

Очарование хаоса

А.Ю. Лоскутов

Обзор знакомит читателей с большинством понятий, используемых при исследовании хаотических явлений, возникающих в нелинейных системах. Его главная цель — дать современное представление о результатах, полученных в теории хаотических динамических систем, и описать оригинальные идеи, лежащие в основе подхода к изучению детерминированного хаоса. Изложение опирается на неформальный анализ: абстрактные математические понятия сопровождаются наглядными построениями и физическими примерами. Рассматриваются гиперболическая динамика, гомоклинические траектории, гомоклинические касания и дикие гиперболические множества, а также различные типы аттракторов, возникающих в динамических системах. Изложены важные аспекты эргодической теории и описаны основные статистические свойства хаотических динамических систем. Объясняется принципиальное отличие стохастической динамики от детерминированного хаоса. Последняя часть обзора посвящена исследованию возможности изучения сложных систем посредством анализа регистрируемых сигналов, т.е. порождаемых системами временных рядов.

PACS numbers: 02.50. – r, 05.45. – a, 47.52. + j

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201012c.1305

Содержание

Предисловие (1305).

1. Введение (1306).
2. Динамические системы и хаос (1307).
 - 2.1. Общие положения. 2.2. Аттракторы. 2.3. Хаос.
3. Гиперболическая динамика (1309).
 - 3.1. Гиперболические множества. 3.2. Подкова Смейла.
4. Гомоклинические структуры (1311).
 - 4.1. Гомоклинические траектории. 4.2. Подковы в гомоклинических структурах. 4.3. Гомоклинические касания и дикие гиперболические множества. 4.4. Символическая динамика.
5. Хаотические аттракторы динамических систем (1316).
 - 5.1. Странные и хаотические аттракторы. 5.2. Гиперболические аттракторы. 5.3. Стохастические и другие аттракторы.
6. Хаос в физических системах (1318).
 - 6.1. Хаос и странные аттракторы. 6.2. Неустойчивые множества и захват траекторий.
7. Эргодические аспекты динамического хаоса (1320).
 - 7.1. Показатели Ляпунова. 7.2. Энтропия. 7.3. Размерностные характеристики. 7.4. Оценки энтропии и размерности. 7.5. Статистические свойства динамических систем.
8. Реконструкция динамических систем (1324).
 - 8.1. Элементы теории Такенса. 8.2. Задача идентификации. 8.3. Задача прогноза.

9. Случайность и хаос (1326).

- 9.1. Конечномерные и бесконечномерные наблюдаемые.
- 9.2. К определению хаоса и случайности.

10. Заключение (1326).

Список литературы (1327).

Предисловие

8 ноября 2009 г. ушёл из жизни выдающийся физик XX века академик Виталий Лазаревич Гинзбург. В его работах, посвящённых перспективам развития современной физики, идеи неравновесных процессов, солитонов и странных аттракторов всегда были выделены отдельной строкой. В.Л. Гинзбург не раз подчёркивал, что эти идеи имеют отношение как к фундаментальным, так и к практически важным проблемам. Вот что он писал ещё в 1984 г. [1]: "*Эта область (её можно назвать нелинейной физикой) занимает всё более видное место, и такова, трудно сомневаться в этом, тенденция развития физики в наши дни*". Двадцать лет спустя, в 2003 г., в Нобелевской лекции он также отмечал важность неравновесных явлений и хаоса. В частности, к одной из трёх "великих" проблем физики Виталий Лазаревич относил вопрос о возрастании энтропии, необратимости и стреле времени, которые также рассматриваются в теории хаотических динамических систем.

В последние десятилетия это направление заняло лидирующую позицию. Появилось множество новых периодических изданий, ежегодно проводится огромное число конференций, почти во всех университетах мира созданы лаборатории и отделения нелинейной динамики. Успешное развитие физики неравновесных явлений нашло отражение также в новых подходах к прикладным задачам самого широкого направления — от

А.Ю. Лоскутов, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Воробьевы горы, 119992 Москва, Российская Федерация
Тел. (495) 939-51-56. Факс (495) 939-29-88
E-mail: Loskutov@chaos.phys.msu.ru

Статья поступила 17 мая 2010 г.,
после доработки 5 августа 2010 г.

обработки информации и финансового анализа до аритмологии и нейродинамики.

Обзор посвящается памяти академика В.Л. Гинзбурга.

1. Введение

Динамический подход к описанию систем самого различного происхождения известен со времён Ньютона. Этот подход является основой анализа большинства классических явлений в физике и других естественных науках: сначала строится соответствующая математическая модель в виде динамических уравнений, а затем тем или иным способом изучаются их решения, которые, в принципе, можно сопоставить с экспериментальными данными. Развитие этих идей, а также представление, что состояние модели в любой момент времени должно однозначно определяться начальными условиями, привели исследователей к понятию динамической системы.

Несмотря на то что динамическая система является некоторой математической абстракцией, данная парадигма оказалась весьма продуктивным инструментом при описании многих реальных явлений. Наибольший успех в этом направлении был достигнут в первой трети XX в., когда была создана теория колебаний двумерных систем. Последующие усилия исследователей были направлены на изучение возможности распространить эту теорию на многомерные системы. Однако, несмотря на значительные открытия в данной области, до 60-х годов XX столетия не было понятно, насколько сложными могут быть движения в таких системах.

Ситуация коренным образом изменилась после того, как С. Смейл [2, 3] заложил основы гиперболической теории. Исследования в этом направлении выявили большое разнообразие динамики нелинейных систем и привели к одному из важнейших открытий XX в. — открытию динамического хаоса. Были введены У-системы [4–6] (позднее названные системами Аносова), описаны бифуркации петель сепаратрис, приводящие к сложному поведению [7, 8], и изучены миллиардные модели, являющиеся упрощёнными моделями статистической физики [9, 10].

Однако в то время эти идеи не находили широкого признания, поскольку построенные примеры носили весьма абстрактный характер и было неясно, имеют ли данные конструкции какое-либо отношение к реальности. Более того, было распространено мнение, что хаотические явления, присущие физическим системам, имеют переходной характер и на больших временах хаос должен выродиться в регулярное движение.

