Сентябрь 2010 г. **Том 180, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Некоммутативность сложения неколлинеарных скоростей в специальной теории относительности и метод геометрической фазы

(к столетию со дня публикации работы А. Зоммерфельда)*

Г.Б. Малыкин

В 1909 г. А. Зоммерфельд путём геометрических вычислений показал, что на сфере мнимого радиуса операция релятивистского сложения двух неколлинеарных скоростей является некоммутативной. А. Зоммерфельд первым применил метод геометрической фазы для вычисления угла между результирующими скоростями при различном порядке их суммирования. Для этого он связал величину рассматриваемого угла с эксцессом сферического треугольника, образованного двумя исходными скоростями и их суммой. В 1931 г. А. Зоммерфельд применил свой метод для рассмотрения прецессии Томаса.

PACS numbers: **01.65.+g**, **03.30.+p**, 03.65.Vf DOI: 10.3367/UFNr.0180.201009d.0965

Содержание

1. Введение

В 1909 г. А. Зоммерфельд (1868 – 1951) показал, что операция релятивистского сложения неколлинеарных скоростей является некоммутативной [1, 2]. Спустя более двадцати лет он вновь вернулся к этому вопросу [3] и показал, что разработанный им в [1, 2] метод позволяет рассчитать величину прецессии Томаса (ПТ) [4 – 11]. Результаты [1 – 3] рассматривались ранее в обзорах [12, 13], однако основное внимание в [12, 13] было уделено математическому аппарату [1 – 3].

Цель настоящей статьи — рассмотреть работы [1 – 3] с физической точки зрения и, в частности, показать, что Зоммерфельд первым применил метод геометрической фазы (ГФ) (топологической фазы, иногда именуемой фазой Берри) [14 – 23] для вычисления величины релятивистского поворота скорости тела или спина материальной частицы и был вторым после У.Р. Гамильтона (1805 – 1865) [24], кто использовал этот расчётный метод. Насколько нам известно, роль Зоммерфельда в создании метода ГФ ранее не обсуждалась.

2. Релятивистский закон сложения скоростей. 1900 – 1908 гг.

В первоначальный период развития специальной теории относительности (СТО) основные усилия исследователей были направлены на создание преобразований, связывающих три пространственные координаты и время в неподвижной инерциальной системе отсчёта (ИСО) K, в которой находится наблюдатель, с ИСО K', движущейся со скоростью v; вопросу же о релятивистском законе сложения скоростей уделялось гораздо меньшее внимание. Исключением явилась опубликованная в 1900 г. монография Дж. Лармора (1857 – 1942) [25], но её автор ограничился рассмотрением сложения коллинеарных скоростей при $v \ll c$.

В основополагающей работе А. Эйнштейна (1879 – 1955) [26] в 1905 г. впервые было получено выражение для сложения скорости тела $\mathbf{u}$ со скоростью движения ИСО $\mathbf{v}$ для произвольного угла между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Этому вопросу Эйнштейн посвятил отдельный раздел (§ 5) в [26], в котором он отметил: "Итак, закон параллелограмма скоростей в нашей теории верен только в первом при-

* Статья была подготовлена к 100-летию со дня публикации работы А. Зоммерфельда "Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie" ("О сложении скоростей в теории относительности") в *Physikalische Zeitschrift* [1].

Г.Б. Малыкин. Институт прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
Тел. (831) 416-48-70. Факс (831) 436-37-92
E-mail: malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 11 сентября 2009 г.

© Г.Б. Малыкин 2010

ближении". В 1906 г. этот вопрос был также рассмотрен в работе А. Паункаре (1854 – 1912) [27].

Релятивистский закон сложения скоростей Эйнштейна [26] практически сразу нашёл применение: уже в 1908 г. Я. Лауб (1872 – 1962) получил выражение для коэффициента увлечения в случае, когда оптическая среда совершает поступательное движение, но при этом её границы не остаются неподвижными, а перемещаются, в отличие от таковых в эксперименте Физо [28]. (О коэффициенте увлечения Лауба см. [29].)

3. Первая работа А. Зоммерфельда. 1909 г.

