

## Колебательный аналог неадиабатического туннелирования Ландау – Зинера и возможность создания энергетических ловушек нового типа

Ю.А. Косевич, Л.И. Маневич, Э.Л. Маневич

*Изложен новый подход к проблеме целенаправленного и необратимого переноса энергии, основанный на аналогии между системой двух слабо связанных параметрически-ведомых маятников или осцилляторов и неадиабатическим туннелированием Ландау – Зинера в двухуровневой квантовой системе. Эта аналогия приводит к предсказанию возможности эффективного необратимого переноса колебательной энергии от одной подсистемы к другой, когда частота по крайней мере одной из них адиабатически медленно изменяется во времени, так, что подсистемы проходят через внутренний резонанс. Показано также, что эволюционные уравнения, описывающие переход типа туннелирования Ландау – Зинера, количественно предсказывают, какая часть сообщённой начальной энергии остаётся асимптотически в защищаемой классической системе. Отмеченные закономерности могут быть использованы при создании нового типа энергетических ловушек для динамической защиты различных механических систем.*

PACS numbers: 62.25.Fg, 62.25.Jk, 63.20.Ry, 82.20.Rp

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201012e.1331

### Содержание

1. Введение (1331).
2. Постановка задачи (1332).
3. Необратимый обмен энергией в линейном режиме (1332).
4. Необратимый обмен энергией в нелинейном режиме (1335).
5. Заключение (1336).

Список литературы (1336).

### 1. Введение

Туннелирование представляет собой одно из наиболее ярких свидетельств квантового поведения и является объектом интенсивных исследований как в фундаментальной, так и в прикладной физике [1]. Хорошо известный пример этого явления представляет собой туннелирование Ландау – Зинера (ТЛЗ), в котором квантовая система, находящаяся под действием внешней силы, туннелирует между двумя энергетическими уровнями [2 – 5] (см. также недавний обзор [6]). Квантовое ТЛЗ наблюдалось в полупроводниковых сверхрешётках для электронов [7, 8], в оптических решётках для ультрахолодных атомов [9, 10] и бозе-эйнштейновских конденса-

тов [11, 12]. Для электронов в полупроводниковых сверхрешётках внешняя сила, ответственная за неадиабатическое ТЛЗ, — это электрическое поле. Гравитация и поле ускорения играют аналогичную роль в случае ультрахолодных атомов и бозе-эйнштейновских конденсатов. ТЛЗ наблюдалось для оптических волн в оптических сверхрешётках [13] и в массивах волноводов [14]. Недавно было предсказано и экспериментально обнаружено ТЛЗ объёмных и поверхностных акустических волн в ультразвуковых сверхрешётках [15, 16]. Кроме того, эти предсказания и наблюдения были обобщены для случая макроскопических двумерных фононных кристаллов, построенных из погружённых в воду жёстких цилиндров [17, 18]. Роль эффективной ведущей внешней силы при оптическом или акустическом ТЛЗ играет возмущение соответствующей оптической или ультразвуковой сверхрешётки.

Общей чертой всех перечисленных выше примеров неадиабатического ТЛЗ является необратимый (и почти однонаправленный) обмен энергией между двумя волновыми состояниями, вызванный внешней силой или возмущением. Возможность реализации подобного обмена энергией (и соответствующего отвода энергии из одной подсистемы в другую) желательна также и в резонансных колебательных механических системах, например в мостах, крыльях самолетов и других конструкциях. (О желательности построения таких систем свидетельствует, например, наблюдавшаяся 20 мая 2010 г. макроскопическая динамическая неустойчивость автомобильного моста в г. Волгограде.) Энергия возбуждения, способного вызвать динамическую неустойчивость или разрушение механической системы, должна быть передана другой системе, играющей роль энергетиче-

Ю.А. Косевич, Л.И. Маневич. Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН,  
ул. Косыгина 4, 119991 Москва, Российская Федерация  
Тел. (495) 939-71-39. Факс (495) 137-82-84  
E-mail: yukosevich@gmail.com  
Э.Л. Маневич. Department of Mechanical Science and Engineering,  
University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL 61801, USA

Статья поступила 31 мая 2010 г., после доработки 3 августа 2010 г.

ческой ловушки. Оказывается, что классическая система, поведение которой описывается уравнениями, подобными уравнениям квантовой системы, действительно может быть создана. Ранее мы обратили внимание на аналогию между адиабатическим квантовым туннелированием и переносом энергии в системе слабо связанных линейных или нелинейных классических осцилляторов [19–21]. В данной статье мы обращаем внимание на существование колебательного аналога неадиабатического ТЛЗ, свидетельствующего о возможности создания энергетических ловушек нового типа. Мы показываем аналитически и численно, что переход типа ТЛЗ может быть реализован в системе двух слабо связанных маятников или осцилляторов. Для этого длина хотя бы одного из маятников (или масса или жёсткость одного из осцилляторов) должна адиабатически медленно изменяться в процессе колебаний. В результате происходит эффективный необратимый перенос колебательной энергии от одного маятника или осциллятора к другому при условии, что слабо связанные системы проходят через внутренний резонанс. Такие резонансные колебательные механические системы и представляют собой простейшие энергетические ловушки нового типа, которые могут быть применены в более сложных системах для их динамической защиты от виброударных воздействий с возможным применением в макро-, микро- и наномеханике.

