}{4\pi}\left[(\varepsilon E_i E_j + \mu H_i H_j) - \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\delta_{ij}\right]. \tag{3.3}$$

При выборе тензора энергии-импульса в форме Минковского (1.17) или (1.18) уравнения (1.13) или (1.14) с $\mathbf{j}^{\text{ext}} = 0$, $\mathbf{f}^{\text{ext}} = 0$, $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ приводятся к уравнению (3.1) и уравнению

$$\mathbf{f}^{\text{M}} = -\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} + \boldsymbol{\sigma}'^{\text{M}}\,, \tag{3.4}$$

которое вместе с уравнением (3.2) определяет силу в подходе Минковского (см. [25, 26])

$$\mathbf{f}^{\text{M}} = -\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2\nabla\varepsilon + \mathbf{H}^2\nabla\mu)\,. \tag{3.5}$$

При выборе в (1.13) или (1.14) в качестве $T_{\alpha\beta}$ тензора Абрагама (1.19) получаем то же уравнение (3.1) и, вместо (3.4), уравнение

$$\mathbf{f}^{\text{A}} = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} + \boldsymbol{\sigma}'^{\text{M}}\,, \tag{3.6}$$

которое при учёте уравнения (3.2) определяет силу в подходе Абрагама (см. [25, 26])

$$\mathbf{f}^{\text{A}} = -\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2\nabla\varepsilon + \mathbf{H}^2\nabla\mu) + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{S}^{\text{P}}}{\partial t} = \mathbf{f}^{\text{M}} + \mathbf{f}_{\text{A}}\,, \tag{3.7}$$

отличающуюся от $\mathbf{f}^{\text{M}}$ наличием дополнительного слагаемого — так называемой силы Абрагама:

$$\mathbf{f}_{\text{A}} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,. \tag{3.8}$$

Таким образом, из одного и того же уравнения (1.14) без каких-либо предлагаемых в [15] добавлений получаются выражения для силы $\mathbf{f}^{\text{M}}$ (3.5) в подходе Минковского, когда плотность импульса поля принимается равной $\mathbf{g}^{\text{M}}$ (1.18), и для силы $\mathbf{f}^{\text{A}}$ (3.7) в подходе Абрагама, когда плотность импульса поля имеет вид $\mathbf{g}^{\text{A}}$ (1.19). Различие сил в обоих подходах определяется силой Абрагама (3.8).

В статическом пределе сила Абрагама (3.8) исчезает, и выражения для силы в обоих подходах совпадают друг с другом. В них, однако, не учтены (см. [11, §§ 15, 35]) так называемые стрикционные силы, полученные Гельмгольцем [27] (ссылка на работу Гельмгольца [27] дана в книге [28, с. 135]),

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{\text{H}} &= -\frac{1}{8\pi}(E^2\nabla\varepsilon + H^2\nabla\mu) + \mathbf{f}^{\text{str}}\,,\\ \mathbf{f}^{\text{str}} &= \frac{1}{8\pi}\nabla\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2\right),\end{aligned} \tag{3.9}$$

где ρ — плотность вещества. Для того чтобы учесть силу $\mathbf{f}^{\text{str}}$, в $T^{\text{M}}_{\alpha\beta}$ и $T^{\text{A}}_{\alpha\beta}$ добавляют (в случае неподвижной среды) тензор

$$\sigma^{\text{str}}_{ij} = \frac{1}{8\pi}\,\delta_{ij}\,\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}H^2\right). \tag{3.10}$$

Изменённые таким образом тензоры по-прежнему называют тензорами энергии-импульса Минковского и Абра-

[6] Как и в [25], мы используем мнимую временну́ю переменную; в [15] используется вещественная временна́я переменная ct, при этом следовало бы учитывать различие между ковариантными, контравариантными и смешанными компонентами тензоров.

[7] Далее мы рассматриваем только неподвижную среду и поэтому для упрощения записи формул не будем снабжать соответствующие величины чертой сверху, так что, например, вместо $\bar{\mathbf{E}}$ будем писать просто $\mathbf{E}$.

гама [25]. На наш взгляд, тензор энергии-импульса электромагнитного поля в неподвижной среде (при пренебрежении дисперсией) правильнее называть тензором Гельмгольца – Абрагама, $T^{\mathrm{HA}}_{\alpha\beta}$. Его компоненты, в соответствии с (1.10), определяются следующими формулами (см. [11, §§ 15, 35, 75]):

$$T^{\mathrm{HA}}_{ij} = \sigma^{\mathrm{H}}_{ij}\,, \qquad T^{\mathrm{HA}}_{j4} = T^{\mathrm{HA}}_{4j} = -\frac{\mathrm{i}}{c}\,S^{\mathrm{P}}_j\,, \tag{3.11}$$

$$T^{\mathrm{HA}}_{44} = w = \frac{1}{8\pi}\,(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\,,$$

$$\sigma^{\mathrm{H}}_{ij} = \sigma^{\mathrm{H}}_{ji} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\,E^2\delta_{ij}\right) + \frac{\mu}{4\pi}\left(H_iH_j - \frac{1}{2}\,H^2\delta_{ij}\right) + \sigma^{\mathrm{str}}_{ij}\,, \tag{3.12}$$

где $\sigma^{\mathrm{str}}_{ij}$ — тензор (3.10). Соответствующее выражение для силы имеет вид

$$\mathbf{f}^{\mathrm{HA}} = \mathbf{f}^{\mathrm{H}} + \mathbf{f}_{\mathrm{A}} \tag{3.13}$$

с $\mathbf{f}^{\mathrm{H}}$ из (3.9) и $\mathbf{f}_{\mathrm{A}}$ из (3.8).

Сила, действующая на единицу объёма среды в отсутствие поля, равна $-\nabla P_0$, где P_0 — давление в среде; соответствующий ей тензор напряжений равен $-P_0\delta_{ij}$ (см. [11, § 15]). Поэтому полный тензор напряжений в среде в присутствии электромагнитного поля

$$\sigma^{\mathrm{tot}}_{ij} = -P_0\delta_{ij} + \sigma^{\mathrm{H}}_{ij} \tag{3.14}$$

и полная сила, действующая на единицу объёма среды,

$$\mathbf{f}^{\mathrm{tot}} = -\nabla P_0 + \mathbf{f}^{\mathrm{HA}}\,, \tag{3.15}$$

где $P_0(\rho, T)$ — давление, которое было бы в среде в отсутствие электромагнитного поля при данных значениях плотности и температуры (см. [11, § 15]).

Заметим, что в окончательный ответ любой задачи тензор σ_{ij} может входить лишь вместе с $(-P_0\delta_{ij})$, а сила $\mathbf{f}$ соответственно — с $(-\nabla P_0)$, т.е. физический смысл имеют, разумеется, только полный тензор напряжений $\sigma^{\mathrm{tot}}_{ij}$ и полная сила $\mathbf{f}^{\mathrm{tot}}$.