Такая точка зрения сохранялась до середины 1970-х годов — до тех пор пока математические идеи теории динамических систем не удалось связать с физической моделью, относящейся к гидродинамике, — знаменитой системой Лоренца (см. [11]). С этого времени началось систематическое изучение динамического хаоса¹.

Классическими примерами хаоса являются азартные игры, которые, в частности, изучаются теорией вероятностей. Однако азартные игры — это недетерминированный процесс. Здесь допускается элемент случайности.

Теория хаотических систем использует методы теории вероятностей, однако не является её частью. Хаос следует определить как некоторый случайный процесс, который наблюдается в динамических системах, не подверженных влиянию шумов или каких-либо случайных сил. Поэтому теория хаоса рассматривается как часть теории динамических систем.

Для систем статистической механики с большим числом степеней свободы N , находящихся в состоянии равновесия, конфигурации частиц не подчиняются никаким динамическим законам и частицы имеют предельное распределение при $N \rightarrow \infty$. Такие системы находятся в состоянии пространственного беспорядка. Одним из основных достижений теории хаоса является установление того факта, что время в динамике играет ту же роль, что и число степеней свободы в статистической механике. Иными словами, детерминированный хаос описывается как динамический беспорядок.

В консервативных системах, природа динамического хаоса в которых подробно описана в недавнем обзоре [13], фазовый объём сохраняется. Это означает, что выполняется теорема Лиувилля. Данное фундаментальное свойство предопределяет характер эволюции и даёт ключ к объяснению происхождения хаотичности в консервативных системах. В диссипативных системах вследствие диссипации происходит сжатие фазового объёма. Принципиальное отличие диссипативных систем от консервативных проявляется в том, что в фазовом пространстве диссипативных систем возникают притягивающие множества, которые не существуют в консервативных системах, — аттракторы (от англ. *attract* — притягивать).

Термин "аттрактор" легко пояснить, если обратиться к примеру маятника в вязкой среде. Допустим, маятник находится в нижнем положении устойчивого равновесия (в устойчивой стационарной точке). Если маятник немного возмутить, то он начнёт совершать затухающие колебания около равновесного положения. В этом смысле состояние равновесия маятника будет являться притягивающим, или аттрактором, который, очевидно, будет иметь нулевую меру. Аналогичным образом можно получить представление об аттракторах, отвечающих периодическому (предельные циклы) и квазипериодическому (инвариантные торы) движению. Формализация этих идей приводит к современному понятию аттрактора.

С изменением параметров системы аттракторы тоже меняются. Однако при некоторых значениях параметров может произойти качественная перестройка аттракторов. Например, устойчивый фокус может смениться предельным циклом. Такие значения параметров называются бифуркационными, а сама перестройка носит название бифуркации. Установление хаотического поведения динамической системы в результате той или иной последовательности бифуркаций принято называть картиной или сценарием развития хаоса.

Где же лежит граница между регулярной, но сложной динамикой и хаосом? Критерием может служить устойчивость системы к малым возмущениям. Если такая устойчивость отсутствует, то детерминированное описание на больших временных интервалах теряет смысл и возникает необходимость в использовании статистических методов. Такой подход привёл к определению хаотического поведения системы через её чувствитель-

¹ История возникновения динамического хаоса и развитие теоретических представлений об этом феномене детально представлены в замечательной монографии [12].

ную зависимость от начальных условий, а также к использованию показателей Ляпунова и энтропии в качестве критериев динамического хаоса.

Динамика диссипативных систем в определённом смысле более разнообразна, чем динамика консервативных. Для диссипативных систем характерны такие инвариантные множества, как устойчивые и неустойчивые стационарные точки и предельные циклы, многомерные притягивающие торы, соответствующие устойчивому квазипериодическому поведению с несоизмеримыми частотами, математический образ хаотических колебаний — странный аттрактор и др.

Странный аттрактор — это некоторое "сложно устроенное" множество в фазовом пространстве, к которому притягиваются почти все траектории из некоторой окрестности этого множества, а на самом множестве движение имеет экспоненциально неустойчивый характер. Такое сочетание глобального сжатия с локальной неустойчивостью приводит к тому, что аттрактор уже не может быть гладким, как, например, тор; он определённым образом расслаивается, представляя собой в некотором сечении канторово множество.

Основная идея публикации [14] (см. также [11, 15]), в которой впервые было введено понятие странного аттрактора и доказана возможность его существования, состояла в том, что такие подмножества фазового пространства играют определяющую роль в решении проблемы турбулентности. Хотя этот подход в полной мере не оправдался (см. [16, 17]), работа [14] послужила стимулом к развитию теории хаотических динамических систем и её приложений.

Настоящий обзор посвящён описанию хаотических явлений, возникающих, главным образом, в диссипативных системах. В разделе 2 приводятся основные сведения из общей теории, даётся определение хаоса и рассматриваются различные типы аттракторов. В разделах 3, 4 описываются гиперболические множества, подкова Смейла, гомоклинические касания и связанные с ними экзотические явления — Ω -взрывы и дикие гиперболические множества. В разделах 5–7 рассматриваются статистические свойства динамических систем, исследуемых в рамках эргодической теории.

Для изучения, в том числе экспериментального, свойств сложных систем широко используется подход, основанный на анализе сигналов, произведённых системой. Это особенно актуально в тех случаях, когда математически описать изучаемый процесс практически невозможно, но является доступной для наблюдения некоторая характерная величина. Анализ такого подхода составляет содержание раздела 8. В разделе 9 объясняется принципиальное отличие стохастической динамики от детерминированного хаоса.

В основу представлений о детерминированном хаосе положены идеи, развитые в таких областях современной математики, как дифференциальная динамика, теория меры, функциональный анализ, теория особенностей, топология и др. К сожалению, сейчас большинство понятий из этих областей сильно формализовано и нередко их физический смысл теряется за завесой абстрактных рассуждений, терминов и теорем. Поэтому данный обзор представляет собой в основном качественное изложение теории хаотических динамических систем, в котором большинство формальных идей сопровождается наглядными примерами.