Отметим, что речь не идёт о точной аналогии с квантовым ТЛЗ на бесконечном временном интервале, рассмотренном как в статьях Ландау и Зинера, так и во многих последующих работах. Работы Дыхне [22], Демкова и Ошерова [23], Демкова и Кунике [24] позволяют описывать неадиабатический переход, происходящий на конечном временном интервале (см. также более позднюю работу [25]). Естественно, что в механических системах учёт конечности временного интервала обмена энергией между подсистемами очень существен. Обсуждаемая нами аналогия — следствие того факта, что две слабо связанные классические подсистемы в окрестности внутреннего резонанса демонстрируют поведение, подобное поведению при квантовом ТЛЗ. Суть этого эффекта — необратимый перенос энергии из одной подсистемы в другую, определяемый поведением системы на конечном временном интервале. Этот интервал оказывается относительно узким, по сравнению с характерным временем перехода Ландау–Зинера [6, 26, 27], но при этом остаётся достаточно широким по сравнению с периодом классических колебаний. Как мы покажем, отклонение от поведения, подобного поведению при квантовом ТЛЗ, вдали от точки внутреннего резонанса оказывается несущественным для необратимого переноса энергии в механических системах.

С физической точки зрения, рассматриваемый нами необратимый энергообмен можно рассматривать как целенаправленный перенос энергии (targeted energy transfer), который в последнее время активно обсуждается в литературе (см. [19–21, 28–30]). Однако изучаемые в этих работах механизмы необратимого целенаправленного переноса энергии основаны на нелинейном резонансе, при котором нелинейность должна быть выражена достаточно сильно. Напротив, обсуждаемые в нашей статье эффекты необратимого обмена энергией проявляются в линейных системах, хотя, как мы показываем в разделе 4, эти эффекты сохраняются и в нелиней-

ном случае. Возможность необратимого переноса энергии в линейной механической системе была недавно предсказана и подтверждена экспериментально [31].

## 2. Постановка задачи

Рассматривается плоская система двух маятников с длинами  $l_1$ ,  $l_2$  и массами  $m_1$  и  $m_2$ , слабо связанных пружиной (с длиной, сравнимой с  $l_1$ ). Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left[ m_1 l_1^2 \left( \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + m_2 l_2^2 \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 \right] - g [m_1 l_1 (1 - \cos \varphi_1) + m_2 l_2 (1 - \cos \varphi_2)] - \frac{1}{2} k_{12} (l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2)^2, \quad (1)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — углы поворота,  $k_{12}$  — жёсткость пружины. Пусть  $l_1$  постоянна, а  $l_2$  — заданная функция времени. Тогда уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 + \frac{k_{12}}{m_1} \cos \varphi_1 \left( \sin \varphi_1 - \frac{l_2}{l_1} \sin \varphi_2 \right) &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{2}{l_2} \frac{dl_2}{dt} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{g}{l_2} \sin \varphi_2 + \frac{k_{12}}{m_2} \cos \varphi_2 \left( \sin \varphi_2 - \frac{l_1}{l_2} \sin \varphi_1 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим далее, что

$$l_2(t) = l_1 (1 + A_2(t)), \quad (3)$$

где  $A_2(t)$  описывает относительно малое изменение длины  $l_2$  во времени. Мы рассмотрим три функции  $A_2(t)$  — одну гладкую и две кусочно-гладкие:

$$A_2(t) = \delta_2 - f_2 T_2 \tanh \frac{t}{T_2}, \quad (4)$$

$$A_2(t) = \begin{cases} \delta_2 - f_2 t, & 0 < t \leq T_2, \\ \delta_2 - f_2 T_2, & t > T_2, \end{cases} \quad (5)$$

$$A_2(t) = \begin{cases} \delta_2 - g_2 t^2, & 0 < t \leq T_2, \\ \delta_2 - g_2 T_2^2, & t > T_2, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\delta_2$ ,  $f_2/\omega_1$  и  $g_2/\omega_1^2$  — независимые малые параметры одного и того же знака,  $\omega_1 = \sqrt{g/l_1}$ , время насыщения  $T_2 > \delta_2/f_2$ ,  $T_2 > \sqrt{\delta_2/g_2}$ ,  $T_2 \gg 1/\omega_1$  гарантирует положительность  $l_2$  в любой момент времени при положительных  $\delta_2$ ,  $f_2$  и  $g_2$ . Как будет показано в разделах 3, 4, все функции (4)–(6), которые описывают как линейное, так и квадратичное во времени изменение  $l_2$  для  $t < T_2$ , приводят к необратимому обмену энергией между маятниками, с качественно близкими характерными чертами. Это подтверждает, что описываемый нами эффект действительно имеет общее происхождение в различных системах.

## 3. Необратимый обмен энергией в линейном режиме

Поскольку ТЛЗ представляет собой, по существу, линейное явление, мы начнём анализ необратимого обмена

энергией с линеаризованных уравнений (2) в пределе  $\varphi_1 \ll 1$  и  $\varphi_2 \ll 1$ . Известно несколько способов перехода от двух уравнений второго порядка для вещественных переменных к четырём уравнениям первого порядка для комплексных переменных. Следуя подходу, использованному в [32], введём две комплексные огибающие,  $a_1$  и  $a_2$ , вещественных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} [a_{1,2} \exp(-i\omega_1 t) + a_{1,2}^* \exp(i\omega_1 t)], \quad (7)$$

где предполагается, что  $da_{1,2}/dt \ll \omega_1 a_{1,2}$ .

