Август 2010 г. **Том 180, № 8**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

Птицы и лягушки в математике и физике [1*]

Ф. Дайсон

Бывают учёные-птицы, а бывают и учёные-лягушки. Птицы парят в вышине и обозревают обширные пространства математики, сколько видит глаз. Наслаждение им доставляют понятия, которые сводят наши размышления воедино и совместно рассматривают задачи, возникающие в разнообразных элементах пейзажа. Лягушки же копошатся далеко внизу в грязи и видят только растущие поблизости цветы. Для них наслаждение — внимательно разглядывать конкретные объекты; задачи они решают последовательно, одну за другой. Краткая история развития математики и её приложений в физике изложена в этой статье.

PACS numbers: 01.30.Bb, **01.65.+g**, **01.70.+w** DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008f.0859

От редакционной коллегии. О лекции Дайсона я узнал от Ю.Б. Данояна (приславшего мне интернет-ссылку: http://www.pims.math.ca/scientific/scientific-lecture/ams-einstein-public-lecture-freeman-dyson-birds-and-frogs) в январе 2009 года. В марте того же года по приглашению фонда "Династия" Дайсон приехал в Москву и прочитал 23 марта 2009 года в ФИАНе публичную лекцию "Еретические мысли о науке и обществе" (см. http://elementy.ru/events/428499). Во время этого визита я договорился с ним, что переработанный им вариант "Птиц и лягушек" будет опубликован в *УФН*. В июне он прислал этот переработанный вариант, в который он включил, в частности, упоминание о пионерской статье Фока, положившей начало фундаментальной квантово-механической симметрии — градиентной (калибровочной) инвариантности. Кроме того, он сослался на одну из моих статей об истории калибровочной симметрии и роли В.А. Фока в её создании. Поскольку ни эта статья, ни сама статья Фока не были опубликованы на русском языке, редакционная коллегия посчитала необходимым опубликовать их переводы в этом же номере *УФН*, в котором публикуется перевод лекции Дайсона.

Л.Б. Окунь

Содержание

Ф. Дайсон (F. Dyson). Институт перспективных исследований, Принстон, шт. Нью-Джерси, США. E-mail: dyson@ias.edu

Статья поступила 23 июня 2009 г.
Перевёл с английского для настоящего издания *В.И. Кисин*

Фримен Дайсон (слева) отвечает на вопросы слушателей после лекции "Еретические мысли о науке и обществе", организованной благотворительным фондом "Династия" (23 марта 2009 г., ФИАН).

1. Введение

Бывают учёные-птицы, а бывают и учёные-лягушки. Птицы парят в вышине и обозревают обширные пространства математики, сколько видит глаз. Наслаждение

[1*] Эйнштейновская лекция, подготовленная Ф. Дайсоном для заседания Американского математического общества в Ванкувере (Канада), 4 ноября 2008 г., опубликована в *Notices of the Amer. Math. Soc.* **56** (2) 212–223 (2009). Текст лекции, переработанный автором специально для журнала *Успехи физических наук*, публикуется с любезного разрешения Американского математического общества.

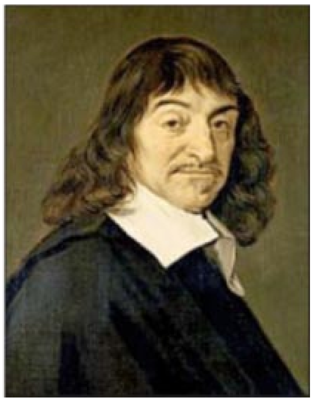
им доставляют понятия, которые сводят наши размышления воедино и позволяют совместно рассматривать задачи, возникающие в разнообразных элементах пейзажа. Лягушки же копошатся далеко внизу в грязи и видят только растущие поблизости цветы. Для них наслаждение — внимательно разглядывать конкретные объекты; задачи они решают последовательно, одну за другой. Сам я — лягушка, а среди моих близких друзей немало птиц. Отсюда и основная тема моей сегодняшней лекции: математике необходимы и птицы, и лягушки. Математика сложна и прекрасна потому, что птицы привносят в неё широкий взгляд, а лягушки — замысловатые детали. Математика сочетает в себе общность принципов и глубину структур, что делает её и великим искусством, и важной наукой. Было бы глупо утверждать, что птицы лучше лягушек, ибо видят дальше, или что лягушки лучше птиц, ибо проницают глубже. Мир математики широк и глубок, и для его изучения нужны и птицы, и лягушки.

Сегодняшняя лекция — Эйнштейновская, и я благодарен Американскому математическому обществу за приглашение отдать дань уважения Альберту Эйнштейну. Эйнштейн был физиком, а не математиком, и его отношение к математике было двойственным. С одной стороны, он с огромным уважением говорил о мощи математики при описании того, что мы наблюдаем в природе; он инстинктивно понимал, какая математика красива, и этот инстинкт освещал ему путь к отысканию законов природы. С другой стороны, чистая математика его не интересовала и аппаратом математики он не владел. По прошествии ряда лет он начал нанимать молодых коллег на должность ассистентов, и они выполняли для него математическую часть работы. Мыслил он как физик, а не как математик. Среди физиков он возвышался над всеми, как птица, которая видит дальше всех. Но об Эйнштейне я говорить не буду — я не могу добавить ничего ещё не сказанного.

2. Фрэнсис Бэкон и Рене Декарт

В начале семнадцатого века два великих философа, Фрэнсис Бэкон в Англии и Рене Декарт во Франции, объявили о рождении современной науки. Декарт был птицей, а Бэкон — лягушкой. Оба сформулировали, каким они видят будущее, а видели они его весьма неодинаково. По выражению Бэкона: "Самое главное — не давать умственному взору отвлекаться от созерцания природных фактов"[1]. Декарт же говорил: "Я мыслю, следовательно, я существую". По Бэкону, исследователям необходимо путешествовать по свету и собирать фактическую информацию, и в конце концов накопленные факты покажут, как устроена природа. Из этих фактов учёные выведут законы, которым подчиняется природа. По Декарту же, учёным следует сидеть дома и исключительно силой мысли постигать законы природы. Всё, что требуется учёным для дедукции правильных законов — это следовать правилам логики и не забывать о существовании Всевышнего. Бэкон и Декарт вывели

Фрэнсис Бэкон



Рене Декарт

науку на этот путь четыреста лет назад, и с тех пор она мчится вперёд по обеим траекториям одновременно. Сами по себе ни бэконовский эмпиризм, ни декартов догматизм не способны выявить секреты природы, но вместе они оказались удивительно успешными. Вот уже четыреста лет английские учёные — преимущественно бэконианцы, а французские — преимущественно картезианцы. И Фарадей, и Дарвин, и Резерфорд были бэконианцами, а Паскаль, Лаплас и Пуанкаре — картезианцами. Перекрёстное оплодотворение двух столь контрастирующих национальных культур необыкновенно обогатило науку. В обеих странах всегда сосуществовали обе культуры. Ньютон был в душе картезианецем и использовал чистую работу мысли, как это предписывал Декарт, в частности, для того чтобы сокрушить картезианскую догму о вихрях. Мари Кюри была в душе бэконианкой и для сокрушения догмы о неразрушимости атомов подвергала кипячению тонны и тонны необогащённой урановой руды.

