

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Об описании бесстолкновительной квантовой плазмы

С.В. Владимиров, Ю.О. Тыщецкий

Плазма считается квантовой, если квантовая природа составляющих её частиц оказывает существенное влияние на её макроскопические свойства. Для ответа на вопрос о том, когда важны коллективные квантовые эффекты в плазме, необходимо их соответствующее описание. Рассмотрены наиболее общеприменимые методы микроскопического описания бесстолкновительной квантовой плазмы, а также связанные с ними предположения и ограничения. В частности, подробно проанализировано гидродинамическое описание квантовой плазмы и исследованы кинетические особенности аналитических свойств диэлектрической функции линейного отклика квантовой плазмы. Отмечены наиболее важные, с точки зрения авторов, возникающие уже в линейном приближении фундаментальные проблемы, которые требуют дальнейшего исследования.

PACS numbers: 05.30.Fk, 52.25.-b, 52.35.-g

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201112g.1313

Содержание

1. Введение (1313).
 2. Основные методы микроскопического описания квантовой плазмы (1314).
 - 2.1. Бесстолкновительные кинетические модели квантовой плазмы с электростатическим и электромагнитным взаимодействиями частиц.
 - 2.2. Многопоточная модель.
 - 2.3. Модель квантовой гидродинамики.
 3. О пределах применимости уравнений квантовой гидродинамики (1318).
 4. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной квантовой плазмы (1321).
 5. Квантовые кинетические эффекты и аналитические свойства линейного продольного отклика квантовой плазмы (1324).
 6. Заключение (1327).
- Список литературы (1327).

1. Введение

Основная часть видимого вещества Вселенной находится в плазменном состоянии — состоянии газа, в котором значительная часть атомов и молекул ионизована. Характерной чертой плазменного состояния является

наличие существенных коллективных процессов, связанных с электромагнитным взаимодействием свободных заряженных частиц вещества.

Поскольку плазма состоит из частиц, подчиняющихся в общем случае законам квантовой механики, наиболее полное её описание должно основываться на квантово-механическом подходе к описанию системы взаимодействующих частиц. Однако такой общий квантово-механический подход оправдан далеко не всегда, поскольку для описания многих плазменных явлений часто оказывается достаточным рассматривать плазму как систему модельных классических частиц, полностью игнорируя их квантовую природу. Плазму следует считать квантовой лишь тогда, когда квантовая природа составляющих её частиц оказывает существенное влияние на её макроскопические свойства. Это имеет место, например, при больших плотностях n или низких температурах T наиболее лёгких частиц плазмы (обычно электронов и позитронов/дырок), когда характерная длина волны де Бройля этих частиц, $\lambda_B \sim \hbar/mv_T$ (где \hbar — приведённая постоянная Планка, m — масса, $v_T = \sqrt{T/m}$ — тепловая скорость частиц; здесь и далее мы полагаем, что постоянная Больцмана $k_B = 1$, так что T имеет размерность энергии), становится порядка среднего межчастичного расстояния $n^{-1/3}$ или превышает его.

Квантовой плазмой являются газ электронов проводимости в нормальных металлах (заряд которого компенсирован ионной решёткой), газ электронов и дырок в полупроводниках, особенно в современных миниатюрных полупроводниковых структурах, в которых характерные пространственные масштабы примесных вариаций сравнимы с характерной длиной волны де Бройля электронов и дырок, а также состояния вещества, возникающие при большом сжатии, например, в сценарии быстрого поджига (fast ignition scenario) в процессе инерционного термоядерного синтеза, когда дейтерий-тритиевая смесь сжимается мощными лазерными пуч-

С.В. Владимиров. School of Physics, The University of Sydney, NSW 2006, Australia. E-mail: sergey.vladimirov@sydney.edu.au
Объединённый институт высоких температур РАН, ул. Ижорская 13/2, 125412 Москва, Российская Федерация
Ю.О. Тыщецкий. School of Physics, The University of Sydney, NSW 2006, Australia. E-mail: yury.tyshetsky@sydney.edu.au
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, физико-технический факультет, пл. Свободы 4, 61022 Харьков, Украина

Статья поступила 21 декабря 2010 г.,
после доработки 23 мая 2011 г.

ками до плотностей, многократно превышающих плотность жидкого водорода [1–3]. Вещество в недрах плотных астрономических объектов также является квантовой плазмой.

К середине XX в. было достигнуто понимание наиболее важных свойств квантовой плазмы и заложены основы её описания. В последнее десятилетие интерес к квантовой плазме значительно возрос благодаря технологическому прогрессу, позволившему изучать и непосредственно использовать квантовые плазменные эффекты. Например, миниатюризация металлических и полупроводниковых структур до наноразмеров (нанопроволоки, тонкие металлические плёнки, квантовые точки) приводит к тому, что эффект квантового туннелирования носителей заряда оказывает значительное влияние на коллективные плазменные процессы в таких структурах. Впечатляющие достижения в получении ультракоротких лазерных импульсов (порядка 1 ас) в принципе дают возможность экспериментально изучать динамику носителей заряда на временах порядка периода плазменных осцилляций (порядка 1 фс в металлических структурах и 1 пс в полупроводниковых). Более того, использование ультракоротких лазерных импульсов с петаваттной мощностью в рентгеновском диапазоне для сжатия вещества должно позволить, в принципе, получать и изучать квантовую плазму большой плотности. Недавние спектральные измерения рентгеновского томсоновского рассеяния [4, 5] позволяют точно определить электронную функцию распределения, температуру и т.д. в режиме высокой плотности (*warm dense matter regime*) [6]. Этот метод открывает возможности экспериментального исследования вырожденной квантовой плазмы, как сильносвязанной (неидеальной), так и слабосвязанной (идеальной). Всё это требует адекватного теоретического описания квантовой плазмы в соответствующих режимах.

Можно выделить два подхода к описанию квантовой плазмы как системы большого числа взаимодействующих квантовых частиц, в зависимости от силы их взаимодействия. Первый из них, феноменологический подход, развит Ландау [7, 8] в его теории ферми-жидкости для системы фермионов, взаимодействие которых между собой не обязано быть слабым (в чём заключается её отличие от ферми-газа). Важным в теории Ландау является то, что оказывается возможным описать свойства ферми-жидкости посредством относительно слабо взаимодействующих квазичастиц — возбуждённых состояний электронов над уровнем Ферми. Второй подход, развитый для описания газа слабо взаимодействующих фермионов исходя из "первых принципов" квантовомеханического описания системы взаимодействующих частиц, основывается на методах статистической теории.

В этой заметке мы будем рассматривать модели идеальной (почти идеальной) бесстолкновительной квантовой плазмы, основанные на втором подходе. Мы ограничимся главным образом рассмотрением нерелятивистского случая, в котором характерная скорость частиц мала по сравнению со скоростью света в вакууме.

В основу микроскопического описания "из первых принципов" квантовой нерелятивистской плазмы можно положить как представление Шрёдингера, в котором операторы не зависят от времени, а временная зависимость физических величин системы определяется временной зависимостью волновой функции состояния

системы или её матрицы плотности, так и представление Гейзенберга, в котором зависимость от времени перенесена с волновых функций на операторы. Большинство микроскопических моделей квантовой плазмы [9] используют шрёдингеровское представление, в котором динамика квантовой плазмы описывается либо системой уравнений Шрёдингера для волновых функций отдельных частиц (так называемая многопотоковая (*multistream*) модель [10]), либо уравнением для матрицы плотности [11], либо уравнением для функции Вигнера — матрицы плотности смешанного представления [12–14] (называемой также квантовой функцией распределения), вводимой из-за её идеологического сходства с классической функцией распределения, либо наиболее популярной в последнее время системой так называемых квантовых гидродинамических уравнений [15, 16]. Во всех этих моделях, естественно, делаются упрощающие предположения, приводящие к неизбежным ограничениям их области применимости, о которых следует помнить при анализе результатов, получаемых с их помощью. Однако области применимости получаемых в рамках той или иной модели результатов не всегда указываются явным образом (особенно это относится к широко используемой модели квантовой гидродинамики [16–19]), что может привести к некорректной интерпретации результатов. На это недавно было указано, например, Мелроузом и Муштаком [20], а также Кузелевым и Рухадзе [21].

В то же время в связи со значительным увеличением числа работ по квантовой плазме недостаток подробного рассмотрения основных предположений и связанных с ними ограничений наиболее часто используемых моделей квантовой плазмы становится очевидным. Поэтому представляется полезным подробно проанализировать методы микроскопического описания квантовой идеальной плазмы, а также связанные с ними предположения и ограничения. Кроме того, важной проблемой является макроскопическая наблюдаемость квантовых явлений в плазме; эта проблема связана и с вопросом о том, когда (и какие именно) плазменные квантовые процессы важны. Соответствующие выводы при этом опираются на выбранный способ описания. Мы подробно проанализируем гидродинамическое описание квантовой плазмы, а также исследуем кинетические особенности аналитических свойств диэлектрической функции линейного отклика квантовой плазмы. При этом мы выделим наиболее важные с нашей точки зрения фундаментальные проблемы линейных откликов квантовой плазмы, требующие дальнейшего исследования.

2. Основные методы микроскопического описания квантовой плазмы

Как и в случае классической плазмы, полное микроскопическое описание квантовой плазмы как системы многих взаимодействующих частиц — задача практически безнадежная, причём не только из-за невозможности решить уравнение Шрёдингера для N -частичной волновой функции системы, но и ввиду принципиального отсутствия такой волновой функции для макроскопического тела, сколь угодно слабо взаимодействующего с окружающей средой [22]. Даже если бы подобная

функция существовала, то для её построения необходимо было бы иметь полный набор данных о системе (т.е. полный набор начальных условий для уравнения Шрёдингера), что практически неосуществимо для систем с большим числом частиц. Однако в столь детальном описании нет необходимости, достаточно описать систему статистически посредством её матрицы плотности [11], с помощью которой могут быть вычислены средние значения любых макроскопических параметров системы, а также вероятности различных значений этих величин, что в конечном итоге и является целью описания. При этом весьма наглядным, позволяющим достичь наиболее полной аналогии с описанием классической плазмы посредством функции распределения в фазовом пространстве координат и импульсов, оказывается предложенный Вигнером [14] подход на основе так называемого смешанного представления матрицы плотности, в котором вводится квантовая функция распределения, называемая также функцией Вигнера [12, 13, 23]. Функция Вигнера $f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ определяется через матрицу плотности $\rho_N(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t)$ системы в координатном представлении следующим образом [13, 23–25]:

$$f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3N}} \int d\tau \exp(-i\tau\mathbf{p}) \rho_N\left(\mathbf{q} - \frac{1}{2}\hbar\tau, \mathbf{q} + \frac{1}{2}\hbar\tau, t\right), \quad (1)$$

где N — число частиц в системе, \mathbf{q} и \mathbf{p} — $3N$ -мерные векторы, обозначающие совокупность всех координат и импульсов частиц системы. В пределе $\hbar \rightarrow 0$ функция $f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ переходит в N -частичную классическую функцию распределения, поэтому описание плазмы посредством функции Вигнера охватывает и классическую, и квантовую плазму.

Определяющее эволюцию функции Вигнера уравнение, которое может быть получено из уравнения для матрицы плотности в координатном представлении, имеет вид [13, 23, 25]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = & \\ = \frac{1}{(2\pi)^{6N}} \frac{i}{\hbar} \int \dots \int d\tau d\mathbf{k} d\boldsymbol{\eta} d\mathbf{r} \exp\left\{i[\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{q}) + \tau(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})]\right\} \times & \\ \times f_N(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}, t) \left[H\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\hbar\tau, \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}, t\right) - \right. & \\ \left. - H\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\hbar\tau, \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}, t\right) \right], & \quad (2) \end{aligned}$$

где $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ — гамильтониан системы, содержащий точные (неусреднённые) поля, посредством которых взаимодействуют частицы системы.

