Март 2010 г. **УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК** *Том 180, № 3*

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О релятивистской инвариантности тензоров энергии-импульса в форме Минковского и в форме Абрагама

В.Г. Веселаго, В.В. Щавлев

PACS numbers: 03.30.+p, 03.50.De DOI: 10.3367/UFNr.0180.201003k.0331

В статье [1] одного из нас (ВГВ) было указано, что тензор энергии-импульса в форме Абрагама не является релятивистски инвариантным, в противоположность тензору Минковского. Именно это обстоятельство интерпретируется в [1] как тот факт, что тензор Абрагама по сути дела не может рассматриваться как тензор. Однако в статье [1] не приводятся соответствующие расчётные формулы.

По-видимому, именно этот факт заставил авторов работы [2] высказать своё несогласие с вышеприведёнными утверждениями. Поэтому мы хотели бы привести в данном письме соответствующие вычисления, с тем чтобы показать, что тензор Минковского в любой инерциальной системе координат одинаково зависит от компонент полей в этой же системе, а тензор Абрагама этому требованию не удовлетворяет.

Рассмотрим две системы координат: K и K'. Пусть K' движется относительно K со скоростью v вдоль оси $\mathrm{O}x$. Тогда формулы преобразования компонент тензора второго ранга при преобразованиях Лоренца, т.е. формулы перехода от системы K к системе K', запишутся в виде [3, с. 357]:

$$\begin{aligned}
T'_{11} &= \gamma^2\big(T_{11} + \mathrm{i}\beta(T_{14}+T_{41}) - \beta^2 T_{44}\big)\,,\\
T'_{12} &= \gamma(T_{12} + \mathrm{i}\beta T_{42})\,,\\
T'_{13} &= \gamma(T_{13} + \mathrm{i}\beta T_{43})\,,\\
T'_{14} &= \gamma^2(T_{14} - \mathrm{i}\beta T_{11} + \beta^2 T_{41} + \mathrm{i}\beta T_{44})\,,\\
T'_{21} &= (T_{21} + \mathrm{i}\beta T_{24})\,,\\
T'_{22} &= T_{22}\,,\\
T'_{23} &= T_{23}\,,\\
T'_{24} &= \gamma(T_{24} - \mathrm{i}\beta T_{21})\,,\\
T'_{31} &= \gamma(T_{31} + \mathrm{i}\beta T_{34})\,,\\
T'_{32} &= T_{32}\,,\\
T'_{33} &= T_{33}\,,\\
T'_{34} &= \gamma(T_{34} - \mathrm{i}\beta T_{31})\,,\\
T'_{41} &= \gamma^2(T_{41} - \mathrm{i}\beta T_{11} + \beta^2 T_{14} + \mathrm{i}\beta T_{44})\,,\\
T'_{42} &= \gamma(T_{42} - \mathrm{i}\beta T_{12})\,,\\
T'_{43} &= \gamma(T_{43} - \mathrm{i}\beta T_{13})\,,\\
T'_{44} &= \gamma^2\big(T_{44} - \mathrm{i}\beta(T_{14}+T_{41}) - \beta^2 T_{11}\big)\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta = \frac{v}{c}\,, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{2}$$

Запишем формулы преобразования Лоренца для полей [3, с. 375]:

$$\begin{aligned}
E_x &= E'_x\,,\\
E_y &= \gamma(E'_y + \beta B'_z)\,,\\
E_z &= \gamma(E'_z - \beta B'_y)\,,\\
D_x &= D'_x\,,\\
D_y &= \gamma(D'_y + \beta H'_z)\,,\\
D_z &= \gamma(D'_z - \beta H'_y)\,,\\
B_x &= B'_x\,,\\
B_y &= \gamma(B'_y - \beta E'_z)\,,\\
B_z &= \gamma(B'_z + \beta E'_y)\,,\\
H_x &= H'_x\,,\\
H_y &= \gamma(H'_y - \beta D'_z)\,,\\
H_z &= \gamma(H'_z + \beta D'_y)\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тензор энергии-импульса записывается в виде [3, с. 377]

$$T_{ik} = \begin{bmatrix} T_{\alpha\beta} & -\mathrm{i}c\mathbf{g} \\ -\dfrac{\mathrm{i}}{c}\,\mathbf{S} & W \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь величины $T_{\alpha\beta}$ — пространственные компоненты тензора, так что $\alpha, \beta = x, y, z$, $\mathbf{g}$ — плотность импульса

В.Г. Веселаго. Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
ул. Вавилова 38, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 135-84-45
E-mail: v.veselago@relcom.ru
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация
В.В. Щавлев. Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация

Статья поступила 23 ноября 2009 г.