В истории математики двадцатого века произошло два ключевых события, одно из которых восходило к бэконовской традиции, а другое — к картезианской. Первое — это Международный конгресс математиков в 1900 г. в Париже, на котором Гильберт в своём ключевом докладе наметил путь развития математики в наступающем столетии. Он провозгласил свой знаменитый список из двадцати трёх замечательных нерешённых проблем. Сам Гильберт был птицей и парил над всем пространством математики, но проблемы свои он адресовал лягушкам, которые будут решать их одну за другой. Второе событие решающего значения — это образование группы математиков под псевдонимом Николя Бурбаки во Франции в тридцатые годы XX века; их целью было выпустить серию учебников, которые установили бы единую систему взглядов для всей математики. Проблемы Гильберта направили математические исследования в новые плодотворные области и дали замечательные результаты. Некоторые проблемы были решены, а некоторые остаются нерешёнными, но почти каждая стимулировала появление новых идей и новых областей математики. Проект Бурбаки оказался столь же влиятельным. Он изменил стиль работы математиков на последующие пятьдесят лет, навязав им логическую связность, которой до этого не было, и сместил упор с конкретных примеров на абстрактные обобщения. В мире Бурбаки математика есть сумма абстрактных структур, заключённых в учебниках Бурбаки. То, чего нет в учебниках, — это не математика. Поскольку в

[1] "All depends on keeping the eye steadily fixed on the facts of nature, and so receiving their images simply as they are", — "Таково положение вещей, если кто, не отводя от вещей умственного взора, воспримет их образы такими, каковы они на деле". ("Великое восстановление наук, Предисловие", в *Бэкон Ф. Сочинения*. В 2-х томах, Т. I (М.: Мысль (Философское наследие), 1971) с. 59–84.) (*Примеч. перевод.*)

учебниках нельзя найти конкретных примеров, значит, примеры — не математика. Проект Бурбаки явился крайним выражением картезианского стиля математики. Он сузил рамки математики, исключив из неё прекрасные цветы, которые путешественники-бэконианцы могли бы найти на обочине.

3. Природа шутит

Мне, бэконианцу, в программе Бурбаки не хватает основного — элемента неожиданности. Проект Бурбаки был попыткой сделать математику логически совершенной. Проглядывая историю математики, я нахожу в ней алогичные скачки, маловероятные совпадения, шутки природы. Одной из самых глубоких насмешек природы явился квадратный корень из минус единицы. Эрвин Шрёдингер ввёл его в волновое уравнение, когда в 1926 г. он изобрёл волновую механику. Шрёдингер был птицей и начал с идеи объединения механики с оптикой. За сто лет до него Гамильтон сумел объединить классическую механику с лучевой оптикой, используя одну и ту же математику для описания оптических лучей и траекторий классических частиц. Идея Шрёдингера заключалась в том, чтобы распространить это объединение на волновую оптику и волновую механику. Волновая оптика уже существовала, а волновой механики ещё не было. Шрёдингеру для завершения объединения нужно было создать волновую механику. Выбрав волновую оптику в качестве модели, он записал дифференциальное уравнение для механической частицы, но уравнение получилось бессмысленным. Оно выглядело, как уравнение теплопроводности в сплошной среде. Уравнение теплопроводности явного отношения к механике частиц не имеет. Казалось бы, идея Шрёдингера вела в тупик. Но тут случилось неожиданное. Шрёдингер ввёл в уравнение квадратный корень из минус единицы, и сразу всё стало разумным. Неожиданно выражение перестало быть уравнением теплопроводности и превратилось в волновое уравнение. И к своей радости, Шрёдингер обнаружил, что решения этого уравнения соответствуют квантованным орбитам модели атома Бора.

Выяснилось, что уравнение Шрёдингера правильно описывает всё, что нам известно о поведении атомов. На нём основывается вся химия и бóльшая часть физики. А квадратный корень из -1 означает, что природа имеет дело с комплексными числами, а не с действительными. Это открытие и для Шрёдингера, и для всех остальных оказалось полной неожиданностью. Шрёдингер рассказывал, что его четырнадцатилетняя подруга Ита Юнгер сказала ему тогда же: "Послушай, когда ты начинал, ты и не думал, что из этого выйдет столько всего путного". На протяжении девятнадцатого века математики, от Абеля до Римана и Вейерштрасса, воздвигали великолепное здание теории функций комплексного переменного. Они обнаружили, что теория функций становится намного глубже и мощнее, если её распространить на комплексные числа. Но они всегда были уверены, что комплексные числа — конструкция искусственная, придуманная людьми, полезная и изящная математическая абстракция, не связанная с реальной жизнью. Им и в голову не могло прийти, что эта изобретённая ими искусственная система чисел является тем фундаментом, на котором зиждется движение атомов. Они не могли вообразить, что и в этом природа опередила человека.

Вторая шутка, сыгранная природой, — это точная линейность квантовой механики, т.е. тот факт, что все возможные состояния любого физического объекта образуют линейное пространство. До изобретения квантовой механики классическая физика всегда была нелинейной, а линейные модели работали только приближённо. С приходом квантовой механики сама природа неожиданно стала линейной. Для математики это имело важные последствия. В девятнадцатом веке Софус Ли, для того чтобы прояснить поведение классических динамических систем, разработал детальную теорию непрерывных групп. В тот момент группы Ли не вызвали заметного интереса ни у математиков, ни у физиков. Математикам нелинейная теория казалась чересчур сложной, а физикам — чересчур туманной. Ли не скрывал разочарования до самой смерти. И вот через пятьдесят лет стало понятно, что природа совершенно линейна и что теория линейных представлений алгебр Ли является естественным языком физики элементарных частиц. Группы Ли и алгебры Ли родились заново как центральные темы математики двадцатого века.

Третья шутка, сыгранная природой, — это существование квазикристаллов. В девятнадцатом веке изучение кристаллов привело к полному перечислению возможных дискретных групп симметрии в евклидовом пространстве. Были доказаны теоремы, устанавливающие, что дискретные группы симметрии в трёхмерном пространстве содержат вращения только третьего, четвёртого и шестого порядков. И вот в 1984 г. были открыты квазикристаллы, реальные твёрдые объекты, выраставшие в жидких металлических сплавах и обладавшие симметрией икосаэдрических групп, куда входят и вращения пятого порядка. А между тем математик Роджер Пенроуз открыл мозаики Пенроуза — метод замощения плоскости. Мозаики Пенроуза представляют собой систему параллелограммов, которыми можно замостить плоскость с дальним — пентагональным — порядком симметрии. Квазикристаллические сплавы оказались трёхмерным аналогом двумерных мозаик Пенроуза. После этих открытий математикам пришлось расширить теорию кристаллографических групп так, чтобы она включила в себя и описание квазикристаллов. Это важное направление исследований, ведущихся и поныне.

Четвёртая шутка, сыгранная природой, — это аналогия между поведением квазикристаллов и нулей дзета-функции Римана. Нули дзета-функции занимают внимание математиков тем, что лежат на прямой, а почему — никто не понимает. Утверждение, что, за вычетом тривиальных исключений, все нули лежат на прямой линии, составляет содержание знаменитой гипотезы Римана. Молодые математики мечтают доказать гипотезу Римана вот уже более ста лет. Сейчас я сделаю выходящее за все рамки предположение: быть может, нам удастся доказать гипотезу Римана с помощью квазикристаллов. Я не удивлюсь, если читатели-математики сочтут это предположение поверхностным, а нематематики — неинтересным. Я всё-таки прошу уделить этому предположению серьёзное внимание. Во времена своей молодости физик Лео Сциллард был неудовлетворён десятью заповедями Моисея и написал взамен новый свод из десяти заповедей. Вторая заповедь от Сцилларда гласит: "Пусть дела твои будут устремлены к достойной цели, но не спрашивай, удастся ли её достичь: дела твои должны быть примером и образцом для подражания, а не средством для достижения цели". Сциллард следовал собственным советам. Он был первым физиком, сумевшим представить себе, чем окажется ядерное оружие, и первым, кто начал активную кампанию по предотвращению его использования. Его вторая заповедь прекрасно применима в нашем случае. Доказательство гипотезы Римана — цель достойная, и не нам спрашивать, достигнем мы этой цели или нет. Вот несколько подсказок, как достичь успеха. Я передам слово себе-математику, каким я был полвека тому назад, до превращения в физика. Вначале речь пойдёт о гипотезе Римана, затем о квазикристаллах.

