

О дуальном представлении в классической электродинамике

Д.В. Карловец

Обсуждается использование дуального представления при решении задач об излучении мультиполей и дифракции электромагнитных волн в классической электродинамике. Рассматриваемый метод заключается в замене реальных электрических источников полей условными "магнитными". Показано, что, несмотря на отсутствие дираковских магнитных монополей, такой формализм позволяет дать физическую интерпретацию некоторым часто используемым методам.

PACS numbers: 41.60. – m, 41.20. – q, 42.25.Fx

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008e.0851

Содержание

1. Введение (851).
 2. Дуальное представление в теории излучения (852).
 3. Дуальное представление в теории дифракции (853).
 4. Дуальное представление с потенциалами Герца (855).
 5. Пример: дуальный метод в задаче о переходном излучении заряженной частицы (856).
 6. Заключение (858).
- Список литературы (858).

1. Введение

В различных задачах классической электродинамики часто используется метод решения, который условно можно назвать "дуальным". В этом методе реальные источники электромагнитных полей — электрические заряды и токи — замещаются фиктивными магнитными источниками. Такая замена, хотя и кажется, на первый взгляд, лишённой всякого смысла, оказалась довольно эффективной, например, в теории дифракции электромагнитного излучения на идеально проводящих поверхностях. В частности, известный метод, в котором поле рассеянной волны представляется как поле излучения поверхностного тока [1, 2], можно сопоставить с методом, в котором источником дифрагированного поля является магнитный ток, текущий по отверстию в рассматриваемом экране (см., например, [2–5]). Возможность такой замены поверхности интегрирования составляет содержание известного принципа о дополнительных экранах, а математическая формулировка "дуального" метода основывается на использовании так называемого интеграла Кирхгофа–Смайта [4–8].

Можно привести и другой пример. При решении задачи об излучении Вавилова–Черенкова, генерируемом магнитным диполем, И.М. Франк в одной из работ рассматривал последний как дираковский диполь — пару

магнитных зарядов с разными знаками [9]. Данный метод использовался также в одном из первых обзоров по черенковскому излучению [10]. Впоследствии оказалось, что такое представление справедливо лишь в вакууме [11–13].

Эквивалентность обычного магнитного и дираковского диполей в вакууме также следует из результатов исследования излучения произвольно движущегося точечного магнитного диполя с моментом μ [14–16]. В частности, в цитируемых работах было показано, что решение данной задачи можно получить из соответствующего решения задачи об излучении электрического диполя с моментом $\mathbf{d}$ простой заменой полей $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$, при этом $\mathbf{d} \rightarrow \mu$ (в статическом случае данное свойство хорошо известно [17]). Указанная замена отвечает переходу от обычного тензора напряжённостей $F^{\mu\nu}$ к дуальному ему псевдотензору $\tilde{F}^{\mu\nu} = 1/2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$. Но именно такая замена и имеет место при переходе от электрических источников к магнитным (см., например, [2]).

Дуальный метод решения также успешно применялся в задачах о дифракционном излучении заряженной частицы, пролетающей вблизи идеально проводящего экрана [18–20]. Его использование позволило, в частности, сравнительно легко получить аналитическое выражение для плотности поверхностного тока, наведённого на экране полем заряда [20].

Любопытно, что тогда как применение дуального метода в теории черенковского излучения мультиполей неоднократно обсуждалось (например, в работах [11, 12]), этот вопрос был оставлен без внимания в теории излучения точечного магнитного момента, несмотря на замеченную авторами работы [14] "дуальную симметрию" полей излучения электрического и магнитного диполей. В то же время дуальному представлению в теории дифракции обычно не даётся ясной физической интерпретации (исключением является, пожалуй, лишь известная монография [2]), что иногда приводит к явным недоразумениям. В частности, изложение вопросов дифракции во многих учебниках по электродинамике проводится именно на основе подхода Кирхгофа–Смайта [5–7]. Однако даже в известной книге [7] собственно физическая сторона данного метода, на наш взгляд, отражена недостаточно. Авторам недавней статьи [8] удалось провести более строгое математическое доказательство интеграла Кирхгофа–Смайта, однако его

Д.В. Карловец. Национальный исследовательский Томский политехнический университет, просп. Ленина 30, 634050 Томск, Российская Федерация
Тел. (3822) 42-39-94. E-mail: karlovets@tpu.tu

Статья поступила 5 июня 2009 г.,
после доработки 28 апреля 2010 г.

физическая интерпретация по-прежнему осталась слабо освещённой (см. формулы (7)–(9) в [8]). Целью настоящей статьи является обсуждение использования дуального представления в некоторых задачах классической электродинамики.

2. Дуальное представление в теории излучения

Рассмотрим однородную и изотропную среду, в которой электромагнитное поле описывается макроскопическим тензором смещения $H^{\mu\nu} = (-\mathbf{D}, \mathbf{H})$, т.е. $H^{01,02,03} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ — вектор электрического смещения, $H^{23,31,12} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ — макроскопическое магнитное поле¹. Уравнения Максвелла с заданной плотностью электрических источников $j_e^\mu = \{c\rho_e, \mathbf{j}_e\}$ имеют вид

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu H^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_e^\mu, \quad (1)$$

где $\partial_\nu = \partial/\partial r^\nu$, а первая пара уравнений, не содержащих зарядов и токов, записана через псевдотензор $\tilde{F}^{\mu\nu} = (-\mathbf{B}, -\mathbf{E})$. Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — электрическое поле, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — магнитная индукция. Как обычно, под псевдотензором $\tilde{F}^{\mu\nu}$, дуальным истинному тензору $F^{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{B})$, мы понимаем следующее: $\tilde{F}^{\mu\nu} = 1/2\epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\rho\sigma}$, $\epsilon^{0123} = 1$. Для дальнейшего полезно привести и обратное соотношение: $F^{\mu\nu} = -1/2\epsilon^{\mu\nu\rho} \tilde{F}_{\rho\sigma}$.