4. Тензор Абрагама – Бриллюэна – Питаевского и тензор Полевого – Рытова

Далее автор [15] переходит к обсуждению тензора энергии-импульса электромагнитного поля при учёте дисперсии диэлектрической и магнитной проницаемостей. Как известно (см. [11, § 80]), в этом случае рассматривается квазимонохроматическое поле, представляющее собой совокупность монохроматических компонент с частотами в узком интервале $\delta\omega$ около некоторой средней частоты $\omega > 0$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,, \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)$ — медленно (по сравнению с $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$) изменяющиеся функции времени: если $\tau_0 \sim 1/(\delta\omega)$ — время, характеризующее $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)$, то параметр

$$\frac{1}{\omega\tau_0} \ll 1\,. \tag{4.2}$$

Так же записываются $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{D}_0(\mathbf{r}, t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\,\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\,. \tag{4.3}$$

Функции $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{B}_0$ связаны с функциями $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ материальными уравнениями, которые с точностью до членов первого порядка по параметру (4.2) представляются в виде (см. [11, § 102])

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \mathrm{i}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\,\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}\,, \qquad \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) = \mu(\omega)\,\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) + \mathrm{i}\,\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\,\frac{\partial\mathbf{H}_0}{\partial t}\,. \tag{4.4}$$

Для плотности энергии электромагнитного поля в веществе — компоненты T_{44} тензора энергии-импульса (в нулевом приближении по параметру (4.2)) — получается формула Бриллюэна (см. [11, § 80])[8]

$$w^{\mathrm{B}} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega}\langle E^2\rangle + \frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega}\langle H^2\rangle\right) = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega}|\mathbf{E}_0^2| + \frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega}|\mathbf{H}_0^2|\right]. \tag{4.5}$$

Автор [15, с. 693] утверждает: "...при этом обычно не возникает вопроса о том, что при наличии дисперсии и все остальные компоненты тензора энергии-импульса должны претерпеть какие-то изменения". Вопрос об остальных компонентах тензора энергии-импульса не только "возник", но и на него уже давно получены ответы (см. [11, §§ 75, 80, 81]):

$$w = w^{\mathrm{B}}, \quad \mathbf{S} = \langle\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\rangle\,, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}^{\mathrm{A}} = \frac{\langle\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\rangle}{c^2}\,, \quad \sigma^{\mathrm{tot}}_{ij} = -P_0\delta_{ij} + \sigma^{\mathrm{P}}_{ij}\,,$$

$$\sigma^{\mathrm{P}}_{ij} = \sigma^{\mathrm{P}}_{ji} = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon(\omega)\langle E_iE_j\rangle - \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \rho\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)\langle E^2\rangle\delta_{ij}\right] + \frac{1}{4\pi}\left[\mu(\omega)\langle H_iH_j\rangle - \frac{1}{2}\left(\mu - \rho\,\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)\langle H^2\rangle\delta_{ij}\right]; \tag{4.6}$$

тензор напряжений σ^{P}_{ij} получен Л.П. Питаевским [29] ещё в 1960 г. Замечательная особенность тензора Питаевского состоит в том, что, в отличие от энергии w^{B} (4.5) — и тоже в нулевом приближении по параметру (4.2), он не содержит производных $\partial\varepsilon/\partial\omega$ и $\partial\mu/\partial\omega$ и формально получается из тензора напряжений в отсутствие дисперсии (3.12) просто заменой

$$\varepsilon \to \varepsilon(\omega)\,, \qquad E_iE_j \to \langle E_iE_j\rangle\,, \qquad \mu \to \mu(\omega)\,, \qquad H_iH_j \to \langle H_iH_j\rangle\,. \tag{4.7}$$

Поэтому сила $\mathbf{f}$, с которой поле действует на вещество, включает в себя в качестве слагаемого силу $\mathbf{f}^{\mathrm{HA}}$ (3.13) с такой же заменой (4.7) и, соответственно, $\mathbf{S}^{\mathrm{P}} \to \langle\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\rangle$ (см. [11, § 81]). Учёт дисперсии приводит к некоторой дополнительной силе, которая для немагнитной среды ($\mu = 1$) исследовалась в работах Вашими и Карпмана [30] (см. также [11, § 81]) и Бараша и Карпмана [31]. Выражение для силы, связанной с дисперсией $\varepsilon(\omega)$, полученное в [31],

[8] Величины, усредняемые по периоду поля, мы заключаем в угловые скобки.

имеет вид

$$\mathbf{f}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{BK}} = \mathbf{f}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{WK}} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t}\,\nabla\right)\mathbf{E}_0\,, \tag{4.8}$$

где первое слагаемое совпадает с выражением, полученным ранее в [30],

$$\mathbf{f}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{WK}} = \frac{\omega}{8\pi c}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t}\times\mathbf{H}_0\right). \tag{4.9}$$

В нашей недавно опубликованной работе [32] получены новые результаты, подтверждающие справедливость записи тензора энергии-импульса в форме Абрагама – Бриллюэна – Питаевского (4.5), (4.6). В [32] решены две задачи: квантово-механическая задача о силе, действующей на атом в квазимонохроматическом поле (4.1), и классическая (в рамках ньютоновой механики) задача о силе, действующей в таком же поле на изотропный гармонический осциллятор. В обеих задачах сила даётся одной и той же формулой:

$$\mathbf{F}(\mathbf{R},t) = \frac{\alpha}{4}\,\nabla|\mathbf{E}_0|^2 + \frac{\alpha}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}_0^*\times\mathbf{H}_0) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{\omega}{c}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t}\times\mathbf{H}_0\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t}\,\nabla\right)\mathbf{E}_0\right], \tag{4.10}$$

где $\alpha(\omega)$ — электрическая поляризуемость атома или осциллятора. Можно полагать, что выражение (4.10) определяет усреднённую по периоду поля силу, действующую на любую нерелятивистскую частицу с пренебрежимо малой магнитной поляризуемостью $\beta(\omega)$.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости разреженного газа частиц представляются в виде (см. [11, §§ 11, 15])

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi n\,\alpha(\omega)\,, \qquad \mu(\omega) = 1 + 4\pi n\,\beta(\omega)\,, \tag{4.11}$$

где n — число частиц в единице объёма. Следовательно, сила, действующая на единицу объёма газа с постоянной плотностью ($\nabla n = 0$), может быть представлена как сумма силы Гельмгольца – Абрагама (3.13) с заменой (4.7) и силы (4.8) Бараша – Карпмана.

Автор [15] не использует тензор (4.6) и предлагает использовать "модифицированную форму тензора энергии-импульса, предложенную в своё время Рытовым и Полевым" [33]. Авторы [33] рассматривают волновой пакет в однородной неподвижной среде ($\partial\varepsilon/\partial t = \partial\mu/\partial t = 0$, $\nabla\varepsilon = \nabla\mu = 0$), который аппроксимируют квазимонохроматической плоской волной с функциями $\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r},t)$ в (4.1) в виде

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{00}(\mathbf{r},t)\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\,, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_{00}(\mathbf{r},t)\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\,, \tag{4.12}$$

где $\mathbf{E}_{00}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}_{00}(\mathbf{r},t)$ — медленно изменяющиеся (по сравнению с $\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})$) функции координат: если l_0 — расстояние, характеризующее $\mathbf{E}_{00}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}_{00}(\mathbf{r},t)$, то параметр

$$\frac{1}{kl_0} \sim \frac{c}{\omega l_0} \sim \frac{\lambda}{l_0} \ll 1\,, \tag{4.13}$$

где $\lambda \sim 1/k$ — длина волны.