Наиболее интересные следствия из результатов [26] получены в 1909 г. Зоммерфельдом [1, 2], который рассмотрел общий случай сложения неколлинеарных скоростей. Результат оказался настолько важным, что Зоммерфельд направил эту работу сразу в два немецких научных журнала: 30 сентября 1909 г. она поступила в редакцию *Physikalische Zeitschrift*, а 21 октября — в редакцию *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*. Оба журнала опубликовали работу ещё до конца 1909 г. Для вычисления абсолютной величины и направления суммы двух ортогональных скоростей Зоммерфельд применил оригинальный математический метод — геометрическую интерпретацию преобразований Лоренца (ПЛ) с помощью поворотов на мнимые углы. Математическая сторона [1, 2] достаточно подробно рассмотрена в работах [12, 13], в настоящей статье мы приведём краткое пояснение метода Зоммерфельда. Вместо двух скоростей v_1 и v_2 и их релятивистской суммы v_3 в [1, 2] было предложено рассматривать три мнимых угла φ_1, φ_2 и φ_3, где $\tan\varphi_{1,2,3} = \mathrm{i}(v_{1,2,3}/c)$, c — скорость света в вакууме, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Таким образом, любому ПЛ со скоростью v соответствует поворот на угол φ, а длина соответствующего отрезка дуги большого диаметра на сфере с мнимым единичным радиусом численно равна φ, при этом ориентация дуги зависит от направления $\mathbf{v}$ в реальном пространстве (или в пространстве Минковского)[1]. Зоммерфельд показал, что $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ только в случае, если v_1 и v_2 коллинеарны. В случае, когда v_1 и v_2 ортогональны, $\cos\varphi_3 = \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2$, как следует из сферической тригонометрии [31], при этом направление суммарной скорости v_3 зависит от того, в какой последовательности производилось суммирование v_1 и v_2 [1, 2]. Следовательно, два вращения в одной плоскости пространства Минковского (чему соответствует сложение двух коллинеарных скоростей) коммутируют друг с другом, а два вращения в разных плоскостях пространства Минковского (чему соответствует сложение двух неколлинеарных скоростей) не коммутируют [1, 2]. В частности, если осуществить два последовательных ПЛ — сначала в направлении оси x, а затем в направлении оси y, то мы получим один результат, а если те же преобразования сделать в обратном порядке — сначала в направлении оси y, а затем в направлении оси x, то мы получим другой результат: абсолютные значения результирующих скоростей в обоих случаях будут одинаковы, но их направления будут различаться.

[1] Позднее Зоммерфельд отметил, что сферическая геометрия с мнимыми дугами эквивалентна плоской геометрии Лобачевского [3]. Зоммерфельд был вторым после Минковского [30], кто применил неевклидову геометрию в СТО [13].

С нашей точки зрения, наилучшая интерпретация данного явления приводится в работе В.И. Ритуса (р. 1927 г.) [11]: "Асимметрия релятивистского закона сложения неколлинеарных скоростей относительно их перестановки приводит к двум модифицированным треугольникам, изображающим на евклидовой плоскости сложение непереставленных и переставленных скоростей и появление ненулевого угла между двумя результирующими скоростями. На этот же угол поворачивается и спин частицы при изменении её скорости лоренцевским бустом со скоростью, неколлинеарной скорости частицы". Отсюда очевидно, что из результатов работы Зоммерфельда [1, 2] следует явление поворота спина материальной частицы при её криволинейном движении — прецессия Томаса (ПТ) [4 – 11].