поля, $\mathbf{S}$ — вектор Умова – Пойнтинга (плотность потока энергии), W — плотность энергии поля.

Компоненты тензора энергии-импульса в форме Минковского выражаются как [3, с. 377]

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\,(E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta) - \frac{1}{8\pi}\,\delta_{\alpha\beta}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,, \tag{5}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{EH}]\,, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{DB}]\,, \quad W = \frac{1}{8\pi}\,(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,. \tag{6}$$

В форме Абрагама компоненты тензора имеют вид [3, с. 377]

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\,(E_\alpha D_\beta + E_\beta D_\alpha + H_\alpha B_\beta + H_\beta B_\alpha) - \\ - \frac{1}{8\pi}\,\delta_{\alpha\beta}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,, \tag{7}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{EH}]\,, \ \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{EH}]\,, \ W = \frac{1}{8\pi}\,(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,. \tag{8}$$

Покажем, что вид тензора энергии-импульса в форме Минковского при переходе в другую систему координат не меняется. Для этого в качестве примера рассмотрим компоненту T_{xx}, которая согласно (5) имеет вид

$$T_{xx} = \frac{1}{4\pi}\,(E_x D_x + H_x B_x) - \frac{1}{8\pi}\,\delta_{xx}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,. \tag{9}$$

Согласно (4) и первой формуле из системы (1) имеем

$$T'_{xx} = \gamma^2\left(T_{xx} + \mathrm{i}\beta\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}\,S_x - \mathrm{i}cg_x\right) - \beta^2 W\right). \tag{10}$$

Подставляя в (10) выражения для T_{xx}, S_x, g_x и W из (6) и (9), получаем:

$$T'_{xx} = \gamma^2\left\{\frac{1}{4\pi}\,(E_x D_x + H_x B_x) + \frac{\beta}{4\pi}\,\left([\mathbf{EH}]_x + [\mathbf{DB}]_x\right) - \\ - \frac{1}{8\pi}\,(1+\beta^2)(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\right\}. \tag{11}$$

Распишем скалярное и векторное произведение

$$\mathbf{ED} + \mathbf{HB} = E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z + H_x B_x + \\ + H_y B_y + H_z B_z\,, \tag{12}$$

$$[\mathbf{EH}]_x + [\mathbf{DB}]_x = E_y H_z - E_z H_y + D_y B_z - D_z B_y\,. \tag{13}$$

Подставив преобразования Лоренца для полей из (3) в (12) и (13), получаем

$$\mathbf{ED} + \mathbf{HB} = E'_x D'_x + H'_x B'_x + \gamma^2(1+\beta^2) \times \\ \times (E'_y D'_y + E'_z D'_z + H'_y B'_y + H'_z B'_z) + \\ + 2\gamma^2\beta\left([\mathbf{E}'\mathbf{H}']_x + [\mathbf{D}'\mathbf{B}']_x\right), \tag{14}$$

$$[\mathbf{EH}]_x + [\mathbf{DB}]_x = \gamma^2\left\{(1+\beta^2)\left([\mathbf{E}'\mathbf{H}']_x + [\mathbf{D}'\mathbf{B}']_x\right) + \\ + 2\beta(E'_y D'_y + E'_z D'_z + H'_y B'_y + H'_z B'_z)\right\}. \tag{15}$$

Подставив выражения для E_x, D_x, H_x и B_x из (3), а также выражения из (14) и (15) в (11) и сгруппировав подобные члены, мы приводим (11) к виду

$$T'_{xx} = \gamma^2\left\{\frac{1}{8\pi}\,(1-\beta^2)(E'_x D'_x + H'_x B'_x) - \\ - \frac{1}{8\pi}\,(1-\beta^2)(E'_y D'_y + E'_z D'_z + H'_y B'_y + H'_z B'_z)\right\}, \tag{16}$$