В нулевом приближении по малым параметрам (4.2) и (4.13) уравнения Максвелла (1.5) при учёте материальных уравнений (4.4) определяют связь между амплитудами полей и дисперсионное соотношение (см. [11, § 83]):

$$\mathbf{H}_{00} = \frac{c}{\omega\mu(\omega)}\,\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{00}\,, \qquad \mathbf{E}_{00} = -\frac{c}{\omega\varepsilon(\omega)}\,\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{00}\,, \tag{4.14}$$

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)\,. \tag{4.15}$$

Из (4.15) следует, что при вещественных ε и μ вектор $\mathbf{k}$ может быть вещественным (тогда волна $\sim\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})$ не затухает), только если на данной частоте или $\varepsilon(\omega) > 0$ и $\mu(\omega) > 0$, или $\varepsilon(\omega) < 0$ и $\mu(\omega) < 0$ [4, 5, 9]. Если волна не затухает, то можно записать соотношения (4.14) в виде

$$\mathbf{H}_{00} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{l}\times\mathbf{E}_{00}\,, \qquad \mathbf{E}_{00} = \mp\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathbf{l}\times\mathbf{H}_{00}\,, \\ \mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}}{k}\,, \qquad k = \frac{n\omega}{c}\,, \qquad n = \sqrt{\varepsilon\mu}\,, \tag{4.16}$$

как и ранее (см. раздел 1), верхний (нижний) знак относится к случаю $\varepsilon, \mu > 0$ ($\varepsilon, \mu < 0$).

Для энергии (4.5) получаем (см. [11, § 83]):

$$w^{\mathrm{B}} = \frac{1}{16\pi\mu\omega}\frac{\partial\omega^2\varepsilon\mu}{\partial\omega}\,|\mathbf{E}_{00}|^2 = \frac{1}{16\pi\varepsilon\omega}\frac{\partial\omega^2\varepsilon\mu}{\partial\omega}\,|\mathbf{H}_{00}|^2\,, \tag{4.17}$$

а для вектора Умова – Пойнтинга находим

$$\langle\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\rangle = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{E}_{00}^*\times\mathbf{H}_{00} = \pm\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,|\mathbf{E}_{00}|^2\,\mathbf{l} = \\ = \pm\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,|\mathbf{H}_{00}|^2\,\mathbf{l}\,. \tag{4.18}$$

Выражение для групповой скорости волны получается из (4.15) в виде

$$\mathbf{v}_{\mathrm{gr}} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{c}{\partial(n\omega)/\partial\omega}\,\mathbf{l} = \frac{2\omega\varepsilon\mu}{\partial(\omega^2\varepsilon\mu)/\partial\omega}\,\mathbf{v}_{\mathrm{ph}} = \frac{1}{w^{\mathrm{B}}}\,\langle\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\rangle\,, \tag{4.19}$$

где $\mathbf{v}_{\mathrm{ph}}$ — фазовая скорость волны.

Так как $w^{\mathrm{B}} \geqslant 0$ (см. [11, § 80]), то из (4.17) следует, что при всех частотах ($\omega > 0$)

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\omega^2\varepsilon\mu}{\partial\omega} > 0\,. \tag{4.20}$$

Из (4.19) при учёте (4.20) получаются условия (1.4). Заметим, что диэлектрическая и магнитная проницаемости могут принимать отрицательные значения только при наличии дисперсии. Действительно, при пренебрежении дисперсией неравенство (4.20) приводится к виду $\mu > 0$ (и $\varepsilon > 0$, так как $\varepsilon\mu > 0$).

Тензор Полевого – Рытова [33] записывается как

$$T_{\alpha\beta}^{\mathrm{PR}} = -w\,\frac{c}{\omega}\sqrt{1 - \frac{v_{\mathrm{gr}}^2}{c^2}}\,k_\alpha u_{\mathrm{gr}\beta}\,, \tag{4.21}$$

где $k_\alpha = (\mathbf{k}, \mathrm{i}\omega/c)$ — 4-волновой вектор, $u_{\mathrm{gr}\alpha}$ — 4-групповая скорость волны, $w = w^{\mathrm{B}}$ — плотность энергии (4.17). Используя (1.10) и учитывая, что (см. (4.19)) $\langle\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\rangle = w^{\mathrm{B}}\mathbf{v}_{\mathrm{gr}}$, можно записать тензор (4.21) в следующем виде (это

сделано и в [33]):

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}} = -\frac{1}{\omega}\, k_i \langle S_j^{\mathrm{P}} \rangle = -g_i^{\mathrm{PR}} v_{\mathrm{gr}\,j}\,,$$
$$\mathbf{g}^{\mathrm{PR}} = \frac{1}{\omega}\, w^{\mathrm{B}} \mathbf{k}\,, \quad \mathbf{S}^{\mathrm{PR}} = \langle \mathbf{S}^{\mathrm{P}} \rangle = w^{\mathrm{B}} \mathbf{v}_{\mathrm{gr}}\,, \quad w^{\mathrm{PR}} = w^{\mathrm{B}}\,. \tag{4.22}$$

В такой форме (без введения 4-групповой скорости волны) эти результаты были даны ранее в работе С.М. Рытова [13].

Авторы [33] полагают, что их результаты (4.22) являются прямым следствием уравнений Максвелла. Для величин, квадратичных по полю, из уравнений Максвелла строго следуют только уравнения (1.6) и (1.7). В этих уравнениях нужно положить, как в [33],

$$\mathbf{j}^{\mathrm{ext}} = 0\,, \quad \mathbf{f}^{\mathrm{ext}} = 0\,, \quad \mathbf{v} = 0\,, \quad \rho^{\mathrm{ext}} = 0\,,$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0\,, \quad \nabla\varepsilon = \nabla\mu = 0\,,$$

а поля представить в виде (4.1), (4.3), (4.4) и (4.12). Уравнение (1.6) после усреднения по периоду поля приводится к виду (см. [11, § 80])

$$\frac{\partial w^{\mathrm{B}}}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \mathbf{S}^{\mathrm{P}} \rangle = 0\,. \tag{4.23}$$

В рассматриваемом объёме сторонние заряды отсутствуют, среда неподвижна и, следовательно, поле не совершает работы. Поэтому (см. (1.13)) — однозначно: w^{B} имеет смысл плотности энергии, а $\langle S^{\mathrm{P}} \rangle$ — плотности потока энергии. Следовательно, плотность энергии и плотность потока энергии в тензоре Полевого – Рытова (4.22) определены правильно — они совпадают с соответствующими выражениями в тензоре (4.6).

Теперь усредняем по периоду поля уравнение (1.7):

$$\langle \boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{M}} \rangle = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{D} \times \mathbf{B} \rangle + \mathbf{f}_{\mathrm{d}}\,, \tag{4.24}$$

где

$$f_{\mathrm{d}i} = \frac{1}{8\pi} \left\langle \left(\mathbf{D}\, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r_i} - \mathbf{E}\, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial r_i} \right) + \left(\mathbf{B}\, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r_i} - \mathbf{H}\, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial r_i} \right) \right\rangle \Bigg|_{\nabla\varepsilon = \nabla\mu = 0}\,. \tag{4.25}$$

Индекс d означает, что $\mathbf{f}_{\mathrm{d}} \neq 0$ только при учёте дисперсии.