С учётом уравнения непрерывности плотности тока $\partial_\mu j_e^\mu = 0$ решения уравнений Максвелла (1) для монохроматических полей, создаваемых источниками, локализованными в области размером $r_{\text{eff}} \lesssim \lambda$, в волновой зоне имеют вид (для простоты полагаем, что среда обладает лишь частотной дисперсией):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{i(2\pi)^3}{\omega} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{j}_e(\mathbf{k}, \omega)], \\ \mathbf{B}_e^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= \frac{i(2\pi)^3}{c} \mu(\omega) \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \mathbf{k} \times \mathbf{j}_e(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{E}_e(\mathbf{r}_0, \omega) = \mathbf{D}_e(\mathbf{r}_0, \omega)/\varepsilon(\omega)$, $\mathbf{B}_e(\mathbf{r}_0, \omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}_e(\mathbf{r}_0, \omega)$, $k = \omega/c\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$ — волновое число, а волновой вектор направлен вдоль радиуса-вектора точки наблюдения: $\mathbf{k} = k\mathbf{r}_0/r_0 = k\mathbf{e}$. Вектор $\mathbf{j}_e(\mathbf{k}, \omega)$ представляет собой фурье-образ плотности тока $\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t)$. Поля (2), как нетрудно видеть, удовлетворяют всем свойствам полей излучения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e^R &= -(\varepsilon\mu)^{-1/2} [\mathbf{e} \times \mathbf{B}_e^R], \\ (\mathbf{e}, \mathbf{E}_e^R) &= (\mathbf{e}, \mathbf{B}_e^R) = 0, \quad E_e^R = (\varepsilon\mu)^{-1/2} B_e^R. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем теперь уравнения для магнитных токов в отсутствие электрических (см., например, [2]):

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \tilde{j}_m^\mu, \quad \partial_\nu H^{\mu\nu} = 0, \quad (4)$$

где $\tilde{j}_m^\mu = \{c\tilde{\rho}_m, \tilde{\mathbf{j}}_m\}$ — псевдовектор магнитного тока. Заметим, что первое уравнение в (4) легко получается из лагранжиана вида $L = (1/c)\tilde{j}_m^\mu \tilde{A}_\mu - (1/16\pi)\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$, в то время как второе следует из определения дуального тензора напряжённостей через "магнитные" потенциалы: $\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu$ (см. раздел 3). Таким образом, дуальные уравнения Максвелла получаются из

обычных с помощью следующей замены:

$$j_e^\mu \rightarrow j_m^\mu, \quad H^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (5)$$

или для полей: $\mathbf{E}_e \rightarrow \mathbf{H}_m$, $\mathbf{H}_e \rightarrow -\mathbf{E}_m$, $\varepsilon \rightarrow \mu$. Отсюда, учитывая уравнение непрерывности $\partial_\mu \tilde{j}_m^\mu = 0$ (которое следует из первого уравнения в (4)), можно найти поля излучения магнитных токов в волновой зоне:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{i(2\pi)^3}{c} \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{k}, \omega), \\ \mathbf{B}_m^R(\mathbf{r}_0, \omega) &= -\frac{i(2\pi)^3}{\omega} \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{k}, \omega)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия эквивалентности электрических и магнитных источников в смысле равенства создаваемых ими полей излучения можно легко получить, сопоставляя формулы (2) и (6). Достаточно лишь потребовать, например, выполнения равенства $\mathbf{H}_e^R = \mathbf{H}_m^R$. Равенство электрических полей следует автоматически как следствие (3). Так, для заданного магнитного тока условие равенства магнитных полей выполняется, если электрический ток определён как

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{c}{\omega} \frac{1}{\mu(\omega)} \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{k}, \omega), \quad (7)$$

или в пространственных переменных:

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ic}{\omega} \frac{1}{\mu(\omega)} \text{rot} \tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}, \omega). \quad (8)$$

Справедливость данного соотношения можно проиллюстрировать на примере задачи об излучении магнитного момента. Пусть имеются дираковские диполи с объёмной плотностью дипольного момента $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ и магнитным током, определяемым выражением

$$\tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega), \quad (9)$$

аналогичным стандартному выражению для тока электрических диполей $\mathbf{j}_e = -i\omega \mathbf{P}$. Согласно (8), такому магнитному току соответствует электрический ток

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c}{\mu(\omega)} \text{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega). \quad (10)$$

Для немагнитных сред ($\mu(\omega) = 1$) данный ток совпадает с создаваемым в вакууме током обычного магнитного момента, например собственного магнитного момента частицы. Таким образом, задача об излучении дираковских диполей с током (9) полностью эквивалентна задаче об излучении электрического тока (10). Отсюда следует, что решение задачи об излучении магнитного диполя в вакууме может быть получено из соответствующего решения задачи об излучении электрического диполя с помощью дуального преобразования: $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$, при этом $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}$. Данное свойство было подтверждено непосредственными вычислениями в работах [14–16].

Подчёркнём, что для частного случая точечного магнитного момента с плотностью² $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mu(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu(t))$ токи (9), (10) заданы в его системе покоя, поскольку в лабораторной системе в выражение для тока также входит плотность электрического дипольного момента (см. ниже). Действительно, поскольку объёмные плот-

¹ Мы используем метрику $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, в которой $r^\mu = \{ct, \mathbf{r}\}$, $r_\mu = \{-ct, \mathbf{r}\}$.

² Зависимость ориентации вектора $\mu(t) = \mu\zeta(t)$ от времени обусловлена возможной прецессией единичного вектора спина частицы $\zeta(t)$ (см., например, [16]).

ности электрического и магнитного моментов $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ образуют антисимметричный тензор второго ранга $M^{\mu\nu} = (\mathbf{P}, \mathbf{M})$, наличие только одного магнитного момента в системе покоя частицы $M^{\mu\nu} = (\mathbf{0}, \mathbf{M}')$ автоматически приводит к возникновению электрического момента в лабораторной системе: $\mathbf{P} = \gamma \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{M}'$ (здесь $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$ — лоренц-фактор частицы).

При получении выражения (7) для электрического тока, эквивалентного заданному магнитному, мы потребовали равенства магнитных полей излучения токов обоих типов. Теперь потребуем выполнения того же условия для электрических полей. Равенство магнитных полей также будет выполняться вследствие (3). Из сопоставления выражений (2) и (6) имеем

$$\tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \mathbf{k} \times \mathbf{j}_e(\mathbf{k}, \omega), \quad (11)$$

или в пространственных переменных:

$$\tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{ic}{\omega} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \text{rot} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}, \omega). \quad (12)$$

Последние формулы позволяют найти магнитный ток, эквивалентный заданному электрическому, т.е. создающий те же поля излучения. Рассмотрим, например, ток, создаваемый электрическими диполями с плотностью $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega). \quad (13)$$

Согласно (12), ему соответствует магнитный ток

$$\tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{c}{\varepsilon(\omega)} \text{rot} \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega). \quad (14)$$

В случае точечного диполя это означает, что при $\varepsilon(\omega) = 1$ электрический диполь в системе покоя эквивалентен дираковскому аналогу обычного магнитного диполя.