Зоммерфельд также показал [1, 2], что сумма углов φ_1, φ_2 и φ_3 сферического треугольника, образованного дугами большого диаметра, меньше, чем π, поскольку сферический эксцесс [31] (сферический избыток — превышение суммой углов сферического треугольника числа π) на сфере с мнимым радиусом является отрицательным. Более того, Зоммерфельд показал, что в евклидовом пространстве угол между скоростями $\mathbf{v}_3^{\mathrm{a}}$ и $\mathbf{v}_3^{\mathrm{b}}$ ($\mathbf{v}_3^{\mathrm{a}} = \mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3^{\mathrm{b}} = \mathbf{v}_2 \oplus \mathbf{v}_1$, где оператор $\oplus$ обозначает релятивистское суммирование векторов скоростей) для двух ПЛ с ортогональными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, проведённых в различной последовательности, численно равен сферическому эксцессу, взятому с обратным знаком [1, 2]. Поскольку сферический эксцесс треугольника численно равен площади этого треугольника на сфере с единичным радиусом [31], очевидно, что этот угол представляет собой характерное проявление ГФ в СТО. В настоящее время проявления ГФ обнаружены в различных областях физики: в классической и квантовой механике, в поляризационной оптике и др. [14 – 23]. Характерной особенностью ГФ является то, что наиболее удобный метод её расчёта заключается в вычислении площади, ограниченной замкнутой кривой на сфере, описывающей эволюцию состояния некоторого параметра системы, в частности площади соответствующего сферического треугольника, например, в пространстве скоростей или на сфере Пуанкаре [14 – 23]. Отметим, что рассматриваемый угол между направлениями суммарных скоростей можно вычислить методом параллельного переноса вектора скорости на сфере с мнимым единичным радиусом вдоль дуг φ_1 и φ_2 и в обратной последовательности — φ_2 и φ_1.

Таким образом, Зоммерфельд ещё в 1909 г. применил метод ГФ [1, 2] для вычисления релятивистского поворота скорости тела в результате двух ортогональных ПЛ и разработал математический аппарат для расчёта величины ПТ.

4. Дальнейшее применение методов неевклидовой геометрии в специальной теории относительности. Работы Э. Бореля и Л. Фёпля и П. Даниэлла. 1910 – 1914 гг.

После публикации работы А. Зоммерфельда [1, 2] начался период бурного развития методов неевклидовой геометрии в СТО [13]. В качестве примера можно привести работы самого А. Зоммерфельда [32, 33], В. Варичака (1865 – 1942) [34 – 37], М. фон Лауэ (1879 – 1960) [38], Е.Б. Вильсона (1879 – 1964) и Г.Н. Льюиса

(1875 – 1946) [39], А.А. Робба (1873 – 1936) [40], Э. Бореля (1871 – 1956) [41 – 43], К. Огура (1885 – 1962) [44], Л. Фёпля (1887 – 1976) и П. Даниэлла (1889 – 1946) [45] и Л. Зильберштейна (1872 – 1948) [46]. Работы [34 – 43, 45, 46] довольно подробно рассмотрены в [13][2]. Наиболее интересны работы Э. Бореля [41 – 43] и Л. Фёпля и П. Даниэлла [45].

Борель, который был знаком с результатами работы Зоммерфельда [1], использовал не сферу с мнимым радиусом, а геометрию Лобачевского. В [41] Борель рассмотрел релятивистское кинематическое вращение, впоследствии получившее наименование ПТ, привёл наглядное физическое объяснение этого явления и получил приближённое выражение для угловой скорости ПТ при условии $v \ll c$. Если бы Борель не ограничился этим условием, то он мог бы получить выражение для ПТ в общем случая. Позднее Я.А. Смородинский (1917 – 1992), используя геометрию Лобачевского, получил корректное выражение для ПТ [47, 48] (см. также [9]).

В работе Л. Фёпля и П. Даниэлла [45], в которой рассматривается релятивистское вращение твёрдого тела при его круговом движении, так же как и в более поздних работах [49, 50], для расчёта релятивистского поворота электрона применялся метод параллельного переноса для конического движения (т.е. фактически использовалась известная теорема о телесном угле [24, 51]) в пространстве Минковского. Дело в том, что если тело совершает круговое движение в плоскости (x, y) реального пространства, то в пространстве Минковского мировая линия тела представляет собой геликоидальную спираль вокруг оси $\mathrm{i}ct$.В результате такого подхода авторы [45] завысили угловую частоту ПТ [6 – 11] в γ раз. Как показано в [9], ошибка авторов [45, 49, 50] заключается в том, что мировая линия не является траекторией реального движения тела и в данном случае применение теоремы о телесном угле для поворота тела неправомерно.

5. Вторая работа А. Зоммерфельда. 1931 г.