Тензор σ_{ij}^{M} (см. (1.7)) после усреднения выражается через амплитуды $\mathbf{E}_{00}$, $\mathbf{H}_{00}$ и их производные $\partial \mathbf{E}_{00}/\partial t$, $\partial \mathbf{H}_{00}/\partial t$. В нулевом приближении по параметру (4.2) находим

$$\langle \sigma_{ij}^{\mathrm{M}} \rangle = \frac{1}{8\pi}\, \mathrm{Re} \left[\varepsilon(\omega) \left(E_{00i}^{*} E_{00j} - \frac{1}{2}\, |\mathbf{E}_{00}|^2 \delta_{ij} \right) + \right.$$
$$\left. + \mu(\omega) \left(H_{00i}^{*} H_{00j} - \frac{1}{2}\, |\mathbf{H}_{00}|^2 \delta_{ij} \right) \right]. \tag{4.26}$$

Амплитуду $\mathbf{H}_{00}$ в (4.26) выразим, согласно (4.16), через $\mathbf{E}_{00}$ и затем используем известную формулу (см. [6, § 6]), связывающую произведение двух единичных антисимметричных тензоров третьего ранга e_{ijk} с единичным тензором второго ранга δ_{ij}. В результате простых вычислений получим

$$\langle \sigma_{ij}^{\mathrm{M}} \rangle = -\frac{1}{8\pi}\, \varepsilon(\omega) |\mathbf{E}_{00}|^2 l_i l_j\,. \tag{4.27}$$

Учитывая (4.18), (4.16) и (4.22), равенство (4.27) можно также представить в виде

$$\langle \sigma_{ij}^{\mathrm{M}} \rangle = -\frac{1}{\omega}\, k_i \langle S_j^{\mathrm{P}} \rangle = \sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}\,, \tag{4.28}$$

т.е. тензор напряжений Полевого – Рытова совпадает с усреднённым по периоду волны тензором Минковского (1.7).

В том же приближении

$$\frac{1}{4\pi c} \langle \mathbf{D} \times \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{8\pi c}\, \varepsilon(\omega)\, \mu(\omega)\, \mathrm{Re}\, \mathbf{E}_{00}^{*} \times \mathbf{H}_{00} = \frac{1}{8\pi\omega}\, \mathbf{k} |\mathbf{E}_{00}|^2\,, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{16\pi}\, \mathbf{k} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}\, \frac{\partial |\mathbf{E}_{00}|^2}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial \omega}\, \frac{\partial |\mathbf{H}_{00}|^2}{\partial t} \right) = \frac{1}{16\pi\mu}\, \frac{\partial \varepsilon\mu}{\partial \omega}\, \mathbf{k}\, \frac{\partial |\mathbf{E}_{00}|^2}{\partial t}\,. \tag{4.30}$$

Учитывая (4.29), (4.30), (4.17) и (4.22), правую часть равенства (4.24) можно представить в виде:

$$\frac{1}{4\pi c}\, \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{D} \times \mathbf{B} \rangle + \mathbf{f}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{\omega}\, \frac{\partial w^{\mathrm{B}}}{\partial t}\, \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{g}^{\mathrm{PR}}}{\partial t}\,. \tag{4.31}$$

Из (4.28) и (4.31) следует, что равенство (4.24) принимает следующий вид:

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{PR}} = \frac{\partial \mathbf{g}^{\mathrm{PR}}}{\partial t}\,. \tag{4.32}$$

Заметим, что при пренебрежении дисперсией $\mathbf{v}_{\mathrm{gr}} = \mathbf{v}_{\mathrm{ph}}$ $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}} = \langle \mathbf{D} \times \mathbf{B} \rangle / (4\pi c)$, согласно (4.22), т.е. $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}}$ совпадает с плотностью импульса поля в форме Минковского $\mathbf{g}^{\mathrm{M}}$ (см. (1.18)). Заметим также, что уравнение (4.32) не является независимым: оно — следствие уравнения (4.23) и определений $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$ и $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}}$ в (4.22). Действительно, используя сначала первое равенство в (4.22), затем уравнение (4.23) и, наконец, определение $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}}$ в (4.22), получаем уравнение (4.32).

Таким образом, уравнения (4.23) и (4.32) — правильные, так как они действительно являются прямым следствием уравнений Максвелла и материальных уравнений для неподвижной среды. Остаётся выяснить, какой смысл имеют тензор $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$ и вектор $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}}$. Как отмечают авторы [33], уравнения (4.23) и (4.32) или уравнения $\partial T_{\alpha\beta}^{\mathrm{PR}}/\partial r_\beta = 0$ (в [33] это — уравнения (38)) "имеют вид уравнений непрерывности, в которых естественно считать билинейный по полю тензор $T_{\alpha\beta}^{\mathrm{PR}}$ тензором энергии-импульса системы (поле + среда)". Из (1.13) и (4.32) следует, что выбор $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$ и $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}}$ в качестве тензора напряжений и плотности импульса волны означает, что сила, с которой волна действует на среду, равна нулю, $\mathbf{f} = 0$. Но в неподвижной жидкости полная сила (см. (3.15)) $\mathbf{f}^{\mathrm{tot}} = -\nabla P_0 + \mathbf{f} = 0$, т.е. сила $\mathbf{f}$ должна компенсировать силу $-\nabla P_0$. Уравнение (4.32) можно записать и в другом виде (см. (4.31)):

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{PR}} = \frac{\partial \mathbf{g}^{\mathrm{M}}}{\partial t} + \mathbf{f}_{\mathrm{d}}\,. \tag{4.33}$$

При этом также "естественно считать" $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$ по-прежнему тензором напряжений, но плотностью импульса — плотность импульса поля в форме Минковского (см. (1.18)), тогда сила $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{d}}$. Учитывая, что $\partial(\mathbf{g}^{\mathrm{M}} - \mathbf{g}^{\mathrm{A}})/\partial t = \mathbf{f}_{\mathrm{A}}$, где $\mathbf{g}^{\mathrm{A}}$ — плотность импульса поля в форме Абрагама (4.6) и $\mathbf{f}_{\mathrm{A}}$ — сила Абрагама (см. (3.8)), уравнение (4.32) или (4.33)

можно записать, кроме того, в виде

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{PR}} = \frac{\partial \mathbf{g}^{\mathrm{A}}}{\partial t} + (\mathbf{f}_{\mathrm{A}} + \mathbf{f}_{\mathrm{d}}); \tag{4.34}$$

при этом можно было бы полагать, что $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$, $\mathbf{g}^{\mathrm{A}}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{A}} + \mathbf{f}_{\mathrm{d}}$ — соответственно тензор напряжений, плотность импульса волны и сила, с которой волна действует на среду. Наконец, прибавим к обеим частям уравнения (4.32) стрикционную силу $\mathbf{f}^{\mathrm{str}}$ (3.9), усреднённую по периоду поля. Учитывая, что согласно (4.6), (4.26) и (4.28)

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{P}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{PR}} + \langle \sigma_{ij}^{\mathrm{str}} \rangle\,, \tag{4.35}$$

получим уравнение

$$\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{P}} = \frac{\partial \mathbf{g}^{\mathrm{A}}}{\partial t} + (\mathbf{f}^{\mathrm{HA}} + \mathbf{f}_{\mathrm{d}})\,, \tag{4.36}$$

где $\mathbf{f}^{\mathrm{HA}}$ (см. (3.13)) — сумма усреднённых по периоду поля силы Абрагама (3.8) и силы Гельмгольца (3.9), которая в данном случае ($\nabla\varepsilon = \nabla\mu = 0$) сводится только к стрикционной силе $\mathbf{f}^{\mathrm{str}}$. Уравнения (4.32) Полевого–Рытова — правильные, но и уравнения (4.33), (4.34) и (4.36) тоже верны. Это означает, что из одних только уравнений Максвелла и материальных уравнений для неподвижной среды нельзя определить ни тензор напряжений, ни силу, действующую на среду (см., например, [25]), — необходимо рассматривать перемещение среды и связанное с ним изменение энергии (если процесс адиабатический) или свободной энергии (если процесс изотермический). Таким путём получаются и тензор Гельмгольца, и тензор Питаевского (см. [11, §§ 15, 75, 81], [29]).