или, что есть то же самое,

$$T'_{xx} = \frac{1}{4\pi}\,(E'_x D'_x + H'_x B'_x) - \frac{1}{8\pi}\,\delta_{xx}(\mathbf{E}'\mathbf{D}' + \mathbf{H}'\mathbf{B}')\,. \tag{17}$$

Из этого преобразования следует, что вид компоненты тензора не изменился при переходе в систему K'.

Проведём аналогичные вычисления для компоненты T_{xx} тензора энергии-импульса в форме Абрагама. Из (7) следует, что

$$T_{xx} = \frac{1}{4\pi}\,(E_x D_x + H_x B_x) - \frac{1}{8\pi}\,\delta_{xx}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\,. \tag{18}$$

Согласно первой формуле из системы (1) и (4)

$$T'_{xx} = \gamma^2\left(T_{xx} + \mathrm{i}\beta\left(-\frac{\mathrm{i}}{c}\,S_x - \mathrm{i}cg_x\right) - \beta^2 W\right). \tag{19}$$

Подставляя сюда выражения для T_{xx}, S_x, g_x и W из (8) и (18), получаем

$$T'_{xx} = \gamma^2\left\{\frac{1}{4\pi}\,(E_x D_x + H_x B_x) + \frac{\beta}{4\pi}\,\left(2[\mathbf{EH}]_x\right) - \\ - \frac{1}{8\pi}\,(1+\beta^2)(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\right\}. \tag{20}$$

Так как $\mathbf{ED} + \mathbf{HB}$ мы вычислили ранее, нам остаётся получить выражение только для $[\mathbf{EH}]_x$:

$$[\mathbf{EH}]_x = E_y H_z - E_z H_y = \gamma^2\left\{[\mathbf{E}'\mathbf{H}']_x + \\ + \beta(E'_y D'_y + E'_z D'_z + H'_y B'_y + H'_z B'_z) + \beta^2[\mathbf{D}'\mathbf{B}']_x\right\}. \tag{21}$$

Здесь мы снова воспользовались преобразованием Лоренца для полей (3).

Подставив выражения для E_x, D_x, H_x и B_x из (3), а также выражения из (12) и (21) в (20) и сгруппировав подобные члены, мы приводим (20) к виду

$$T'_{xx} = \gamma^2\left\{\frac{1}{8\pi}\,(1-\beta^2)(E'_x D'_x + H'_x B'_x) - \\ - \frac{1}{8\pi}\,(1-\beta^2)(E'_y D'_y + E'_z D'_z + H'_y B'_y + H'_z B'_z) + \\ + \frac{\beta}{4\pi}\,[\mathbf{E}'\mathbf{H}']_x - \frac{\beta}{4\pi}\,[\mathbf{D}'\mathbf{B}']_x\right\}. \tag{22}$$

В итоге получаем:

$$T'_{xx} = \frac{1}{4\pi}\,(E'_x D'_x + H'_x B'_x) - \frac{1}{8\pi}\,\delta_{xx}(\mathbf{E}'\mathbf{D}' + \mathbf{H}'\mathbf{B}') + \\ + \frac{\gamma^2\beta}{4\pi}\,\left([\mathbf{E}'\mathbf{H}']_x - [\mathbf{D}'\mathbf{B}']_x\right). \tag{23}$$

Таким образом, при преобразовании компоненты тензора энергии-импульса в форме Абрагама появляется дополнительный член, зависящий от скорости движения системы K' относительно K. Именно этот факт дал основание утверждать в статье [1], что тензор Абрагама не является релятивистски инвариантным.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-02-01186а и 09-02-01519а

Список литературы

1. Веселаго В Г *УФН* **179** 689 (2009) [Veselago V G *Phys. Usp.* **52** 649 (2009)
2. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **179** 995 (2009) [Makarov V P, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **52** 937 (2009)]
3. Угаров В А *Специальная теория относительности* 2-е изд. (М.: Наука, 1977)