После открытия в 1925 г. спина электрона С.А. Гаудсмитом (1902 – 1979) и Дж.Ю. Уленбеком (1900 – 1974) [52] возник интерес к получению выражения для релятивистской прецессии спина электрона (ПТ). Работы Бореля [41 – 43] к тому времени уже были забыты. В 1926 – 1927 гг. Л.Х. Томас (1903 – 1992) с помощью преобразований Лоренца получил выражение для ПТ [4, 5], но, как выяснилось позднее [9], ошибочное: он (так же, как и Фёпль и Даниэлл [45]) в γ раз завысил угловую частоту ПТ.

В 1931 г. Зоммерфельд в пятом издании монографии [3] и докладе на конференции в Риме [53], используя собственный метод [1, 2], привёл вывод выражения для ПТ. Рассмотрим выражение (27) из [3, гл. 12]:

$$\sin\theta = \frac{v_1 v_2}{c^2\left(1 + \sqrt{1 - v_1^2/c^2}\,\sqrt{1 - v_2^2/c^2}\,\right)}\,, \qquad (1)$$

где θ — обусловленный ПТ угол поворота спина электрона, v_1 — орбитальная скорость электрона, v_2 — изменение скорости электрона за бесконечно малое время под действием центростремительной силы (в данном случае — кулоновской силы положительного заряда ядра атома)[3].

Рассмотрим наиболее простой и интересный случай кругового движения электрона для произвольной величины его орбитальной скорости ($v_1 \leqslant c$). Тогда $v_1 = R\omega$ (где R — радиус орбиты электрона, ω — угловая скорость орбитального движения), $v_2 = R\omega^2\,\mathrm{d}t$ — приращение скорости за бесконечно малый промежуток времени $\mathrm{d}t$. Угловая скорость ПТ в ИСО, связанной с неподвижным наблюдателем, $\Omega_{\mathrm{T}} = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ [9]. Если продифференцировать левую и правую части выражения (1) по времени и учесть, что $\mathrm{d}\sin\theta/\mathrm{d}t = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, то мы получим весьма громоздкое выражение для Ω_{T}, содержащее постоянные слагаемые и слагаемые пропорциональные $(\mathrm{d}t)^2$, которыми можно пренебречь как бесконечно малыми второго порядка. В этом случае выражение для ПТ, которое принимает вид

$$\Omega_T = (1 - \gamma^{-1})\omega\,, \qquad (2)$$

является корректным выражением для ПТ в лабораторной ИСО [6 – 11]. Насколько нам известно, метод Зоммерфельда [1 – 3] для получения выражения (2) ранее не применялся. В частности, из (2) следует, что при $v = c$ спин электрона, движущегося по круговой траектории, будет совершать один оборот на один орбитальный оборот электрона. Поскольку выражение (1) непосредственно следует из результатов [1, 2], то выражение (2) могло бы быть получено ещё в 1909 г. К сожалению, поскольку Зоммерфельда в 1931 г. интересовало движение электрона в атоме, которое происходит с достаточно малой скоростью ($v \ll c$), то он ограничился соответствующим разложением по v/c.

Как показано в [9], исследователи долгое время использовали некорректное выражение Л.Х. Томаса для ПТ [5]. В частности, в 1952 г. К. Мёллер (1904 – 1980) в монографии [54] получил выражение для ПТ, которое совпадает с выражением Томаса [5] с точностью до знака. Только в 1961 г. была опубликована известная работа В.И. Ритуса [55], в которой показано, что при движении безмассовой частицы по криволинейной траектории со скоростью c направление её спина всегда будет совпадать с направлением скорости частицы, а направление спина обычной частицы, движущейся со скоростью $v < c$, всегда будет отставать от направления её скорости. Из результатов [55] следует, что спин безмассовой частицы, движущейся по круговой траектории, будет совершать один оборот на один орбитальный оборот частицы относительно лабораторной ИСО. Из результатов [55] путём несложных преобразований может быть получено выражение (2).