Таким образом, каждой задаче об излучении электрического тока (вообще говоря, произвольной мультипольности) можно поставить в соответствие "дуальную" ей задачу с магнитными токами, создающими те же самые поля излучения. Важной иллюстрацией такой симметрии является принцип дополнительных экранов в теории дифракции, рассмотренный в разделе 3.

3. Дуальное представление в теории дифракции

Пусть пространство (вакуум) разделено плоским идеально проводящим экраном, при этом в последнем имеются отверстия, через которые поле из одного полупространства может проникать в другое. Покажем, что поле плоской волны, дифрагированной на отверстиях в экране, может быть представлено в двух эквивалентных формах: во-первых, как поле излучения поверхностного электрического тока, наведённого на экране падающей волной; во-вторых, как поле излучения магнитного тока, текущего по дополнительному экрану (т.е. отверстию (рис. 1)). Для доказательства мы поступим аналогично тому, как это делается в методе, используемом в векторной теории дифракции, однако, поскольку нас интересуют свойства симметрии относительно дуального преобразования $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$, изложение будем по возможности вести в тензорной форме.

Запишем теорему Гаусса для тензора третьего ранга:

$$\int \partial^\mu T_{\alpha\beta\mu} dY = \oint T_{\alpha\beta\mu} n^\mu d\sigma. \quad (15)$$

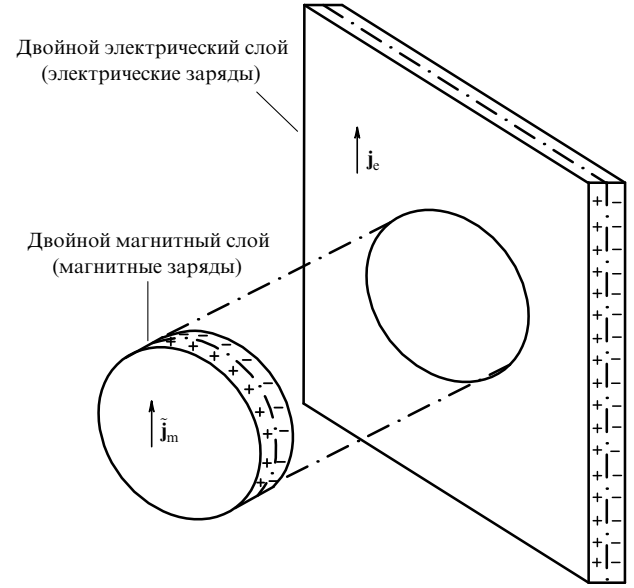


Рис. 1. Простейшая геометрия дифракции на плоском экране с круглым отверстием (дополнительный экран).

Интегрирование в левой части (15) ведётся по 4-мерному объёму ($dY = dr^0 dr^1 dr^2 dr^3 = c dt d^3r$), ограниченному замкнутой гиперповерхностью σ с единичной внешней нормалью n^μ (пространственно подобный вектор). Выберем тензор $T_{\alpha\beta\mu}$ в следующем виде:

$$T_{\alpha\beta\mu} = S_{\alpha\beta} \partial_\mu G - G \partial_\mu S_{\alpha\beta}. \quad (16)$$

Поскольку в задаче о дифракции плоской волны сторонние токи отсутствуют, под величинами $S_{\alpha\beta}$ будем понимать тензор "свободного" поля $F_{\alpha\beta} = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$, удовлетворяющий внутри замкнутой поверхности σ однородным уравнениям Максвелла

$$\partial_\rho F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\rho} + \partial_\mu F_{\rho\nu} = 0, \quad \partial^\mu F_{\nu\mu} = 0, \quad (17)$$

а на самой поверхности — граничным условиям для идеального проводника (см. ниже). В формулу (16) также входит запаздывающая функция Грина [21]:

$$G = \frac{\theta(ct - \hat{r}t)}{2\pi} \delta[(r^\mu - \hat{r}^\mu)^2]. \quad (18)$$

Здесь $\theta(x)$ — функция Хэвисайда, а под координатами, помеченными штрихом, понимаются переменные интегрирования в (15). Подставляя тензор $T_{\alpha\beta\mu} = T_{\alpha\beta\mu}(\hat{r}, \hat{t})$ в виде (16) в левую часть теоремы Гаусса (15), получаем

$$\int \partial^\mu T_{\alpha\beta\mu} dY = \int (F_{\alpha\beta} \square G - G \square F_{\alpha\beta}) dY, \quad (19)$$

где $\square = \partial^\mu \partial_\mu$. Вследствие однородности уравнений (17) второе слагаемое равно нулю. Поскольку функция Грина удовлетворяет уравнению [21]

$$\square G = -\delta^{(4)}(r^\mu - \hat{r}^\mu), \quad (20)$$

в левой части (19) получаем значение тензора напряжённостей в точке $r^\mu = \{ct, \mathbf{r}\}$:

$$\int \partial^\mu T_{\alpha\beta\mu} dY = -F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t). \quad (21)$$

Учитывая, что в правой части равенства (15) в системе покоя экрана $n^\mu \partial_\mu = (\mathbf{n}, \nabla)$, окончательно находим:

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = \oint (F_{\mu\nu}(\mathbf{n}, \nabla) G - G(\mathbf{n}, \nabla) F_{\mu\nu}) d\sigma, \quad (22)$$

где нормаль $\mathbf{n}$ направлена уже *внутрь* области, ограниченной поверхностью σ , элемент интегрирования которой записывается в виде $d\sigma = c dt' dS$, где dS — элемент интегрирования обычной двумерной поверхности. Поскольку тензор $F^{\mu\nu}$ составлен из компонент электрического и магнитного полей, выражение (22) представляет собой обычный интеграл Кирхгофа, записанный для зависящих от времени величин. Нетрудно видеть, что после интегрирования по времени и проведения преобразования Фурье $t \rightarrow \omega$ формула (22) в точности совпадёт с общепринятой формулировкой интеграла Кирхгофа для монохроматических полей (см., например, [7]):

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \omega) = \oint (F_{\mu\nu}(\mathbf{r}', \omega)(\mathbf{n}, \nabla) G_{\omega} - G_{\omega}(\mathbf{n}, \nabla) F_{\mu\nu}(\mathbf{r}', \omega)) dS, \quad (23)$$

где $G_{\omega} = 1/(4\pi) \exp\{i\omega|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/c\}/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ — фурье-компонента запаздывающей функции Грина.