Функция $f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ зависит от огромного $(6N + 1)$ числа переменных, поэтому описание плазмы посредством N -частичной функции Вигнера f_N — всё ещё слишком сложная задача. Для большинства практических задач достаточно знать одночастичную функцию распределения, зависящую от координат и импульсов одной частицы и независящую от координат и импульсов всех остальных частиц системы:

$$f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) = \int f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{q}_2 \dots d\mathbf{q}_N d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_N.$$

Уравнение для $f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t)$ можно получить из (2), используя метод Боголюбова [26], обобщённый для квантовых систем [23]. Это уравнение содержит двухчастичную квантовую функцию распределения $f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$, уравнение для которой в свою очередь содержит трёхчастичную функцию распределения и т.д. Получившаяся цепочка уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона эквивалентна исходному уравнению (2) для f_N , и её общее решение так же сложно, как и решение (2).

Однако задачу нахождения одночастичной функции распределения $f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t)$ можно существенно упростить и свести к решению единственного (приближённого) уравнения для f_1 , если, во-первых, пренебречь корреляцией частиц, обусловленной их тождественностью (т.е. пренебречь обменным взаимодействием частиц, так что для невзаимодействующих частиц $f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, t)$), а во-вторых, пренебречь двухчастичной корреляционной функцией $g_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$, определяемой равенством

$$f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, t) + g_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t), \quad (3)$$

характеризующей статистическую связь частиц 1 и 2 за счёт их взаимодействия. Функция g_2 определяет величину интеграла столкновений в уравнении для f_1 , и пренебрежение ею соответствует приближению бесстолкновительной плазмы.

В итоге уравнение для одночастичной функции распределения (одночастичной функции Вигнера) $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ принимает вид уравнения (2) с $N = 1$, в котором гамильтониан H теперь содержит не точные, а усреднённые по одночастичной функции распределения самосогласованные поля [23]. Это приближение, в котором квантовая плазма рассматривается как совокупность квантовых частиц, взаимодействующих лишь посредством усреднённых коллективных полей, и которое аналогично приближению самосогласованного поля в классической плазме, предложенному Власовым [27], называется приближением самосогласованного поля Хартри [28]. Учёт корреляции частиц, обусловленной их тождественностью (т.е. учёт обменного взаимодействия), приводит к появлению дополнительного члена в уравнении для f_1 [13]; соответствующее приближение называется приближением самосогласованного поля Хартри – Фока [29].

Одним из важных параметров, определяющих свойства плазмы, является параметр неидеальности (или параметр связи — coupling parameter) — отношение характерной потенциальной энергии взаимодействия частиц плазмы к их характерной кинетической энергии. Для квантовой плазмы с вырожденными электронами [9] параметр неидеальности

$$\Gamma_q = \frac{U_{\text{int}}}{\varepsilon_F} = \frac{e^2 n^{1/3}}{\varepsilon_F} \sim \left(\frac{\hbar\omega_p}{\varepsilon_F}\right)^2 \ll 1,$$

где $\varepsilon_F = (\hbar^2/2m)(3\pi^2 n)^{2/3}$ — энергия Ферми, $\omega_p = (4\pi e^2 n/m)^{1/2}$ — плазменная частота, e , m и n — соответственно заряд, масса и концентрация электронов или дырок (позитронов). При малых значениях параметра неидеальности, $\Gamma_q \ll 1$ (т.е. когда плазму можно рассматривать как почти идеальный газ), роль столкно-

вений частиц плазмы мала по сравнению с ролью коллективных процессов, определяемых самосогласованными полями в плазме, поэтому только в этом случае плазму можно приближённо рассматривать как бесстолкновительную, по крайней мере при описании коллективных процессов, характерные времена которых малы по сравнению с характерным временем между столкновениями [16].

Таким образом, приближение бесстолкновительной плазмы (в котором пренебрегается интегралом столкновений в уравнении для f_1) оправдано лишь в случае слабосвязанной (идеальной) плазмы, $\Gamma_q \ll 1$. Заметим, что в плазме с $\Gamma_q \gtrsim 1$ корреляции частиц играют существенную роль и ими пренебречь нельзя — такую плазму называют сильносвязанной (strongly coupled). Интересно, что параметр неидеальности квантовой плазмы Γ_q уменьшается с возрастанием плотности как $\Gamma_q \propto n^{-1/3}$, т.е. квантовая плазма по мере увеличения плотности становится всё более идеальной и бесстолкновительной, в отличие от классической плазмы, которая с возрастанием плотности становится всё более сильно связанной.

Как отмечалось, чаще всего используются [9] следующие (как правило, бесстолкновительные, т.е. формально справедливые только в предположении идеальности плазмы $\Gamma_q \ll 1$) модели квантовой плазмы: квантовый аналог многопоточковой модели [10], кинетическая модель на основе уравнения для одночастичной квантовой функции распределения Вигнера [12, 24] и, наконец, гидродинамическая модель квантовой плазмы [15–19]. Все эти модели так или иначе основываются на уравнениях Шрёдингера для волновых функций частиц плазмы и поэтому являются нерелятивистскими и тем самым пригодными лишь для описания нерелятивистской плазмы, а также, строго говоря, лишь волновых процессов с малыми фазовыми скоростями, $\omega/k \ll c$ [20]. Отметим также более общие релятивистские модели "квантовой плазмодинамики" [30]; мы ожидаем, что в будущем релятивистские модели будут более широко использоваться, в том числе благодаря логически последовательному описанию как квантовых частиц, так и квантованных полей. Здесь, однако, мы рассмотрим лишь класс нерелятивистских моделей, поскольку именно они наиболее часто используются в последнее время, в основном по причине их относительной простоты.

Необходимо сделать следующее замечание относительно применимости рассматриваемых здесь бесстолкновительных моделей плазмы. На первый взгляд может показаться, что бесстолкновительные модели плазмы неспособны описывать необратимые процессы, такие как, например, релаксация неравновесной плазмы. Тем не менее релаксационные процессы в плазме могут протекать за время, малое по сравнению с характерным временем между столкновениями, т.е. в условиях применимости бесстолкновительных моделей [31]. Ключевую роль в таких релаксационных процессах, приводящую к их необратимости, играют не столкновения, а коллективные явления в плазме.

Особую роль при этом играют резонансы между коллективными плазменными волнами и частицами плазмы, приводящие в случае равновесных распределений частиц к затуханию Ландау плазменных волн, а для неравновесных распределений — к неустойчивостям соответствующих волн. В результате взаимодействия

волн и резонансных с ними частиц плазмы последние могут стать захваченными в поле соответствующей волны и фазовое пространство координат и импульсов частиц разделяется на области, содержащие в себе траектории захваченных и свободных частиц, отделённые друг от друга сепаратрисами. В результате развития динамического хаоса в области каждой сепаратрисы фазовые траектории захваченных и свободных частиц перепутываются и образуется стохастический слой, окружающий соответствующую сепаратрису [32]. При наличии в плазме нескольких волн (волнового пакета) сепаратрисы, соответствующие резонансам с этими волнами, и, следовательно, их стохастические слои могут перекрываться между собой, и тогда образуется более широкая область стохастического движения, в которой фазы волн являются случайными, а движение частиц плазмы приобретает характер диффузии (в пространстве импульсов). Хорошим примером такого процесса является процесс квазилинейной релаксации пучковой неустойчивости плазмы, корректно описываемый в рамках бесстолкновительной кинетической модели [33, 34]. В этом процессе роль столкновений играет взаимодействие резонансных частиц с коллективными возбуждениями плазмы, приводящее к диффузии частиц в пространстве импульсов и, как следствие, к необратимому процессу релаксации неустойчивости [31, 33].

Таким образом, бесстолкновительные модели применимы для описания процессов, в том числе необратимых процессов релаксации, характерные времена протекания которых малы по сравнению с характерным временем между столкновениями частиц плазмы.

2.1. Бесстолкновительные кинетические модели квантовой плазмы с электростатическим и электромагнитным взаимодействиями частиц

Бесстолкновительные кинетические модели квантовой плазмы, учитывающие электростатическое и электромагнитное взаимодействия частиц, основываются на уравнении для одночастичной функции Вигнера $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ в приближении самосогласованного поля, в котором самосогласованные электростатическое или электромагнитное поля описываются уравнением Пуассона или уравнениями Максвелла соответственно. Одночастичная функция Вигнера $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ представляет собой квази-плотность вероятности распределения частиц квантовой плазмы в фазовом пространстве координат и импульсов (квазиплотность — поскольку функция Вигнера может принимать отрицательные значения, что связано с некоммутативностью операторов координаты и импульса квантовой частицы, т.е. с принципом неопределённости) [12]. Функция Вигнера f_1 нормирована таким образом, что

$$n(\mathbf{q}, t) = \int f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (4)$$

где $n(\mathbf{q}, t)$ — концентрация частиц плазмы. Для системы заряженных частиц, взаимодействующих посредством самосогласованного электростатического поля с потенциалом $\phi(\mathbf{q})$, гамильтониан системы имеет вид $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}^2/2m + e\phi(\mathbf{q}, t)$, где \mathbf{p} — кинетический импульс частицы (в данном случае совпадающий с обобщённым импульсом \mathbf{P}), и уравнение для $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ (в дальнейшем мы будем опускать индекс l у функции Вигнера, подразумевая под f одночастичную функцию

Вигнера) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{ie}{\hbar} \int d\tau d\boldsymbol{\eta} \exp [i\tau(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{p})] \times \\ \times f(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t) \left[\phi\left(\mathbf{q} - \frac{1}{2} \hbar\boldsymbol{\tau}, t\right) - \phi\left(\mathbf{q} + \frac{1}{2} \hbar\boldsymbol{\tau}, t\right) \right]. \quad (5)$$

Квантовое кинетическое уравнение Вигнера (5) совместно с уравнением Пуассона для электростатического потенциала $\phi(\mathbf{q}, t)$, в котором плотность частиц определяется уравнением (4), описывают квантовую плазму с электростатическим взаимодействием и образуют систему уравнений, иногда называемую в литературе системой Вигнера – Пуассона. В предельном случае классической плазмы, когда квантовые эффекты малы (с формальной точки зрения, $\hbar \rightarrow 0$), уравнение Вигнера (5) переходит в соответствующее уравнение Власова [27] для классической плазмы с электростатическим взаимодействием.

Для системы бесспиновых заряженных частиц с электромагнитным взаимодействием гамильтониан принимает вид

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \frac{[\mathbf{P} - (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)]^2}{2m} + e\phi(\mathbf{q}, t),$$

где \mathbf{P} — канонический импульс частицы, $\phi(\mathbf{q}, t)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Уравнение для одночастичной функции Вигнера (уравнение (2) при $N = 1$) в этом случае путём замены $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)/c$, где \mathbf{p} — кинетический импульс частицы, приводится к виду

$$\frac{\partial f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{mc}\right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{m} \int d\tau d\boldsymbol{\xi} \exp [i\tau(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{p})] \times \\ \times \left\{ -i \frac{e}{c} f(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) \left[\left(\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) (\boldsymbol{\xi} \mathbf{A}(\mathbf{q})) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\hbar} \boldsymbol{\xi} \left(\mathbf{A}\left(\mathbf{q} + \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) - \mathbf{A}\left(\mathbf{q} - \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{iem}{\hbar} \left[\phi\left(\mathbf{q} - \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) - \phi\left(\mathbf{q} + \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \right] f(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) + \right. \\ \left. + iem \left(\tau \frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right) f(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) - \frac{e}{2c} \left(\frac{\partial f(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{q}} + \right. \right. \\ \left. \left. + f(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \left[2\mathbf{A}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}\left(\mathbf{q} - \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) - \mathbf{A}\left(\mathbf{q} + \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \right] - \right. \\ \left. - i \frac{e^2}{2c^2} f(\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) \left[2\mathbf{A}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}\left(\mathbf{q} - \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) - \mathbf{A}\left(\mathbf{q} + \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial(\tau \mathbf{A}(\mathbf{q}))}{\partial \mathbf{q}} + \frac{1}{\hbar} \left[\mathbf{A}\left(\mathbf{q} - \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) - \mathbf{A}\left(\mathbf{q} + \frac{\hbar\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \right] \right) \right\} \quad (6)$$

(заметим, что в соответствующем уравнении (30) работы [24] есть опечатки в знаках), где $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\phi$ и $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ — самосогласованные электрическое и магнитное поля соответственно. (Правая часть уравнения (6) может быть записана в более компактном и удобном для вычислений виде (см. работу [35]).) Кинетическое уравнение Вигнера (6) совместно с уравнениями Максвелла для потенциалов ϕ и \mathbf{A} самосогласованного электромагнитного поля и соответствующим условием калибровки векторного потенциала \mathbf{A} (например, $\nabla \mathbf{A} = 0$) описы-

вают квантовую плазму с электромагнитным взаимодействием и образуют систему уравнений, иногда называемую системой Вигнера – Максвелла. В предельном случае $\hbar \rightarrow 0$ правая часть (6) исчезает и уравнение Вигнера преобразуется в соответствующее уравнение Власова для классической плазмы с электромагнитным взаимодействием частиц.