Из уравнений (7) вытекает, что вещественная часть переменной  $a_i$  определяет огибающую  $\varphi_i$ , в то время как её мнимая часть — безразмерную временную производную  $d\varphi_i/dt/\omega_1$ ,  $i = 1, 2$ . Эти свойства комплексных огибающих позволяют легко связать модуль  $|a_i|$  комплексной огибающей с колебательной энергией линеаризованного  $i$ -го маятника:  $E_i = 0,5gl_1 m_i |a_i|^2$ .

Подставляя уравнения (3) и (7) в линеаризованные уравнения (2), мы получим следующие два эволюционных уравнения для комплексных огибающих  $a_1$  и  $a_2$  в главном приближении по малым параметрам  $\delta_2$ ,  $f_2/\omega_1$ ,  $g_2/\omega_1^2$  и  $k_{12}/\mu\omega_1^2$  (где  $\mu = 1/(1/m_1 + 1/m_2)$ ) — приведённая масса величин  $m_1$  и  $m_2$ ):

$$\begin{aligned} i \frac{da_1}{dt} &= \frac{k_{12}}{2m_1\omega_1} (a_1 - a_2), \\ i \frac{da_2}{dt} &= \frac{k_{12}}{2m_2\omega_1} (a_2 - a_1) - \frac{1}{2} \omega_1 \Delta_2(t) a_2, \end{aligned} \quad (8)$$

и соответствующие два уравнения для комплексно сопряжённых огибающих  $a_1^*$  и  $a_2^*$ . Из уравнений (8) следует, что полная вибрационная энергия связанных маятников  $0,5gl_1(m_1|a_1|^2 + m_2|a_2|^2)$  — интеграл движения. Для  $t < T_2$  и  $\Delta_2(t)$ , определяемого уравнением (4) или (5), уравнения (8) совпадают с модифицированным описанием квантового ТЛЗ [3]. Процедура многомасштабных разложений, представленная, например, в [33], приводит к аналогичным комплексным эволюционным уравнениям.

Те же уравнения (8) описывают динамику комплексных огибающих вещественных перемещений  $u_1$  и  $u_2$  двух осцилляторов с массами  $m_1$  и  $m_2$  и пружинами с равной жёсткостью  $\kappa_1$  или двух осцилляторов с одной и той же массой  $m_1$  и пружинами с жёсткостями  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , слабо связанных пружиной с жёсткостью  $k_{12} \ll \kappa_1$ , когда соответственно  $m_2$  либо  $1/\kappa_2$  изменяется во времени в соответствии с законом, определяемым уравнением (3), в котором теперь  $l_{1,2}$  следует заменить величинами  $m_{1,2}$  или  $1/\kappa_{1,2}$ . Введя две комплексные огибающие,  $a_1$  и  $a_2$ , вещественных смещений  $u_1$  и  $u_2$  в соответствии с представлением (7) (в котором  $\varphi_{1,2}$  следует заменить смещениями  $u_{1,2}$ ), в предположении  $da_{1,2}/dt \ll \omega_1 a_{1,2}$  мы приходим к эволюционным уравнениям (8) для комплексных амплитуд  $a_1$  и  $a_2$ , в которых теперь  $\omega_1 = \sqrt{\kappa_1/m_1}$ . При этом в эволюционном уравнении для огибающей  $a_2$  следует положить  $m_1 = m_2$ .

Динамика туннелирования двух слабо связанных идеальных бозе-эйнштейновских конденсатов в макроскопическом двухъямном потенциале также описывается уравнениями, подобными (8) (см. [19–21, 34–37]). В этом случае биения между связанными состояниями конденсатов представляют собой квантовые осцилляции Раби и параметр  $\Delta_2(t)$  в уравнениях (8) описывает зависящее от времени изменение глубины захватывающего потен-

циала одной из связанных квантовых ям. Но в отличие от линейных механических систем, в природе не существует идеальных (невзаимодействующих) бозе-эйнштейновских конденсатов и такой предел может быть реализован только в условиях магнитно-перестраиваемого резонанса Фешбаха (см., например, [38])<sup>1</sup>.

Для больших  $t$  асимптотическое решение уравнений (8) при  $\Delta_2(t)$ , определяемом уравнениями (4) или (5) и начальными условиями  $|a_1(-\infty)|^2 = 1$ ,  $a_2(-\infty) = 0$ , может быть записано следующим образом:

$$|a_1(\infty)|^2 = \exp(-R), \quad R = \frac{\pi k_{12}^2}{m_1 m_2 f_2 \omega_1^3}. \quad (9)$$

Эта величина описывает часть начальной колебательной энергии маятника 1, которая остаётся в этой подсистеме асимптотически (на больших временах).