В работе [33] отсутствует сравнение введённого авторами тензора $T_{\alpha\beta}^{\mathrm{PR}}$ (4.21), (4.22) с тензором энергии-импульса (4.6) (отсутствует даже ссылка на работу [29], как, впрочем, и на [25]). Как отмечалось, плотность энергии w^{PR} и плотность потока энергии $\mathbf{S}^{\mathrm{PR}}$ в тензоре Полевого–Рытова (4.22) совпадают с соответствующими выражениями в тензоре (4.6), а тензор $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$ (4.22), в отличие от тензора напряжений σ_{ij}^{P}, не содержит тензора стрикционных сил (см. (4.35)). Вектор $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}}$ в (4.22) тоже отличается от плотности импульса поля в (4.6):

$$\mathbf{g}^{\mathrm{PR}} = \pm \mathbf{g}^{\mathrm{A}} \varepsilon(\omega)\, \mu(\omega)\, \frac{v_{\mathrm{ph}}}{v_{\mathrm{gr}}}\,. \tag{4.37}$$

О векторе $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}}$ мы ничего больше сказать не можем. Что касается тензора $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$, то его физический смысл мы выясним в разделе 5. Мы покажем, что $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$ совпадает с зависящей от поля частью полного тензора напряжений $\sigma_{ij}^{\mathrm{tot}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{P}} - P_0\delta_{ij}$ (4.6) в среде, находящейся в условиях механического (и теплового) равновесия, если в этой среде распространяется одна квазимонохроматическая плоская волна. Напомним, что P_0 — это давление, которое было бы в среде в отсутствие поля при данных (т.е. уже при наличии поля) значениях плотности вещества и температуры (см. [11, § 15]). Ясно, что этот вывод не следует только из уравнений Максвелла и материальных уравнений, так как они не содержат давления P_0.

5. Световое давление на твёрдые тела

Рассмотрим твёрдое тело, полностью погружённое в жидкую среду в присутствии квазимонохроматического электромагнитного поля (4.1) (и при учёте силы тяжести); будем полагать, что тело удерживается в жидкости неподвижным сторонними (по отношению к жидкости) силами (эти силы могут быть связаны, например, с нитями, на которых подвешивается твёрдое тело). Сила $\mathbf{P}$, действующая на единицу площади поверхности неподвижного твёрдого тела, даётся плотностью потока импульса или тензором напряжений (см. [11, § 16]):

$$P_i = -\sigma_{ij}^{\mathrm{tot}} N_j\,, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к поверхности твёрдого тела, направленной в глубь тела; $\sigma_{ij}^{\mathrm{tot}}$ — тензор напряжений в форме Питаевского (4.6).

В [11, §§ 16, 35] получены формулы для полной силы и полного момента силы, с которыми статические поля в неподвижной жидкости (с постоянными температурой и плотностью) действуют на твёрдое тело. В эти формулы в качестве силы, действующей на единицу площади, входит

$$\begin{gathered} \tilde{P}_i = -\tilde{\sigma}_{ij} N_j\,, \\ \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left\{\varepsilon\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\,E^2\delta_{ij}\right) + \mu\left(H_i H_j - \frac{1}{2}\,H^2\delta_{ij}\right)\right\}. \end{gathered} \tag{5.2}$$

В разделе 4 мы обращали внимание на то, что тензор напряжений (4.6) формально получается из соответствующего тензора для статического поля (3.12), (3.10) подстановкой (4.7). Поэтому можно предполагать, что и выражения для силы и момента силы в переменном поле (и при учёте дисперсии) совпадают с соответствующими выражениями в статическом поле, если в $\tilde{\sigma}_{ij}$ (5.2) сделать ту же подстановку (4.7). При некоторых весьма общих условиях это предположение оказывается оправданным[9].

Полагаем, как и в [11, § 16], что жидкость находится в тепловом равновесии, отсюда

$$\begin{gathered} \nabla\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \nabla\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \nabla T = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \nabla\rho\,, \\ \nabla\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T \nabla\rho\,. \end{gathered} \tag{5.3}$$

При этом выражение для силы (3.9) принимает вид

$$\mathbf{f}^{\mathrm{H}} = \frac{\rho}{8\pi}\,\nabla\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\langle E^2\rangle + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}\langle H^2\rangle\right]. \tag{5.4}$$

Мы отмечали в разделе 4, что выражение для силы $\mathbf{f}_{\mathrm{d}}$, обусловленной учётом дисперсии, получено пока лишь для сред с $\mu = 1$ [11, § 81], [30–32] или для произвольных сред, но для одной квазимонохроматической плоской волны (см. (4.30)). Можно полагать, что в общем случае сила $\mathbf{f}_{\mathrm{d}}$ (как и сила Абрагама $\mathbf{f}_{\mathrm{A}}$ (3.8)) по порядку величины равна $|E_0|^2/(c\tau_0)$. Если поле (4.1) таково, что $c\tau_0 \gg l_0$, где l_0 — расстояние, характеризующее функции $|\mathbf{E}_0|$ и $|\mathbf{H}_0|$, то силой Абрагама $\mathbf{f}_{\mathrm{A}}$ и силой $\mathbf{f}_{\mathrm{d}}$ можно пренебречь по сравнению с силой $\mathbf{f}^{\mathrm{H}}$ (5.4) и считать (см. (3.13) и (3.15)), что

$$\mathbf{f}^{\mathrm{tot}} = -\nabla P_0 + \mathbf{f}^{\mathrm{H}} + \rho\mathbf{g}\,, \tag{5.5}$$

где учтена, кроме того, сила тяжести.

Полагаем далее, как и в [11, §§ 15, 16], что жидкость в электромагнитном поле находится и в механическом равновесии, т.е. $\mathbf{f}^{\mathrm{tot}} = 0$. Тогда из (5.5) и (5.4) получаем

[9] Это предположение было высказано Л.П. Питаевским.

уравнение для P_0:

$$\nabla P_0 = \rho\nabla\left\{\mathbf{g}\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\langle E^2\rangle + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}\langle H^2\rangle\right]\right\}. \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) легко решается (см. [11, § 15]) в случае несжимаемой жидкости ($\nabla\rho = 0$):

$$P_0(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) + \frac{\rho}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\langle E^2\rangle + \left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\langle H^2\rangle\right], \tag{5.7}$$

$$p(\mathbf{r}) = p_0 + \rho\mathbf{g}\mathbf{r}, \tag{5.8}$$

$p(\mathbf{r})$ — давление в жидкости в отсутствие электромагнитного поля, $p_0 = p(0)$.