2. Динамические системы и хаос

Вообще говоря, то, что сейчас называют хаосом, в математике известно с начала XX в. Со времён А. Пуанкаре стало ясно, что при изучении сложного поведения динамических систем обычный подход, заключающийся в аналитическом вычислении индивидуальных траекторий дифференциальных уравнений, не работает. По этой причине основной задачей теории является исследование устойчивости, изучение роли инвариантных многообразий, анализ геометрической структуры траекторий, поиск инвариантных мер, расчёт инвариантных характеристик и т.п. Хотя такой подход не даёт возможности представить решение в явном виде, он позволяет качественно описывать многие важные особенности динамических систем, в том числе хаотичность. Поэтому в литературе часто используется термин *качественная теория*.

2.1. Общие положения

Предметом исследования качественной теории являются, главным образом, сосредоточенные системы, описываемые набором обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x, a), \quad (1)$$

где $x(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — совокупность динамических переменных, t — время, $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ — векторная функция заданной гладкости r (т.е. класса C^r), определённая в некоторой области $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, a — параметр (или совокупность параметров). Обычно M называют фазовым пространством системы (1).

Функция v порождает поток $F^t: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $F^t(x)$ — гладкая функция, которая определена для значений t из интервала $T \subseteq \mathbb{R}$, такая, что для всех $x \in M$ и $\tau \in T$

$$\left. \frac{d}{dt} F^t \right|_{t=\tau} = v(F^\tau(x)).$$

При этом F^t обладает групповыми свойствами: F^0 — тождественный оператор и $F^{t_1+t_2} = F^{t_1}(F^{t_2}) \equiv F^{t_1} \circ F^{t_2}$. Следовательно, поток F^t определяет функцию v единственным образом.

Поток F^t иногда называют преобразованием сдвига, поскольку он переводит систему из состояния, в котором она находилась в начальный момент, в состояние в любой другой момент времени. Нетрудно понять, что F^s при $s = -t$ имеет взаимно обратную функцию той же гладкости C^r , т.е. система обратима во времени.

Геометрически систему уравнений (1) можно интерпретировать как векторное поле, которое каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие вектор v . Тогда решение $x(t) = F^t(x(0))$ представляет собой кривую, которая в каждой точке является касательной к этому векторному полю. Поэтому часто словосочетания "система обыкновенных дифференциальных уравнений" и "векторное поле" используются как синонимы. Система (1) называется автономной, если векторное поле v не зависит явно от времени.

Дифференциальные уравнения удовлетворяют основной теореме локального существования и единственности решений (подробности см., например, в книге [18]). Если задано начальное состояние $x(0) = x_0 \in D$ системы (1), то $F^t(x_0): T \rightarrow \mathbb{R}^n$ задаёт фазовую траекторию, или фазовую кривую, исходного дифференциального

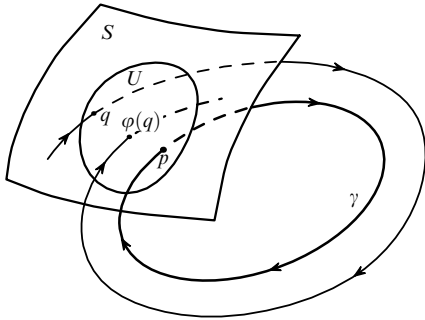


Рис. 1. Отображение Пуанкаре в окрестности предельного цикла.

уравнения (1). В силу единственности решения для каждого начального условия x_0 и любого гладкого векторного поля v имеется единственная фазовая кривая. Это, в частности, означает, что траектории, определяемые системой (1), не могут пересекаться.

Если время t пробегает дискретный ряд значений, то соответствующую динамическую систему называют каскадом. Для такой системы более привычной является запись $f: M \rightarrow M$,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2)$$

которая задаёт отображение. При этом последовательность $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \equiv f \circ f, \dots$, т.е. $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, будет его траекторией. Каскад f^n , который является C^r -гладким вместе со своим обратным, называется диффеоморфизмом.

В ряде случаев поток F^t допускает существование глобальной секущей Π , т.е. гиперповерхности размерности $n-1$, которую фазовые траектории пересекают трансверсально (без касаний). Тогда изучение поведения исходной системы можно свести к анализу отображения $\Phi: \Pi \rightarrow \Pi$, которое называется отображением Пуанкаре. Обратный переход — от отображения Пуанкаре к потоку — называется надстройкой.

Одним из ключевых понятий при изучении динамических систем является понятие грубости, введённое А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [19]. Говорят, что векторное поле v динамической системы является грубым (или структурно устойчивым), если имеется окрестность U поля v такая, что для каждого векторного поля v' из этой окрестности фазовый портрет качественно не отличается от фазового портрета динамической системы, задаваемой полем v . Соответственно свойство динамической системы является грубым, если оно сохраняется при малых возмущениях системы.

Важную роль в происхождении хаоса в диссипативных динамических системах играют предельные циклы — замкнутые фазовые траектории, отвечающие периодическому поведению.

Пусть $\gamma = x(t)$ — предельный цикл, S — секущая поверхность, которую цикл пересекает в точке p . Выберем некоторую окрестность $U \subset S$ этой точки (рис. 1) и рассмотрим первое возвращение траектории, вышедшей из точки $q \in U$, близкой к p . Тогда можно определить отображение Пуанкаре $\Phi: U \rightarrow S$, переводящее точку q в точку $q' = \Phi(q)$ на поверхности S .

Очевидно, что в координатном представлении в окрестности точки p такое отображение можно записать как $y' = \hat{L}y + g(y)$, где \hat{L} — матрица с элементами $\partial\varphi_i/\partial y_k|_{y=p}$. Тогда линеаризованное отображение имеет

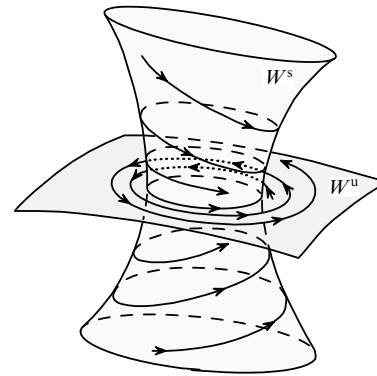


Рис. 2. Устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия седлового предельного цикла.