Отметим, что "туннельная" экспоненциальная функция (9) для системы двух классических частиц соответствует непертурбативному приближению, как и в квантовом ТЛЗ, но при этом не содержит постоянной Планка — ключевой для квантовой механики величины. Функция (9) учитывает, в частности, что только один из связанных маятников является параметрически ведомым и что массы маятников в общем случае не равны. В случае положительных  $\delta_2$  и  $f_2$  применимость уравнения (9) к классическим системам, описываемым уравнениями (2)–(5), ограничена конечной протяжённостью "временного окна" параметрического воздействия:  $t \in (0, T_2)$ ,  $T_2 \leq (1 + \delta_2)/f_2$ . Экспоненциально малая величина "амплитуды выживания" конечного состояния подсистемы 1 подразумевает достаточную длительность временного окна параметрического воздействия (как и в случае квантового ТЛЗ). Поэтому уравнение (9) не может применяться к классическим колебательным системам при больших значениях параметра  $R$  и отношения масс  $m_1/m_2$ . Параметр  $\delta_2$  в уравнениях (4)–(6) эффективно расширяет временное окно.

Для того чтобы оценить эффективность системы маятников в качестве энергетической ловушки, мы рассчитали временную эволюцию колебательных энергий связанных маятников, используя решение исходных линеаризованных уравнений (2) для реальных углов отклонения, и сравнили их с численным решением уравнений (8) для комплексных амплитуд огибающих,

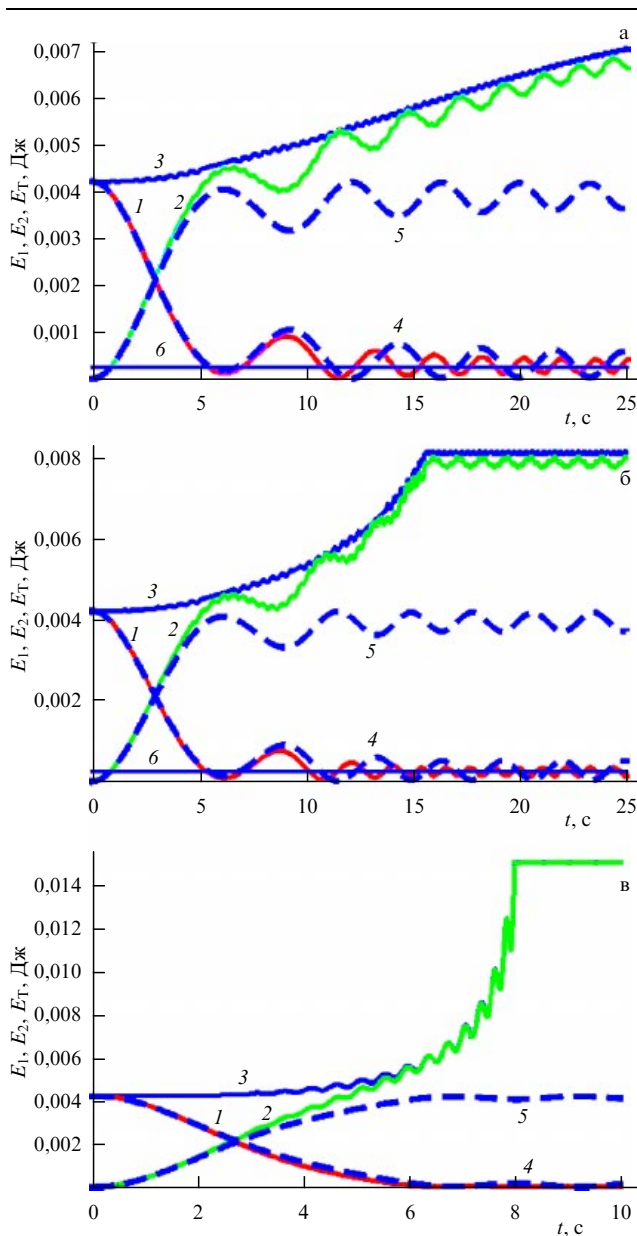
<sup>1</sup> Уравнения, описывающие динамику макроскопического туннелирования двух слабо связанных неидеальных бозе-эйнштейновских конденсатов в двухъямном потенциале [19–21, 34–37], в приближении среднего поля можно получить с использованием уравнения Гросса–Питаевского [39–41]. В связи с этим следует отметить, что уравнение, аналогичное уравнению Гросса–Питаевского, было получено ранее В.Л. Гинзбургом и Л.П. Питаевским [42, 43] в теории сверхтекучести жидкого гелия вблизи  $\lambda$ -точки (см. также обзор [44]). Динамическое (зависящее от времени) уравнение Гинзбурга–Питаевского для макроскопической  $\Psi$ -функции сверхтекучего гелия вблизи  $\lambda$ -точки в односкоростном режиме, при  $v_n = 0$ , и в пренебрежении специфически квантовыми эффектами и релаксационными явлениями эквивалентно уравнению Гросса–Питаевского для классической макроскопической  $\Psi$ -функции неоднородного неидеального бозе-эйнштейновского конденсата, хотя нелинейные слагаемые в этих двух уравнениях имеют различное происхождение. Односкоростной режим для сверхтекучего гелия реализуется в узких капиллярах, в которых движение нормальной компоненты тормозится трением о стенки, а по сверхтекучей компоненте может распространяться волна четвёртого звука [45, 46]. На дисперсию и поглощение четвёртого звука вблизи  $\lambda$ -точки влияет медленная релаксация малой плотности сверхтекучей компоненты, которая приводит к появлению в системе эффективной второй вязкости [45, 47, 48].

аналогичных уравнениям, описывающим квантовый переход типа ТЛЗ. Поскольку затухание низкочастотных колебаний маятников весьма мало, мы пренебрегли его влиянием на энергообмен между маятниками.