Для среды другого типа — достаточно разреженного газа — диэлектрическая и магнитная проницаемости даются формулами (4.11). Учитывая уравнение состояния — уравнение Клапейрона $P_0 = nT$ (постоянную Больцмана полагаем равной 1) — приводим уравнение (5.6) (с $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ из (4.11)) к следующему виду:

$$T\nabla n = n\nabla\left\{m\mathbf{g}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\left[\alpha(\omega)\langle E^2\rangle + \beta(\omega)\langle H^2\rangle\right]\right\}, \tag{5.9}$$

где m — масса молекулы. Изменение плотности газа в поле, как видно из (5.9), пропорционально квадрату поля. Чтобы не выйти за рамки линейной электродинамики ($\mathbf{D} \sim \mathbf{E}, \mathbf{B} \sim \mathbf{H}$), в (4.11) и соответственно в тех слагаемых в (5.9), которые содержат $\langle E^2\rangle$ и $\langle H^2\rangle$, нужно заменить плотность n плотностью n_0 в отсутствие поля (см. [11, § 15]), которая связана с давлением p в отсутствие поля уравнением $p = n_0 T$. После этого получаем

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= n_0(\mathbf{r})\left[1 + \frac{\alpha(\omega)\langle E^2\rangle + \beta(\omega)\langle H^2\rangle}{2T}\right], \\ n_0(\mathbf{r}) &= n_0(0)\exp\frac{m\mathbf{g}\mathbf{r}}{T}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Для давления $P_0 = nT$ получается то же выражение (5.7), что и в случае несжимаемой жидкости, только теперь формула (5.8) для давления в отсутствие поля заменяется формулой

$$p(\mathbf{r}) = n_0 T = p_0\exp\frac{m\mathbf{g}\mathbf{r}}{T}, \qquad p_0 = n_0(0)T. \tag{5.11}$$

Подставляя P_0 из (5.7) в σ_{ij}^{tot} (4.6), приводим тензор напряжений к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\text{tot}} &= -p(\mathbf{r})\delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}, \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\varepsilon(\omega)\left[\langle E_i E_j\rangle - \frac{1}{2}\langle E^2\rangle\delta_{ij}\right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu(\omega)\left[\langle H_i H_j\rangle - \frac{1}{2}\langle H^2\rangle\delta_{ij}\right]\right\} \end{aligned} \tag{5.12}$$

с тензором $\tilde{\sigma}_{ij}$, действительно получающимся из тензора (5.2) заменой (4.7). Первое слагаемое в σ_{ij}^{tot} (5.12) даёт вклад в силу P_i (5.1), равный $p(\mathbf{r})N_i$, что после интегрирования по всей поверхности твёрдого тела приводит, как и должно быть, к архимедовой силе ($-\mathbf{g}M$), где $M = \int_V \rho_0(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V$ — масса жидкости (газа) в объёме твёрдого тела. Заметим, что тензор $\tilde{\sigma}_{ij}$, который совпадает с тензором $\langle\sigma_{ij}^{\text{M}}\rangle$ — тензором Минковского (1.7), усреднённым по периоду поля (4.1), может быть получен из тензора σ_{ij}^{P} Питаевского (4.6), если в σ_{ij}^{P} опустить стрикционные слагаемые $\langle\sigma_{ij}^{\text{str}}\rangle$ (3.10): $\tilde{\sigma}_{ij} = \langle\sigma_{ij}^{\text{M}}\rangle$. Отсюда и из (4.28) следует, что для одной квазимонохроматической плоской волны $\tilde{\sigma}_{ij}$ совпадает с тензором σ_{ij}^{PR} Полевого – Рытова (см. (4.22)). Этот результат приведён в конце раздела 4.

В качестве простейшего примера рассмотрим случай, когда линейно поляризованная электромагнитная волна падает нормально на плоскую поверхность твёрдого тела. Оси координат выберем так, как в разделе 1 (ось z направим по нормали в глубь тела), тогда сила (см. (5.2))

$$\tilde{P}_i = -\tilde{\sigma}_{iz}. \tag{5.13}$$

Под полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в (5.12) нужно понимать, разумеется, напряжённости полного поля в жидкости вблизи стенки — падающей и отражённой волн. Для единичных векторов $\mathbf{l}_0$ и $\mathbf{l}_1$ падающей и отражённой волн имеем (см. (4.16) и (4.18)): $l_{0i} = \pm\delta_{iz}$, $l_{1i} = \mp\delta_{iz}$, а для амплитуд падающей и отражённой волн —

$$\begin{aligned} E_{00i}^{(0)} &= E_{00}^{(0)}\delta_{ix}, \qquad H_{00i}^{(0)} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_{00}^{(0)}\delta_{iy}, \\ E_{00i}^{(1)} &= rE_{00}^{(0)}\delta_{ix}, \qquad H_{00i}^{(1)} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,rE_{00}^{(0)}\delta_{iy}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где r — коэффициент отражения по амплитуде. Подставляя эти выражения в (5.12) и (5.13), после простых вычислений находим

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}\delta_{iz}, \qquad \tilde{P} = \frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi}(1 + R)\left|E_{00}^{(0)}\right|^2, \tag{5.15}$$

где $R = |r|^2$ — коэффициент отражения по мощности.

Силе (5.15) можно придать другой вид, если ввести плотность потока энергии $\langle S_z^{\text{P}}\rangle$ (см. (4.18)) и фазовую скорость v_{ph} падающей волны и затем соответствующую компоненту тензора Полевого – Рытова (4.22):

$$\tilde{P} = \pm(1 + R)\frac{\langle S_z^{\text{P}}\rangle}{v_{\text{ph}}} = -(1 + R)\sigma_{zz}^{\text{PR}}. \tag{5.16}$$

Из (5.15), (5.16) видно, что знак силы $\tilde{P}$ определяется знаком $\varepsilon(\omega)$: если $\varepsilon(\omega) > 0$ (и $\mu(\omega) > 0$), т.е. групповая скорость волны положительна, то $\tilde{P} > 0$ — давление на тело. Если $\varepsilon(\omega) < 0$ (и $\mu(\omega) < 0$), т.е. групповая скорость волны отрицательна, то $\tilde{P} < 0$ — притяжение. Как мы отмечали в разделе 1, на эту особенность волны с отрицательной групповой скоростью впервые указал В.Г. Веселаго [12].

В [12] рассматривается волна, падающая нормально на идеально отражающее тело. Автор исходит из следующих положений: 1) направление силы, с которой падающая и отражённая волны действуют на тело, совпадает с направлением импульса падающей волны; 2) импульс (точнее, плотность импульса) волны равен вектору $\mathbf{g}^{\text{PR}}$ в тензоре (4.22). В тензоре (4.22) всегда $\mathbf{g}^{\text{PR}} \uparrow\uparrow \mathbf{k}$, поэтому если групповая скорость волны положительна, то $\mathbf{g}^{\text{PR}} \uparrow\uparrow \mathbf{S}^{\text{PR}}$ и имеет место "световое давление", а если групповая скорость волны отрицательна, то $\mathbf{g}^{\text{PR}} \uparrow\downarrow \mathbf{S}^{\text{PR}}$ и "световое давление" заменяется "световым притяжением"[10]. Оба исходных положения ошибочны: сила определяется не импульсом, а его изменением в

[10] Авторы [33] этот случай исключают, полагая, что групповая скорость волны "в изотропной среде направлена по волновому вектору" [33, с. 552]. При этом они ссылаются на первое издание книги *Электродинамика сплошных сред* (см. также [11, § 84]), не учитывая, что при доказательстве этого результата в [11] рассматриваются только немагнитные среды ($\mu = 1$).

единицу времени, или потоком импульса (или отличающимся от него знаком тензором напряжений), и плотность импульса поля — это не $\mathbf{g}^{\mathrm{PR}}$, а $\mathbf{g}^{\mathrm{A}}$ (см. (4.6) и (4.37)). Однако предсказываемый в [12] знак силы — правильный (см. (5.16) с $R = 1$).