В качестве замкнутой поверхности S часто выбирают поверхность рассматриваемого экрана с опирающейся на него полусферой бесконечного радиуса, на поверхности которой поля удовлетворяют условиям излучения. Однако такой выбор сопряжён с необходимостью использования дополнительных предположений о поведении поля на границе экрана и отверстий. В общем случае для получения точного решения задачи к поверхностному интегралу (23) нужно добавить линейный интеграл вдоль кромки отверстия (см., например, [2, 6]). Заметим, что аналогичная ситуация возникает и при использовании интеграла Кирхгофа для расчёта дифракционного излучения заряженной частицы, пролетающей через отверстие в идеально проводящем экране [22]. Но существует и другой способ выбора поверхности интегрирования S в формуле (23), приводящий к физически более наглядным результатам. А именно, поверхность можно выбрать в виде "двойного слоя" и сферы с бесконечным радиусом, на поверхности которой также удовлетворяются условия излучения для полей $F^{\mu\nu}$ (см., например, [7, 19]). В этом случае после ряда несложных, но довольно громоздких преобразований формула (23) приводится к виду (ср. с трёхмерной формой [6, 7, 19])

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \omega) = \partial_{\mu} \int 2F_{\nu\eta} n^{\eta} G_{\omega} dS - \partial_{\nu} \int 2F_{\mu\eta} n^{\eta} G_{\omega} dS, \quad (24)$$

где интегрирование ведётся уже только по поверхности экрана и где использовано свойство $\partial_{\mu} G_{\omega} = \partial G_{\omega} / \partial r^{\mu} = -\partial G_{\omega} / \partial r^{\mu}$, позволяющее вынести 4-градиент за знак интеграла. Стоящие здесь 4-векторы $F_{\nu\eta} n^{\eta}$ имеют простую физическую интерпретацию: они представляют собой поверхностные токи и заряды, наведённые на экране падающей волной.

Действительно, проинтегрируем уравнения Максвелла (1), по аналогии с трёхмерным случаем, по 4-мерному объёму, ограниченному поверхностью гиперцилиндра, основания которого, параллельные границе раздела, предполагаются настолько малыми, что поля на их поверхности можно считать постоянными. Тогда при стремлении высоты цилиндра δ к нулю, по четырёхмерной теореме Гаусса, имеем

$$\int_{\gamma \rightarrow 0} \partial_{\nu} H^{\mu\nu} d\gamma = \oint_{\delta \rightarrow 0} (H_2^{\mu\nu} - H_1^{\mu\nu}) d\sigma_{\nu}, \quad (25)$$

где $d\sigma_{\nu} = n_{\nu} d\sigma$ — элемент поверхности раздела; знак минус возникает за счёт противоположного направле-

ния нормалей на противоположных основаниях цилиндра. Правая часть второй пары уравнений (1), содержащая токи и заряды, при интегрировании по бесконечно малому объёму гиперцилиндра не обращается в нуль только тогда, когда на границе раздела имеется поверхностный ток. Другими словами, должно выполняться равенство $j_{\epsilon}^{\mu} = j_s^{\mu} \delta(r^i - r_s^i)$, откуда следует граничное условие

$$(H_2^{\mu\nu} - H_1^{\mu\nu}) n_{\nu} = \frac{4\pi}{c} j_s^{\mu}. \quad (26)$$

Данное условие, записанное в трёхмерных обозначениях, принимает знакомый вид:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi \rho_s, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s. \quad (27)$$

Аналогично, проводя интегрирование первой пары уравнений (1) с использованием теоремы Гаусса, получаем второе граничное условие:

$$(\tilde{F}_2^{\mu\nu} - \tilde{F}_1^{\mu\nu}) n_{\nu} = 0, \quad (28)$$

или в трёхмерной форме:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}] = 0. \quad (29)$$

Если вместо электрических токов ввести магнитные, то граничные условия (26) в этом случае будут являться однородными, а условия, получаемые из первой пары уравнений Максвелла, примут вид

$$(\tilde{F}_2^{\mu\nu} - \tilde{F}_1^{\mu\nu}) n_{\nu} = \frac{4\pi}{c} \tilde{j}_s^{\mu}, \quad (30)$$

где псевдовектор поверхностного магнитного тока

$$\tilde{j}_s^{\mu} = \frac{c}{4\pi} \{(\mathbf{n}, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}]\}. \quad (31)$$

Поскольку в задаче о дифракции на идеально проводящем экране поле внутри идеального проводника отсутствует, граничные условия приобретают простой вид:

$$F^{\mu\nu} n_{\nu} = \frac{4\pi}{c} j_s^{\mu}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} n_{\nu} = \frac{4\pi}{c} \tilde{j}_s^{\mu}, \quad (32)$$

где $F^{\mu\nu}$ — тензор полей в вакууме.

С учётом последних равенств, как легко видеть, стоящие в формуле (24) интегралы — это потенциалы поля излучения, генерируемого удвоенным поверхностным током:

$$A_{\text{рад}}^{\mu}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \int 2j_s^{\mu} G_{\omega} dS, \quad (33)$$

или в явно ковариантной форме:

$$A_{\text{рад}}^{\mu}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int j^{\mu} G d\gamma, \quad (34)$$

где $j^{\mu} = 2j_s^{\mu} \delta(r^i - r_s^i)$. Таким образом, тензор "свободного" поля при наличии границ раздела выражается через поверхностные токи, текущие по данным границам, что иногда рассматривается как электродинамическая формулировка принципа Гюйгенса [2]. В этих обозначениях формула (24) переписывается как

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A_{\text{рад}}^{\nu} - \partial^{\nu} A_{\text{рад}}^{\mu}. \quad (35)$$

Механизм возникновения "лишнего" множителя 2 в правой части (24), (33) объяснён, например, в [2, 8, 23]. Выбор поверхности интегрирования в виде двойного (а не простого) слоя физически означает, что текущий по

экрану поверхностный ток образован электрическими диполями, а сама поверхность является электрическим двойным слоем [13]. Данный формализм также приводит к тому, что интеграл по поверхности отверстия тождественно обращается в нуль ввиду отсутствия поверхностного тока. Это позволяет избежать использования линейного интеграла и приводит к тем же результатам [2, 6].