Вскоре были опубликованы монография Дж. Джексона (р. 1925 г.) [56] и работы Я.А. Смородинского [47, 48]

[2] В частности, работы Зоммерфельда [32, 33] посвящены векторному анализу в пространстве Минковского, В. Варичак [34 – 37] впервые перешёл от тригонометрии Зоммерфельда на сфере с мнимым радиусом [1, 2] к хорошо известной в то время геометрии Лобачевского (см. также [12, 13]), а Е.Б. Вильсон и Г.Н. Льюис рассмотрели вращение векторов и плоскостей в неевклидовом пространстве [39].

[3] Как показано в [3], $\theta = \pi/2 - \alpha_1 - \alpha_2$, где $\alpha_{1,2}$ — углы при двух вершинах треугольника на сфере, образованного дугами большого диаметра φ_1, φ_2 и φ_3. Поскольку в данном случае скорости v_1 и v_2 ортогональны друг другу, то и дуги φ_1 и φ_2 также ортогональны и, следовательно, $\alpha_3 = \pi/2$. Тогда $\theta = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ — взятый с обратным знаком сферический эксцесс рассматриваемого сферического треугольника [1 – 3, 31].

и А. Чакрабарти (р. 1928) [57], в которых выражение (2) записано уже в явном виде. Однако, несмотря на это, позднее было опубликовано большое число работ, в которых, как показано в [9], использовались различные некорректные выражения для ПТ.

В 2007 г. В.И. Ритус в интересной и важной работе [10] окончательно разрешил вопрос о том, какое из выражений для ПТ является корректным и, в частности, указал на ошибку в вычислениях Мёллера [54]. В следующей работе [11] Ритус рассмотрел вопрос о релятивистском законе сложения неколлинеарных скоростей в самом общем виде. Работы [10, 11] полностью решают проблему прецессии Томаса для релятивистского вращения твёрдого тела или спина одиночной материальной частицы.

6. Роль Зоммерфельда в создании методов геометрической фазы

Поскольку работы Зоммерфельда [1 – 3] занимают видное место в истории создания методов ГФ, которые сейчас широко применяются в поляризационной оптике, классической и квантовой механике и других областях физики [14 – 23], ниже мы кратко перечислим основные этапы истории создания методов ГФ.

1. 1853 г. У.Р. Гамильтон сформулировал так называемую теорему о телесном угле [24], которая утверждает, что если связанная с твёрдым телом ось в процессе конического движения тела описала замкнутую траекторию, то тело повернётся вокруг этой оси на угол, численно равный телесному углу, который описала ось. Доказательство этой теоремы, которое основано на теории умножения кватернионов, занимает 140 страниц монографии [24] (подробнее см. [22]).

2. 1909 г. А. Зоммерфельд показал, что угол между векторами суммы двух взаимно ортогональных скоростей с различной последовательностью суммирования численно равен эксцессу треугольника на сфере с мнимым единичным радиусом, взятому с обратным знаком [1, 2].

3. 1913 г. Э. Борель получил приближённое выражение для ПТ методом параллельного переноса вектора скорости тела на плоскости Лобачевского [41]. В этом же году Л. Фёпль и П. Даниэлл предприняли попытку вывода выражения для ПТ с помощью параллельного переноса связанной с телом оси в пространстве Минковского [45], но допустили ошибку.

4. 1931 г. А. Зоммерфельд получил приближённое выражение для ПТ спина электрона, связав его с эксцессом треугольника на сфере с мнимым единичным радиусом [3, 53].

5. 1938 – 1941 гг. С.М. Рытов (1908 – 1996) [58] и В.В. Владимирский (р. 1915) [59] связали поворот плоскости поляризации света, распространяющегося по неплоской траектории, с телесным углом, который описала касательная к траектории луча (подробнее см. [22, 23]).

6. 1942 г. А.Д. Галанин (1916 – 2000) получил приближённое выражение для ПТ для спина электрона и мезона методом перехода от волнового уравнения к уравнению геометрической оптики с помощью разложения по степеням малого параметра [60], что позволило ему в дальнейшем применить метод [58, 59] (подробнее см. [22]).

7. 1944 – 1952 гг. А.Ю. Ишлинский (1913 – 2003) методом параллельного переноса в трёхмерном евклидовом пространстве доказал теорему о телесном угле, причём не только для твёрдого тела, но и для гирокомпаса [51, 61]. Доказательство А.Ю. Ишлинского, основанное на использовании функции Грина, является весьма коротким (подробнее см. [22]).