В работе [15] В.Г. Веселаго рассматривает случай нормального падения волны на тело, полностью поглощающее излучение. В этом случае автор отказывается от обоих положений, которые он использовал в предыдущей работе [12]. Он соглашается с тем, что сила определяется не импульсом, а плотностью потока импульса. Плотность потока импульса теперь уже одной (только падающей) волны автор записывает без какого-либо обоснования в виде отношения плотности потока энергии к фазовой скорости волны, по-видимому, не обращая внимания на то, что это выражение совпадает с компонентой $(-\sigma_{zz}^{\mathrm{PR}})$ тензора Полевого – Рытова (см. (5.16)), который он обсуждает в конце статьи [15].

6. Заключение

Подводя итог изложенному выше, можно сделать общий вывод: большая часть результатов работы [15], касающихся тензора энергии-импульса электромагнитного поля в веществе, является ошибочной.

1. Вопреки утверждениям автора работы [15], тензор энергии-импульса в форме Абрагама на самом деле является тензором, т.е. при всех преобразованиях Лоренца преобразуется как произведение двух 4-векторов. Тензор Минковского, в отличие от тензора Абрагама, не зависит от скорости среды, но только до тех пор, пока не вводятся материальные уравнения — после введения материальных уравнений тензор Минковского тоже становится зависящим от скорости среды. С другой стороны, несимметричность тензора Минковского следует рассматривать как его существенный недостаток. В недавно опубликованной в *УФН* статье [34] также обсуждается вопрос о тензоре энергии-импульса электромагнитного поля в среде. Автор [34] полагает, что, по крайней мере для некоторых случаев, им "доказана необходимость использования формы Минковского для плотности импульса в среде". Имея в виду статью [15], автор [34, с. 637] пишет: "В недавней публикации показана релятивистская ковариантность тензора энергии-импульса Минковского, что ещё раз свидетельствует в его пользу". По поводу статьи [34] ограничимся здесь только двумя замечаниями: во-первых, тензор Минковского записан самим Минковским в такой форме (см. (1.17)), из которой ковариантность тензора *очевидна* (в буквальном смысле этого слова), во-вторых, тензор в форме Абрагама тоже записывается в явно ковариантном виде (см. (2.10)).

2. Выражения для силы в обоих подходах (и Минковского, и Абрагама) получаются из одного и того же уравнения, эквивалентного закону сохранения импульса. Поскольку тензоры отличаются друг от друга, то и соответствующие выражения для силы отличаются друг от друга слагаемым, которое принято называть силой Абрагама [11, § 75] (см. (3.8)). В тензоре Абрагама (как и в тензоре Минковского) не учитываются стрикционные силы; правильным тензором энергии-импульса электромагнитного поля в изотропной неподвижной среде при пренебрежении дисперсией является тензор Гельмгольца – Абрагама (3.10) – (3.15) [11, §§ 15, 35, 75].

3. Тензор энергии-импульса (квазимонохроматического) электромагнитного поля в неподвижной среде при учёте дисперсии $T_{\alpha\beta}$, который автор [15] не обсуждает, существует уже полвека: его компонента T_{44} — это энергия w^{B}, определяемая по формуле Бриллюэна [11, § 80]; компоненты $T_{4j} = T_{j4}$ пропорциональны усреднённому по периоду поля вектору Умова – Пойнтинга $\langle S_j^{\mathrm{P}} \rangle$, и компоненты T_{ij} образуют тензор σ_{ij}^{P} Питаевского [11, § 81], [29] (см. (4.6)). Связанная с учётом дисперсии сила, с которой действует на единицу объёма вещества (с $\mu = 1$) квазимонохроматическая плоская волна, определяется формулой (4.9), полученной Вашими и Карпманом в [30] (см. также [11, § 81]). При пренебрежении дисперсией тензор (4.6) переходит в тензор (3.11), (3.12).

4. Тензор $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$ (4.22) — это зависящая от поля часть полного тензора напряжений $\sigma_{ij}^{\mathrm{tot}}$ в форме Питаевского (4.6) в среде, находящейся в тепловом и механическом равновесии ($T = \mathrm{const}$, $\mathbf{f}^{\mathrm{tot}} = 0$), в которой распространяется квазимонохроматическая плоская волна.

5. Квазимонохроматическая плоская волна при нормальном падении на неподвижное твёрдое тело действует на него с силой (в расчёте на единицу площади), которая выражается через тензор напряжений $\sigma_{ij}^{\mathrm{PR}}$ (см. (5.16)) при любом коэффициенте отражения (не только при отсутствии отражения, как в [15]).

Мы не можем, наконец, не затронуть вопрос о самой возможности существования волн с отрицательной групповой скоростью (по-прежнему имеются в виду изотропные негиротропные среды). Мы теперь, как и ранее в [7], полагаем, что выполнение условий Сивухина – Пафомова (1.4) для отрицательной групповой скорости волны "было бы обязано почти невероятной случайности" по следующей простой причине. Области частот, в которых $\varepsilon(\omega) < 0$, находятся вблизи тех собственных частот ω_0 вещества, которым соответствуют электрические дипольные переходы, причём $\omega > \omega_0$ (см. [11, § 84]), но эти переходы не дают вклада в $\mu(\omega)$, так что при тех частотах, при которых $\varepsilon(\omega) < 0$, магнитная проницаемость $\mu(\omega) \approx 1$. В весьма интересной, хотя и небесспорной, работе [8] содержится даже более сильное утверждение: "За прошедшие с тех пор более чем 50 лет положение дел не изменилось и, уверен, не изменится никогда — в оптической области спектра существование непрерывных однородных сред с $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$ невозможно". (Автор отсчитывает здесь время от года публикации статьи Д.В. Сивухина [9].) Следует, однако, иметь в виду, что в [8] (вслед за [12, 35]) принимается, что "...в однородной изотропной среде в отсутствие поглощения и усиления поля причиной противоположности направлений $\mathbf{k}$ и $\langle \mathbf{S}^{\mathrm{P}} \rangle$ для однородных волн может быть только отрицательность ε и μ". На самом же деле условия Сивухина – Пафомова (1.4) являются только достаточными, но не необходимыми для отрицательности групповой скорости волны [7, 36, 37]. Диэлектрическая и магнитная проницаемости изотропной негиротропной среды являются, строго говоря, функциями не только частоты, но и абсолютной величины волнового вектора (см. [11, § 103], [38, § 2]): $\varepsilon = \varepsilon(\omega, k)$, $\mu = \mu(\omega, k)$. Даже если в большой области частот зависимостью ε от k можно пренебречь, то при частотах ω, достаточно близких к собственным частотам среды ω_0 (как раз такие частоты нас и интересуют в данном случае), эта зависимость становится существенной и её необходимо учитывать. Условия, определяющие знак групповой скорости вол-

ны, приведены в [36]; через диэлектрическую и магнитную проницаемости они записываются как

$$\varepsilon\left(\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial k^2}-1\right)<0\Rightarrow \mathbf{v}_{\rm gr}\uparrow\uparrow\mathbf{v}_{\rm ph}\,,$$
$$\varepsilon\left(\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial k^2}-1\right)>0\Rightarrow \mathbf{v}_{\rm gr}\uparrow\downarrow\mathbf{v}_{\rm ph}\,, \tag{6.1}$$