До недавнего времени в мире чистой математики сохранялись две главные нерешённые проблемы: доказательство Последней теоремы Ферма и доказательство гипотезы Римана. Двенадцать лет тому назад Эндрю Уайлс, мой принстонский коллега, расправился с Последней теоремой Ферма, так что остаётся только гипотеза Римана. Доказательство Уайлса теоремы Ферма было далеко не только техническим достижением. Потребовалось открыть и исследовать новую область математических идей, значительно более широкую и многообещающую, чем сама теорема Ферма. Очень вероятно, что и доказательство гипотезы Римана принесёт более глубокое понимание разных областей математики, а может быть и физики. Дзета-функция Римана, как и другие аналогичные дзета-функции, появляется повсюду в теории чисел, теории динамических систем, геометрии, теории функций, в физике. Дзета-функция обнаруживается в тех точках, откуда пути ведут во многих направлениях. Доказательство этой гипотезы высветит все связи. Когда я был молод и изучал чистую математику, я, как всякий студент, мечтал доказать гипотезу Римана. У меня были расплывчатые идеи, которые, как я думал, могли привести к доказательству. В последние годы, после открытия квазикристаллов, мои идеи стали несколько менее расплывчатыми. Я предлагаю их здесь вниманию всех молодых математиков, намеревающихся удостоиться медали Филдса.

Квазикристаллы могут возникать в пространствах одного, двух и трёх измерений. С точки зрения физика, интереснее всего трёхмерные квазикристаллы, поскольку они существуют в нашем трёхмерном мире и доступны экспериментальному изучению. С точки же зрения математика, одномерные квазикристаллы несравненно интереснее двумерных и трёхмерных, потому что они гораздо более разнообразны. Вот математическое определение квазикристалла: квазикристалл — это распределение дискретных точечных масс, фурье-преобразование которых есть распределение дискретных точек в частотном пространстве. Ещё короче, квазикристалл — это чисто точечное распределение с чисто точечным спектром. Это определение включает в себя в качестве специального случая и обычные кристаллы как периодические распределения с периодическими спектрами.

Если оставить в стороне обычные кристаллы, то разнообразие трёхмерных квазикристаллов оказывается очень ограниченным, ибо все они связаны с икосаэдрической группой вращений. Двумерных квазикристаллов больше, на каждый плоский правильный многоугольник приходится примерно один тип. Двумерные квазикристаллы пентагональной симметрии — это и есть знаменитые мозаики Пенроуза. И наконец, структура одномерных квазикристаллов намного богаче, ибо они не связаны никакой вращательной симметрией. Насколько мне известно, не существует полного перечисления одномерных квазикристаллов. Мы знаем, что каждому числу Пизо – Виджаяраргхавана (ПВ) соответствует один и только один квазикристалл. Число ПВ — это действительное целое алгебраическое число, являющееся корнем полиномиального уравнения с целыми коэффициентами, такого, что абсолютная величина всех других корней меньше единицы [1]. Множество всех чисел ПВ является бесконечным и обладает весьма необычной топологической структурой. Множество всех одномерных квазикристаллов, по крайней мере, не беднее множества всех чисел ПВ, а возможно, и намного богаче. Точно мы не знаем, но, по всей вероятности, огромный мир одномерных квазикристаллов, не привязанных к числам ПВ, ещё ждёт своего первооткрывателя.

Теперь я перейду к тому, какова связь между одномерными квазикристаллами и гипотезой Римана. Если гипотеза Римана верна, то тогда, в силу определения, нули дзета-функции образуют одномерный квазикристалл. Они составляют распределение точечных масс на прямой линии, а их фурье-преобразование — тоже распределение точечных масс, по одной на каждый логарифм обычных простых чисел и их целых степеней. Мой друг Эндрю Одлыжко опубликовал красивый компьютерный расчёт фурье-преобразования нулей дзета-функции [2]. Расчёт прекрасно выявляет ожидаемую структуру фурье-преобразования, с разрывом на каждом логарифме простого числа и его целой степени, и только на них.

Вот что я предлагаю. Сделаем вид, что мы не знаем, что гипотеза Римана справедлива. Подойдём к проблеме с другого конца. Попробуем получить полное перечисление и классификацию одномерных квазикристаллов. Иными словами, мы перечислим и классифицируем все точечные распределения, обладающие дискретным точечным спектром. Собирание и классификация новых видов объектов — это типичнейшая бэконианская деятельность, вполне в духе математиков-лягушек. Тогда мы найдём хорошо знакомые квазикристаллы, связанные с числами ПВ, а вместе с ними и целую вселенную известных и ещё неизвестных квазикристаллов. В океане прочих квазикристаллов мы отыщем один, соответствующий дзета-функции Римана, и по одному для прочих дзета-функций, напоминающих риманову. Допустим, что мы нашли в нашем списке один квазикристалл, свойства которого отождествляют его с нулями дзета-функции Римана. Тем самым мы доказали гипотезу Римана и можем ждать телефонного звонка, извещающегося нас о награждении медалью Филдса.

Это, конечно, лишь пустые мечтания. Проблема классификации одномерных квазикристаллов чудовищно трудна, и она, быть может, не легче, чем те проблемы, на решение которых у Эндрю Уайлса ушло семь лет. Но если мы взглянем на это с бэконианской точки зрения, то история математики — это история того, как чудовищно трудные задачи решались молодыми людьми, просто не знавшими, что решение невозможно. Классификация квазикристаллов — задача достойная, и может оказаться, что решение достижимо. Проблемы такой степени трудности не решить старикам вроде меня. Я оставляю эту проблему в качестве упражнения молодым лягушкам, сидящим в зале.

4. Абрам Безикович и Герман Вейль

Теперь я хочу рассказать вам о некоторых лягушках и птицах, с которыми я был лично знаком. Я стал студентом Кембриджского университета в 1941 г., и мне необыкновенно повезло: моим научным руководителем назначили российского математика Абрама Самойловича Безиковича. Вторая мировая война была в самом разгаре, так что в Кембридже было очень мало студентов и почти не было аспирантов. Хотя мне было только семнадцать лет, а Безикович был уже знаменитым профессором, он уделил мне довольно много внимания и времени и мы подружились на всю жизнь. Он определил тот стиль, в котором я начал работать и думать о математике. Он читал удивительные лекции по теории меры и интегрированию. Когда мы смеялись над его манерой отчаянно коверкать английский язык, он только мило улыбался. Мне запомнился единственный случай, когда наш смех вывел его из равновесия. Некоторое время он молчал, а потом произнёс примерно следующее: "Джентельмены. Пятьдесят миллионов англичан говорят на том английском, на котором говорите вы. Сто пятьдесят миллионов русских говорят на том английском, на котором говорю я".

Безикович был лягушкой и прославился ещё молодым, когда решил задачу из элементарной геометрии на плоскости, известную как задача Какейя. Она состояла в следующем. Отрезок прямой единичной длины может свободно перемещаться по плоскости и при этом поворачиваться на 360 градусов. Какую наименьшую площадь он заметает при этом вращении? Задача была сформулирована в 1917 г. японским математиком Какейя и оставалась знаменитой нерешённой задачей в течение десяти лет. Ведущий американский математик того времени Джордж Биркхоф публично объявил, что задача Какейя и проблема четырёх красок — это самые важные нерешённые математические проблемы. Многие полагали, что наименьшая площадь составит $\pi/8$, а это площадь гипоциклоиды с тремя остриями. Это очень красивая кривая с тремя точками возврата. Это кривая, описываемая внутри круга радиусом три четверти точкой, лежащей на внешней границе круга радиусом в одну четверть, катящегося по внутренней границе бóльшего круга. Отрезок единичной длины может поворачиваться, оставаясь касательным к гипоциклоиде, причём обе концевые точки отрезка остаются на гипоциклоиде. Этот образ отрезка, поворачивающегося внутри гипоциклоиды и одновременно касающегося её в трёх точках, был столь изящен, что большинство математиков было уверено, что при этом должна заметаться минимальная площадь. И вот Безикович поразил всех, доказав, что для любого положительного ε площадь, заметаемая поворачивающимся отрезком, может быть меньше ε.

Безикович решил эту задачу в 1920 г. ещё до того, как она стала знаменитой, и даже не зная, что Какейя сформулировал её. В 1920 г. Безикович опубликовал своё решение на русском языке в малоизвестном журнале Пермского математического общества. После революции в России Пермский университет, в 1100 километрах к востоку от Москвы, ненадолго стал прибежищем для многих известных математиков. Они издали два тома своего журнала, после чего в хаосе революции и гражданской войны журнал прекратил существование. За пределами России журнал был не только неизвестен, но и

Абрам Безикович Герман Вейль

совершенно недоступен. Безикович уехал из России в 1925 г. и прибыл в Копенгаген, где и узнал о знаменитой задаче Какейя, которую он решил за пять лет до этого. Он снова опубликовал её решение, на этот раз по-английски в *Mathematische Zeitschrift*. Задача Какейя, в той форме, в какой Какейя её предложил, была типичной задачей для лягушек — конкретной задачей, почти не перекликающейся с остальной математикой. Безикович нашёл изящное и глубокое решение, которое выявило связь с общими теоремами о структуре множеств точек на плоскости.