Перейдём теперь к формулированию дуального представления в задаче о дифракции. Поскольку выбор тензора в формуле (16) произволен, вместо обычного тензора напряжённостей можно выбрать дуальный ему псевдотензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$ (либо просто умножить уравнение (22) на полностью антисимметричный тензор). Очевидно, что следующее отсюда равенство

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \omega) = \oint (\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathbf{r}', \omega)(\mathbf{n}, \nabla) G_{\omega} - G_{\omega}(\mathbf{n}, \nabla) \tilde{F}_{\mu\nu}(\mathbf{r}', \omega)) dS \quad (36)$$

полностью аналогично (23). Однако после соответствующего выбора поверхности интегрирования в виде двойного слоя (36) преобразуется в формулу, которая отличается от (24) (ср. с трёхмерной формой [6, 7, 19]):

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \omega) = \partial_{\mu} \int 2\tilde{F}_{\nu\eta} n^{\eta} G_{\omega} dS - \partial_{\nu} \int 2\tilde{F}_{\mu\eta} n^{\eta} G_{\omega} dS. \quad (37)$$

Отличие (37) от выражения (24) заключается в том, что в (37) поле волны представлено как поле излучения магнитного поверхностного тока (32), генерирующего "магнитные" потенциалы $\tilde{A}^{\mu}$:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^{\mu} \tilde{A}_{\text{rad}}^{\nu} - \partial^{\nu} \tilde{A}_{\text{rad}}^{\mu}. \quad (38)$$

Вследствие того что тангенциальные компоненты электрического поля обращаются в нуль на поверхности идеального проводника, интеграл в формуле (37) сводится к интегралу лишь по отверстию, т.е. по экрану, дополнительному к рассматриваемому (см. рис. 1). Это означает, что замене поверхности интегрирования дополнительным экраном отвечает замена обычных поверхностных токов магнитными, т.е. переход к дуальному представлению: $F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$. При этом поверхность отверстия с текущим по ней удвоенным магнитным током эквивалентна двойному магнитному слою [13] вследствие того, что образующие данный поверхностный ток дираковские диполи эквивалентны обычным магнитным диполям (элементарной петле с током [2]). Подчёркнём, что только данное свойство позволяет дать физическую интерпретацию широко используемому в теории дифракции математическому формализму (например, в работах [3–8, 18]).

4. Дуальное представление с потенциалами Герца

Указанная дуальная симметрия в теории дифракции становится ещё более наглядной, если интегралы Кирхгофа (23), (36) записать в терминах антисимметричного тензора Герца (см., например, [16]): $Z^{\mu\nu} = (Z^e, Z^m)$. Здесь электрический вектор (потенциал) Герца Z^e связан с объёмной плотностью дипольного момента $\mathbf{P} = d\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)$ (для одного диполя), а магнитный Z^m связан с объёмной плотностью магнитного момента $\mathbf{M} = \mu\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mu})$ следующим соотношением:

$$\square Z^{\mu\nu} = -4\pi M^{\mu\nu}. \quad (39)$$

Стоящий в правой части (39) антисимметричный тензор $M^{\mu\nu} = (\mathbf{P}, \mathbf{M})$ иногда называют тензором поляризации. Заметим, что уравнение (39) легко получается из лагранжиана $L = M^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - (1/8\pi) \partial^{\eta} Z^{\mu\nu} \partial_{\eta} Z_{\mu\nu}$ [16], в котором роль обобщённых координат играет тензор Герца $Z^{\mu\nu}$, а роль обобщённых скоростей играют его производные $\partial^{\eta} Z^{\mu\nu}$. Увеличение в два раза числа степеней свободы, по сравнению с числом таковых в обычном подходе (шесть независимых компонент тензора вместо трёх независимых компонент 4-потенциала A^{μ} , удовлетворяющего условию Лоренца $\partial^{\mu} A_{\mu} = 0$), объясняется тем, что плотности электрического дипольного и магнитного моментов задаются независимо друг от друга.

Пусть интересующее нас полупространство, ограниченное поверхностью экрана, не содержит "сторонних" диполей и тензор $Z^{\mu\nu}$ удовлетворяет однородному уравнению (39). Тогда, выбирая тензор $S_{\alpha\beta}$ в формуле (16) в виде $Z_{\alpha\beta}$, получим интеграл Кирхгофа, записанный в терминах потенциалов Герца:

$$Z_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \omega) = \oint (Z_{\mu\nu}(\mathbf{r}', \omega)(\mathbf{n}, \nabla) G_{\omega} - G_{\omega}(\mathbf{n}, \nabla) Z_{\mu\nu}(\mathbf{r}', \omega)) dS. \quad (40)$$

Очевидно, что подобное соотношение можно записать и через дуальный тензор $\tilde{Z}^{\mu\nu}$. Интеграл (40), записанный в терминах электрического потенциала Z^e , сравнительно недавно было предложено использовать при решении задач дифракции [24, 25]. На первый взгляд, полученное соотношение в случае выбора поверхности интегрирования в виде экрана и полусферы с бесконечным радиусом содержит тот же недостаток — необходимость задания приближённого значения потенциалов Герца на поверхности отверстия. Однако, поскольку источниками потенциалов $Z^{\mu\nu} = (Z^e, Z^m)$ изначально являются диполи, выбор поверхности интегрирования в виде двойного слоя не нужен. Действительно, потенциалы, входящие в правую часть уравнения (40), берутся на поверхности экрана, а следовательно, удовлетворяют уравнению (39) с правой частью $M^{\mu\nu} = M_s^{\mu\nu} \delta(r^i - r_s^i)$, где $M_s^{\mu\nu} = (\mathbf{P}_s, \mathbf{M}_s)$ — поверхностная плотность дипольных моментов, наведённых на экране падающей волной. Решение данного уравнения можно записать по аналогии с решением обычного волнового уравнения для A^{μ} :

$$Z^{\mu\nu}(\mathbf{r}', \omega) = 4\pi \int M_s^{\mu\nu} G_{\omega} dS. \quad (41)$$

Из сказанного выше вытекает, что на поверхности экрана следует положить $\mathbf{M}_s = 0$, а на поверхности отверстия — $\mathbf{P}_s = 0$. Тогда экран будет представлять собой двойной электрический слой — поверхность распределённого дипольного момента, а дополнительный к нему экран (отверстие) — двойной магнитный слой. Таким образом, преимуществом интеграла (40) перед обычным интегралом Кирхгофа (23) является то, что электрический вектор Z^e в правой части (40) отличен от нуля лишь на поверхности экрана, а магнитный потенциал Z^m — лишь на отверстии. Это позволяет избежать необходимости привлечения дополнительных предположений при решении задачи. Указанное обстоятельство не является очевидным, однако ясно следует из проведённого выше анализа и может рассматриваться как принцип дополнительных экранов в формализме потенциалов Герца.