Временные зависимости колебательных энергий  $E_1$  и  $E_2$  маятников 1 и 2 при  $m_1 = m_2$  и их полной энергии  $E_T$ , полученные из решения линеаризованных уравнений (2) (кривые 1–3), вместе с решением уравнений (8), описывающих переход типа ТЛЗ (кривые 4 и 5) и даваемой решением (9) энергией, которая остаётся у маятника 1 на асимптотически больших временах (линия 6), для  $\Delta_2(t)$ ,

определяемом уравнениями (4)–(6), показаны на рис. 1а–в соответственно. Начальные условия соответствовали импульсному возбуждению маятника 1. Были использованы следующие реалистические величины параметров и начальных условий:  $l_1 = 0,305$  м,  $m_1 = 0,244$  кг,  $k_{12} = 0,785$  Н м<sup>-1</sup>,  $\delta_2 = 0,22$ ,  $f_2 = 0,0625$  с<sup>-1</sup>,  $T_2 = 15,6$  с на рис. 1а, б;  $g_2 = 0,0177$  с<sup>-2</sup> и  $T_2 = 8$  с на рис. 1в и

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0,61 \text{ рад с}^{-1}, \\ i a_1(0) = \frac{\dot{\varphi}_1(0)}{\omega_1}, \quad a_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$



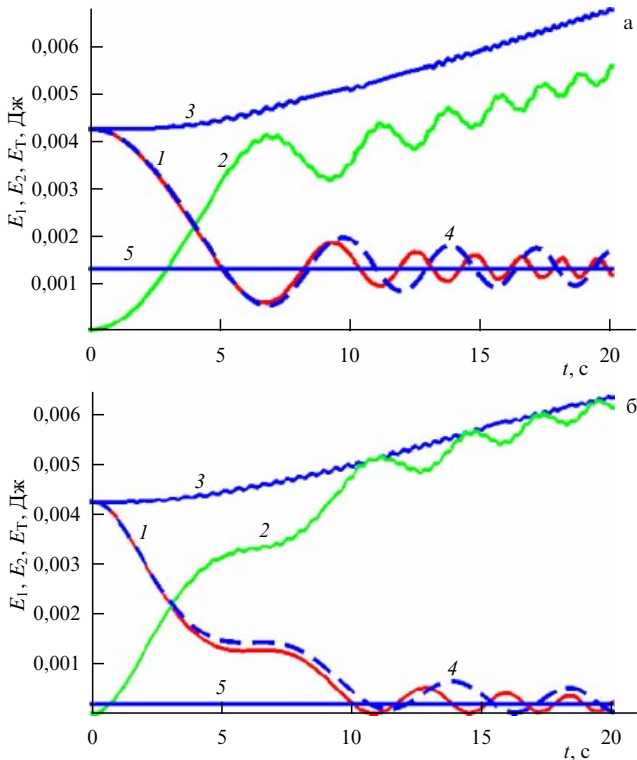
**Рис. 1.** Колебательные энергии  $E_1$  и  $E_2$  маятников 1 и 2 и их полная энергия  $E_T$  как функции времени, полученные из решения линеаризованных уравнений (2) (кривые 1–3), и колебательные энергии маятников 1 и 2, полученные из решения эволюционных уравнений (8), описывающих переход типа ТЛЗ (кривые 4 и 5), при значениях  $\Delta_2(t)$ , определяемых (а) уравнением (4), (б) уравнением (5) и (в) уравнением (6). Определяемая уравнением (9) часть сообщённой начальной энергии, остающаяся асимптотически у маятника 1, показана линиями 6 на рис. а и б. Параметры, использованные при расчётах, даны уравнениями (3)–(6) и (10) для случая маятников с равными массами.

Как видно из рис. 1, имеет место интенсивный необратимый поток энергии от маятника 1 к маятнику 2. Из рисунка также можно заключить, что уравнения (8), описывающие переход, подобный ТЛЗ, правильно отражают его закономерности на начальной стадии, на которой происходит наиболее интенсивный резонансный обмен энергией. Соответствующая оценка (9) для доли первоначально сообщённой энергии, которая остаётся у маятника 1 на асимптотически больших временах, также оказывается справедливой, хотя при использованных на рис. 1 значениях параметров коэффициент  $R$  не мал:  $R = 2,85$ . Согласно результатам наших численных расчётов, это значение  $R$  приблизительно соответствует верхней границе применимости уравнения (9) для рассматриваемых классических систем. Достаточно большое время насыщения  $T_2$  влияет только на переходную динамику обмена энергией, но не на асимптотическое значение (9) энергии маятника 1 (как и в случае ТЛЗ в двухуровневой квантовой системе, описываемой уравнениями, подобными (4) и (8) (см. [24, 25])).

Точный внутренний резонанс в системе наступает в момент, когда  $l_2 = l_1$  (или  $m_2 = m_1$ ,  $\kappa_2 = \kappa_1$ ) и собственные частоты маятников (или осцилляторов) становятся равными между собой. Это происходит при  $t = \delta_2/f_2$ . Когда система выходит из резонанса (при  $t > \delta_2/f_2$ ), обратный поток энергии от маятника 2 к маятнику 1 оказывается подавленным. Именно это явление позволяет рассматривать маятник 2 как энергетическую ловушку. В связи с этим отметим, что необратимость переноса энергии в рассматриваемых линейных системах возникает только благодаря параметрическому воздействию на систему и её динамическому поведению типа ТЛЗ, а не благодаря нелинейному резонансу, как, например, в работе [29], в которой нелинейный резонанс, напротив, играл важную роль в необратимом переносе энергии в рассмотренной системе.