Ярче всего стиль Безиковича виден в его трёх классических работах, озаглавленных "О фундаментальных геометрических свойствах множеств точек на плоскости с линейной мерой", опубликованных в *Mathematische Annalen* в 1928, 1938 и 1939 гг. В этих статьях он доказал, что любое множество на плоскости с линейной мерой допускает разбиение на регулярную и нерегулярную компоненты и что регулярная компонента имеет касательную почти в каждой точке, а нерегулярная компонента имеет почти по всем направлениям проекцию нулевой меры. Грубо говоря, регулярная компонента выглядит как набор непрерывных кривых, а нерегулярная компонента совсем не похожа на непрерывную кривую. Существование и свойства нерегулярной компоненты связаны с решением Безиковича задачи Какейя. Одной из задач, которые он поставил передо мной, было разбиение измеримых множеств на регулярную и нерегулярную компоненты в пространствах более высоких размерностей. В решении этой задачи я не продвинулся ни на йоту, но стилем Безиковича заразился навсегда. Стиль Безиковича — стиль архитектурный. Он выстраивает из простых элементов утончённую и сложную структуру, как правило, по иерархическому плану, и по завершении строительства, из законченной структуры с помощью простых аргументов извлекается неожиданный вывод. Каждое доказательство Безиковича — это произведение искусства, сотворённое так же тщательно, как фуга Баха.

Через несколько лет после стажировки у Безиковича я приехал в Принстон и познакомился с Германом Вейлем. Вейль был настолько же типичной птицей, как Безикович — лягушкой. Мне повезло — наши пути пересеклись на год в Принстонском институте перспективных исследований, прежде чем он покинул институт, выйдя на пенсию и вернувшись домой в Цюрих. Я ему понравился, поскольку в течение того года я публиковал статьи по теории чисел в *Annals of Mathematics* и по квантовой теории излучения — в *Physical Review*. Он был одним из немногих, кто чувствовал себя как дома в обеих областях. Он был рад моему появлению в институте, в надежде, что я стану птицей, как и он. Я обманул его ожидания. Я упрямо оставался лягушкой. Хотя я и заглядывал в разнообразные норы, но видел только каждую в отдельности и связей между ними не искал. Для меня теория чисел и квантовая теория всегда были отдельными мирами, красивыми каждый по-своему. Я не смотрел на них глазами Вейля, надеявшегося отыскать ключи к глобальному замыслу.

Вейль внёс великий вклад в квантовую теорию излучения: он придумал калибровочные поля. История калибровочных полей довольно любопытна. Вейль их придумал в 1918 г. как классические поля в его общей теории относительности и электромагнетизма [3]. Он назвал поля калибровочными, поскольку дело касалось неинтегрируемости измерений длины. Эйнштейн немедленно (и публично) отверг его общую теорию. После такого удара небесного грома Вейль свою теорию не забросил, но занялся другими вещами. Проверяемых экспериментальных следствий его теория не предлагала. И тут Шрёдингер придумал волновую механику, а три независимые публикации Фока, Клейна и Гордона в 1926 г. предложили релятивистское волновое уравнение для заряженной частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем. Один Фок сумел заметить, что волновое уравнение инвариантно относительно группы преобразований, которые он назвал "градиентными" [4][2*]. Авторитетный российский учебник по теории поля [5] называет эту инвариантность "градиентной инвариантностью" и приписывает её открытие Фоку. Тем временем, Фриц Лондон в 1927 г. и Вейль в 1928 г. отметили, что градиентная инвариантность в квантовой механике тесно связана с калибровочной инвариантностью вейлевской версии общей теории относительности. Детальное описание истории этого вопроса можно прочитать в работе Окуня [6][3*]. Вейль понял, что его калибровочные поля подходят для квантового мира намного лучше, чем для классического [7]. Единственное, что ему нужно было сделать, чтобы сменить классическую калибровку квантовой, — это заменить действительные числа комплексными. В квантовой механике каждый квант электрического заряда несёт с собой комплексную волновую функцию, имеющую фазу, а калибровочное поле обеспечивает неинтегрируемость измерения фазы. Теперь стало возможным уверенно идентифицировать калибровочное поле как электромагнитный потенциал, а закон сохранения заряда стал следствием локальной калибровочной инвариантности теории.

Через четыре года после возвращения из Принстона в Цюрих Вейль умер, и я написал некролог для журнала *Nature* [8]. "Из всех математиков, чья профессиональная биография началась в двадцатом веке, — писал я, — Герман Вейль был тем, кто внёс крупный вклад в наибольшее число различных областей науки. Его одного можно сравнить с последними великими математиками-универсалами девятнадцатого века, Гильбертом и Пуанкаре. Пока он был жив, он воплощал живую связь между основными направлениями развития чистой математики и теоретической физики. Теперь, когда он умер, эти связи прервались, и на данном этапе это перечеркнуло наши надежды понять физическую вселенную с помощью прямого приложения творческого математического воображения". Я горевал, когда он умер, но воплощать его мечту я не собирался. Меня вовсе не беспокоило, что чистая математика и физика шагали в противоположных направлениях.

Некролог заканчивался наброском о Вейле-человеке: "Характернейшей чертой Вейля было эстетическое чувство; о чём бы он ни размышлял, оно всегда доминировало. Однажды, полушутя, он сказал мне: "Я в своей работе всегда пытался соединить истинное и прекрасное; но когда приходилось делать между ними выбор, я обычно выбирал прекрасное". В этом высказывании замечательно выразилась его личность. Оно отражает его глубочайшую убеждённость в первичной гармонии Природы, законы которой должны неминуемо обрести красивую математическую форму. Оно демонстрирует его понимание, что человек слаб, и его чувство юмора, которое всегда спасало его от напыщенности. Его принстонские друзья запомнят Вейля таким, каким я увидел его в последний раз, в апреле прошлого года, на весеннем балу в Институте перспективных исследований: крупным и бодрым мужчиной, получающим удовольствие от жизни. Движения его были легки и ничто в его неунывающем облике не выдавало его шестидесяти девяти лет".

Пятьдесят лет, прошедших после смерти Вейля, были золотым веком экспериментальной физики и наблюдательной астрономии, золотым веком для бэконианцев-путешественников, собирающих факты, — лягушек, изучающих кочки болота, на котором мы живём. За эти пятьдесят лет лягушки изучили в подробностях самые разные космические структуры и множество различных частиц и взаимодействий. По мере того, как исследовались всё новые области, вселенная оказывалась всё сложнее. Вместо великого Замысла, демонстрирующего простоту и красоту математики Вейля, исследователи обнаружили причудливые объекты, такие как кварки и гамма-всплески, и причудливые концепции, такие как суперсимметрия и множественные вселенные. А математика, между тем, тоже усложнялась, исследователи проникали всё глубже в хаотические явления и многие другие новые области, открытые благодаря созданию электронного компьютера. Математики обнаружили центральную загадку вычислимости: гипотезу, заключающуюся в утверждении, что P не равно NP. Согласно этой гипотезе, существуют математические задачи, решаемые быстро в отдельных случаях, но не поддающиеся решению с помощью единого простого алгоритма. Все эксперты убеждены, что эта гипотеза верна. Её наиболее знаменитой иллюстрацией является задача коммивояжера: надо найти короткий путь, по которому коммивояжер сможет объехать некоторое множество городов, если для каждой пары городов известно расстояние между ними. По техническим причинам, мы ищем не кратчайший путь, а путь, длина которого меньше, чем некий верхний предел. Тогда задача коммивояжера формулирется как следующая гипотеза: NP, но не P. Ни у кого, однако, нет и намёка на идею, как это доказать. Это загадка, которую в математической, девятнадцатого века, вселенной Германа Вейля нельзя было даже сформулировать.