Если кинетическая функция распределения f_1 известна, то, вычисляя её моменты, можно определить макроскопические характеристики плазмы (плотность, скорость потока импульса и соответствующую плотность электрического тока, тензор давления и т.д.) и найти линейный и нелинейный отклики плазмы на электромагнитные поля, что часто и является конечной целью описания плазмы. Возникающие при этом сингулярности вследствие вклада в отклики резонансных с волнами частиц плазмы устраняются с помощью учёта принципа причинности и соответствующего ему правила интегрирования Ландау (см. подробнее об этом в разделе 4, сноски 3).

Основные предположения бесстолкновительных кинетических моделей на основе системы уравнений Вигнера – Пуассона или Вигнера – Максвелла следующие.

1. Плазма идеальна,

$$\Gamma_q = \frac{U_{\text{int}}}{\varepsilon_F} = \frac{e^2 n^{1/3}}{\varepsilon_F} \sim \left(\frac{\hbar\omega_p}{\varepsilon_F} \right)^2 \ll 1.$$

Заметим, что для электронного газа в металлах это условие не выполняется, $\Gamma_q \sim 1$, так что бесстолкновительные кинетические модели, строго говоря, неприменимы к металлам.

2. Частицы взаимодействуют только посредством усреднённых классических коллективных полей, удовлетворяющих уравнению Пуассона или уравнениям Максвелла (приближение самосогласованного поля).

3. Пренебрегается столкновениями частиц (модели бесстолкновительны) и корреляцией частиц вследствие их жестокости (обменные взаимодействия).

4. Как правило, не учитывается спин частиц. Вообще говоря, поправки, связанные со спином частиц, можно учесть в нерелятивистском приближении, например, вводя функцию распределения спина частиц и записывая соответствующее уравнение для этой функции, аналогичное уравнению Вигнера для f_1 (как это было проделано, например, Силиным и Рухадзе [36]).

5. Используется нерелятивистское приближение (см. в разделе 4 замечание после уравнения (24)).

2.2. Многопоточковая модель

Многопоточковая модель (multistream) строится на основе приближения самосогласованного поля Хартри, при этом плазма рассматривается как совокупность "холодных пучков", состоящих из частиц с одинаковыми импульсами (см. также раздел 4, в котором с помощью этой модели получен тензор диэлектрической проницаемости квантовой плазмы). Для каждой из этих групп частиц записываются линеаризованные уравнения "холодной гидродинамики" с самосогласованными полями, находится соответствующая плотность тока этой группы и, таким образом, в линейном приближении вычисляется тензор диэлектрической проницаемости группы частиц. Суммируя затем вклады всех групп частиц с соответствующими "весовыми функциями", т.е. усредняя по равновесной функции распределения

частиц плазмы $f_0(\mathbf{p})$, получаем тензор диэлектрической проницаемости всей плазмы. Указанная процедура эквивалентна процедуре вычисления тензора диэлектрической проницаемости непосредственно из квантового кинетического уравнения для функции Вигнера в приближении самосогласованного поля. При этом вклад группы резонансных с коллективными возбуждениями плазмы частиц в диэлектрическую проницаемость (отклик) плазмы приводит, как и в кинетических моделях, к проблеме сингулярности при вычислении суммы (в пределе — интеграла) вкладов всех групп частиц плазмы в отклик. Эта проблема также решается посредством учёта принципа причинности возбуждений плазмы и применением соответствующего ему правила интегрирования Ландау (см. подробнее об этом в разделе 4, сноска 3).

Основные предположения многопоточковой модели те же, что и моделей на основе бесстолкновительного квантового кинетического уравнения (см. раздел 2.1).

2.3. Модель квантовой гидродинамики

Модель квантовой гидродинамики, описанная ещё в работе [15], строится аналогично многопоточковой модели (заметим, что первая также может быть выведена и из кинетического уравнения для одночастичной функции Вигнера [16]): волновые функции частиц представляются в виде [37] $\psi_\alpha(\mathbf{r}, t) = a_\alpha(\mathbf{r}, t) \exp(iS_\alpha(\mathbf{r}, t)/\hbar)$, где $a_\alpha(\mathbf{r}, t)$ и $S_\alpha(\mathbf{r}, t)$ — действительные функции пространства и времени, а плотность n_α и скорость \mathbf{v}_α частиц группы α определяются как $n_\alpha = |\psi_\alpha(\mathbf{r}, t)|^2 = a_\alpha^2(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}_\alpha = \nabla S_\alpha(\mathbf{r}, t)/m$. Затем вводятся макроскопические плотность $n(\mathbf{r}, t) = \langle n_\alpha \rangle$ и скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$ плазмы, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю частиц, и для них записываются первые два уравнения гидродинамики: уравнение непрерывности и уравнение движения, причём последнее содержит два члена, связанных с давлением, а именно [16]: классическое давление, определяемое как $P^{\text{cl}} = mn \langle v_\alpha^2 \rangle - \langle v_\alpha \rangle^2$, и квантовое давление

$$P^{\text{q}} = \frac{\hbar^2}{2m} \langle (\nabla a_\alpha)^2 - a_\alpha (\nabla^2 a_\alpha) \rangle.$$

Для замыкания этой системы вводятся следующие *два предположения* относительно P^{q} и P^{cl} .

1. Считается, что волновые функции электронов плазмы имеют одинаковую амплитуду, $a_\alpha(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t)$, которая, тем не менее, может изменяться в пространстве и времени, и различаются только фазами $S_\alpha(\mathbf{r}, t)$. Это предположение согласуется с предположением о некоординированности частиц плазмы: действительно, пространственное распределение каждой частицы, определяемое амплитудой $a_\alpha(\mathbf{r}, t)$, не зависит от пространственных распределений остальных частиц. Из равенства $a_\alpha(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t)$ следует, что плотность пространственного распределения каждой частицы $n_\alpha = |a_\alpha|^2$ пропорциональна плотности n системы частиц, т.е. каждая частица системы одинаковым образом "размазана" по всей системе, иначе говоря, размер волнового пакета, представляющего частицу, равен размеру всей системы. (Заметим, что данное предположение не накладывает ограничений на пространственные и временные масштабы описываемых волновых явлений в системе.) Это предположение даёт следующую связь между P^{q} и n [16]:

$$P^{\text{q}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[(\nabla \sqrt{n})^2 - \sqrt{n} (\nabla^2 \sqrt{n}) \right]; \quad (7)$$

2. Предполагается наличие некоего уравнения состояния, связывающего "классическое" давление квантового газа $P^{\text{cl}} \equiv mn \langle v_\alpha^2 \rangle - \langle v_\alpha \rangle^2$ с макроскопической плотностью газа $n(\mathbf{r}, t) \equiv \langle n_\alpha \rangle$.

Задание уравнения состояния для классического давления P^{cl} накладывает определённые ограничения на применимость полученной гидродинамической модели (см. более подробное обсуждение в разделе 3). Разумеется, при построении гидродинамической модели квантовой плазмы, кроме вышеуказанных предположений 1 и 2, привлекаются также все предположения, характерные для вигнеровской модели.

Итак, выпишем вместе все *основные предположения гидродинамической модели квантовой плазмы*.

1. Плазма идеальна,

$$\Gamma_{\text{q}} = \frac{U_{\text{int}}}{\varepsilon_{\text{F}}} = \frac{e^2 n^{1/3}}{\varepsilon_{\text{F}}} \sim \left(\frac{\hbar \omega_{\text{p}}}{\varepsilon_{\text{F}}} \right)^2 \ll 1.$$

Как отмечалось, для электронного газа в металлах это условие не выполняется ($\Gamma_{\text{q}} \sim 1$).

2. Частицы взаимодействуют только посредством усреднённых классических коллективных полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла.

3. Пренебрегается столкновениями частиц (модель бесстолкновительна).

4. Не учитываются обменные взаимодействия.

5. Используется нерелятивистское приближение (см. замечание в разделе 4 после уравнения (24)).

6. Считается, что волновые функции электронов плазмы $\psi_\alpha(\mathbf{r}, t) = a_\alpha(\mathbf{r}, t) \exp(iS_\alpha(\mathbf{r}, t)/\hbar)$ имеют одинаковую амплитуду, $a_\alpha(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t)$, которая, тем не менее, может изменяться в пространстве и времени, и различаются только фазами $S_\alpha(\mathbf{r}, t)$. Это устанавливает связь между P^{q} и n : "уравнение состояния" (7) для квантового давления. Заметим, что данное предположение накладывает ограничение на размер волновых пакетов всех частиц (равный, согласно предположению, размеру всей системы), но никак не ограничивает частоты и длины волн, адекватно описываемые в рамках такой модели.

7. Предполагается, что имеется некое уравнение состояния, связывающее "классическое" давление квантового газа $P^{\text{cl}} \equiv mn \langle v_\alpha^2 \rangle - \langle v_\alpha \rangle^2$ с макроскопической плотностью газа $n(\mathbf{r}, t) \equiv \langle n_\alpha \rangle$. Обычно постулируется адиабатическое уравнение состояния $P^{\text{cl}} = P_0^{\text{cl}} (n/n_0)^3$ с $P_0^{\text{cl}} = n_0 \varepsilon_{\text{F}}$ для вырожденных электронов (при $T_e \ll \varepsilon_{\text{F}}$, где T_e — температура электронов в энергетических единицах) или $P_0^{\text{cl}} = n_0 T_e$ для невырожденных электронов (при $T_e \gg \varepsilon_{\text{F}}$), из которого следует ограничение на длины волн, корректно описываемых в рамках такой гидродинамической модели: $k\lambda_{\text{F}} \ll 1$ для вырожденных электронов, где $\lambda_{\text{F}} = v_{\text{F}}/\sqrt{3}\omega_{\text{p}}$ — длина Ферми–Томаса, $v_{\text{F}} = \sqrt{2\varepsilon_{\text{F}}/m}$ — фермиевская скорость электронов, или $k\lambda_{\text{D}} \ll 1$ для невырожденных электронов, где $\lambda_{\text{D}} = \sqrt{T_e/2\pi e^2 n}$ — дебаевская электронная длина (см. раздел 3).

3. О пределах применимости уравнений квантовой гидродинамики

Ввиду своей простоты модель квантовой гидродинамики имеет существенное преимущество перед более полной кинетической моделью, обусловленное меньшим количеством переменных, от которых зависят характеризующие плазму величины (четыре переменные, \mathbf{r}, t , вместо

семи переменных, $\mathbf{r}, \mathbf{p}, t$, в кинетической модели). Это преимущество позволяет сравнительно легко рассматривать нелинейные явления в плазме, что в конечном итоге обуславливает предпочтительность гидродинамического подхода для описания таких явлений в квантовой плазме [18, 38]. Однако необходимо помнить о пределах применимости такого подхода при анализе получаемых с его помощью результатов.