вид $y' = \hat{L}y$. Матрица \hat{L} называется матрицей монодромии², а её собственные значения α_j называют мультипликаторами. Мультипликаторы могут быть как вещественными, так и комплексными величинами.

Каждому собственному значению \hat{L} отвечает собственный вектор, задающий инвариантное направление. Один из таких векторов всегда направлен по касательной вдоль траектории. Поэтому соответствующий ему мультипликатор равен единице.

Когда фазовая траектория вблизи предельного цикла совершает один оборот (см. рис. 1), то возмущение, отвечающее каждому собственному вектору, умножается на соответствующий мультипликатор. Поэтому предельный цикл будет устойчивым тогда, когда все мультипликаторы, за исключением одного, отвечающего смещению вдоль траектории, лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга, т.е. при $|\alpha_j| < 1$. Если же мультипликаторы удовлетворяют условию $|\alpha_j| > 1$, то цикл будет абсолютно неустойчивым.

В общем случае часть мультипликаторов лежит как внутри единичного круга, так и снаружи. Такие предельные циклы называются седловыми. Для седлового предельного цикла характерно наличие устойчивых (W^s) и неустойчивых (W^u) многообразий, которые характеризуются тем свойством, что если начальная точка траектории $x_0 \in W^s$ ($x_0 \in W^u$), то при $t \rightarrow \infty$ (соответственно при $t \rightarrow -\infty$) фазовые кривые будут стремиться к γ (рис. 2). Наличие циклов седлового типа является ключевым свойством хаотических динамических систем.

2.2. Аттракторы

Основное свойство диссипативных систем — сжатие фазового объёма: с течением времени, согласно динамическим уравнениям, первоначальный объём, занимаемый облаком фазовых точек, уменьшается. Формально это выражается в виде неравенства $\text{div } v < 0$. В этом случае при $t \rightarrow \infty$ все фазовые траектории будут сходиться к некоторому подмножеству $\mathcal{A} \subset M$ нулевого (в фазовом пространстве) объёма, которое называется аттрактором динамической системы.

В настоящее время имеется несколько определений аттрактора, которые, по-видимому, не сводятся друг к другу (см. обзоры [20–23]). Геометрическое определение аттрактора состоит в следующем. Аттрактором называется такое компактное подмножество \mathcal{A} фазового

² Монодромия — от *моно* (один) и *дром* (круг), т.е. матрица монодромии — это матрица, полученная через один оборот цикла.

пространства M , которое удовлетворяет следующим условиям [23]:

- 1) A инвариантно относительно потока динамической системы;
- 2) существует окрестность U , которая сжимается к A под действием потока;
- 3) A нельзя разложить на два и более непересекающихся инвариантных подмножества.

Инвариантность аттрактора A относительно потока означает, что $F^t A = A$, т.е. попав на аттрактор, мы остаёмся там при любом $t \rightarrow \infty$. Из второго условия следует, что A является таким подмножеством множества U , $A \subset U \subset M$, для которого при $t \rightarrow \infty$ выполняется $F^t U \rightarrow A$. Фактически здесь речь идёт об области притяжения аттрактора A , т.е. о совокупности начальных точек $x_0 \in U$ таких, что фазовые траектории, начавшиеся в этих точках, при $t \rightarrow \infty$ стремятся к аттрактору A . Третье условие необходимо для того, чтобы исключить аттракторы, состоящие из нескольких отдельных компонентов.

Согласно данному определению, устойчивые положения равновесия, устойчивые предельные циклы и устойчивые торы являются аттракторами, которые называются регулярными, или простыми.

2.3. Хаос

Существует несколько возможностей ввести понятие хаотичности. Наиболее распространённое и часто используемое определение, которое было предложено в работе [25], опирается на свойство чрезвычайной (экспоненциально сильной) чувствительности системы к заданию начальных условий или к внешним воздействиям. Это проявляется вполне естественно, так как основное проявление динамического хаоса выражается в экспоненциальном разбегании близких траекторий.

Но для определения понятия хаоса одной экспоненциальной неустойчивости недостаточно. Необходимо также выполнение условия транзитивности и наличие некоторой регулярности, называемой плотностью периодических орбит (т.е. циклов). Часто условие транзитивности заменяется условием топологического перемешивания, которое является более сильным.

Пусть M — метрическое пространство. Отображение $f: M \rightarrow M$ называется хаотическим [25], если: а) f неустойчиво к начальным условиям; б) f является топологически транзитивным; в) циклы отображения f плотны в пространстве M .

Говорят, что отображение f неустойчиво по отношению к заданию начальных условий, если имеется величина δ (постоянная неустойчивости) такая, что для некоторой точки $x \in M$ и $\varepsilon > 0$ существует точка $y \in M$, удовлетворяющая условиям $\text{dist}(x, y) < \varepsilon$ и $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ при $n \in \mathbb{N}$, где $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ означает расстояние. Геометрическая интерпретация этих соотношений показана на рис. 3. Примечательно, что постоянная δ не зависит от x или от ε — она определяется только свойствами рассматриваемой системы.

Далее, отображение f называется транзитивным, если для любых двух открытых множеств U, V найдётся такое целое число n , что $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Неформальный смысл свойства транзитивности демонстрирует рис. 4. Заметим, что из теории метрических пространств известно, что транзитивность эквивалентна существованию плотной траектории.

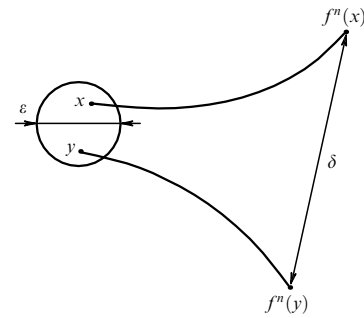


Рис. 3. Геометрическая интерпретация неустойчивости по начальным условиям.

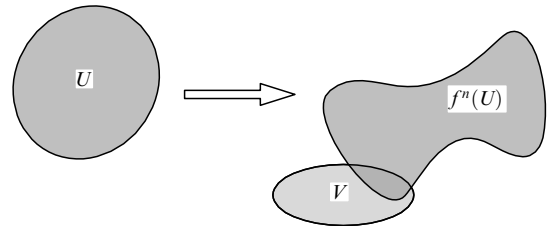


Рис. 4. Пояснение транзитивности.