[2*] Перевод на русский язык статьи [4] см. в [4*]. (*Примеч. ред.*)

[3*] Перевод на русский язык статьи [6] см. в [6*]. (*Примеч. ред.*)

5. Фрэнк Янг и Юрий Манин

Последние пятьдесят лет были трудным временем для птиц. Но и в трудные времена для птиц есть работа, и появлялись птицы, достаточно дерзкие, чтобы за неё взяться. Вскоре после ухода Вейля из Принстона в бывший дом Вейля вселился приехавший из Чикаго Фрэнк Янг. Янг занял место Вейля как главной птицы в моём поколении физиков. Ещё при жизни Вейля Янг и его ученик Роберт Миллс открыли теорию Янга – Миллса неабелевых калибровочных полей — поразительно изящное расширение вейлевской идеи калибровочных полей [9]. Вейлевское калибровочное поле — величина классическая, удовлетворяющая коммутативному закону умножения. В теории Янга – Миллса имелся триплет калибровочных полей и они не коммутировали. Они удовлетворяли правилам коммутации трёх составляющих спина квантовой механики, а эти составляющие являются генераторами простейшей неабелевой алгебры Ли A_2. Позднее теорию удалось обобщить, так что калибровочные поля могли быть генераторами любых конечномерных алгебр Ли. С учётом этого обобщения теория калибровочных полей Янга – Миллса предоставила каркас для построения модели всех известных частиц и взаимодействий; сейчас она известна в физике элементарных частиц под именем Стандартной модели. Янг добавил к ней завершающие мазки, показав, что теория гравитации Эйнштейна укладывается в те же рамки; трёхиндексные символы Кристоффеля при этом играют роль калибровочного поля [10].

В приложении к статье 1918 г., добавленном в 1955 г. к тому избранных работ Вейля, опубликованному в ознаменование его семидесятилетия, Вейль так резюмировал свои размышления на тему калибровочных теорий (привожу в моём переводе): "Вот что представлялось сильнейшим аргументом в пользу моей теории: калибровочная инвариантность соотносилась с сохранением электрического заряда так же, как координатная инвариантность соотносилась с сохранением энергии и импульса" [11]. Через тридцать лет Янг приехал в Цюрих на празднование столетия со дня рождения Вейля. В своей речи [12] Янг процитировал это замечание как свидетельство преданности Вейля идее калибровочной инвариантности как объединяющего физического принципа. Янг продолжал: "Благодаря продвижению в теории и в эксперименте, было понято, что симметрия, группы Ли и калибровочная инвариантность играют важнейшую роль в определении основных сил в физической вселенной. Я формулирую как принцип, что симметрия диктует взаимодействие". Идея симметрии, диктующей взаимодействие, является янговским обобщением замечания Вейля. Вейль заметил, что калибровочная инвариантность тесно связана с физическими законами сохранения. Вейль не мог пойти дальше, так как ему была известна только калибровочная инвариантность коммутирующих абелевых полей. Янг значительно усилил эту связь, введя неабелевы калибровочные поля. С введением неабелевых калибровочных полей, генерирующих нетривиальные алгебры Ли, возможные формы взаимодействия между полями стали единственными, так что симметрия действительно диктует взаимодействие. Эта идея — величайший вклад Янга в физику. Это вклад, сделанный птицей, парящей высоко над тропическим


Фрэнк Янг Юрий Манин

лесом маленьких задачек, среди которых проходит жизнь большинства из нас.

Ещё один математик-птица, которого я глубоко уважаю, — это российский математик Юрий Манин, недавно опубликовавший блестящий сборник эссе под названием *Математика как метафора* [13]. Книга вышла в Москве по-русски, а Американское математическое общество опубликовало её по-английски. Я написал к английскому изданию предисловие, которое здесь кратко процитирую: «"Математика как метафора" — прекрасный девиз для математика-птицы. Он означает, что самые глубокие концепции в математике — те, которые связывают один мир идей с другим. В семнадцатом веке Декарт связал миры алгебры и геометрии со своей концепцией координат, а Ньютон связал миры геометрии и динамики со своей концепцией флаксионов, сегодня называемой математическим анализом. В девятнадцатом веке Буль связал миры логики и алгебры со своей концепцией символьной логики, а Риман связал миры геометрии и анализа со своей концепцией римановых поверхностей. Координаты, флаксионы, символьная логика и римановы поверхности — всё это метафоры, распространяющие смысл слов с привычных контекстов на непривычные. Манин видит будущее математики в исследовании метафор, которые уже видны, но ещё не поняты. Самая глубокая из таких метафор — это сходство структуры теории чисел и структуры физики. Он видит в обеих этих дисциплинах соблазнительные проблески параллельных концепций и симметрий, связывающих непрерывное с дискретным. Он предвидит объединение этих дисциплин, которое он называет "квантованием математики".

Манин не согласен с бэконианским представлением о том, что представив на Международном конгрессе математиков в 1900 г. в Париже свой знаменитый список из двадцати трёх нерешённых проблем, Гильберт задал повестку дня математической науки в двадцатом веке. По мнению Манина, проблемы Гильберта лишь отвлекали учёных от центральных тем математики. Манин считает, что в математике крупные прорывы становятся результатом проектов, а не проблем. Проблемы обычно решают, по-новому применяя старые идеи. А исследовательские проекты — это ясли, в которых рождаются новые идеи. Он считает, что проект Бурбаки — заново переписать всю математику более абстрактным языком — стал источником многих новых идей двадцатого века. Он считает проект Ленгландса — объединение теории чисел и геометрии — многообещающим источником новых идей для двадцать первого века. Те, кто находит решения знаменитых нерешённых проблем, быть может, выигрывают крупные призы, но те, кто начинает новые проекты — это истинные пионеры».

В русской версии сборника *Математика как метафора* есть десять глав, не вошедших в англоязычное издание. Американское математическое общество решило, что эти главы не заинтересуют англоязычного читателя. Это укорочение книги огорчительно по двум причинам. Во-первых, читатели английского издания составят неполное представление о Манине, а он, возможно, единственный среди математиков, обладает широким кругом интересов, выходящих далеко за пределы математики. Во-вторых, мы получили урезанное представление о русской культуре, которая гораздо менее сегментирована, чем англосаксонская культура, и математики в ней работают в более тесном контакте с историками, художниками и поэтами.

6. Джон фон Нейман

Ещё одной важной фигурой математики двадцатого века был Джон фон Нейман. Фон Нейман был лягушкой и употреблял свои колоссальные технические возможности на решение задач в различных областях математики и физики. Он начал с оснований математики. Он первым нашёл удовлетворительный набор аксиом теории множеств, сумев избегнуть логических парадоксов, с которыми столкнулся Кантор, пытавшийся работать с бесконечными множествами и бесконечными числами. Спустя несколько лет аксиомами фон Неймана воспользовался его друг-птица Курт Гёдель для доказательства существования в математике неразрешимых утверждений. Благодаря теоремам Гёделя птицы получили новое представление о математике. После Гёделя математика перестала быть монолитной структурой, связанной воедино всеохватывающим понятием истинности, и превратилась в архипелаг структур с неидентичными наборами аксиом и разнящимися определениями истинности. Гёдель показал, что математика неисчерпаема. Какое бы множество аксиом ни было положено в её основание, птицы всегда найдут вопросы, на которые аксиомы не смогут ответить.

От оснований математики фон Нейман перешёл к основаниям квантовой механики. Для того чтобы снабдить квантовую механику прочным математическим фундаментом, он разработал великолепную теорию колец операторов. Каждая наблюдаемая величина представлена линейным оператором, а алгебра операторов правильно представляет особенности квантового поведения. Как когда-то Ньютон изобрёл математический анализ для описания классической динамики, так фон Нейман изобрёл кольца операторов для описания квантовой динамики.