Отметим, что в некоторых работах (см. обзоры Manfredi et al. [39, p. 26] и Manfredi [9, p. 14]) делается следующее утверждение: «Можно показать, что на расстояниях, больших фермиевской длины экранирования (λ_F в наших обозначениях. — С.В.В., Ю.О.Т.), в "квантовом давлении"»

$$P^q = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_x p_x \left[\left(\frac{\partial \sqrt{n_x}}{\partial x} \right)^2 - \sqrt{n_x} \frac{\partial^2 \sqrt{n_x}}{\partial x^2} \right] \quad (8)$$

можно заменить n_x (пространственную плотность одного электрона. — С.В.В., Ю.О.Т.) плотностью $n = \langle n_x \rangle = \sum_x p_x |\psi_x|^2$ (макроскопической плотностью электронного газа. — С.В.В., Ю.О.Т.), в результате чего система уравнений квантовой гидродинамики (в одномерном случае) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nu)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{mn} \frac{\partial P^{cl}}{\partial x} - \frac{1}{mn} \frac{\partial P^q}{\partial x}, \quad (10)$$

где $P^q = P^q(n)$ определяется уравнением (7). Таким образом, фактически утверждается, что замена $n_x \rightarrow n = \langle n_x \rangle$ в (8), приводящая к "уравнению состояния" для квантового давления (7), справедлива только на расстояниях, больших, чем λ_F , а значит, по сути, именно "уравнение состояния" (7) для квантового давления P^q подразумевает ограничение, при котором длины волн в волновых явлениях, описываемых уравнениями (9), (10), должны быть больше фермиевской длины, $k\lambda_F \ll 1$ (для вырожденных электронов, т.е. при $T_e \ll \epsilon_F$). Причём доказательство данного утверждения строится лишь на том, что только при $k\lambda_F \ll 1$ гидродинамическая модель (9), (10) правильно описывает дисперсию продольных осцилляций в вырожденном электронном газе (это следует из сравнения дисперсии плазменных осцилляций, выведенной кинетически и гидродинамически, проведённого в работах [9, 39]). Следовательно, ограничение $k\lambda_F \ll 1$ должно накладываться на стадии вывода гидродинамических уравнений (9), (10) (что правильно), а именно (и это некорректно) при замене $n_x \rightarrow n$ в (8), т.е. при постулировании "уравнения состояния" (7) для квантового давления.

Представляется уместным прояснить этот вопрос. Покажем, что для плазмы вырожденных электронов (при $T_e \ll \epsilon_F$) ограничение $k\lambda_F \ll 1$ на длины волн плазмонов, описываемых гидродинамическими уравнениями (9), (10), возникает не как следствие задания "уравнения состояния" (7) для квантового давления P^q , а как следствие задания определённого уравнения состояния для классического давления $P^{cl} = P^{cl}(n)$, а именно адиабатического уравнения состояния $P^{cl} = P_0^{cl}(n/n_0)^3$ с $P_0^{cl} = n_0 \epsilon_F$, где n_0 — равновесная концентрация. В то же время возможность замены $n_x \rightarrow n = \langle n_x \rangle$ в (8) (приводящей к уравнению состояния (7) для квантового давле-

ния) на самом деле подразумевается предположением об идеальности плазмы и предположением, что размеры волновых пакетов всех частиц совпадают с размерами системы (предположения 1 и 6 в списке предположений квантовой гидродинамики в разделе 2). В свою очередь оба эти предположения не накладывают никаких ограничений на длины описываемых гидродинамической моделью волн.

В отсутствие каких-либо дополнительных предположений, кроме предположений нерелятивистской идеальной плазмы, уравнения для макроскопической плотности $n(x, t)$ и гидродинамической скорости $u(x, t)$ плазмы в одномерном случае имеют вид (9), (10), где "квантовое" давление $P^q = P^q(n_x)$ определяется уравнением (8), а "классическое" давление P^{cl} — как $P^{cl}(\mathbf{r}, t) \equiv mn(\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2)$ (классическим оно называется потому, что соответствует давлению газа в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$, в то время как квантовое давление P^q , благодаря которому возникает "бомовский член" с градиентом P^q в (10), не имеет аналога в классическом случае).

Как отмечалось, для замыкания системы уравнений (9), (10) необходимо ввести два упрощающих предположения: 1) задать уравнение состояния для классического давления — соотношение между P^{cl} и n — и 2) задать "уравнения состояния" (7) для квантового давления P^q , что эквивалентно замене в (8) n_x плотностью всей системы n . Рассмотрим каждое из этих двух предположений отдельно и определим, какие ограничения они накладывают на применимость итоговой системы гидродинамических уравнений.

Обсудим вначале допущения, подразумеваемые заданием уравнения состояния для классического давления; для этого рассмотрим классический предел уравнений (9), (10) (чтобы исключить пока бомовский член с P^q , который в классическом пределе исчезает). Заметим, что нам ничто не мешает даже в классическом случае выбрать в качестве равновесного распределения Ферми–Дирака — в классическом случае это просто соответствующим образом сконструированное распределение электронов; мы свободны конструировать равновесное распределение по своему усмотрению. Как указано в учебнике Александрова и др. [34], в бесстолкновительной плазме (а именно для такой плазмы выписаны уравнения (9), (10)) известны два случая, в которых давление можно вычислить явно и тем самым замкнуть гидродинамическую систему (9), (10). Первый случай соответствует процессам с характерными длинами L и временами τ , характерная скорость которых значительно больше тепловых (или фермиевских в вырожденном случае) скоростей электронов¹,

$$\frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \gg \max \{v_T, v_F\}. \quad (11)$$

¹ Выполнение условия (11) подразумевает, что не связанное со столкновениями и обусловленное резонансным взаимодействием частиц (в данном случае электронов) с волнами коллективных возбуждений плазмы затухание Ландау, возникающее при кинетическом рассмотрении бесстолкновительной плазмы [8, 40], экспоненциально мало (поскольку мало количество резонансных частиц) и им можно пренебречь. Таким образом, гидродинамическая модель бесстолкновительной плазмы, в которой затухание Ландау принципиально не учитывается, при условии (11) тем не менее оказывается корректной [31].

В этом случае, следуя [34], можно полностью пренебречь тепловым (или фермиевским в случае "эмуляции" вырожденного электронного газа в классической плазме) разбросом частиц (случай холодной плазмы) и получить из (10) уравнение Эйлера с нулевым давлением, $P^{\text{cl}} = 0$. Однако такой подход не даёт возможности получить поправку (тепловую в случае невырожденных электронов и поправку, обусловленную фермиевским разбросом по скоростям, в случае вырожденных электронов) к дисперсии продольных плазменных волн, что нас не устраивает; для учёта дисперсии вследствие распределения электронов по скоростям необходимо принять во внимание тепловой (или фермиевский) разброс; этот случай разобран ниже.

Второй случай соответствует процессам, для которых

$$v_{T_i} \ll \frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \ll \max\{v_T, v_F\}, \quad (12)$$

где v_{T_i} — характерная (тепловая) скорость тяжёлых плазменных частиц (ионов)². В этом случае эффект инерции электронов пренебрежимо мал и после исключения электрического поля из уравнений моментов для электронов и ионов получается система уравнений одножидкостной гидродинамики. Эти уравнения годятся для описания процессов типа ионного звука (с ограничением (12)), но не подходят для описания электронных осцилляций, для которых существенна инерция электронов. Однако, поскольку мы здесь говорим о дисперсии именно электронных осцилляций, этот случай мы рассматривать не будем.

Вернёмся к первому из двух вышеперечисленных случаев — случаю быстрых процессов, удовлетворяющих условию (11), и учтём эффект разброса электронов по скоростям, теплового в невырожденном случае и фермиевского в вырожденном (ионы по-прежнему будем считать холодными). Будем рассматривать малые отклонения от равновесия, заданного распределением Ферми–Дирака для электронов, так что равновесное давление $P_0^{\text{cl}} = n_0 \varepsilon_F$ (опускаем коэффициент порядка единицы). Запишем уравнение для плотности энергии (следующий момент функции распределения f) в одномерном бесстолкновительном случае в виде

$$\frac{\partial P^{\text{cl}}}{\partial t} + u \frac{\partial P^{\text{cl}}}{\partial x} + 3P^{\text{cl}} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

где Q — тепловой поток, определяемый как $Q = (m/2) \int (v - u)^3 f dv$. В предположении быстрых процессов (условие (11)) член с тепловым потоком $\partial Q / \partial x$ гораздо меньше члена $\partial P^{\text{cl}} / \partial t$ и им можно пренебречь (т.е. выполнение условия (11) подразумевает адиабатичность соответствующего процесса). В результате уравнение (13) при учёте уравнения непрерывности (9) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{P^{\text{cl}}}{n^3} = 0, \quad (14)$$

² Заметим, что и при условии (12) затухание Ландау (теперь уже на ионах) также пренебрежимо мало, т.е. гидродинамическая модель бесстолкновительной плазмы, принципиально не учитывающая затухание Ландау, корректна и в этом случае.

из которого следует $P^{\text{cl}}/n^3 = \text{const}$, или $P^{\text{cl}} = P_0^{\text{cl}}(n/n_0)^3$ — уравнение состояния электронного газа при адиабатически быстром процессе с $P_0^{\text{cl}} \sim n_0 \varepsilon_F$. Подставив $P^{\text{cl}} = P_0^{\text{cl}}(n/n_0)^3$ в (10) (в классическом пределе, т.е. без бомовского члена), мы получаем гидродинамическое уравнение для электронного газа, учитывающее равновесное распределение электронов по скоростям (в отличие от приближения холодных электронов в [34]). Это уравнение и даёт поправку $\sim k^2 v_F^2$ (или $\sim k^2 v_T^2$ в невырожденном случае) к дисперсии продольных электронных колебаний.

Таким образом, уравнение квантовой гидродинамики (10) с $P^{\text{cl}} = P_0^{\text{cl}}(n/n_0)^3$, $P_0^{\text{cl}} \sim n_0 \varepsilon_F$, используемое для получения дисперсии продольных электронных колебаний, следует из кинетической теории в приближении адиабатически быстрых процессов, $\omega \gg kv_F$. Применительно к электронным осцилляциям, для которых $\omega \sim \omega_p$, это приближение справедливо в случае длинных волн, $k\lambda_F \ll 1$ (или $k\lambda_D \ll 1$ в случае полностью невырожденных электронов).

Вернёмся теперь к квантовому случаю. При этом, во-первых, вырождение электронов является уже не просто результатом произвольного конструирования функции распределения, а представляет собой эффект квантовой статистики (запрет Паули) и, во-вторых, в уравнении (10) появляется "бомовский член"

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \sum_x p_x \frac{\partial^2 \sqrt{n_x} / \partial x^2}{\sqrt{n_x}}$$

(остальные члены уравнения (10) при этом остаются теми же, что и в классическом случае, и для них повторяются рассуждения, изложенные в предыдущих абзацах). Для бомовского члена предполагается, что

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \sum_x p_x \frac{\partial^2 \sqrt{n_x} / \partial x^2}{\sqrt{n_x}} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{n} / \partial x^2}{\sqrt{n}} \right), \quad (15)$$

т.е. в нём n_x просто заменяется величиной n (таким образом, задаётся "уравнение состояния" (7) для квантового давления, связывающее P^{cl} и n).

Нетрудно убедиться с помощью простой подстановки $n_x \rightarrow |\psi_x|^2$ с $\psi_x(x, t) = a_x(x, t) \exp(iS_x(x, t)/\hbar)$ в левую часть (15), что предположение (15) эквивалентно предположению 6 в списке предположений гидродинамической модели в разделе 2.3, которое, как указывалось, не накладывает никаких ограничений на длины волн, описываемых в рамках гидродинамической модели.

Таким образом, гидродинамическая система уравнений, используемая в ряде работ при получении дисперсии продольных электронных осцилляций в идеальной квантовой вырожденной плазме, т.е. система (9), (10) с $P^{\text{cl}} = P_0^{\text{cl}}(n/n_0)^3$, $P_0^{\text{cl}} \sim n_0 \varepsilon_F$, получается из кинетической теории в предположениях 1–7, приведённых в конце раздела 2.3, и в приближении адиабатически быстрых процессов, $\omega \gg kv_F$, причём последнее ограничение в случае продольных осцилляций в плазме с вырожденными электронами эквивалентно условию $k\lambda_F \ll 1$. Важно подчеркнуть, что это условие возникает не как ограничение применимости приближения (15) (т.е. "уравнения состояния" (7) для квантового давления), а как следствие приближения адиабатически быстрых процессов, в котором уравнение состояния для клас-

сического давления вырожденного электронного газа имеет вид $P^{\text{cl}} = P_0^{\text{cl}}(n/n_0)^3$ с $P_0^{\text{cl}} \sim n_0 \varepsilon_F$ (в одномерном случае).