Наконец, свойство плотности периодических траекторий означает, что в любой окрестности любой точки в M существует по крайней мере одна (следовательно, бесконечно много) периодических траекторий.

Таким образом, хаотическая система должна обладать тремя важными свойствами: 1) непредсказуемостью (экспоненциальная неустойчивость), 2) неразложимостью (транзитивность) и 3) элементом регулярности (плотность циклов). Однако не так давно было обнаружено [26], что в приведённом определении условие чувствительной зависимости от начальных условий является избыточным. Следовательно, если отображение непрерывно и обладает свойством транзитивности, а циклы плотны, то для него наблюдается чувствительная зависимость от начальных условий. Немного позднее было показано [27], что в определении хаотичности ни транзитивность, ни плотность циклов не следуют из двух других условий. По-видимому, преобразование, заданное на компактном множестве, может быть определено как хаотическое, если оно обладает чувствительной зависимостью от начальных условий и имеет плотные циклы.

Совсем недавно в работе [28] было предложено определение хаотичности динамической системы, которое, помимо чувствительной зависимости от начальных условий, включает в себя также требование сложности траектории. Под сложностью здесь понимается в определённом смысле отсутствие рекуррентности. При этом показано, что из определения хаотичности, основанного на неустойчивости по отношению к начальным условиям, транзитивности и плотности циклов [25], вытекает определение, предложенное авторами [28].

Отметим, что к определению хаоса можно также подойти с более физической точки зрения, используя понятия энтропии и размерности (см. раздел 9).

3. Гиперболическая динамика

Гиперболические множества являются хорошим примером для понимания "внутреннего устройства" динами-

ческих систем с хаотическим поведением. Привлекательная особенность гиперболических множеств состоит также в том, что их исследование позволяет понять глобальное поведение траекторий на основе анализа их локальных свойств.

3.1. Гиперболические множества

Конструкция гиперболических множеств основана на очень простой идее: касательное пространство Σ динамической системы устроено так, что оно складывается из трёх подпространств: устойчивого E^s , неустойчивого E^u и нейтрального E^0 . Иными словами, речь здесь идёт о таком линейном векторном пространстве Σ векторов инфинитезимальных возмущений, в котором произвольный вектор возмущения представляется как линейная комбинация векторов, относящихся к подпространствам E^s , E^u и E^0 . Подпространства E^s и E^u определяются тем, что близкие траектории экспоненциально сходятся друг к другу: соответствующие E^s — при $t \rightarrow \infty$, а соответствующие E^u — при $t \rightarrow -\infty$. При этом в подпространстве E^0 векторы сжимаются или растягиваются медленнее, чем с экспоненциальной скоростью. Из такого поведения уравнений в вариациях следует та же динамика траекторий динамических систем.

Рассмотрим систему с дискретным временем, заданную отображением (диффеоморфизмом) (2), и компактное инвариантное множество $A \subset M$, т.е. $f(A) = A$. Для таких преобразований гиперболичность вводится следующим образом [29, 30] (см. также [22, 31, 32] и цитируемую там литературу). Пусть каждая итерация f^n является гладкой в окрестности $x \in M$. Тогда существует дифференциал ∂f_{x_n} диффеоморфизма f отображений касательного пространства Σ_{x_n} в касательное пространство $\Sigma_{f(x_n)}$. Траектория x_n называется гиперболической, если существуют подпространства $E_{f^k(x)}^s$ и $E_{f^k(x)}^u$ касательного пространства $\Sigma_{f^k(x)}$, $0 \leq k < \infty$, такие, что $\Sigma_{f^k(x)} = E_{f^k(x)}^s + E_{f^k(x)}^u$ и выполняются условия:

- (а) $\partial f_{f^k(x)}(E_{f^k(x)}^s) = E_{f^{k+1}(x)}^s$, $\partial f_{f^k(x)}(E_{f^k(x)}^u) = E_{f^{k+1}(x)}^u$;
 (б) $\|\partial f_{f^k(x)} e\| \leq c \|e\|$, $e \in E_{f^k(x)}^s$, $\|\partial f_{f^k(x)} e\| \geq c^{-1} \|e\|$, $e \in E_{f^k(x)}^u$, где $0 < c < 1$ — некоторая постоянная;
 (в) $\text{dist}(E_{f^k(x)}^s, E_{f^k(x)}^u) \geq \text{const}$, $0 < k < \infty$.

Разложимость касательного пространства Σ означает, что каждый вектор v единственным образом можно представить как $v = v^s + v^u$, где $v^s \in E^s$ и $v^u \in E^u$. Из соотношений (а) следует инвариантность подпространств E^u и E^s , условие (б) означает гиперболичность. Наконец, неравенство (в) указывает на свойство E^u и E^s .

Понятие гиперболичности естественно вводится и для потоков.

Множество A называется гиперболическим, если оно замкнутое и состоит из траекторий, удовлетворяющих условиям гиперболичности. Если вдоль траектории (т.е. с возрастанием числа итераций) оценки (б) ухудшаются, т.е. степень сжатия и растяжения в подпространствах E^u и E^s изменяется от точки к точке, то такие множества называются неравномерно гиперболическими. Динамические системы с равномерной гиперболичностью всех траекторий называются системами Аносова [32].

Одним из ключевых результатов в этом направлении, который также очень важен в приложениях, является теорема Адамара – Перрона, или теорема о локальных многообразиях, согласно которой у гиперболической

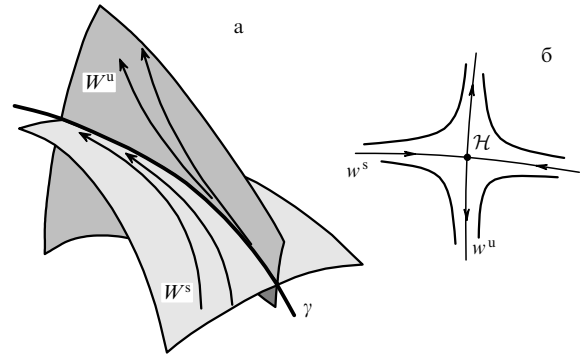


Рис. 5. Гиперболическая траектория γ и гиперболическая неподвижная точка \mathcal{H} .