Существенно, что на временах  $t > 2\delta_2/f_2$  мы выходим за пределы применимости рассматриваемой аналогии с ТЛЗ. Тем не менее и на этих временах продолжается необратимый перенос энергии, хотя энергия первого маятника уже значительно уменьшилась (см. рис. 1). Величина  $m_1|a_1|^2 + m_2|a_2|^2$  теперь уже не сохраняется даже приближённо. Существенно, что во всех случаях, представленных на рис. 1, такие наиболее важные для возможных приложений характеристики рассматриваемого процесса, как эволюция во времени колебательной энергии маятника 1 и её усреднённая асимптотическая величина, правильно описываются уравнениями (8) и (9), относящимися к консервативным переходам типа ТЛЗ (кривые 4 на всех графиках рис. 1). При этом рассматриваемые нами классические системы неконсервативны по своей природе.

Наши расчёты также показывают, что использование большей или меньшей массы маятника 2 не подавляет



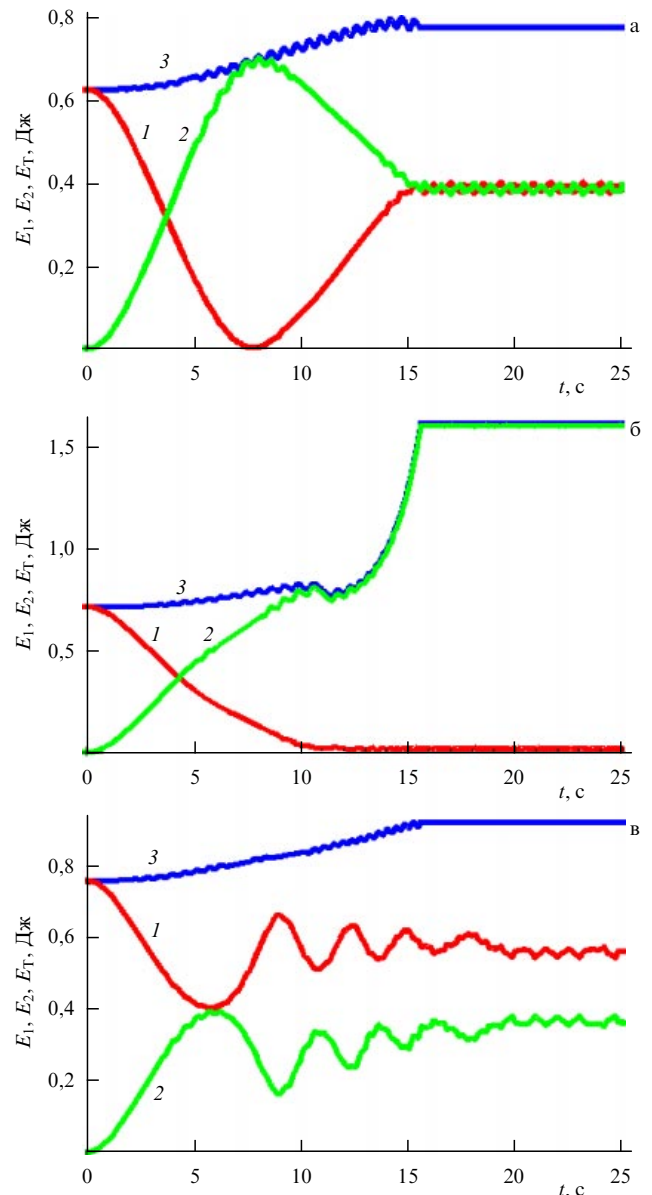
**Рис. 2.** Колебательные энергии  $E_1$  и  $E_2$  маятников 1 и 2 с неравными массами и их полная энергия  $E_T$  как функции времени, полученные из решения линеаризованных уравнений (2) (кривые 1–3), и колебательная энергия маятника 1, полученная из решения эволюционных уравнений (8), описывающих переход типа ТЛЗ (кривые 4), при (а)  $m_2 = 0,5m_1$ ,  $k_{12} = 0,3925 \text{ Н м}^{-1}$ ,  $\delta_2 = 0,26325$ ,  $f_2 = 0,07476 \text{ с}^{-1}$ ; (б)  $m_2 = 2m_1$ ,  $k_{12} = 1,1775 \text{ Н м}^{-1}$ ; остальные параметры даны уравнениями (3), (4) и (10). Часть сообщённой начальной энергии, остающаяся асимптотически у маятника 1 (см. уравнение (9)), показана линиями 5.

необратимый отвод энергии от маятника 1 (рис. 2). При соответствующем выборе параметров  $\delta_2$  и  $k_{12}$ , а также отношения  $m_1/m_2$  можно получить хорошее согласие с предсказаниями уравнений (8) и (9), описывающими переход типа ТЛЗ, как при  $m_2 < m_1$  (рис. 2а для  $m_2 = 0,5m_1$ ), так и при  $m_2 > m_1$  (рис. 2б для  $m_2 = 2m_1$ ). Результаты этих расчётов, наряду с результатами, показанными на рис. 1, подтверждают робастность обнаруженного эффекта необратимого обмена энергией в линейном режиме.