В случае продольных электронных осцилляций (см. раздел 5) условие $k\lambda_F \ll 1$ соответствует ленгмюровской части спектра [9, 18],

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{5} k^2 v_F^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}, \quad (16)$$

корректно описываемой в рамках гидродинамической модели (9), (10) (с $P^{\text{cl}} = P_0^{\text{cl}}(n/n_0)^3$, $P_0^{\text{cl}} \sim n_0 \varepsilon_F$ и уравнением (7) для P^{cl}), в то время как сугубо кинетическая часть спектра при $\omega_p/v_F \ll k \ll mv_F/\hbar$ связана с резонансом (кинетическим) $\omega \approx kv_F + \hbar k^2/2m$ и аналогична нулевому звуку в почти идеальном ферми-газе (см. раздел 5).

4. Диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной квантовой плазмы

Линейный отклик квантовой плазмы на электромагнитное возмущение описывается тензором диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Для его нахождения необходимо решить описывающие динамику среды (плазмы) при наличии самосогласованного электромагнитного поля уравнения, соответствующим образом линеаризованные в предположении слабых полей и вызванных ими возмущений среды. В бесстолкновительном случае таким уравнением является квантовое кинетическое уравнение (6) для квантовой плазмы с электромагнитным взаимодействием. Вычисление $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ из этого уравнения довольно громоздко, однако к тому же результату можно прийти и несколько более простым способом на основе упоминавшейся в разделе 2.2 квантовой многопоточковой модели (multistream model).

Известно (см., например, [41]), что линейный тензор диэлектрической проницаемости классической плазмы довольно просто может быть получен в рамках многопоточковой (классической) модели. Плазма при этом рассматривается как совокупность некоррелированных групп классических частиц с определёнными импульсами (холодных пучков) и для каждой такой группы определяется плотность тока и вычисляется соответствующий ей тензор диэлектрической проницаемости. Вклады всех групп частиц затем суммируются с соответствующими "весовыми функциями", т.е. усредняются по равновесной функции распределения частиц плазмы по импульсам $f_0(\mathbf{p})$, и таким образом находится тензор диэлектрической проницаемости всей плазмы. Эта процедура эквивалентна вычислению тензора диэлектрической проницаемости непосредственно из уравнения Власова с самосогласованными полями, поскольку в последнем также предполагается некоррелированность частиц плазмы, слабо связанных между собой лишь посредством коллективных самосогласованных полей.

Очевидным является и соответствующее обобщение этой процедуры для квантовой плазмы, если последнюю описывать как совокупность некоррелированных частиц, т.е. если параметр $\Gamma_q \sim (\hbar\omega_p/\varepsilon_F)^2$ мал. Это показано, например, в работе Кузелева и Рухадзе [42]. Линеаризуя систему уравнений "холодной" квантовой

гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla(n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \nabla) \mathbf{v}_\alpha &= \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) + \\ &+ \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla \left(\frac{1}{n_\alpha} \left[\nabla^2 n_\alpha - \frac{1}{2n_\alpha} (\nabla n_\alpha)^2 \right] \right), \\ \mathbf{j}_\alpha &= en_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad \mathbf{v}_\alpha = \nabla S_\alpha - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (17)$$

для группы частиц α с волновой функцией $\psi_\alpha(\mathbf{r}, t) = a_\alpha(\mathbf{r}, t) \exp(iS_\alpha(\mathbf{r}, t)/\hbar)$ (без учёта спина, т.е. для бесспиновых частиц), нетрудно вычислить тензор проводимости $\sigma_{ij}^\alpha(\omega, \mathbf{k})$ этой группы частиц, выразив плотность тока через напряжённость электрического поля в виде $j_{\alpha i}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{ij}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k})$ (для соответствующих фурье-компонент), и найти соответствующий тензор диэлектрической проницаемости группы частиц α :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \\ &= \delta_{ij} - \frac{4\pi e^2 n_{0\alpha}}{m\omega^2} \left\{ \delta_{ij} + \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2 - \omega_k^2} (k_i v_{\alpha j} + k_j v_{\alpha i}) + \right. \\ &\left. + \frac{k^2 v_{\alpha i} v_{\alpha j} + \omega_k^2 \kappa_i \kappa_j}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha)^2 - \omega_k^2} \right\}, \end{aligned}$$

где $n_{0\alpha}$ — невозмущённая плотность частиц группы α , $\omega_k = \hbar k^2/2m$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ — единичный вектор в направлении \mathbf{k} . Суммируя вклады от всех групп частиц, составляющих плазму, с соответствующими невозмущёнными плотностями $n_{0\alpha} = \int d\mathbf{p}_\alpha f_{0\alpha}(\mathbf{p}_\alpha)$, получаем тензор линейной диэлектрической проницаемости квантовой электронной плазмы³:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p}) \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \omega_k^2} \times \\ &\times \left\{ \delta_{ij} + \frac{k_i v_j + k_j v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} + \frac{k^2 v_i v_j}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + \frac{\omega_k^2 (\kappa_i \kappa_j - \delta_{ij})}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

³ При действительных ω, \mathbf{k} в (18) возникает проблема интегрирования по компоненте импульса p_{\parallel} вдоль \mathbf{k} из-за наличия полюса $(\omega - kp_{\parallel}/m)^2 - \omega_k^2 = 0$ на пути интегрирования по действительным p_{\parallel} . Эта проблема устраняется, если рассматриваются только возмущения плазмы, подчиняющиеся принципу причинности, т.е. возникающие в некоторый начальный момент t_0 и отсутствующие при $t < t_0$. Для таких возмущений временные фурье-образы описывающих их функций (например, временной фурье-образ потенциала $\phi(t)$) задаются односторонним интегралом Фурье (для потенциала $\phi_\omega = \int_0^\infty \phi(t') \exp(i\omega t') dt'$, где $t' = t - t_0$), определённым только для комплексных ω с положительной мнимой частью, $\text{Im}(\omega) > 0$. С целью их определения для действительных ω необходимо аналитически продолжить соответствующие функции от ω из верхней полуплоскости комплексных ω на действительную ось, для чего в (18) необходимо положить $\omega = \omega + i\delta$ и устремить δ к нулю сверху. Эта процедура (правило Ландау) определяет правило обхода полюса на пути интегрирования по действительным p_{\parallel} и снимает проблему интегрирования по p_{\parallel} . Вклад от интегрирования по p_{\parallel} вблизи этого полюса даёт мнимую часть $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ даже при действительных ω , что в свою очередь приводит к затуханию Ландау [8, 40]. В дальнейшем в интегралах по импульсу правило Ландау $\omega = \omega + i\delta$ будет подразумеваться, если противное не оговорено особо.

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$. Представив $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ изотропной плазмы как [34]

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon^l(\omega, \mathbf{k})\kappa_i\kappa_j + \epsilon^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k})(\delta_{ij} - \kappa_i\kappa_j),$$

получим из (18) следующие выражения для продольной (l) и поперечной (tr) диэлектрических проницаемостей изотропной квантовой плазмы [42]:

$$\epsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\hbar k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\hat{D}[f_0(\mathbf{p})]}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad (19)$$

$$\epsilon^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{2\pi e^2}{\hbar \omega^2} \int d\mathbf{p} \frac{v_{\perp}^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \hat{D}[f_0(\mathbf{p})], \quad (20)$$

где разностный оператор $\hat{D}[f_0(\mathbf{p})]$ определён как $\hat{D}[f_0(\mathbf{p})] = f_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2) - f_0(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2)$, v_{\perp} — проекция вектора скорости на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{k} . Выражения (19) и (20) тождественны выражениям, полученным непосредственно линеаризацией кинетического уравнения (6) [36]:

$$\epsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega \hbar k^2} \int d\mathbf{p} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \hat{D}[f_0(\mathbf{p})], \quad (21)$$

$$\epsilon^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega^2 k^2} \int d\mathbf{p} [\mathbf{k} \times \mathbf{v}]^2 \left\{ f_0'(\mathbf{p}) + \frac{1}{\hbar} \frac{\hat{D}[f_0(\mathbf{p})]}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right\}, \quad (22)$$

где $f_0'(\mathbf{p})$ — производная по энергии частицы $\epsilon = p^2/2m$. Действительно, легко показать, что в изотропной плазме выражения (21) и (22) совпадают соответственно с (19) и (20). Кроме того, такие же выражения, (19) и (20), получаются для изотропной квантовой плазмы у Климонтовича и Силина [24], а также у Кузьменкова и Максимова [43] (из выражений (27) и (28) в работе [43] для $\epsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ и $\epsilon^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k})$ в пределе отсутствия обменных взаимодействий).

Выражения (19), (20) получены для нерелятивистской модели квантовой плазмы (формально справедливой при $c \rightarrow \infty$), которая, строго говоря, неприменима для описания волновых процессов с релятивистскими фазовыми скоростями, $\omega/k \gtrsim c$, вне зависимости от того, являются ли релятивистскими скорости частиц плазмы [20]. Действительно, нетрудно показать, что сохранение полной энергии и импульса в процессе испускания или поглощения частицей кванта (продольной или поперечной волны) с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} ,

$$\epsilon' = \epsilon \pm \hbar\omega, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{k}, \quad (23)$$

в релятивистском рассмотрении, т.е. при

$$\epsilon = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2},$$

где m — масса покоя частицы, например электрона, приводит к условию резонанса

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} \pm \frac{\hbar}{2m\gamma} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0, \quad (24)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Положив здесь в случае нерелятивистских скоростей частиц $\gamma \approx 1$, получим

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} \pm \frac{\hbar}{2m} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0. \quad (25)$$

Если в рамках нерелятивистского рассмотрения в (23) формально положить $\epsilon = p^2/2m$, то член ω^2/c^2 в условии резонанса (25) не появляется, что, строго говоря, неверно в случае релятивистских фазовых скоростей волны, взаимодействующей с частицей, т.е. при $\omega/k \gtrsim c$. И хотя влияние члена ω^2/c^2 оказывается несущественным для большинства процессов в немагнитной плазме, соответствующий вклад может оказаться важным для некоторых процессов при наличии внешнего магнитного поля, таких как циклотронное мазерное излучение [44]. Строго говоря, нерелятивистское приближение полностью оправдано лишь тогда, когда фазовые скорости описываемых волн (так же как и скорости частиц плазмы) являются нерелятивистскими, т.е. при $\omega/k \ll c$ [41], и об этом не следует забывать. Действительно, сохранение энергии (23) не исключает и возможности того, что, например, изначально нерелятивистская частица может оказаться релятивистской в результате её взаимодействия с квантом волны с достаточно большими энергией и импульсом.

В релятивистском рассмотрении тензор диэлектрической проницаемости изотропного электрон-позитронного газа (в котором электроны и позитроны предполагаются неполяризованными) имеет вид [20, 30]

$$\epsilon_{ij}^{\text{rel}}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{\gamma} f_0(\mathbf{p}) \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \Delta_k^2} \times \left\{ \delta_{ij} + \frac{k_i v_j + k_j v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} + \frac{(k^2 - \omega^2/c^2)v_i v_j}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right\}, \quad (26)$$

где $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$, $f_0(\mathbf{p}) = 2\bar{n}(\mathbf{p})/(2\pi\hbar)^3$, $\bar{n}(\mathbf{p})$ — сумма чисел заполнения состояний для электронов и позитронов,

$$\Delta_k = \frac{\hbar}{2m\gamma} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = \frac{\omega k}{\gamma} \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right). \quad (27)$$

Заметим, что знаменатели в подынтегральных выражениях для электронного и позитронного вкладов в (26) соответствуют произведению резонансных условий (24) для испускания и поглощения фотона с частотой ω и волновым числом k релятивистской частицей (соответственно электроном или позитроном) с энергией $\epsilon = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ и импульсом \mathbf{p} . Действительно, симметризуя (26) по \mathbf{p} , используя условие изотропности невозмущённой плазмы, $f_0(-\mathbf{p}) = f_0(\mathbf{p})$, и приравнявая полученный знаменатель в подынтегральном выражении нулю,

$$[(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \Delta_k^2][(\omega + \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \Delta_k^2] = 0,$$

получаем четыре условия:

$$\omega \pm \mathbf{k}\mathbf{v} = \pm \Delta_k, \quad (28)$$

которые соответствуют условиям резонанса в процессах испускания и поглощения фотонов (или плазмонов) электронами и позитронами, а также в процессах рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар с участием одного фотона или плазмона [30]. Нетрудно убедиться в том, что продольная $\epsilon_{\text{rel}}^l(\omega, \mathbf{k})$ и поперечная $\epsilon_{\text{rel}}^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k})$ диэлектрические проницаемости изотропной плазмы, полученные из (26), совпадают с соответствующими выражениями в работе Цытовича [45] (с поправкой на опечатку в знаках в [45], исправленную в [30] в выраже-

ниях (9.1.12), (9.1.13), а также при пренебрежении эффектами поляризации).