траектории γ существует локальное устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразие (рис. 5а). Фазовые кривые динамической системы на многообразии W^u экспоненциально разбегаются, а на многообразии W^s экспоненциально сближаются. В сечении такой гиперболической траектории будет отвечать гиперболическая (седловая) точка \mathcal{H} (рис. 5б).

Установить гиперболичность исследуемого множества, как правило, очень сложно. В приложениях для проверки свойства гиперболичности удобным оказывается так называемое условие конусов (см. [31] и приведённые там ссылки). В частности, с использованием этого условия была обоснована гиперболическая природа аттракторов Смейла – Вильямса и Плыкина в физически реализуемых системах [33 – 35] (см. раздел 5.2), а также найдено доказательство существования известного аттрактора Лоренца [36, 37] (см. раздел 5.3).

3.2. Подкова Смейла

Одним из замечательных примеров гиперболического множества является подкова Смейла. С исследованием этого примера началась современная теория хаотических динамических систем (см. об этом [38, 39]). В настоящее время подкова хорошо изучена, поэтому мы приведём лишь основные элементы её построения на примере обратимого отображения плоскости, которое можно рассматривать как отображение Пуанкаре для некоторого трёхмерного потока.

Рассмотрим единичный квадрат на плоскости $S = [0, 1] \times [0, 1]$. Введём отображение $f: S \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое действует так, что $f(S) \cap S \equiv \Omega_d^1$ образует две прямоугольные полосы, Q_1 и Q_2 . При этом горизонтальные границы АВ, DC преобразуются также в горизонтальные (рис. 6). Прообразами полос Q_1 и Q_2 являются две горизонтальные полосы $B_i = f^{-1}(Q_i)$, $i = 1, 2$.

Это построение соответствует растяжению исходного квадрата с некоторым коэффициентом α по вертикали, сжатию его по горизонтали с коэффициентом β и сложению в форме подковы так, чтобы область изгиба не попала в S . Следующая итерация отображения $f(Q_i)$ приводит к появлению множества $\Omega_d^2 = S \cap f(S) \cap f^2(S)$, состоящего из четырёх более тонких вертикальных полос (см. рис. 6). Обратные итерации дают четыре горизонтальные полосы $\Omega_r^2 = S \cap f^{-1}(S) \cap f^{-2}(S)$. После m итераций получим множества

$$\Omega_d^m = \bigcap_{k=0}^m f^k(S), \quad \Omega_r^m = \bigcap_{k=0}^m f^{-k}(S),$$

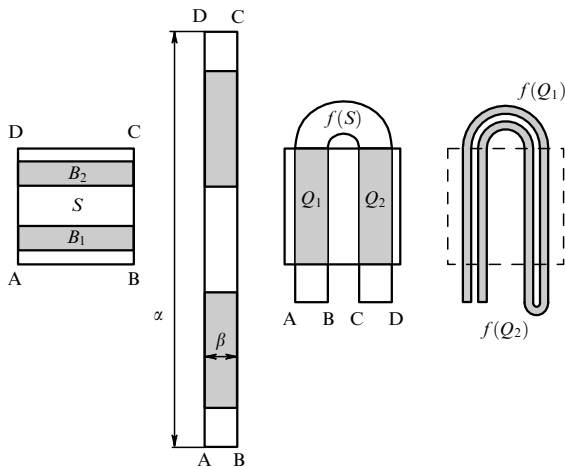


Рис. 6. Подкова Смейла.

состоящие из 2^m вертикальных и горизонтальных полос соответственно. Таким образом, предельные множества Ω_d^∞ и Ω_r^∞ будут включать несчётное множество линий, представляющих собой произведение канторова множества на отрезок. Очевидно, что описанную конструкцию можно варьировать разными способами.

Из построения подковы нетрудно видеть, что в ходе итераций большинство точек покидает квадрат S . Более того, почти все точки не будут содержаться и в образе $f^k(S)$. Точки p , которые всегда остаются в S , образуют нетривиальное инвариантное подмножество

$$\begin{aligned} \Omega &= \{p \mid f^k(p) \in S, -\infty < k < \infty\} = \\ &= \Omega_d^\infty \cap \Omega_r^\infty = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(S), \end{aligned}$$

которое имеет нулевую меру и сложную топологическую структуру. Это множество называется подковой Смейла, хотя, как заметил Д.В. Аносов [32], на подкову похоже вовсе не оно, а фигурирующее в его построении множество $f(S)$.

Известно, что Ω содержит бесконечные семейства седловых циклов всевозможных периодов, некоторую плотную траекторию, а также несчётное множество непериодических движений. Поэтому присутствие подковы обычно трактуется как проявление системой определённых хаотических свойств.

Подкова Смейла может сосуществовать с аттракторами. Но само это множество не является притягивающим. Поэтому динамические системы, имеющие в фазовом пространстве подкову, могут демонстрировать переходное (иногда очень длительное) хаотическое поведение, которое заканчивается затягиванием траектории на некоторый устойчивый цикл или в стационарную точку. Характерный пример — известное уравнение Дуффинга при определённых значениях параметров [40] (подробнее об этой системе см. [41]).

Из существования подковы следует неожиданный вывод, очень важный для физических приложений: возникающие в фазовом пространстве сложные множества нулевой меры типа подковы, которыми при исследовании обычно пренебрегают, могут оказывать драматическое влияние на поведение динамической системы

(см. раздел 6). Обсуждение этих вопросов на примере широкого спектра явлений можно найти в недавней монографии Г. Заславского [42].

В физических системах подкова Смейла возникает достаточно часто, например в небесной механике [43] (см. также [44]), в результате трансверсального пересечения многообразий в уравнениях Ван дер Поля [45] и Дуффинга [40], в модели подсакакивающего мяча [46] и др. (см. [30, 47]). Эти результаты выявили всю сложность динамики, которую могут демонстрировать, на первый взгляд очень простые, системы.

4. Гомоклинические структуры

К гиперболическим множествам относятся также инвариантные множества в окрестности гомоклинических и гетероклинических траекторий. Такие траектории, открытые Пуанкаре при изучении задачи N тел (см. [48]), встречаются как в консервативных, так и в диссипативных системах, и сейчас их исследование составляет самостоятельный раздел нелинейной динамики [49].