Фон Нейман внёс фундаментальный вклад в целый ряд областей, особенно в теорию игр и проектирование цифровых компьютеров. В течение последних десяти лет своей жизни он очень серьёзно работал над компьютерами. Он заинтересовался ими настолько сильно, что решил не только изучить их устройство, но и построить настоящий компьютер с реальным программным обеспечением и использовать его как инструмент для научных исследований. Я отчётливо помню начальные фазы компьютерного проекта фон Неймана в Институте перспективных исследований в Принстоне. В тот момент его главными научными интересами были водородная бомба и метеорология. По ночам он использовал свой компьютер для вычислений по водородной бомбе, а в дневные часы — для метеорологии. Большинство сотрудников, крутившихся днём в здании компьютерного центра, были метеорологами. Руководил ими Жюль Чарни. Чарни был настоящий метеоролог, глядевший с должной скромностью на непостижимые загадки погоды и со скептицизмом на возможности компьютера при их разгадывании. Джон фон Нейман был не столь скромен и не столь осторожен. Я слушал лекцию фон Неймана о целях, которые он ставил перед своим проектом. Говорил он, как всегда, с большой уверенностью. Он сказал: "Компьютер позволит нам разбить атмосферу в каждый момент на устойчивые и неустойчивые области. Поведение устойчивых областей мы предсказывать умеем, а неустойчивыми можем управлять". Фон Нейман верил, что неустойчивую область можно подталкивать приложением точно отмеренных малых возмущений, которые сдвинут её в нужном направлении. Малые возмущения будут впрыскиваться группами самолётов, оборудованных дымогенераторами, предназначенными для поглощения солнечного света и понижения температуры в тех местах, где возмущения будут наиболее эффективны. В частности, можно будет прервать зарождение тайфуна путём ранней идентификации координат неустойчивости и затем охлаждения воздушной ячейки прежде, чем она начнёт всплывать и образует вихрь. В 1950 г. фон Нейман сказал в докладе, что потребуется всего десятилетие, для того чтобы построить компьютер, мощность которого будет достаточной для точной диагностики устойчивых и неустойчивых областей атмосферы. И тогда, имея точную диагностику, нам понадобится совсем немного времени, чтобы начать управлять атмосферой. Ему представлялось, что в шестидесятые годы практическое управление погодой станет обычным делом.

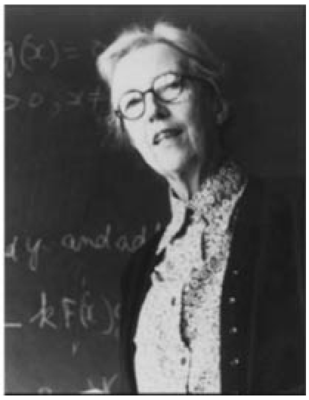
Естественно, фон Нейман был неправ. Он ошибся, потому что не знал про хаос. Теперь мы знаем, что движения в атмосфере локально неустойчивы и очень часто хаотичны. Слово "хаотичный" означает, что движения, начавшиеся совсем рядом, со временем экспоненциально удаляются друг от друга. Если движение хаотично, то оно непредсказуемо и малые возмущения не смещают его в область устойчивости, где предсказание возможно. Малое возмущение обычно сдвигает его в область иного хаотического и в той же степени непредсказуемого движения. В результате стратегия фон Неймана для управления погодой не работает. Так что он был великий математик, но посредственный метеоролог.

В 1963 г. Эдвард Лоренц открыл, что решения уравнений метеорологии зачастую хаотичны. Это произошло через шесть лет после смерти фон Неймана. Лоренц был метеорологом, и его обычно называют первооткрывателем хаоса. Он открыл хаотические явления в контексте метеорологии и дал им их нынешние названия. Между тем описание тех же явлений я слышал за двадцать лет до того, как их открыл Э. Лоренц, в 1943 г. в Кембридже на лекции математика Мэри Картрайт; она недавно умерла в возрасте 97 лет. Называла она эти явления по-другому, но явления были те же самые. Она их обнаружила при исследовании решений уравнения Ван дер Поля, которое описывает колебания в нелинейном усилителе [14]. Уравнение Ван дер Поля сыграло важную роль во время Второй мировой войны, потому что нелинейные усилители стояли в блоках питания передатчиков в первых радарах. Передатчики работали неустойчиво, и в Королевских ВВС решили, что фирма-производитель поставила им бракованные усилители. Мэри Картрайт попросили разобраться, в чём дело. Она выяснила, что производители ни при чём, а виновато уравнение Ван дер Поля. Решения уравнения Ван дер Поля содержали то самое хаотическое поведение, на которое жаловались в ВВС. Я услышал от Мэри Картрайт про хаос за семь лет до того, как фон Нейман заговорил об управлении погодой, но мне не хватило дальновидности, чтобы уловить тут связь. Мне просто не пришло в голову, что хаотическое поведение уравнения Ван дер Поля может иметь какое-то отношение к метеорологии. Будь я птицей, а не лягушкой, я, возможно, увидел бы связь и тем самым уберёг бы фон Неймана от массы неприятностей. Знай он про хаос в 1950 г., он бы, наверное, всерьёз задумался на эту тему, и в 1954 г. мог бы сказать об этом нечто важное.

Неприятности случились у фон Неймана к концу жизни потому, что он на самом деле был лягушкой, а всем казалось, что он может летать, как птица. В 1954 г. в Амстердаме собрался Международный конгресс математиков. Эти конгрессы созываются лишь раз в четыре года, и получить приглашение выступить с докладом на открытии конгресса — большая честь. Организаторы конгресса в Амстердаме пригласили фон Неймана произнести главный доклад и предполагали, что он сделает то же, что сделал Гильберт в 1900 г. Гильберт тогда зачитал список нерешённых проблем, тем самым определив развитие математики в первой половине двадцатого века. Фон Неймана пригласили сделать то же для второй половины века. В программе конгресса доклад фон Неймана назывался так: "Нерешённые проблемы математики: доклад по приглашению Оргкомитета". В опубликованный впоследствии сборник материалов Конгресса вошли все сделанные на нём доклады, кроме этого. В сборнике имеется почти пустая страница с именем фон Неймана, названием его доклада, и далее словами "Рукопись лекции не была предоставлена".

Так что же случилось? Я знаю, что случилось, ибо в три часа пополудни в четверг 2 сентября 1954 г. я в числе остальных слушателей сидел в амстердамском концертном зале Концертгебау. Зал был заполнен математиками, и каждый ожидал услышать блестящую лекцию, достойную этого исторического события. Лекция оказалась полным разочарованием. Вероятно, фон Нейман за несколько лет до этого дал согласие прочесть лекцию о нерешённых проблемах, но потом напрочь об этом забыл. У него было много дел, и к лекции он не подготовился. И уже в последний момент, вспомнив, что ему предстоит поездка в Амстердам и доклад о математике, он вытащил из ящика письменного стола старую лекцию 1930-х годов и слегка подновил ее. Лекция была о кольцах операторов — предмете, который был новым и модным в тридцатые годы. Ни слова о нерешённых проблемах, ни слова о будущем. Ни слова о компьютерах, а мы знали, что именно эта тема была тогда особенно дорога фон Нейману. Он мог бы, по крайней мере, сказать нечто новое и захватывающее о компьютерах. Слушатели в концертном зале начали терять терпение. Кто-то произнёс по-немецки, достаточно громко, чтобы его услышали все в зале: "Aufgewärmte Suppe", что в переводе означает "разогретый суп". В 1954 г. большинство математиков знало немецкий язык достаточно хорошо, чтобы понять колкость. Ужасно сконфуженный, фон Нейман скомкал окончание лекции и покинул зал, не дожидаясь вопросов.

Джон фон Нейман



Мэри Картрайт

7. Слабый хаос

Если бы фон Нейман, читая доклад в Амстердаме, знал о хаосе, он мог бы в качестве нерешённой проблемы выбрать для обсуждения слабый хаос. Прошло полвека, но проблема слабого хаоса остаётся нерешённой. Она состоит в том, что почему-то хаотические движения зачастую не выходят за определённые границы и не приводят к катастрофической неустойчивости. Хороший пример слабого хаоса — орбитальное движение планет и их спутников в Солнечной системе. То, что эти движения — хаотические, было обнаружено совсем недавно. Открытие это всех удивило, ведь Солнечная система традиционно рассматривается как ярчайший пример упорядоченного устойчивого движения. Двести лет тому назад математик Лаплас думал, что доказал устойчивость Солнечной системы. Но выяснилось, что Лаплас ошибался. Точное численное интегрирование орбит ясно показало, что соседние орбиты экспоненциально расходятся. Представляется, что в мире классической динамики хаос царит почти повсюду.