8. 1956 г. С. Панчаратнам (1934 – 1969) связал величину дополнительной оптической фазы, которая возникает в процессе циклической эволюции состояния поляризации света, с площадью на сфере Пуанкаре, которую обошла точка, отображающая состояния поляризации [62, 63] (подробнее см. [14, 23]).

9. 1984 г. М. Берри (р. 1941) записал выражение для ГФ в квантовой механике (фаза Берри) [64] (подробнее см. [14 – 18]).

Статья М. Берри [64] инициировала публикацию огромного числа работ, посвящённых различным проявлениям ГФ. В частности, была найдена связь между обусловленной поляризационной невзаимностью [65] (и не связанной с вращением) разностью фаз на выходе волоконного кольцевого интерферометра (ВКИ) и площадью треугольника на сфере Пуанкаре, заданного состоянием поляризации света на входе ВКИ и на обоих выходах ВКИ [19 – 21, 23]. Также удалось показать, что угол поворота твёрдого тела, происходящего при его движении по криволинейной траектории вследствие ПТ, численно равен наблюдаемому в неподвижной системе отсчёта телесному углу, который описывает связанная с телом ось вследствие релятивистской аберрации — изменения поворота изображения тела, обусловленного лоренцевским сокращением длины и запаздыванием света, испущенного различными участками тела [7 – 9].

7. Заключение

А. Зоммерфельд в 1909 г. был вторым после У.Р. Гамильтона, кто использовал метод ГФ, и первым, кто применил этот метод для вычисления релятивистской суммы неколлинеарных скоростей и демонстрации того, что эта операция является некоммутативной [1, 2]. В 1931 г. Зоммерфельд использовал метод ГФ для вычисления величины ПТ [3]. Следует отметить, что результаты [1, 2] позволяли получить корректное выражение для ПТ ещё в 1909 г. Предложенный Зоммерфельдом расчётный метод на сфере с мнимым радиусом оказался существенно более простым и физически более наглядным, по сравнению с методом геометрии Лобачевского [13].

Автор выражает благодарность В.И. Ритусу за многочисленные полезные обсуждения, Э.Г. Малыкину и В.И. Поздняковой — за помощь в работе, Г.В. Колесниковой и С. Уолтеру — за помощь в поиске ряда публикаций. Работа частично поддержана грантом Совета при Президенте РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-1931.2008.2.

Список литературы

1. Sommerfeld A *Phys. Z.* **10** 826 (1909)
2. Sommerfeld A *Verhandlungen Deutschen Phys. Gesellschaft* **11** 577 (1909)
3. Sommerfeld A *Atombau und Spektrallinien* Bd. 1 (Braunshweig: F. Vieweg & Sohn, 1931) S. 707 [Зоммерфельд А *Строение атома и спектры* Т. 1 (М.: ГИТТЛ, 1956) с. 579]
4. Thomas L H *Nature* **117** 514 (1926)
5. Thomas L H *Philos. Mag. Ser. 7* **3** 1 (1927)