Для электронной плазмы (без позитронов) в нерелятивистском пределе $c \rightarrow \infty$ (т.е. для нерелятивистской плазмы, $\gamma \rightarrow 1$, и волн с $\omega/k \ll c$) выражение (26) переходит в следующее:

$$\epsilon_{ij}^{\text{NR}}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p}) \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \omega_k^2} \times \left\{ \delta_{ij} + \frac{k_i v_j + k_j v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} + \frac{k^2 v_i v_j}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right\}, \quad (29)$$

отличающееся от $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, определяемого формулой (18), отсутствием члена

$$- \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p}) \frac{\omega_k^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \omega_k^2} (\kappa_i \kappa_j - \delta_{ij}). \quad (30)$$

Это несовпадение нерелятивистского предела (29) выражения (26) с выражением (18), найденным несколькими способами из нерелятивистских моделей квантовой плазмы, вызвано тем, что (26) получено для неполяризованного газа частиц (электронов и/или позитронов) с полужелыми спинами, в то время как (18) получено из моделей, вообще не учитывающих эффекты спина. Заметим, что член (30), отсутствием которого в выражении (29) и ограничивается различие между (18) и (29), даёт вклад только в поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы $\epsilon^{\text{tr}}(\omega, \mathbf{k})$, не оказывая никакого влияния на продольную проницаемость $\epsilon^{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$. Поэтому перечисленные выше нерелятивистские теории без учёта спина, приводящие к (18), не вполне корректны для плазмы частиц с полужелым спином (например, для электронной плазмы) [36]: правильно описывая продольные коллективные моды такой плазмы, они неверно описывают её поперечные моды. Заметим, что учёт парамагнитных эффектов, связанных со спином, в рамках нерелятивистской модели [36] приводит как раз к исчезновению члена (30) в тензоре (18); в результате последний становится в точности равным нерелятивистскому пределу (29) тензора (26), записанного для общего случая релятивистского неполяризованного электрон-позитронного газа. Указанное расхождение нерелятивистских откликов (18) и (29), связанное со спином, является ещё одним важным примером необходимости аккуратного учёта всех соответствующих эффектов, какими бы малыми они ни казались *a priori* в нерелятивистском приближении.

Для получения релятивистского обобщения коллективного линейного отклика (18) газа бесспиновых частиц (например, газа куперовских пар электронов с суммарными нулевыми спинами или газа бозонов со спином 0) нужно, вообще говоря, построить соответствующую релятивистскую теорию исходя из уравнения Клейна–Гордона (частного случая уравнения Дирака для бесспиновых частиц). Однако вместо этого можно применить феноменологический подход для установления вида релятивистского обобщения тензора (18). Заметим, что вся разница между искомым релятивистским откликом газа бесспиновых частиц (который должен переходить в (18) при $c \rightarrow \infty$) и релятивистским откликом газа неполяризованных электронов заключается в члене, дающем в пределе $c \rightarrow \infty$ выражение (30). В свою очередь знаменатель выражения (30) соответствует произведению двух резонансных условий (24)

для испускания и поглощения кванта с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$ в нерелятивистском пределе $c \rightarrow \infty$. Следовательно, при релятивистском рассмотрении он должен переходить в произведение соответствующих релятивистских резонансных условий (24), т.е. величина ω_k^2 должна переходить в Δ_k^2 , а $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \omega_k^2$ — в $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \Delta_k^2$. Таким образом, выражение (30) в релятивистской теории должно преобразоваться в следующее (мы также должны заменить нерелятивистскую массу (массу покоя) m релятивистской массой γm):

$$- \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{\gamma} f_0(\mathbf{p}) \frac{\Delta_k^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \Delta_k^2} (\kappa_i \kappa_j - \delta_{ij}). \quad (31)$$

Добавив в (26) член (31), мы получим феноменологическое выражение для тензора диэлектрической проницаемости релятивистской квантовой плазмы, состоящей из бесспиновых частиц:

$$\epsilon_{ij}^{\text{rel}}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{\gamma} f_0(\mathbf{p}) \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - \Delta_k^2} \times \left\{ \delta_{ij} + \frac{k_i v_j + k_j v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} + \frac{(k^2 - \omega^2/c^2)v_i v_j}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + \frac{\Delta_k^2 (\kappa_i \kappa_j - \delta_{ij})}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right\}. \quad (32)$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение (32) в пределе $c \rightarrow \infty$ переходит в (18), что и требовалось.

Ещё раз подчеркнём, что отклики, полученные в рамках релятивистского подхода (как коллективный отклик неполяризованного электронного или электрон-позитронного газа, так и отклик газа бесспиновых частиц) отличаются от соответствующих откликов, полученных из нерелятивистских моделей, помимо прочего, наличием члена, пропорционального ω^2/c^2 . Влияние этого члена на дисперсию продольных и поперечных волн в нерелятивистской квантовой плазме, как правило, в большинстве случаев пренебрежимо мало (например, для электронного газа в металлах), но становится существенным при больших плотностях плазмы, когда становится энергетически разрешённым рождение электрон-позитронных пар фотонами и/или плазмонами. Тогда включается дополнительный (помимо затухания Ландау) механизм затухания продольных и поперечных волн в плазме, связанный с рождением электрон-позитронных пар. Из энергетических соображений следует, что этот механизм затухания работает для волн (продольных и поперечных) с фазовыми скоростями, большими скорости света, и, кроме того, имеет энергетический порог [45],

$$(\hbar\omega)^2 > 4(mc^2)^2 + (\hbar k)^2 c^2. \quad (33)$$

Отсюда видно, что затухание продольных и поперечных волн в длинноволновом пределе ($\omega \sim \omega_p$) вследствие рождения электрон-позитронных пар становится существенным при плотностях плазмы $n \gtrsim 10^{32} \text{ см}^{-3}$ [45]. Это, однако, весьма экзотический случай, поскольку такие огромные плотности могут существовать лишь в недрах плотных астрофизических объектов, например белых карликов. С другой стороны, эффекты, связанные с возбуждением виртуальных электрон-позитронных пар (т.е. вне массовой поверхности), не имеют жёсткого энергетического порога (33) и, следовательно, могут, вообще говоря, оказывать влияние на дисперсию волн и

при меньших плотностях плазмы. Эти эффекты могут также влиять на аналитические свойства линейных откликов плазмы.

5. Квантовые кинетические эффекты и аналитические свойства линейного продольного отклика квантовой плазмы

Рассмотрим теперь сугубо квантовые эффекты, возникающие при кинетическом описании коллективных мод колебаний квантовой плазмы. Для простоты остановимся на примере продольных колебаний, возникающих вследствие начального возмущения плазмы.

В случае однородной изотропной плазмы и начального возмущения одночастичной функции распределения (одночастичной функции Вигнера) $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$ временная эволюция пространственных фурье-компонент

$$\phi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{k}) = \int \phi(t, \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

электростатического потенциала $\phi(t, \mathbf{r})$ даётся выражением

$$\phi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (34)$$

где интегрирование проводится в плоскости комплексных ω вдоль горизонтального контура в верхней полуплоскости, $\text{Im } \omega = \sigma > 0$, и

$$\phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi e}{mk^2 \epsilon^1(\omega, \mathbf{k})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\mathbf{k}, p_x)}{\omega - kp_x/m} dp_x, \quad (35)$$

где p_x — составляющая импульса частицы вдоль \mathbf{k} , $g(\mathbf{k}, p_x) = \int g(\mathbf{k}, \mathbf{p}) dp_y dp_z$, $g(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ — пространственный фурье-образ начального возмущения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$, $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, определяемая выражением (19).

Для установления поведения потенциала на больших временах t нужно провести в (34) интегрирование по ω вдоль контура, полученного из начального контура устремлением $\sigma = \text{Im } \omega$ в $-\infty$, с сохранением аналитичности подынтегральной функции $\phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k})$. (Функцию $\phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k})$ в свою очередь для этого необходимо аналитически продолжить из области определения $\text{Im } \omega > 0$ в область $\text{Im } \omega \leq 0$, для чего контуры интегрирования по p_x в числителе и знаменателе (35) необходимо сместить с действительной оси $\text{Im } p_x = 0$ в нижнюю полуплоскость

$\text{Im } p_x < 0$ таким образом, чтобы полюс $p_x = m\omega/k$ обходился снизу [40].) Этот контур интегрирования по ω в (34) должен обходить сверху все особенности функции $\phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k})$ (аналитически продолженной в область $\text{Im } \omega \leq 0$), лежащие на действительной оси $\text{Re } \omega$ или ниже её [40].

В случае классической плазмы равновесная функция распределения f_0 является целой функцией от p_x (т.е. функцией без особенностей при конечных значениях p_x) и аналитическое продолжение $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ в область $\text{Im } \omega \leq 0$ также является целой функцией от ω ; то же самое можно сказать об аналитическом продолжении в область $\text{Im } \omega \leq 0$ функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\mathbf{k}, p_x)}{\omega - kp_x/m} dp_x, \quad (36)$$

стоящей в числителе выражения (35) для $\phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k})$, если начальное возмущение $g(\mathbf{k}, p_x)$ — целая функция от p_x . Таким образом, при условии, что $f_0(p_x)$ и $g(\mathbf{k}, p_x)$ — целые функции от p_x , функция $\phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k})$ (35), указанным образом аналитически продолженная на всю плоскость комплексных ω , представляет собой отношение двух целых функций от ω . В этом случае единственными особенностями функции $\phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k})$ являются полюсы $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k}) = 0$, определяемые нулями знаменателя выражения (35) для $\phi_{\omega}(\omega, \mathbf{k})$. Вклад этих полюсов в интеграл в правой части (34) полностью определяет эволюцию $\phi(t, \mathbf{r})$, которая (в случае целых функций $f_0(p_x)$ и $g(\mathbf{k}, p_x)$) представляет собой суперпозицию экспоненциально убывающих со временем осцилляций (или возрастающих в случае неравновесной плазмы).

Однако решение начальной задачи в квантовой плазме оказывается сложнее [46], поскольку равновесная функция распределения f_0 более не является целой функцией от p_x . Действительно, электронный газ подчиняется статистике Ферми, и его равновесная квантовая функция распределения (функция Вигнера) соответствует распределению Ферми – Дирака

$$f_0(p) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \exp \left[\frac{p^2/2m - \mu(T)}{T} \right] + 1 \right\}^{-1}, \quad (37)$$

где T — температура электронов, $\mu(T)$ — химический потенциал. В одномерном случае ($p = p_x$) эта функция, изображённая на рис. 1 штриховыми линиями, имеет сингулярности (полюсы первого порядка), лежащие в

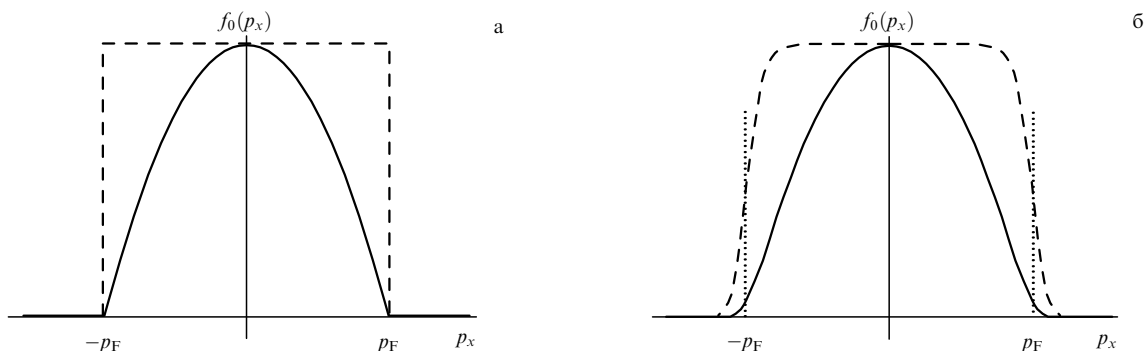


Рис. 1. Функции распределения $f_0^{\text{1D}}(p_x)$ для одномерного, $p = p_x$ (штриховая линия), и трёхмерного, $p = (p_x^2 + p_{\perp}^2)^{1/2}$ (сплошная кривая), распределения Ферми – Дирака (37) в случаях (а) полного вырождения ($\mu(T)/T \rightarrow \infty$) и (б) неполного вырождения ($\mu(T)/T = 10$). Функции нормированы на соответствующие значения $f_0^{\text{1D}}(0)$.