#### 4. Необратимый обмен энергией в нелинейном режиме

В этом разделе мы обсудим влияние нелинейных свойств связанных маятников или осцилляторов на необратимый перенос энергии. Это влияние, учитываемое в общем случае уравнениями (2), возрастает с увеличением сообщённого маятнику 1 начального импульса, который пропорционален  $\dot{\phi}_1(0)$ . В общем случае нелинейность увеличивает долю колебательной энергии, остающейся асимптотически у маятника 1 (ср. рис. 1б для  $\dot{\phi}_1(0) = 0,61 \text{ рад с}^{-1}$  и рис. 3а для  $\dot{\phi}_1(0) = 7,42 \text{ рад с}^{-1}$  в случае, когда значения остальных параметров на обоих графиках одинаковы). Однако рассматриваемая параметрическая система имеет сепаратрису, разделяющую области сильного и слабого энергообмена. Как видно из рис. 3, относительно малое изменение начального импульса, сообщённого маятнику 1 (от  $\dot{\phi}_1(0) = 7,42 \text{ рад с}^{-1}$

на рис. 3а до  $\dot{\phi}_1(0) = 8,19 \text{ рад с}^{-1}$  на рис. 3в), приводит к отчётливо выраженному переходу от почти полного обмена колебательной энергией к относительно слабому. При этом сепаратриса (показанная на рис. 3б для  $\dot{\phi}_1(0) = 7,93 \text{ рад с}^{-1}$ ) разделяет области с процессами обмена энергией различной степени полноты. В моде переноса энергии, показанной на рис. 3в, при  $t \approx 10$  с маятник 2 переходит в режим вращения. При этом обратный поток энергии к маятнику 1 подавляется и необратимый характер переноса энергии соответственно усиливается. Подобный переход между модами целенаправленного переноса энергии, определяемый наличием сепаратрисы, известен в пассивных нелинейных системах, когда нелинейность существенно влияет как на скорость,



**Рис. 3.** Колебательные энергии  $E_1$  и  $E_2$  маятников 1 и 2 и их полная энергия  $E_T$  как функции времени, полученные из решения нелинейных уравнений (2), (3) и (5) (кривые 1, 2 и 3 соответственно), при (а)  $\dot{\phi}_1(0) = 7,42 \text{ рад с}^{-1}$ , (б)  $\dot{\phi}_1(0) = 7,93 \text{ рад с}^{-1}$  и (в)  $\dot{\phi}_1(0) = 8,19 \text{ рад с}^{-1}$ . Параметры, использованные при расчётах, даны уравнениями (3), (5) и (10) в случае маятников с равными массами. Рисунок б соответствует сепаратрисной моде целенаправленного переноса энергии.

так и на степень полноты обмена энергией (см. [19–21, 28–30]). Наши результаты показывают, что нелинейность связанных элементов может также существенно влиять на целенаправленный перенос энергии и в активных (параметрически-ведомых) системах.

## 5. Заключение

Итак, мы описали оригинальный принцип "захвата" колебательной энергии. Этот принцип основан на далеко идущей аналогии между необратимым переносом энергии в классической параметрически-ведомой системе и неадиабатическим квантовым туннелированием Ландау–Зинера. Мы показали аналитически и численно, что в системе двух слабо связанных маятников или осцилляторов в условиях, когда связанные подсистемы адиабатически медленно проходят через внутренний резонанс, происходит эффективный необратимый перенос колебательной энергии из одной подсистемы в другую. Нелинейные эффекты могут усиливать необратимый характер переноса энергии между подсистемами. Обнаруженные явления свидетельствуют о возможности создания принципиально новых типов энергетических ловушек для динамической защиты различных механических систем. Результаты наших расчётов также показывают, что комплексные эволюционные уравнения, описывающие переход типа туннелирования Ландау–Зинера, дают количественную оценку части сообщённой начальной энергии, остающейся асимптотически в "защищаемой" классической подсистеме. Это означает, что закономерности квантового туннелирования Ландау–Зинера могут также изучаться экспериментально и с использованием классических систем.

Эту статью мы посвящаем памяти В.Л. Гинзбурга. Виталий Лазаревич проявлял глубокий интерес к проблемам нестационарной динамики в различных областях физики, в первую очередь к проблеме переходного излучения движущихся заряженных частиц.

Авторы признательны Г.М. Сигалову за конструктивные замечания.

Работа осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00698).