6. Малыкин Г Б, Пермитин Г В "Томасовская прецессия", в кн. *Физическая энциклопедия* Т. 5 (М.: Большая Рос. энциклопедия, 1998) с. 123
7. Малыкин Г Б *УФН* **169** 585 (1999) [Malykin G B *Phys. Usp.* **42** 505 (1999)]
8. Малыкин Г Б *Приклад. мат. мех.* **63** 775 (1999) [Malykin G B *J. Appl. Math. Mech.* **63** 731 (1999)]
9. Малыкин Г Б *УФН* **176** 865 (2006) [Malykin G B *Phys. Usp.* **49** 837 (2006)]
10. Ритус В И *УФН* **177** 105 (2007) [Ritus V I *Phys. Usp.* **50** 95 (2007)]
11. Ритус В И *УФН* **178** 739 (2008) [Ritus V I *Phys. Usp.* **51** 709 (2008)]
12. Belloni L, Reina C *Eur. J. Phys.* **7** 55 (1986) [Беллони Л, Рейна Ч, в сб. *Эйнштейновский сборник. 1984 – 1985* (Под ред. И Ю Кобзарева) (М.: Наука, 1988) с. 201]
13. Walter S "The non-Euclidean style of Minkowskian relativity", in *The Symbolic Universe: Geometry and Physics 1890 – 1930* (Ed. J Gray) (Oxford: Oxford Univ. Press, 1999) p. 91 – 127; http://www.univ-nancy2.fr/DepPhilo/walter/papers/nes.pdf
14. Виницкий С И и др. *УФН* **160** (6) 1 (1990) [Vinitskii S I et al. *Sov. Phys. Usp.* **33** 403 (1990)]
15. Berry M *Phys. Today* **43** (12) 34 (1990)
16. Anandan J *Nature* **360** 307 (1992)
17. Клышко Д Н *УФН* **163** (11) 1 (1993) [Klyshko D N *Phys. Usp.* **36** 1005 (1993)]
18. Боднарчук В И, Давтян Л С, Корнеев Д А *УФН* **166** 185 (1996) [Bodnarchuk V I, Davtyan L S, Korneev D A *Phys. Usp.* **39** 169 (1996)]
19. Малыкин Г Б *Оптика и спектроскопия* **81** 474 (1996) [Malykin G B *Opt. Spectrosc.* **81** 431 (1996)]
20. Малыкин Г Б *Изв. вузов. Радиофизика* **40** 265 (1997) [Malykin G B *Radiophys. Quantum Electron.* **40** 175 (1997)]
21. Малыкин Г Б *Оптика и спектроскопия* **84** 515 (1998) [Malykin G B *Opt. Spectrosc.* **84** 455 (1998)]
22. Малыкин Г Б, Харламов С А *УФН* **173** 985 (2003) [Malykin G B, Kharlamov S A *Phys. Usp.* **46** 957 (2003)]
23. Малыкин Г Б, Позднякова В И *УФН* **174** 303 (2004) [Malykin G B, Pozdnyakova V I *Phys. Usp.* **47** 289 (2004)]
24. Hamilton W R *Lectures on Quaternions* (Dublin: Hodges and Smith, 1853) pp. 338 – 340
25. Larmor J *Aether and Matter* (Cambridge: Univ. Press, 1900) [Лармор Дж "Эфир и материя", в сб. *Принцип относительности* (Сост. А А Тяпкин) (М.: Атомиздат, 1973) с. 48]
26. Einstein A *Ann. Physik* **17** 891 (1905) [Эйнштейн А *Собрание сочинений* Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 7]
27. Poincaré H *Palermo Rend.* **21** 129 (1906) [Пуанкаре А *Избранные труды* Т. 3 (М.: Наука, 1974) с. 433]
28. Fizeau H *C.R. Acad. Sci. Paris* **33** 349 (1851) [Физо И, в сб. *Творцы физической оптики* (Сост. У И Франкфурт) (М.: Наука, 1973) с. 214]
29. Малыкин Г Б *УФН* **170** 1325 (2000) [Malykin G B *Phys. Usp.* **43** 1229 (2000)]
30. Minkowski G *Phys. Z.* **10** 104 (1909) [Минковский Г, в сб. *Принцип относительности* (Под ред В К Фредерикса, Д Д Иваненко) (Л.: ОНТИ, 1935) с. 181; в сб. *Принцип относительности* (Сост. А А Тяпкин) (М.: Атомиздат, 1973) с. 167]
31. Crantz P *Sphärische Trigonometrie* (Leipzig: B.G. Teubner, 1920) [Кранц П *Сферическая тригонометрия* (Берлин: И.П. Ладыжников, 1923); 2-е изд. (М.: URSS, 2007)]
32. Sommerfeld A *Ann. Physik* **337** 749 (1910)
33. Sommerfeld A *Ann. Physik* **338** 649 (1910)]
34. Varičak V *Phys. Z.* **11** 93 (1910)
35. Varičak V *Phys. Z.* **11** 287 (1910)
36. Varičak V *Phys. Z.* **11** 586 (1910)
37. Varičak V *Jayhresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **21** 103 (1912)