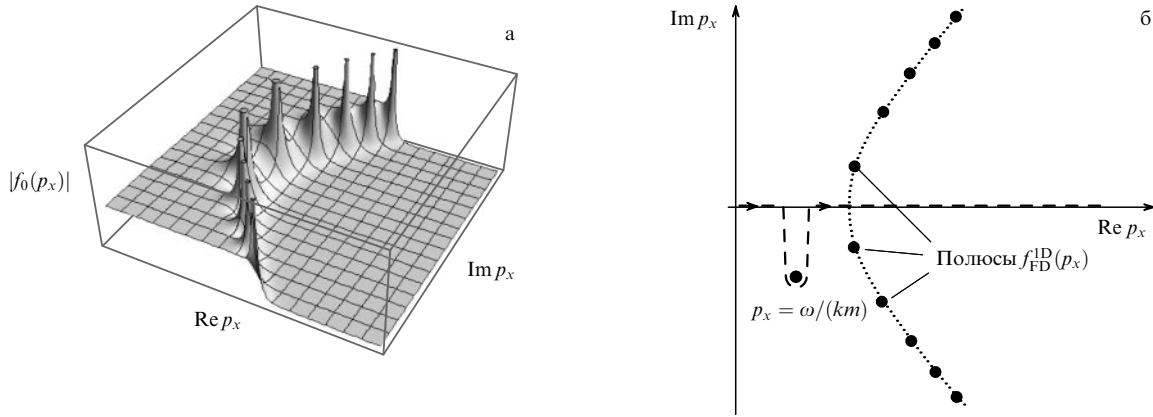


Рис. 2. (а) Абсолютная величина одномерной функции Ферми – Дирака $f_0(p_x) \propto \{\exp[(p_x^2/2m - \mu(T))/T] + 1\}^{-1}$ на плоскости комплексных p_x . (б) Полюсы одномерной функции Ферми – Дирака $f_0(p_x) \propto \{\exp[(p_x^2/2m - \mu(T))/T] + 1\}^{-1}$ и контур интегрирования по p_x (штриховая кривая) при аналитическом продолжении функции $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ в область $\text{Im } \omega \leq 0$; гипербола, на которой лежат полюсы функции $f_0(p_x)$, показана пунктирной кривой.

плоскости комплексных p_x на гиперболе (рис. 2), пересекающей действительную ось $\text{Im } p_x = 0$ в точках $\pm[2\mu(T)/m]^{1/2}$, и отстоящие друг от друга на расстоянии, пропорциональные температуре T [46], так что при $T \rightarrow 0$ эти полюсы полностью заполняют указанную гиперболу. Как отмечалось выше, при аналитическом продолжении функции $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ в область $\text{Im } \omega \leq 0$ контур интегрирования по p_x в определении $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ должен обходить полюс $p_x = m\omega/k$ снизу, однако при этом он не должен пересекать полюсы функции $f_0(p_x)$. Поэтому контур интегрирования по p_x оказывается "зажатым" между полюсом $p_x = m\omega/k$, лежащим в нижней полуплоскости комплексных p_x , и ближайшим к нему полюсом p_{x0} функции $f_0(p_x)$. При $m\omega/k \rightarrow p_{x0}$, т.е. при совпадении этих двух полюсов, зажатый между ними контур интегрирования по p_x неизбежно проходит через оба этих полюса и, следовательно, функция $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ имеет особенности в точках $\omega_j = kp_{x0j}/m$, где p_{x0j} — полюсы функции $f_0(p_x)$.

Таким образом, в квантовой плазме функция $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ уже не является целой функцией от ω (в отличие от таковой для классической максвелловской плазмы) и сингулярности $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$, наряду с нулями $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$, также дают вклад в $\phi(t, \mathbf{r})$. Вклад сингулярностей функции $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$, в отличие от вклада её нулей, может быть не экспоненциально затухающей осциллирующей функцией, а сравнительно медленно убывающей (по степенному закону) функцией времени [46, 47], причём необязательно осциллирующей.

Заметим, однако, что электронный газ в большинстве случаев описывается не одномерной, а трёхмерной функцией распределения Ферми – Дирака (37). Входящая в интеграл по продольной компоненте импульса p_x в выражении (19) для $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ одномерная функция распределения в этом случае определяется как трёхмерная функция $f_0(p)$, проинтегрированная по поперечным к вектору \mathbf{k} импульсам \mathbf{p}_\perp :

$$f_0^{1D}(p_x) = \int f_0(p) d\mathbf{p}_\perp$$

(изображена на рис. 1 сплошными кривыми), а разностный оператор $\hat{D}[f_0(\mathbf{p})] = f_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}/2) - f_0(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}/2)$ действует только на $f_0^{1D}(p_x)$, $\hat{D}[f_0(\mathbf{p})] = [f_0(p_x + \hbar k/2) -$

$-f_0(p_x - \hbar k/2)]f_0(\mathbf{p}_\perp)$. В результате в случае трёхмерного распределения Ферми – Дирака уравнение (19) для $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ принимает вид

$$\epsilon^1(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{\hbar k^2} \frac{4\pi m T}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \frac{1}{(\omega - kp_x/m)} \times \left\{ \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{(p_x + \hbar k/2)^2 - 2m\mu(T)}{2mT} \right) \right] - \ln \left[1 + \exp \left(-\frac{(p_x - \hbar k/2)^2 - 2m\mu(T)}{2mT} \right) \right] \right\}, \quad (38)$$

где контур интегрирования по p_x выбран таким образом, что он обходит полюс $p_x = m\omega/k$ снизу. Логарифмические функции в (38) не являются целыми — каждая из них содержит в плоскости комплексных p_x точки ветвления и разрезы, показанные на рис. 3. Эти особенности приводят к тому, что функция $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ также имеет аналогичные, изображённые на рис. 4, особенности в плоскости комплексных ω , которые могут давать вклад в интеграл по ω в выражении (34) для $\phi(t, \mathbf{r})$, наряду с нулями функции $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$, т.е. полюсами функции $1/\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ в (35). Этот вклад и может приводить к степенному, т.е. не экспоненциальному, характеру затухания начального возмущения со временем, аналогичного таковому в случае одномерного распределения Ферми [46, 47]. Заметим, что это чисто кинетический эффект, отсутствующий в гидродинамическом приближении.

Если при каких-либо условиях вклад в $\phi(t, \mathbf{r})$, обусловленный особенностями функции $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ в ферми-газе, доминирует над вкладом нулей $\epsilon^1(\omega, \mathbf{k})$ в $\phi(t, \mathbf{r})$ на больших временах t , то меняется физический смысл продольных мод коллективных колебаний квантовой плазмы: в этом случае эволюция начального возмущения на больших временах может качественно отличаться от таковой в случае классической плазмы. В связи с этим наибольший интерес представляют те области, в которых вклад по указанному контуру интегрирования обладает наименьшей по абсолютной величине мнимой частью. Вопрос о том, при каких условиях это может происходить, представляет фундаментальный интерес, в том числе связанный с макроскопической наблюдаемостью квантовых эффектов, и требует дальнейшего исследования.

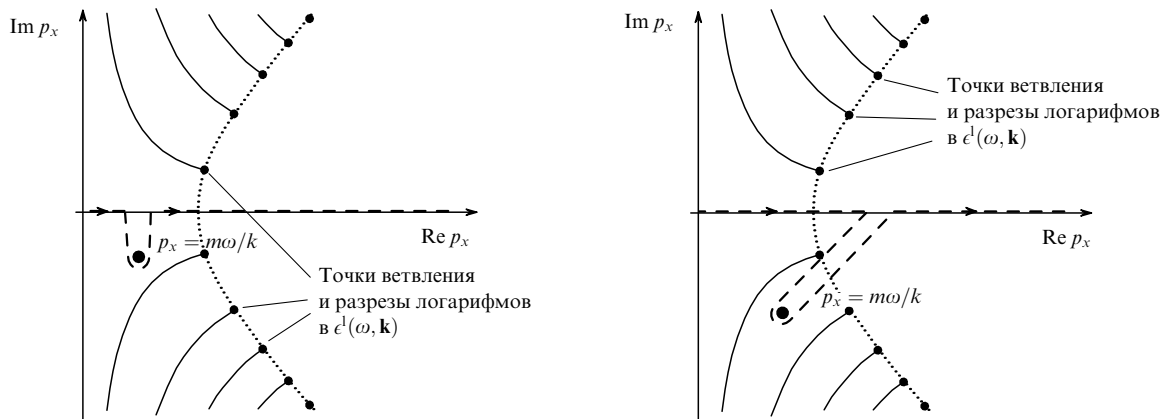


Рис. 3. Особенности (точки ветвления и разрезы, показанные сплошными кривыми) логарифмических функций под интегралом в (38) и контуры интегрирования по p_x (штриховые кривые) при аналитическом продолжении функции $\epsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ в область $\text{Im } \omega \leq 0$ в двух случаях, иллюстрирующих возможные положения полюса $p_x = m\omega/k$ (изображён жирной точкой) относительно разрезов. Пунктирная кривая — гиперболой, на которой лежат точки ветвления.

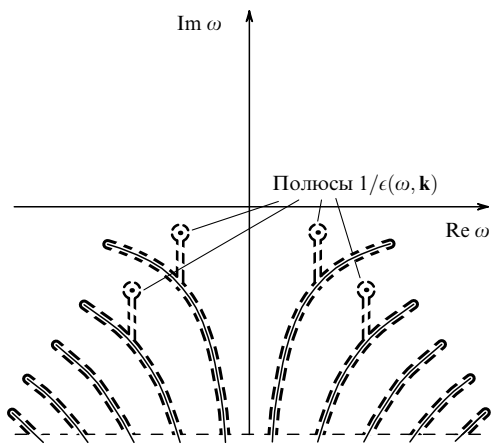


Рис. 4. Особенности (точки ветвления и разрезы), показанные сплошными кривыми, функции $\epsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ в плоскости комплексных ω и контур интегрирования по ω в (34), сдвинутый в нижнюю полуплоскость на бесконечность, с учётом особенностей $\epsilon^l(\omega, \mathbf{k})$ в нижней полуплоскости (показан штриховой линией). Вклад в интеграл дают как полюсы функции $1/\epsilon^l(\omega, \mathbf{k})$, так и её разрезы в нижней полуплоскости.

Однако даже в тех случаях, когда вклад от интегрирования по ω вдоль разрезов на рис. 4 мал или вообще отсутствует, квантовые кинетические эффекты тем не менее существенно влияют на дисперсию и затухание продольных осцилляций плазмы. В случае полностью вырожденного ($T_e = 0$) распределения Ферми для электронов уравнение $\epsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0$ в длинноволновой области даёт следующие приближённые решения (отметим опечатку в знаках в работе [48] в выражении (40) для дисперсии кинетической моды):

$$\omega_L(k) = \left(\omega_p^2 + \frac{3}{5} k^2 v_F^2 \right)^{1/2} \quad \text{при } k \ll \frac{\omega_p}{v_F}, \quad (39)$$

$$\omega_{\pm}(k) = (k v_F \pm \omega_k) [1 + \exp(-2 - 2k^2 \lambda_F^2)] \quad \text{при } \frac{\omega_p}{v_F} \ll k \ll \frac{m v_F}{\hbar}. \quad (40)$$

Эти предельные решения представлены на рис. 5.