Заметим, что уравнение (39) успешно применялось для описания свойств симметрии уравнений Максвелла с

дираковскими полюсами [26]. Это связано с тем, что уравнение (39), в отличие от стандартных уравнений (1), имеет полностью дуально-симметричный вид. Здесь мы используем данное свойство для того, чтобы ещё раз показать эквивалентность некоторых электрических и магнитных источников. Переход от потенциалов Герца к обычному 4-потенциалу A^μ осуществляется следующим образом. Умножим обе части равенства (39) на ∂_ν . Обозначая $A^\mu = \partial_\nu Z^{\mu\nu}$, для компонент 4-тока $j_\epsilon^\mu = c \partial_\nu M^{\mu\nu}$ получаем:

$$j_\epsilon^\mu = \left\{ -c \operatorname{div} \mathbf{P}, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \right\} \quad (42)$$

— стандартное выражение для плотности тока, записанное в терминах поляризаций (см., например, [10]). Тогда из (39) следует обычная формула:

$$\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\epsilon^\mu. \quad (43)$$

Умножив теперь обе части (39) на $1/2\epsilon_{\rho\eta\mu\nu}$, получим аналогичное уравнение для дуальных величин. В свою очередь, умножая это уравнение на ∂^η , находим

$$\square \partial^\eta \tilde{Z}_{\rho\eta} = -4\pi \partial^\eta \tilde{M}_{\rho\eta}. \quad (44)$$

Псевдовектор $-\partial^\eta \tilde{Z}_{\rho\eta}$ естественно обозначить как $\tilde{A}_\rho$ и называть "магнитным" 4-потенциалом, а величину $\tilde{j}_\rho = -c \partial^\eta \tilde{M}_{\rho\eta}$ можно назвать магнитным током, эквивалентным заданному электрическому. Его компоненты имеют вид

$$\tilde{j}_m^\mu = \left\{ -c \operatorname{div} \mathbf{M}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{P} \right\}. \quad (45)$$

Отсюда видно, что плотность магнитного тока $\tilde{j}_m = \partial \mathbf{M} / \partial t - c \operatorname{rot} \mathbf{P}$ в известном смысле эквивалентна заданной плотности электрического тока $\mathbf{j}_e = \partial \mathbf{P} / \partial t + c \operatorname{rot} \mathbf{M}$, что в частных случаях одного электрического или одного магнитного диполей сводится к ранее полученным результатам — формулам (10) и (14), в которых следует положить $\epsilon(\omega) = 1$, $\mu(\omega) = 1$. Подчеркнём, что речь идёт об эквивалентности электрических и магнитных источников в смысле равенства создаваемых ими полей. При этом определение тензора напряжённости полей через 4-потенциал $A^\mu = \partial_\nu Z^{\mu\nu}$ формулой $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ автоматически приводит к уравнению $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$, т.е. к равенству нулю плотности магнитных источников. В этом случае связь полей и потенциалов Герца даётся формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \mathbf{Z}^e - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^m}{\partial t} \right) - 4\pi \mathbf{P}, \\ \mathbf{H}_e(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \mathbf{Z}^m + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^e}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Определение дуального тензора $\tilde{F}^{\mu\nu}$ через магнитный потенциал $\tilde{A}^\mu = -\partial_\nu \tilde{Z}^{\mu\nu}$ формулой $\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu$ автоматически приводит к уравнению $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, т.е. к равенству нулю плотности электрических источников. Связь полей и потенциалов Герца в этом случае выражается как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \mathbf{Z}^e - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^m}{\partial t} \right), \\ \mathbf{H}_m(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \mathbf{Z}^m + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}^e}{\partial t} \right) - 4\pi \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (47)$$

откуда видно, что величина $\operatorname{div} \mathbf{H}_m = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}$ играет роль плотности магнитных зарядов в соответствии с (45). Из сопоставления формул (46) и (47) следует, что равенство полей электрических и магнитных источников выполняется лишь в тех точках пространства, в которых отсутствуют диполи: $\mathbf{P} \equiv \mathbf{M} \equiv 0$. Можно сказать, что источники обоих типов эквивалентны лишь на расстояниях, превышающих размеры системы, создающей поля. Но именно из этого условия мы и исходили при выводе формул для полей излучения в разделе 2.

5. Пример: дуальный метод в задаче о переходном излучении заряженной частицы

В качестве иллюстрации приведём решение задачи о переходном излучении заряженной частицы с использованием дуального представления. В простейшем случае данное излучение возникает при пересечении зарядом, равномерно и прямолинейно движущимся в вакууме, идеально проводящего экрана. В ряде работ для решения данной задачи (а также родственной ей задачи о дифракционном излучении, возникающем при движении частицы вблизи экрана) использовалось представление поля излучения как поля поверхностного электрического тока, наведённого на экране полем заряда (по аналогии с представлением в теории дифракции электромагнитного излучения (см., например, [27–29])). Сравнительно недавно для решения подобных задач было предложено дуальное представление, т.е. использование поверхностного магнитного тока в качестве источника излучения [18]. Преимущество дуального метода здесь заключается в том, что этот метод позволил сравнительно легко воспроизвести известные из литературы результаты, полученные другими (нередко довольно громоздкими) методами. В то же время оказалось, что решение задачи о переходном излучении с помощью "обычного" метода поверхностных токов не приводит к правильному результату (см. ниже) даже в простейшем случае нормального падения частицы на границу раздела [19, 20].

Рассмотрим заряженную частицу, движущуюся с постоянной скоростью $\beta = v/c$ вдоль оси z (рис. 2). При пересечении бесконечного идеально проводящего экрана, расположенного в плоскости $z = 0$, возникает вспышка переходного излучения, которое можно рассматривать как излучение поверхностного тока, наведённого на экране полем заряда. Для определения плотности поверхностного тока в теории дифракции плоских волн используют интегральное уравнение Фока [1, 29]

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}', \omega) &= \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^R - \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \int_S \mathbf{j}_e(\mathbf{r}'', \omega) \times \\ &\times \operatorname{grad} \frac{\exp(i\omega|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|/c)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dS'', \end{aligned} \quad (48)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности экрана. При выводе уравнения (48) использовались стандартные граничные условия (27), а также тот факт, что поле $\mathbf{H}^R$ удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла (механизм возникновения "лишнего" множителя 2 здесь тот же, что и рассмотренный в разделе 3). Если частица является ультрарелятивистской и её поле $\mathbf{E}^0$ практически перпендикулярно, то в качестве $\mathbf{H}^R$ можно принять поле заряда $\mathbf{H}^0$. Такой подход в задаче о переходном излучении использовался, например, в работе [29]. Однако в общем случае

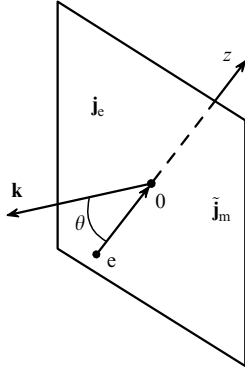


Рис. 2. Схема генерации переходного излучения заряженной частицей.