38. Laue M *Das Relativip* (Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1911)
39. Wilson E B, Lewis G N *Proc. Am. Acad. Arts Sci.* **48** 387 (1912)
40. Robb A A *Optical Geometry of Motion: A New View of the Theory of Relativity* (Cambridge: W. Heffer and Sons, 1911)
41. Borel É *C.R. Acad. Sci. Paris* **156** 215 (1913)
42. Borel É *C.R. Acad. Sci. Paris* **157** 703 (1913)
43. Borel É *Introduction Géométrique* (Paris: Gauthier-Villar, 1914)
44. Ogura K *Tóhoku Univ. Sci. Rep.* **2** 95 (1913)
45. Föppl L, Daniell P *Gött. Nachr.* (4) 519 (1913)
46. Silberstein L *The Theory of Relativity* (London: Macmillan and Co., 1914)
47. Смородинский Я А *ЖЭТФ* **43** 2217 (1962) [Smorodinskij Ya A *Sov. Phys. JETP* **16** 1566 (1963)]
48. Смородинский Я А *Атомная энергия* **14** 110 (1963) [Smorodinskii Ya A *Atom. Energ.* **14** 102 (1963)]
49. Пермитин Г В, Смирнов А И *ЖЭТФ* **119** 16 (2001) [Permitin G V, Smirnov A I *JETP* **92** 10 (2001)]
50. Rhodes J A, Semon M D *Am. J. Phys.* **72** 943 (2004)
51. Ишлинский А Ю *Механика специальных гироскопических систем* (Киев: Изд-во АН УССР, 1952)
52. Goudsmit S, Uhlenbeck G E *Physica* **5** 266 (1925)
53. Sommerfeld A *Atti dei Convegni di Fisica Nucleare* (Roma, 1931, 1932)
54. Møller C *The Theory of Relativity* (Oxford: Clarendon Press, 1952; 2nd ed., 1972) [Мёллер К *Теория относительности* (М.: Атомиздат, 1975)]
55. Ритус В И *ЖЭТФ* **40** 352 (1961) [Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **13** 240 (1961)]
56. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1962) [Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)]
57. Chakrabarti A *J. Math. Phys.* **5** 1747 (1964)
58. Рытов С М *ДАН СССР* **18** 263 (1938) [Rytov S M *C.R.* (*Dokl.*) *Acad. Sci. USSR* **18** 263 (1938)]
59. Владимирский В В *ДАН СССР* **31** 222 (1941)
60. Galanin A D *J. Phys. USSR* **6** 35 (1942)
61. Ишлинский А Ю *Приборостроение. Техн.-произв. бюлл.* (4) 3 (1944)
62. Pancharatnam S *Proc. Ind. Acad. Sci.* **A44** 247 (1956)
63. Pancharatnam S *Proc. Ind. Acad. Sci.* **A44** 398 (1956)
64. Berry M V *Proc. R. Soc. London A* **392** 45 (1984)
65. Андронова И А, Малыкин Г Б *УФН* **172** 849 (2002) [Andronova I A, Malykin G B *Phys. Usp.* **45** 793 (2002)]

Noncommutative nature of the addition of noncollinear velocities in special relativity and the geometric phase method

(commemorating the publication centennial of A Sommerfeld's work)

G.B. Malykin

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
Tel. (7-831) 416-48 70. Fax (7-831) 436-37 92. E-mail: malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

In 1909, A Sommerfeld used geometric calculations to show that the relativistic addition of two noncollinear velocities on an imaginary-radius sphere is a noncommutative operation. Sommerfeld was the first to use the geometric phase method to calculate the angle between the resulting velocities depending on the order in which they are added. For this, he related the value of this angle to the excess of the spherical triangle formed by the two original velocities and their sum. In 1931, Sommerfeld applied his method to analyze the Thomas precession.

PACS numbers: **01.65.+g**, **03.30.+p**, 03.65.Vf DOI: 10.3367/UFNr.0180.201009d.0965

Bibliography — 65 references *Received 11 September 2009*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180** (9) 965 – 969 (2010) *Physics – Uspekhi* **53** (9) (2010)