## Список литературы

- Razavy M *Quantum Theory of Tunneling* (Singapore: World Scientific, 2003)
- Landau L *Phys. Z. Sowjetunion* **2** 46 (1932)
- Zener C *Proc. R. Soc. London A* **137** 696 (1932)
- Stückelberg E C G *Helv. Phys. Acta* **5** 369 (1932)
- Majorana E *Nuovo Cimento* **9** 43 (1932)
- Покровский В Л *УФН* **179** 1237 (2009) [Pokrovsky V L *Phys. Usp.* **52** 1169 (2009)]
- Schneider H et al. *Phys. Rev. Lett.* **65** 2720 (1990)
- Rosam B et al. *Phys. Rev. B* **68** 125301 (2003)
- Bharucha C F et al. *Phys. Rev. A* **55** R857 (1997)
- Anderson B P, Kasevich M A *Science* **282** 1686 (1998)
- Cristiani M et al. *Phys. Rev. A* **65** 063612 (2002)
- Sias C et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 120403 (2007)
- Ghulinyan M et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 127401 (2005)
- Trompeter H et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 023901 (2006)
- Sanchis-Alepuz H, Kosevich Yu A, Sánchez-Dehesa J *Phys. Rev. Lett.* **98** 134301 (2007)
- de Lima M M (Jr.), Kosevich Yu A, Santos P V, Cantarero A *Phys. Rev. Lett.* **104** 165502 (2010)
- Sánchez-Dehesa J, Sanchis-Alepuz H, Kosevich Yu A, Torrent D J. *Acoust. Soc. Am.* **120** 3283 (2006)
- He Z et al. *Phys. Rev. E* **76** 056605 (2007)
- Kosevich Y A, Manevitch L I, Savin A V *J. Phys. Conf. Ser.* **92** 012093 (2007)
- Kosevich Yu A, Manevitch L I, Savin A V *Phys. Rev. E* **77** 046603 (2008)
- Kosevich Yu A, Manevitch L I, Savin A V *J. Sound Vibr.* **322** 524 (2009)
- Дыхне А М *ЖЭТФ* **41** 1324 (1961) [Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **14** 941 (1962)]
- Демков Ю Н, Ошеров В И *ЖЭТФ* **53** 1589 (1967) [Demkov Yu N, Osherov V I *Sov. Phys. JETP* **26** 916 (1968)]
- Демков Ю Н, Кунике М *Вестн. Ленингр. Унив. Сер. Физ. Хим.* **16** 39 (1969)
- Suominen K-A, Garraway B M *Phys. Rev. A* **45** 374 (1992)
- Niu Q, Raizen M G *Phys. Rev. Lett.* **80** 3491 (1998)
- Vitanov V N *Phys. Rev. A* **59** 988 (1999)
- Kopidakis G, Aubry S, Tsironis G P *Phys. Rev. Lett.* **87** 165501 (2001)
- Maniadi P, Aubry S *Physica D* **202** 200 (2005)
- Vakakis A F et al. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems* (Berlin: Springer, 2008)
- Manevitch L I et al. *Int. J. Non-Linear Mech.* (2010), doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2010.08.010
- Kosevich Yu A, Lepri S *Phys. Rev. B* **61** 299 (2000)
- Manevitch A I, Manevitch L I *The Mechanics of Nonlinear Systems with Internal Resonances* (London: Imperial College Press, 2005)
- Milburn G J et al. *Phys. Rev. A* **55** 4318 (1997)
- Smerzi A et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950 (1997)
- Raghavan S et al. *Phys. Rev. A* **59** 620 (1999)
- Nistazakis H E et al. *Phys. Rev. A* **78** 023635 (2008)
- Inouye S et al. *Nature* **392** 151 (1998)
- Питаевский Л П *ЖЭТФ* **40** 646 (1961) [Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **13** 451 (1961)]
- Gross E P *Nuovo Cimento* **20** 454 (1961)
- Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика Ч. 2* (М.: Физматлит, 2001) [Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Statistical Physics Pt. 2* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002)]
- Гинзбург В Л, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **34** 1240 (1958) [Ginzburg V L, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **7** 858 (1958)]
- Питаевский Л П *ЖЭТФ* **35** 408 (1958) [Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **8** 282 (1959)]
- Гинзбург В Л, Собянин А А *УФН* **120** 153 (1976) [Ginzburg V L, Sobyenin A A *Sov. Phys. Usp.* **19** 773 (1976)]
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
- Халатников И М *Теория сверхтекучести* (М.: Наука, 1971)
- Мандельштам Л И, Леонтович М А *ЖЭТФ* **7** 438 (1937)
- Ландау Л Д, Халатников И М *ДАН СССР* **96** 469 (1954)

## Vibrational analogue of nonadiabatic Landau–Zener tunneling and a possibility for the creation of a new type of energy trap

Yu.A. Kosevich, L.I. Manevitch

N.N. Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 4, 119991 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-495) 939-71 39. Fax (7-495) 137-82 84. E-mail: yukosevich@gmail.com

E.L. Manevitch

Department of Mechanical Science and Engineering University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL 61801, USA

The problem of irreversible targeted energy transfer is approached in a new way using the analogy between a system of two weakly coupled parametric pendulums or oscillators and nonadiabatic Landau–Zener tunneling in a two-state quantum system. This analogy predicts that efficient irreversible energy transfer is possible between two subsystems if the frequency of at least one of them changes adiabatically slowly with time, thus allowing an internal resonance to occur between them. We also show that evolution equations for the transition of the Landau–Zener tunneling type give a quantitative prediction for the part of the initially imparted energy that is retained asymptotically in the protected classical system. The findings made can be used for designing new types of energy traps for the dynamical protection of various mechanical systems.

PACS numbers: 62.25.Fg, 62.25.Jk, 63.20.Ry, 82.20.Rp

Bibliography — 48 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **180** (12) 1331–1336 (2010)

DOI: 10.3367/UFN.0180.201012e.1331

Received 31 May 2010, revised 3 August 2010

*Physica – Uspekhi* **53** (12) (2010)