в задаче с внешним источником однородным уравнениям удовлетворяет лишь поле излучения, являющееся разностью полного поля и собственного поля заряда, $\mathbf{H}^R = \mathbf{H} - \mathbf{H}^0$. В этом случае уравнение (48) следует модифицировать [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}', \omega) = & \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0 - \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \int \mathbf{j}_e(\mathbf{r}'', \omega) \times \\ & \times \text{grad} \frac{\exp(i\omega|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|/c)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dS'' + \frac{c}{(2\pi)^2} \mathbf{n} \times \\ & \times \int [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \text{grad} \frac{\exp(i\omega|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|/c)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dS''. \end{aligned} \quad (49)$$

Используя граничные условия (31), содержащие поверхностные магнитные токи, можно получить аналогичное уравнение для магнитных токов [20]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}', \omega) = & -\frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0 - \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \int \tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}'', \omega) \times \\ & \times \text{grad} \frac{\exp(i\omega|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|/c)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dS'' - \frac{c}{(2\pi)^2} \mathbf{n} \times \\ & \times \int [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \text{grad} \frac{\exp(i\omega|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|/c)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} dS''. \end{aligned} \quad (50)$$

В классической теории дифракции электромагнитного излучения уравнение (48) решается методом последовательных приближений [1]. Существенным отличием рассматриваемой задачи является тот факт, что уравнения (49), (50) могут быть решены точно. Эти решения имеют вид

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^0, \quad \tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{c}{2\pi} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^0. \quad (51)$$

По аналогии с теорией дифракции, следует ожидать, что решение обычных и дуальных уравнений Максвелла с токами (51) в правой части должно давать точные выражения для поля переходного излучения. В действительности данная ситуация наблюдается лишь в отношении магнитного тока.

Поля поверхностных токов в волновой зоне даются аналогами выражений (2), (6):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e^R(\mathbf{r}_0, \omega) = & -\frac{i}{\omega} \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \int \mathbf{j}_e(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) dS, \\ \mathbf{E}_m^R(\mathbf{r}_0, \omega) = & -\frac{i}{c} \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \mathbf{k} \times \int \tilde{\mathbf{j}}_m(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) dS, \end{aligned} \quad (52)$$

где интегрирование ведётся по поверхности экрана. Для напряжённостей полей частицы имеем следующие выражения (см., например, [7]):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, \omega) = & \frac{e\omega}{\pi v^2 \gamma} \left(\frac{\mathbf{p}}{\rho} K_1 \left[\frac{\omega \rho}{v \gamma} \right] - \frac{i}{\gamma} \frac{\mathbf{v}}{v} K_0 \left[\frac{\omega \rho}{v \gamma} \right] \right) \times \\ & \times \exp \left(i \frac{\omega}{v} z \right), \quad \mathbf{H}^0 = \mathbf{\beta} \times \mathbf{E}^0, \end{aligned} \quad (53)$$

где e — заряд частицы, $\mathbf{p} = (x, y)$, γ — лоренц-фактор, $K_{0,1}$ — функции Макдональда. Интегрирование в (52) проводится в полярной системе координат с использованием известных соотношений:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \phi \exp(-ia_1 \rho \cos \phi) d\phi &= -2i\pi J_1(a_1 \rho), \\ \int_0^{2\pi} \exp(-ia_1 \rho \cos \phi) d\phi &= 2\pi J_0(a_1 \rho), \\ \int_0^\infty \rho J_1(a_1 \rho) K_1(a_2 \rho) d\rho &= \frac{a_1}{a_2} \frac{1}{a_1^2 + a_2^2}, \end{aligned} \quad (54)$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя, a_1, a_2 — вещественные положительные постоянные. Излучённая в единичные интервал частот и телесный угол энергия даётся квадратом модуля поля:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \Big|_e &= cr_0^2 |\mathbf{E}_e^R|^2 = \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}, \\ \frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} \Big|_m &= cr_0^2 |\mathbf{E}_m^R|^2 = \frac{e^2}{\pi^2 c} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}, \end{aligned} \quad (55)$$

где θ — полярный угол излучения, отсчитываемый от отрицательного направления скорости частицы (излучение "назад" (см. рис. 2)). Видно, что с известной формулой Гинзбурга–Франка [11] совпадает лишь второе выражение, полученное с помощью дуального метода, в то время как формула, полученная на основе "обычного" подхода, имеет дополнительный множитель $\beta^2 \cos^2 \theta$, что позволяет использовать её лишь в ультрарелятивистском случае, когда излучение сконцентрировано в интервале углов $\theta \sim \gamma^{-1} \ll 1$. Можно показать, что и в более общем случае наклонного падения заряда на поверхность экрана дуальный метод приводит к известным результатам Корхмазяна и Пафомова, в то время как метод электрических токов даёт погрешность тем большую, чем больше угол падения (т.е. угол между вектором скорости частицы и нормалью к поверхности экрана) [19, 20].

Таким образом, оказывается, что в задаче о переходном излучении (а также и в более общем случае дифракционного излучения) именно дуальный метод позволяет получать достоверные результаты, а применение подхода с электрическими токами ограничено ультрарелятивистскими энергиями. Причина кажущегося противоречия состоит в изначально неправильной физической постановке задачи. В теории дифракции плоских волн на идеально проводящем бесконечно тонком экране предполагается, что поверхностный ток имеет две тангенциальные составляющие, поскольку в силу граничных условий $\mathbf{j}_e \propto \mathbf{n} \times \mathbf{H}$. В действительности все величины в макроскопической электродинамике усреднены по физически бесконечно малому объёму, поэтому даже макроскопически бесконечно тонкий экран имеет всё же конечную толщину, превышающую как длину свободного пробега электронов проводимо-

сти, так и размеры области усреднения. Отсюда следует, что в общем случае нет оснований считать, что наведённый полем заряда электрический ток имеет лишь две компоненты.