4.1. Гомоклинические траектории

Для того чтобы получить первоначальное представление о поведении систем, которым присущи гомоклинические и гетероклинические структуры, рассмотрим для наглядности трёхмерную ($n = 3$) динамическую систему (1). Допустим, что эта система имеет седловой предельный цикл γ с устойчивым W^s и неустойчивым W^u многообразиями. Предположим, что γ имеет двоякоасимптотическую траекторию $\Gamma = W^s \cap W^u$, т.е. $\Gamma \rightarrow \gamma$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Фрагмент такой структуры показан на рис. 7. Если многообразия W^s и W^u пересекаются по Γ трансверсально (рис. 7а), то говорят, что возникает грубая гомоклиническая траектория Γ . Когда имеет место касание многообразий по кривой Γ (т.е. гомоклиническое касание (рис. 7б)), то гомоклиническая траектория Γ_0 называется негрубой.

Хорошо известно, что из наличия одной гомоклинической траектории следует существование их бесконечного числа (наглядное объяснение этого феномена см. в [12]). Фрагмент похожей структуры в случае трансверсального пересечения показан на рис. 8а. В отображении Пуанкаре замкнутая гиперболическая траектория (седловой цикл) γ отвечает гиперболической точке \mathcal{H} . Многообразия этой точки являются одномерными и соответствуют устойчивой ветви $w^s(\mathcal{H})$ и неустойчивой ветви $w^u(\mathcal{H})$ сепаратрис (рис. 8б). Пересечение w^s и w^u означает наличие трансверсальной гомоклинической точки q_0 . Траектория такой точки определяется как бесконечное множество пересечений: $Q = \{q_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, q_{i+1} = f(q_i)$.

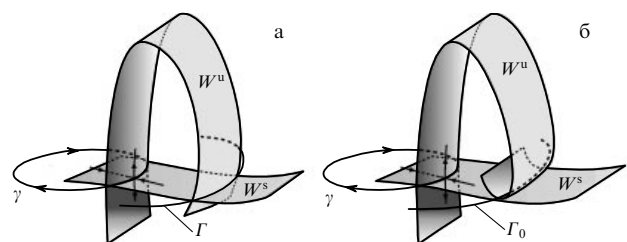


Рис. 7. Грубая Γ и негрубая Γ_0 гомоклинические траектории седлового цикла γ .

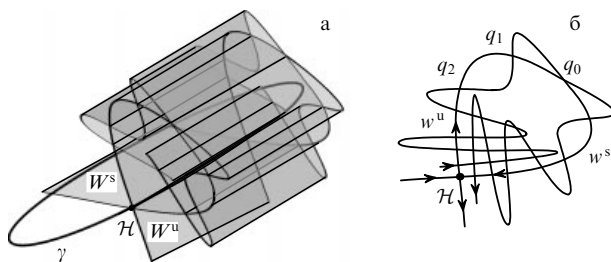


Рис. 8. Инвариантные многообразия в окрестности гиперболического цикла (а) и соответствующее отображение Пуанкаре (б).

Гомоклинические точки соединяются петлями, которые отображаются посредством f друг в друга. Поскольку петли охватывают одинаковые площади, а устойчивое и неустойчивое многообразия не имеют самопересечений, то с увеличением числа итераций отображения эти петли всё более и более вытягиваются. Таким образом, в фазовом пространстве мы получаем решётку из ветвей сепаратрисы (рис. 8б). В физической литературе такие области называют стохастическими слоями, или гомоклиническими сплетениями.

Рассмотрим множество \mathcal{U} , состоящее из таких пересечений и точки \mathcal{H} , а также окрестностей U_0, U_1, \dots, U_k , которые выбираются следующим образом. Пусть U_0 — окрестность гомоклинической точки q , в которую входят и точки $f^k(q)$, за исключением некоторого их конечного числа. Остальные точки из гомоклинической решётки покрываются оставшимися попарно непересекающимися окрестностями U_1, \dots, U_k . Тогда можно показать [44] (см. также [50]), что для всякой окрестности V множества \mathcal{U} найдётся система областей $U_i \subset V$, $i = 0, 1, 2, \dots$, для которой

$$A = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i \left(\bigcup_{j=1}^k U_j \right)$$

является гиперболическим инвариантным множеством. Это означает, что множество A состоит из таких гиперболических точек y , которые при действии отображения $f^k(y)$, $-\infty < k < \infty$, остаются в окрестности V . С уменьшением V множество A стремится к U .

Гомоклинические точки (траектории) можно рассматривать как частный случай гетероклинических точек (траекторий), которые возникают при пересечении устойчивой и неустойчивой ветвей сепаратрис (многообразий) от разных гиперболических точек. Для них справедливы аналогичные результаты, полученные для гомоклинических точек (траекторий) [31, 49].

4.2. Подковы в гомоклинических структурах

С гомоклиническими и гетероклиническими сплетениями тесно связана подкова Смейла. Эту связь наглядно демонстрирует следующее построение. Рассмотрим малую окрестность U гиперболической точки \mathcal{H} . Действие отображения f приводит к тому, что найдутся такие m, n , что $q \in f^k(U)$ при $k \geq m$ и $q \in f^{-l}(U)$ при $l \geq n$. Это означает, что область U растягивается вдоль неустойчивого направления w^u , образуя некоторую полосу $S = f^m(U)$, которая включает в себя гомоклиническую точку q . С другой стороны, некоторая окрестность B , обрамляющая устойчивое направление w^s и точку q , при обратных итерациях

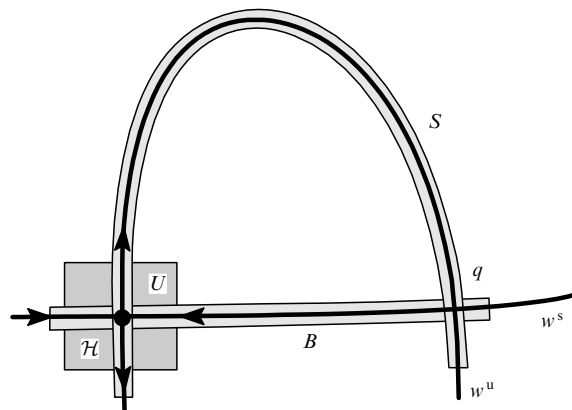


Рис. 9. Рождение подковы из гомоклинической структуры.