Поскольку этот хаос слабый, никто не подозревал Солнечную систему в хаотическом поведении до тех пор, пока не было выполнено долговременное численное интегрирование. Слабый хаос отличается тем, что хотя близко расположенные траектории расходятся экспоненциально, они никогда не удаляются далеко друг от друга. Расхождение начинается с экспоненциального возрастания, а дальнейшее удаление ограничено. Поскольку хаотичность движений планет слабая, солнечная система смогла просуществовать четыре миллиарда лет. И хотя движения хаотичны, планеты всё же не уходят далеко от своего обычного местонахождения и система как целое не разлетается на куски. При том что хаос действительно преобладает, лапласова точка зрения на Солнечную систему как на безупречный часовой механизм все же не слишком отличается от истины.

В мире метеорологии мы наблюдаем те же явления слабого хаоса. Действительно, погода в Нью-Джерси мучительно хаотична, но хаос этот не выходит за чёткие границы. Нельзя сказать заранее, будут лето или зима мягкими или суровыми, но можно быть уверенным, что температура не подскочит до 45° по Цельсию и не упадёт до минус 30 °С, как это бывает в Индии и в штате Миннесота. Никакой физический закон сохранения не запрещает температуре в Нью-Джерси подняться настолько же, насколько она поднимается в Индии, или опуститься так же низко, как в Миннесоте. Слабость хаоса — ключевое условие сохранения жизни на нашей планете. Благодаря своей хаотичности погода всё время бросает нам вызов, но слабость хаоса предохраняет нас от таких больших флуктуаций, которые были бы опасными для нашего выживания. Мы не понимаем причин того, почему хаос остаётся милосердно слабым. Вот ещё одна нерешённая проблема для молодых лягушек в этой аудитории. Подумайте о ней дома. Вот вам моя перчатка: попробуйте понять, почему хаос, наблюдаемый в самых различных динамических системах, остаётся, как правило, слабым.

Хаос как предмет изучения отличается обилием количественной информации, бесконечным запасом красивых картинок и серьёзной нехваткой строгих теорем. Доказывать строгие теоремы — это наилучший способ придать некоей области знаний интеллектуальную глубину и точность. Вы не сможете до конца понять свои концепции, до тех пор пока вы не сумеете доказать строгие теоремы. В области хаоса мне известна только одна строгая теорема, её доказали Тьен-Йен Ли и Джим Йорк в 1975 г.; они опубликовали её в короткой статье, названной "Период, равный трём, приводит к хаосу" [15]. Работа Ли и Йорка — один из бессмертных шедевров математической литературы. Теорема имеет дело с нелинейными отображениями отрезка на самого себя. При повторении отображения последовательные положения точки можно рассматривать как траекторию классической частицы. Если точка возвращается в исходное положение после N отображений, период траектории равен N. В нашем контексте траектория является хаотической, если она удаляется от всех периодических траекторий. Теорема утверждает, что если существует хотя бы одна траектория с периодом три, то существуют и хаотические траектории. Доказательство теоремы просто и коротко. На мой взгляд, эта теорема и её доказательство проливают больше света на самую суть хаоса, чем тысяча красивых картинок. Теорема объясняет, почему в мире преобладает хаос. Но она не говорит о том, почему хаос так часто оказывается слабым. Это задача для будущего. Я уверен, что достичь фундаментального понимания слабого хаоса не удастся до тех пор, пока не будут доказаны соответствующие строгие теоремы.

8. Струнные теоретики

Мне хотелось бы сказать несколько слов о теории струн. Только несколько слов, потому что о теории струн я знаю очень мало. Я с ней не работаю и так и не потрудился в ней разобраться. Но в своём родном Институте перспективных исследований я окружён струнными теоретиками, и я иногда слышу, о чём они беседуют, и кое-что из этого понимаю. Совершенно очевидны три вещи. Во-первых, то, что они делают — первоклассная математика. Для самых сильных чистых математиков, таких как Майкл Атья и Изадор Зингер, теория струн — наслаждение. Она породила новую область математики, новые идеи и новые задачи. И что совершенно замечательно, она дала математикам новые методы решения старых проблем, которые до этого были неразрешимыми. Во-вторых, струнные теоретики считают себя физиками, а не математиками. Они верят, что их теория описывает нечто реальное в физическом мире. И в-третьих, не существует никаких доказательств того, что теория хотя бы как-то связана с физикой. Пока что экспериментально проверить теорию струн невозможно. Теория существует в своём собственном мире, отдельно от остальной физики. Струнные теоретики потратили много сил на то, чтобы вывести из теории следствия, которые позволили бы произвести проверку в реальном мире, но пока что успеха не достигли.

Мои коллеги Эд Виттен, Хуан Малдасена и другие, создавшие теорию струн, — птицы, они парят высоко и видят грандиозную панораму далёких горных хребтов. Тысячи более скромных струнных теоретиков в университетах мира — лягушки, они исследуют мелкие детали математических структур, которые первыми увидели на горизонте птицы. Состояние теории струн меня беспокоит, но резоны у меня не научные, а скорее социальные. Входить в первую тысячу струнных теоретиков, открывать новые связи и первыми применять новые методы — это прекрасно. Быть во второй тысяче или в десятой тысяче струнных теоретиков уже не так уютно, а сейчас их число составляет около десяти тысяч; они разбросаны по всему свету. Для десятой тысячи струнных теоретиков, а быть может и для второй, эта ситуация чревата неприятностями. Может случиться, что мода вдруг изменится и теория струн перестанет быть модной. И тогда девять тысяч струнных теоретиков потеряют работу. Они получили очень узкое специальное образование и могут оказаться не в состоянии найти себе применение в других областях науки.

Почему теория струн привлекает так много молодых людей? Её привлекательность — отчасти интеллектуального свойства. Теория струн — теория смелая и математически изящная. Но есть и социальные причины. Теория струн привлекательна тем, что обещает работу. А почему в этой области столько рабочих мест? Из-за её дешевизны. Представьте себя деканом физического факультета где-нибудь в глубинке; денег вам выделяют немного, построить современную лабораторию и заниматься экспериментальной физикой вы себе позволить не можете, но вот взять на работу пару струнных теоретиков — это вам по карману. Прекрасно, вы наняли двух специалистов по теории струн, и у вас уже современный физический факультет. Уж очень велик соблазн для декана создавать такие рабочие места, а для молодых людей — их занимать. Я не хочу сказать, что нужно отговаривать молодых людей специализироваться по теории струн, если она им очень нравится. Я хочу сказать, что им нужно предоставлять альтернативные варианты, чтобы в теорию струн их не толкали экономические соображения.

Наконец, я поделюсь с вами моей догадкой относительно будущего теории струн. Скорее всего, моя догадка будет неверна. У меня нет никаких иллюзий — предсказывать будущее я не умею. Но прогноз этот я вам сообщу просто как пищу для размышлений. Мне представляется одинаково маловероятным, что теория струн окажется или полностью успешной, или полностью бесполезной. Под словами "полностью успешной" я имею в виду, что она будет полной физической теорией и детально объяснит всё, что связанно с частицами и их взаимодействиями. Под словами "полностью бесполезной" я имею в виду, что она так и останется лишь прекрасным примером чистой математики. Скорее всего, теорию струн ожидает нечто среднее между полным торжеством и полным провалом. Я думаю, это будет напоминать судьбу групп Ли, которые Софус Ли в XIX в. создавал как каркас для классической физики. Пока физика оставалась классической, группы Ли были провалом. Они были решением, для которого не было задачи. Но по прошествии пятидесяти лет квантовая революция трансформировала физику и алгебры Ли заняли подобающее им место. Они явились ключом к пониманию центральной роли симметрий в квантовом мире. Я предполагаю, что лет через пятьдесят или сто в физике произойдёт новая революция, о концепциях которой мы в данный момент не имеем ни малейшего представления, и новые концепции придадут теории струн новый смысл. Теория неожиданно обретёт своё место во Вселенной и сможет формулировать утверждения о реальном мире, допускающие проверку. Ещё раз предупреждаю, что, по всей вероятности, мой прогноз не сбудется. Но у него есть то достоинство, что его можно опровергнуть, а согласно Карлу Попперу, это необходимый признак научного высказывания. Уже завтра он может быть опровергнут каким-нибудь открытием на Большом адронном коллайдере в Женеве.