Имея точное выражение для магнитного поверхностного тока (51), можно найти соответствующее ему выражение для электрического тока, используя результаты раздела 2. Действительно, из формулы (7) для электрического тока, эквивалентного заданному магнитному, находим

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, \omega) = \frac{c}{2\pi} \mathbf{e} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0], \quad (56)$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{k}/k$. Подставляя выражение (56) в (52), нетрудно убедиться в том, что оно в точности приводит к формуле Гинзбурга–Франка, а также к соответствующим результатам в случае наклонного падения (см. также [20]). Особенностью данного выражения является наличие перпендикулярной к поверхности экрана составляющей плотности тока, причём, поскольку $j_z \propto \sin \theta$, вклад этой компоненты существен лишь для больших углов излучения. В релятивистском случае излучение сконцентрировано в области малых θ и нормальной компонентой тока можно пренебречь, что обуславливает использование в теории переходного и дифракционного излучения методов теории дифракции плоских волн (см., например, [27–29]).

В заключение ещё раз отметим, что использование дуального метода в теории переходного (или дифракционного) излучения не только полезно для решения ряда частных задач, но и позволяет сравнительно легко найти точное выражение для плотности поверхностного электрического тока, наведённого на экране полем частицы.

6. Заключение

Дуальное представление в классической электродинамике, т.е. использование формул вида $\mathbf{E} \propto \text{rot} \mathbf{A}$, наиболее часто встречается в векторной теории дифракции, однако физическая интерпретация такого метода в большинстве работ не приводится. Как показано в данной заметке, применение подобного формализма возможно благодаря эквивалентности некоторых электрических и магнитных источников. При этом особенно наглядным является использование формализма потенциалов Герца, позволяющего решать задачи об излучении мультиполей и дифракции электромагнитных волн в полностью дуально-симметричном виде. Этот метод также оказывается весьма полезным в задачах о переходном и дифракционном излучении заряженных частиц.

Автор выражает благодарность А.П. Потылицыну за внимательное чтение рукописи статьи и полезные обсуж-

дения. Работа частично поддержана грантами Министерства образования и науки РФ 1.81.2006, П 1143, 02.740.11.0238.

Список литературы

1. Фок В А *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн* 2-е изд. (М.: ЛКИ, 2007) с. 20
2. Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* 2-е изд. (М.: Радио и связь, 1988) с. 16, 295–297, 386
3. Schelkunoff S A *Phys. Rev.* **56** 308 (1939)
4. Smythe W R *Phys. Rev.* **72** 1066 (1947)
5. Smythe W R *Static and Dynamic Electricity* (New York: McGraw-Hill, 1939) [Смайт В *Электростатика и электродинамика* (М.: ИЛ, 1954) с. 486–488]
6. Stratton J A *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill, 1941) [Страттон Дж А *Теория электромагнетизма* (М.–Л.: Гостехиздат, 1948) с. 409–414]
7. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1962) [Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965) с. 313–322]
8. Drezet A, Woehl J C, Huant S J. *Math. Phys.* **47** 072901 (2006)
9. Франк И М, в сб. *Памяти Сергея Ивановича Вавилова* (М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1952) с. 173
10. Болотовский Б М *УФН* **62** 201 (1957)
11. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы* (М.: Наука, 1981) с. 160 [Ginzburg V L *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics* (New York: Gordon and Breach, 1989)]
12. Франк И М *УФН* **144** 251 (1984) [Frank I M *Sov. Phys. Usp.* **27** 772 (1984)]
13. Тамм И Е *Основы теории электричества* 10-е изд. (М.: Наука, 1989) с. 57, 201, 487 [Tamm I E *Fundamentals of the Theory of Electricity* (Moscow: Mir Publ., 1979)]
14. Бордовицын В А, Разина Г К *Изв. вузов. Физика* **24** 120 (1981)
15. Бордовицын В А, Гушина В С, Жукова И Н *Изв. вузов. Физика* **36** 60 (1993) [Bordovitsyn V A, Gushchina V S, Zhukova I N *Russ. Phys. J.* **36** 148 (1993)]
16. Багров В Г и др. *Теория излучения релятивистских частиц* (Под ред. В А Бордовицына) (М.: Физматлит, 2002) с. 96, 215, 222
17. Батыгин В В, Топтыгин И Н *Современная электродинамика* Т. 1 (М.–Ижевск: РХД, 2005) с. 509
18. Shkvarunets A G, Fiorito R B *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **11** 012801 (2008)
19. Карловец Д В, Потылицын А П *ЖЭТФ* **134** 887 (2008) [Karlovets D V, Potylitsyn A P *JETP* **107** 755 (2008)]
20. Karlovets D V, Potylitsyn A P *Phys. Lett. A* **373** 1988 (2009)
21. de Groot S R, Suttrop L G *Foundations of Electrodynamics* (Amsterdam: North-Holland, 1972) [де Гроот С Р, Сатторп Л Г *Электродинамика* (М.: Наука, 1982) с. 132, 136]
22. Хачатрян Б В *Изв. АН Арм. ССР* **18** 133 (1965)
23. Cullen J A *Phys. Rev.* **109** 1863 (1958)
24. Низьев В Г *УФН* **172** 601 (2002) [Niz'ev V G *Phys. Usp.* **45** 553 (2002)]
25. Nesterov A V, Niziev V G *Phys. Rev. E* **71** 046608 (2005)
26. Mignani R *Phys. Rev. D* **13** 2437 (1976)
27. Казанцев А П, Сурдатович Г И *ДАН СССР* **147** 74 (1962) [Kazantsev A P, Surdutovich G I *Sov. Phys. Dokl.* **7** 990 (1962)]
28. Седракан Д М *Изв. АН Арм. ССР* **17** 113 (1964)
29. Рязанов М И, Тилинин И С *ЖЭТФ* **71** 2078 (1976) [Ryazanov M I, Tilinin I S *Sov. Phys. JETP* **44** 1092 (1976)]

On dual representation in classical electrodynamics

D.V. Karlovets

National Research Tomsk Polytechnic University,
prosp. Lenina 30, 634050 Tomsk, Russian Federation
Tel. 7 (3822) 41-89 06. E-mail: Karlovets@tpu.ru

A discussion is given of the use of the dual representation in solving multipole radiation and electromagnetic wave diffraction problems in classical electrodynamics. In the method discussed, actual electric field sources are replaced by "magnetic" ones. It is shown that despite the absence of Dirac magnetic monopoles, such formalism allows for a physical interpretation of some often-used methods.

PACS numbers: **41.60. – m**, **41.20. – q**, 42.25.Fx
Bibliography — 29 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180** (8) 851–858 (2010)

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008e.0851
Received 5 June 2009, revised 28 April 2010
Physics – Uspekhi **53** (8) (2010)