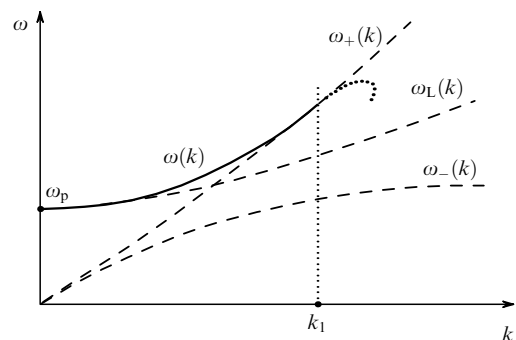


Рис. 5. Дисперсия продольных осцилляций вырожденного ($T_e = 0$) электронного газа. Приближённые решения (39), (40) показаны штриховыми кривыми. Часть дисперсионной кривой, для которой появляется затухание Ландау ($k > k_1$), показана пунктирной кривой.

Дисперсия продольной моды коллективных осцилляций (39) при $k \ll \omega_p/v_F$ соответствует обычной ленгмювской моде, получаемой также и в рамках гидродинамической модели (см. уравнение (16)), поэтому мы можем также назвать её "гидродинамической", тогда как дисперсия моды продольных осцилляций (40) при $\omega_p/v_F \ll k \ll m v_F/\hbar$ определяется главным образом кинетическими резонансами $\omega - k v_F \pm \omega_k = 0$ (см. уравнение (25)) плазмонов и электронов, скорость которых в направлении \mathbf{k} равна v_F . Для тех значений k , при которых частота продольных осцилляций, определяемая обычной ленгмювской дисперсией (39), становится близкой к частотам кинетических резонансов $\omega = k v_F \pm \omega_k$ для частиц на фермиевской поверхности (что имеет место в окрестности пересечения дисперсионной кривой (39) с резонансом $\omega = k v_F + \omega_k$), кинетические эффекты становятся определяющими и происходит "перескок" дисперсии с гидродинамической моды (39) на кинетическую моду (40). Отметим также, что наличие квантовой отдачи (quantum recoil) приводит к появлению мнимой части продольной диэлектрической проницаемости в вырожденном случае [46] для

$$k > k_1 \approx \frac{\omega_p}{v_F} \sqrt{\frac{3}{2} (|\ln \eta| - 1)},$$

где $\eta = \hbar\omega_p/4\epsilon_F \sim \sqrt{\Gamma_q}$, что в свою очередь приводит к затуханию Ландау продольных мод осцилляций (нулевого звука) с $k > k_1 \approx (\omega_p/v_F)\sqrt{(3/2)(|\ln \eta| - 1)}$, впервые продемонстрированному в [46] (причём при $k < k_1$ затухание Ландау полностью отсутствует). Таким образом, квантовые кинетические эффекты оказывают существенное (а при некоторых длинах волн определяющее) влияние на дисперсию и затухание продольных мод коллективных осцилляций квантовой плазмы.

6. Заключение

Итак, мы проанализировали прежде всего ограничения, вытекающие из предположений, которые делаются при построении наиболее популярных в последнее время микроскопических моделей квантовой идеальной плазмы. Недостаточное понимание этих ограничений (или их игнорирование) может приводить к неправильной интерпретации результатов, полученных в рамках той или иной модели. Например, описание продольных мод коллективных осцилляций вырожденного электронного газа в рамках гидродинамической модели даёт дисперсионное уравнение (16), справедливое лишь при условии $k\lambda_F \ll 1$, что не всегда указывается явно. Более того, сама причина возникновения этого ограничения на длины волн, описываемых в рамках квантовой гидродинамики, не всеми ясно понимается. Поэтому мы рассмотрели данный вопрос в разделе 3, где показали, что это ограничение возникает в квантовой гидродинамике вследствие задания определённого (адиабатического) уравнения состояния для "классического" давления, а не вследствие постулирования уравнения состояния (7) для "квантового" давления.

Мы также рассмотрели линейные коллективные отклики квантовой плазмы и указали на концептуальную некорректность выражений для откликов, полученных в рамках нерелятивистских моделей плазмы, для описания волновых процессов с релятивистскими фазовыми скоростями, $\omega/k \gtrsim c$, независимо от того, является ли при этом сама плазма релятивистской или нет. Кроме того, мы продемонстрировали (нечасто упоминаемый, но тем не менее важный факт), что даже в случае немагнитной плазмы игнорирование эффектов, связанных со спином частиц плазмы, приводит к некорректному выражению для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, что, в частности, приводит к неправильному дисперсионному уравнению для поперечных колебаний квантовой плазмы.

Наконец, мы рассмотрели квантовые кинетические эффекты, связанные с нетривиальными аналитическими свойствами комплексных функций линейного отклика квантовой плазмы, возникающими как вследствие вырожденности распределения электронов, так и из-за квантовой отдачи. В то же время эти эффекты, за редким исключением практически не обсуждаемые в литературе, представляют фундаментальный интерес. В частности, правильный учёт аналитических свойств линейных откликов может существенным образом изменить представление о характере и эволюции коллективных возмущений как в неограниченной квантовой плазме, так и в ограниченной (начальная и граничная задачи Ландау [40]).

Авторы благодарны Д. Мелроузу (D. Melrose) и Р. Компанейцу за полезные обсуждения в ходе написа-

ния этой заметки, а также рецензентам *УФН* за ценные замечания. Данное исследование частично поддержано Australian Research Council (ARC).

Список литературы

1. Son S, Fisch N J *Phys. Rev. Lett.* **95** 225002 (2005)
2. Lindl J *Phys. Plasmas* **2** 3933 (1995)
3. Tabak M et al. *Phys. Plasmas* **12** 057305 (2005)
4. Kritcher A L et al. *Science* **322** 69 (2008)
5. Lee H J et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 115001 (2009)
6. Glenzer S H et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 065002 (2007)
7. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика Ч. 2* (М.: Наука, 1978) [Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Statistical Physics Vol. 2* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002)]
8. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979) [Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)]
9. Manfredi G, quant-ph/0505004
10. Haas F, Manfredi G, Feix M *Phys. Rev. E* **62** 2763 (2000)
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1969) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
12. Татарский В И *УФН* **139** 587 (1983) [Tatarskii V I *Sov. Phys. Usp.* **26** 311 (1983)]
13. Климонтович Ю Л, Силин В П *УФН* **70** 247 (1960) [Klimontovich Yu L, Silin V P *Sov. Phys. Usp.* **3** 84 (1960)]
14. Wigner E *Phys. Rev.* **40** 749 (1932)
15. Wilhelm H E *Phys. Rev. D* **1** 2278 (1970)
16. Manfredi G, Haas F *Phys. Rev. B* **64** 075316 (2001)
17. Eliasson B, Shukla P K *Phys. Scripta* **78** 025503 (2008)
18. Шукла П К, Элиассон Б *УФН* **180** 55 (2010) [Shukla P K, Eliasson B *Phys. Usp.* **53** 51 (2010)]
19. Haas F *Phys. Plasmas* **12** 062117 (2005)
20. Melrose D B, Mushtaq A *Phys. Plasmas* **16** 094508 (2009)
21. Кузевлев М В, Рухадзе А А *УФН* **181** 393 (2011) [Kuzelev M V, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **54** 375 (2011)]
22. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика Ч. 1, 3-е изд.* (М.: Наука, 1976) [Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics Vol. 1* (Oxford: Pergamon Press, 1980)]
23. Климонтович Ю Л *Статистическая физика* (М.: Наука, 1982) [Klimontovich Yu L *Statistical Physics* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1986)]
24. Климонтович Ю М, Силин В П *ЖЭТФ* **23** 151 (1952)
25. Moyal J E *Proc. Camb. Philos. Soc.* **45** 99 (1949)
26. Боголюбов Н Н *Проблемы динамической теории в статистической физике* (М. – Л.: Гостехиздат, 1946) [Bogoliubov N N *The Dynamical Theory in Statistical Physics* (Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1965)]
27. Власов А А *ЖЭТФ* **8** 291 (1938)
28. Hartree D R *Proc. Camb. Philos. Soc.* **24** 89 (1928)
29. Fock V Z. *Phys.* **61** 126 (1930)
30. Melrose D B *Quantum Plasmadynamics: Unmagnetized Plasmas* (Lecture Notes in Physics, 735) (New York: Springer, 2008)
31. Сагдеев Р З, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 4 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1964) с. 20 [Sagdeev R Z, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 4 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1966) p. 23]
32. Заславский Г М, Чириков Б В *УФН* **105** 3 (1971) [Zaslavskii G M, Chirikov B V *Sov. Phys. Usp.* **14** 549 (1972)]
33. Ахизер А И и др. *Электродинамика плазмы* (Под ред. А И Ахизера) (М.: Наука, 1974)
34. Александров А Ф, Богданкевич Л С, Рухадзе А А *Основы электродинамики плазмы* 2-е изд. (М.: Высшая школа, 1988) [Alexandrov A F, Bogdankevich L S, Rukhadze A A *Principles of Plasma Electrodynamics* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)]
35. Tyshetskiy Yu, Vladimirov S V, Kompaneets R *Phys. Plasmas* **18** 112104 (2011)

36. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Госатомиздат, 1961)
37. Madelung E Z. *Phys.* **40** 322 (1927)
38. Shukla P K et al. *Phys. Plasmas* **13** 112111 (2006)
39. Manfredi G et al. *Lecture Notes Phys.* **795** 1 (2010); arXiv:0810.3094
40. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **16** 574 (1946); Landau L D *J. Phys. USSR* **10** 25 (1946)
41. Melrose D B *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986) p. 17
42. Кузелев М В, Рухадзе А А *УФН* **169** 687 (1999) [Kuzelev M V, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **42** 603 (1999)]
43. Кузьменков Л С, Максимов С Г *ТМФ* **131** 231 (2002) [Kuz'menkov L S, Maksimov S G *Theor. Math. Phys.* **131** 641 (2002)]
44. Melrose D B *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986) p. 190
45. Цытович В Н *ЖЭТФ* **40** 1775 (1961) [Tsytovich V N *Sov. Phys. JETP* **13** 1248 (1961)]
46. Кривицкий В С, Владимиров С В *ЖЭТФ* **100** 1483 (1991) [Krivitskii V S, Vladimirov S V *Sov. Phys. JETP* **73** 821 (1991)]
47. Hudson J F P *Proc. Cambr. Philos. Soc.* **58** 119 (1962)
48. Силин В П *ЖЭТФ* **23** 641 (1952)

On description of a collisionless quantum plasma

S.V. Vladimirov

School of Physics, The University of Sydney, NSW 2006, Australia

E-mail: sergey.vladimirov@sydney.edu.au

Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences, ul. Izhorskaya 13/2, 125412 Moscow, Russian Federation

Yu.O. Tyshetsky

School of Physics, The University of Sydney, NSW 2006, Australia

E-mail: yury.tyshetsky@sydney.edu.au

School of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkiv National University, pl. Svobody 4, 61022 Kharkiv, Ukraine

A plasma is regarded as quantum if its macroscopic properties are significantly affected by the quantum nature of its constituent particles. A proper description is necessary to comprehend when collective quantum plasma effects are important. In this paper, the most commonly used microscopic approaches to describe a collisionless quantum plasma are reviewed together with their related assumptions and restrictions. In particular, the quantum plasma hydrodynamic approximation is analyzed in detail, and the analytical properties of the linear dielectric response function obtained from quantum plasma kinetic theory are investigated. Special attention is paid to what we consider to be the most important problems that appear already in the linear approximation and require further studies.

PACS numbers: 05.30.Fk, **52.25.-b**, **52.35.-g**

DOI: 10.3367/UFNr.0181.201112g.1313

Bibliography — 48 references

Received 21 December 2010, revised 23 May 2011

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **181** (12) 1313–1328 (2011)

Physics – Uspekhi **54** (12) (2011)