при этом, разумеется, должно выполняться и условие $\varepsilon\mu>0$. Если пренебречь зависимостью ε и μ от k, то условия (6.1) приводятся, как и должно быть, к условиям (1.4). Но, согласно (6.1), волна может иметь отрицательную групповую скорость и при положительных ε и μ. В частности, если положить, как обычно, для оптической области спектра $\mu=1$ (при этом, разумеется, нужно полагать $\varepsilon>0$), то условие отрицательности групповой скорости примет вид

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k^2}>1\,. \tag{6.2}$$

Заметим, что условие (6.2) прямо следует из известного выражения для плотности потока энергии квазимонохроматической плоской поперечной волны (см. [11, § 103]):

$$\langle\mathbf{S}^{\rm P}\rangle=\frac{c^2}{8\pi\omega}\,|\mathbf{E}_{00}|^2\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k^2}\right)\mathbf{k}\,. \tag{6.3}$$

В работе [36] показано, что условие (6.2) может выполняться в одноатомном газе в достаточно узких областях частот ω, с длинноволновой стороны примыкающих к частотам ω_0 электрических дипольных переходов.

Авторы выражают глубокую благодарность Л.П. Питаевскому за многочисленные обсуждения и полезные советы.

Список литературы

1. Мандельштам Л И *ЖЭТФ* **15** 475 (1945)
2. Мандельштам Л И *Полное собрание трудов* Т. 2 (М.: Изд-во АН СССР, 1947)
3. Мандельштам Л И *Полное собрание трудов* Т. 5 (М.: Изд-во АН СССР, 1950)
4. Пафомов В Б *ЖЭТФ* **33** 1074 (1957) [Pafomov V B *Sov. Phys. JETP* **6** 806 (1958)]
5. Пафомов В Б *ЖЭТФ* **36** 1853 (1959) [Pafomov V B *Sov. Phys. JETP* **9** 1321 (1959)]
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
7. Макаров В П, Рухадзе А А *ЖЭТФ* **130** 409 (2006) [Makarov V P, Rukhadze A A *JETP* **103** 354 (2006)]
8. Раутиан С Г *УФН* **178** 1017 (2008) [Rautian S G *Phys. Usp.* **51** 981 (2008)]
9. Сивухин Д В *Оптика и спектроскопия* **3** 308 (1957)
10. Сивухин Д В *Общий курс физики* Т. 4 *Оптика* (М.: Наука, 1985)
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
12. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967) [Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)]
13. Рытов С М *ЖЭТФ* **17** 930 (1947)
14. Xi S et al. *Phys. Rev. Lett.* **103** 194801 (2009)
15. Веселаго В Г *УФН* **179** 689 (2009) [Veselago V G *Phys. Usp.* **52** 649 (2009)]
16. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **179** 995 (2009) [Makarov V P, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **52** 937 (2009)]
17. Pauli W *Relativitätstheorie* (Leipzig: Teubner, 1921) [*Theory of Relativity* (New York: Pergamon Press, 1958); Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)]
18. Minkowski H *Göttingen Nachr.* 53 (1908)
19. Minkowski H *Math. Ann.* **68** 472 (1910)
20. Abraham M *Palermo Rend.* **28** 1 (1909)
21. Abraham M *Palermo Rend.* **30** 33 (1910)
22. Grammel R *Ann. Physik* **346** 570 (1913)
23. Leonhardt U *Phys. Rev. A* **73** 032108 (2006)
24. Веселаго В Г, Щавлев В В *УФН* **180** 331 (2010) [Veselago V G, Shchavlev V V *Phys. Usp.* **53** 317 (2010)]
25. Гинзбург В Л, Угаров В А *УФН* **118** 175 (1976) [Ginzburg V L, Ugarov V A *Sov. Phys. Usp.* **19** 94 (1976)]
26. Brevik I *Phys. Rep.* **52** 133 (1979)
27. Helmholtz H *Ann. Physik* **249** 385 (1881)
28. Stratton J A *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill, 1941) [Стрэттон Дж А *Теория электромагнетизма* (М.-Л.: Гостехиздат, 1948)]
29. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **39** 1450 (1960) [Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **12** 1008 (1961)]
30. Вашими Х, Карпман В И *ЖЭТФ* **71** 1010 (1976) [Washimi H, Karpman V I *Sov. Phys. JETP* **44** 528 (1976)]
31. Бараш Ю С, Карпман В И *ЖЭТФ* **85** 1962 (1983) [Barash Yu S, Karpman V I *Sov. Phys. JETP* **58** 1139 (1983)]
32. Макаров В П, Рухадзе А А *ЖЭТФ* **138** 1011 (2010) [Makarov V P, Rukhadze A A *JETP* **111** 891 (2010)]
33. Полевой В Г, Рытов С М *УФН* **125** 549 (1978) [Polevoi V G, Rytov S M *Sov. Phys. Usp.* **21** 630 (1978)]
34. Давидович М В *УФН* **180** 623 (2010) [Davidovich M V *Phys. Usp.* **53** 595 (2010)]
35. Веселаго В Г *УФН* **173** 790 (2003) [Veselago V G *Phys. Usp.* **46** 764 (2003)]
36. Макаров В П, Рухадзе А А *ЖЭТФ* **125** 345 (2004) [Makarov V P, Rukhadze A A *JETP* **98** 305 (2004)]
37. Агранович В М, Гартштейн Ю Н *УФН* **176** 1051 (2006) [Agranovich V M, Gartstein Yu N *Phys. Usp.* **49** 1029 (2006)]
38. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Госатомиздат, 1961)

Negative group velocity electromagnetic waves and the energy–momentum tensor

V.P. Makarov, A.A. Rukhadze. *A.M. Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova 38, 119991 Moscow, Russian Federation*
Tel. +7 (499) 503 83 94, +7 (499) 135 02 47. E-mail: vpmac@ran.gpi.ru, rukh@fpl.gpi.ru

The results of V.G. Veselago (*Usp. Fiz. Nauk* **179** 689 (2009) [*Phys. Usp.* **52** 649 (2009)]) on the electromagnetic (EM) energy–momentum tensor in a medium are analyzed. It is shown that Veselago's statements on the Abraham tensor are wrong (this is not actually a tensor and the Abraham force was introduced into the theory as an artificial auxiliary devise). In discussing the EM energy-momentum tensor in a dispersive medium, it seems to have escaped the author's attention that the problem was resolved a long time ago: the electromagnetic energy–momentum tensor for a dispersive isotropic medium at rest is a symmetric 4-tensor which includes the Brillouin energy density, the energy flux density (Umov–Poynting vector), the momentum density (the Umov–Poynting vector divided by c^2) and the Pitaevskii tension tensor. For a mechanically and thermally equilibrium medium, it is shown that the spatial components of the Polevoi–Rytov tensor which is discussed in the analyzed paper cannot be interpreted as the field-dependent part of the Pitaevskii total tension tensor unless for quasimonochromatic plane wave propagation. It is also shown that for arbitrary (not necessarily zero) reflection, the force an EM wave in an isotropic medium exerts on a solid can be expressed in terms of an appropriate component of the Polevoi–Rytov's tension tensor.

PACS numbers: **03.30.+p**, 03.50.De, **41.20.−q**
Bibliography — 38 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (12) 1357–1368 (2011)

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201112n.1357
Received 22 March 2010, revised 29 September 2011
Physics – Uspekhi **54** (12) (2011)