9. И снова о Манине

Чтобы закончить лекцию, я вернусь к Юрию Манину и его книге *Математика как метафора*. Книга эта в основном о математике. Для западного читателя может оказаться сюрпризом, что Манин пишет с равным красноречием и о других предметах, таких как коллективное бессознательное, происхождение человеческого языка, психология аутизма или роль Плута в мифологии разных культур. Его соотечественников в России такая многосторонность интересов и знаний не удивила бы. Интеллектуалы в России с гордостью хранят традицию старой русской интеллигенции, в которой учёные, поэты, художники и музыканты принадлежали к одному и тому же сообществу. Они и сейчас, как герои пьес Чехова, являют собой круг идеалистов, объединяемый отчуждением от суеверного общества и непредсказуемого правительства. Российские математики, композиторы и кинопродюсеры встречаются, чтобы поболтать, вместе гуляют снежными зимними вечерами и делятся мыслями за бутылкой вина.

Манин — птица, взору которой доступен широкий мир человеческой культуры далеко за пределами математики. Он увлекается, в частности, теорией архетипов, разработанной швейцарским психологом Карлом Юнгом. Юнгианский архетип — это ментальный образ, коренящийся в общем для всех нас коллективном бессознательном. Сильнейшие эмоции, связанные с архетипами, — это реликты утраченных воспоминаний о коллективных радостях и горестях. Как говорит Манин, теорию Юнга необязательно считать истинной, чтобы черпать из неё вдохновение.

Более тридцати лет тому назад певица Моник Морелли записала диск песен на слова Пьера Мак-Орлана. Одна из песен называется "La Ville Morte" ("Мертвый город"). Мелодия у неё завораживающая, как раз для глубокого контральто Морелли, аккордеон выступает контрапунктом к её голосу, а слова песни создают необыкновенно яркие образы. Однако на бумаге они ничего особенного собой не представляют:

"En pénétrant dans la ville morte,
Je tenait Margot par le main...
Nous marchions de la nécropole,
Les pieds brisés et sans parole,
Devant ces portes sans cadole,
Devant ces trous indéfinis,
Devant ces portes sans parole
Et ces poubelles pleines de cris".

"На входе в мёртвый город
Я держал Марго за руку...
Мы шли с кладбища
На сбитых ногах, не говоря ни слова,
Мимо этих дверей без замков,
Этих нечётких дыр,
Этих безмолвных дверей,
Этих мусорных баков, полных крика".

Каждый раз, когда я слушаю эту песню, меня охватывают необъяснимые сильные чувства. Я часто задавался вопросом о том, почему незатейливые слова песни как будто входят в резонанс с какими-то глубинными бессознательными воспоминаниями, словно голосом Морелли со мной говорят души умерших. Ответ на этот вопрос я неожиданно для себя нашёл в книге Манина. В главе "Архетип Пустого Города" Манин рассказывает об архетипе мёртвого города, встречающемся во многих произведениях архитектуры, литературы, изобразительного искусства и кино с древнейших времен и до наших дней, с тех самых пор, как люди начали селиться в городах, а другие люди — собираться в армии, чтобы эти города опустошить и разрушить. Герой, от чьего имени исполняется песня Мак-Орлана, — старый солдат, когда-то давно служивший в оккупационных войсках. Когда они с женой прошли по пыли и пеплу мёртвого города, ему снова слышатся

"chansons de charme d'un clairon
qui fleurissait une heure lointaine
dans un rêve de garnison"
("колдовские песни горна,
приснившиеся когда-то давным-давно
в гарнизонной казарме").

Слова Мак-Орлана и голос Морелли словно бы воплощают сон из нашего коллективного бессознательного — сон старого солдата, бредущего сквозь мёртвый город. Понятие "коллективного бессознательного" может быть таким же мифом, как и образ "Пустого Города". В этой главе Манин описывает тот отсвет, который бросают друг на друга эти оба, возможно, мифических образа. Он определяет коллективное бессознательное как иррациональную силу, мощно влекущую нас к смерти и разрушению. Архетип Пустого Города — это дистиллят агонии, пережитой сотнями настоящих городов с тех пор, как люди придумали города и полчища мародёров. Единственное спасение от безумия коллективного бессознательного — ясное коллективное сознание, основанное на надежде и разуме. Великая задача, стоящая перед современной цивилизацией — воспитать такое коллективное сознание.

Список литературы

1. Bertin M J et al. *Pisot and Salem Numbers* (Basel: Birkhäuser Verlag, 1992)
2. Odlyzko A M "Primes, quantum chaos and computers", in *Number Theory*: *Proc. of a Symp., 4 May 1989, Washington, DC, USA* (Washington, DC: National Research Council. 1990) p. 35–46
3. Weyl H "Gravitation und Elektrizität" *Berl. Ber.* **26** 465 (1918)
4. Fock V "Über die invariante Form der Wellen und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt" *Z. Phys.* **39** 226 (1926);
   4*. Фок В А *УФН* **180** 874 (2010) [*Phys. Usp.* **53** (8) (2010)]
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.–Л.: Гостехиздат, 1941) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Perganom Press, 1962)]
6. Okun L B "V. A. Fock and gauge symmetry", in *Quantum Theory, in Honour of Vladimir A. Fock*: *Proc. of the VIII UNESCO Intern. School of Physics, St. Petersburg, 25 May–6 June 1998* Pt 2 (Eds Yu Novozhilov, V Novozhilov) (St. Petersburg: Univ. Euro-Asian Phys. Soc., 1998) p. 13–17;
   6*. Окунь Л Б *УФН* **180** 871 (2010) [*Phys. Usp.* **53** (8) (2010)]
7. Weyl H "Elektron und Gravitation" *Z. Phys.* **56** 330 (1929)
8. Dyson F J "Prof. Hermann Weyl, For. Mem. R.S." *Nature* **177** 457 (1956)
9. Yang C N, Mills R L "Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance" *Phys. Rev.* **96** 191 (1954)
10. Yang C N "Integral formalism for gauge fields" *Phys. Rev. Lett.* **33** 445 (1974)
11. Weyl H *Selecta* (Basel: Birkhäuser, 1956) p. 192
12. Yang C N "Hermann Weyl's contribution to physics", in *Hermann Weyl, 1885–1985*: *Centenary Lectures* (Ed. K Chandrasekharan) (Berlin: Springer-Verlag, 1986) p. 19
13. Manin Yu I *Mathematics as Metaphor*: *Selected Essays* (Providence, RI: American Mathematical Society, 2007); Манин Ю И *Математика как метафора* (М: Изд-во МЦНМО, 2008)
14. Cartwright M L, Littlewood J E "On Non-linear differential equations of the second order. I" *J. London Math. Soc.* **20** 180 (1945)
15. Li T-Y, Yorke J A "Period three implies chaos" *Am. Math. Mon.* **82** 985 (1975)

Birds and frogs in mathematics and physics

F. Dyson
Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, USA
E-mail: *dyson@ias.edu*

Some scientists are birds, others are frogs. Birds fly high in the air and survey broad vistas of mathematics out to the far horizon. They delight in concepts that unify our thinking and bring together diverse problems from different parts of the landscape. Frogs live in the mud below and see only the flowers that grow nearby. They delight in the details of particular objects, and they solve problems one at a time. A brief history of mathematics and its applications in physics is presented in this article.

PACS numbers: 01.30.Bb, **01.65.+g**, **01.70.+w** DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008f.0859

Bibliography — 15 references

Einstein Lecture prepared for the American Mathematical Society meeting Vancouver, Canada, November 4, 2008; *Revised for* "*Uspekhi Fizicheskikh Nauk*" [*Phys.–Usp.*] *journal in June 2009*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180** (8) 859–870 (2010) *Physics–Uspekhi* **53** (8) (2010)