переходит в область U , $B = f^{-n}(U)$ (рис. 9). Следовательно, образом полосы B через $n + m$ итераций будет изогнутая в виде подковы полоса $S = f^{m+n}(B)$, пересекающая B .

Следующие итерации приводят к ещё большему вытягиванию и новым пересечениям $B \cap f^l(B)$. Эта конструкция аналогична по построению подкове Смейла (см. рис. 6), только теперь вместо исходного квадрата S рассматривается криволинейный прямоугольник B . Таким образом, мы пришли к важному результату, впервые полученному Биркгофом [51, 52] и позднее строго обоснованному Смейлом [2]: если диффеоморфизм $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет гиперболическую неподвижную точку \mathcal{H} и трансверсальную гомоклиническую точку q , то в любой малой окрестности \mathcal{H} для некоторой итерации отображения f существует подкова. Верно и обратное утверждение: если в динамических системах присутствуют подковы, то имеется также и гомоклиническая структура.

Существует важное следствие, вытекающее из результата Смейла–Биркгофа: наличие трансверсальной гомоклинической точки влечёт за собой положительность энтропии динамической системы (см. раздел 7.2). Обратное утверждение для отображений плоскости [53] и для потоков [32] тоже верно. Это, в том числе, означает, что для появления хаотичности в системе достаточно рождения подков (см. раздел 9). При этом, однако, надо помнить, что хаотическое множество может оказаться непритягивающим.

Среди динамических систем, имеющих гомоклинические структуры, важное место занимают такие, фазовое пространство которых содержит петлю состояния равновесия типа "седло-фокус" (рис. 10а). Системы с гомоклиническими петлями — негрубые. Поэтому при возмущениях петли расщепляются, что может приводить к очень сложной динамике.

Впервые анализ систем с двоякоасимптотическими траекториями типа "седло-фокус" был проведён Л.П. Шильниковым [7, 49, 54]. Шильников показал, что в полной окрестности значений параметра, при котором наблюдается петля седло-фокуса, имеются подковы Смейла. Кроме того, здесь существуют системы с гомоклиническими касаниями (см. раздел 4.3) и системы, имеющие счётное множество устойчивых циклов³.

³ Как заметил И.М. Овсянников, один из учеников Л.П. Шильникова, седло-фокус неисчерпаем, так же как и электрон.

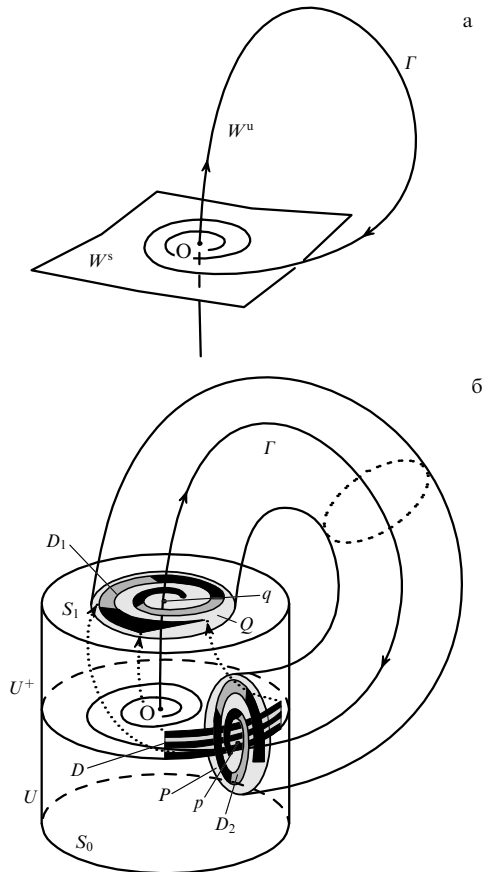


Рис. 10. Седло-фокус (а) и рождение подковы (б).

Рассмотрим трёхмерное векторное поле, имеющее в начале координат стационарную точку O с одним действительным положительным собственным значением $\rho > 0$ и двумя комплексно сопряжёнными $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\zeta$. Это означает, что стационарная точка имеет структуру седло-фокуса с двумерным локально устойчивым многообразием W^s и одномерным неустойчивым многообразием W^u . Предположим, что сепаратрисы седла образуют гомоклиническую петлю Γ (рис. 10а). Теорема Шильникова утверждает, что если $\rho > |\eta|$, то возмущённое векторное поле имеет инвариантные гиперболические множества, а отображение Пуанкаре — счётное множество подков. При этом в любой окрестности петли Γ существует бесконечное множество седловых предельных циклов.

Рождение подковы из петли седло-фокуса нетрудно понять с помощью следующего геометрического построения. Рассмотрим окрестность U точки O в виде цилиндра, который задаётся как пересечение двух поверхностей, S_0 и S_1 (рис. 10б). Устойчивое многообразие W^s делит эту окрестность на две части: U^+ и $U \setminus U^+$. Обозначим точку пересечения неустойчивого многообразия W^u с поверхностью S_0 как p , а точку пересечения с поверхностью S_1 — как q . Если окрестность U^+ достаточно мала, то существует отображение $\psi : S_0 \rightarrow S_1$, которое ставит в соответствие каждой точке на S_0 определённую точку на поверхности S_1 (рис. 10б). В частности, это отображение преобразует область $D \subset S_0$ в логарифмическую "толстую" спираль $D_1 \subset S_1$ с центром в точке q , т.е. $\psi(D) = D_1$. Иными словами, горизонтальные полосы на D отображаются на полосы, лежащие

внутри двух принадлежащих S_1 спиралей, закручивающихся вокруг точки q , а сама точка q является образом линии пересечения D и W^s .

Поскольку поток от q к p невырожден, то существует диффеоморфизм φ окрестности Q точки q в окрестность P точки p , $\varphi : Q \rightarrow P$. При этом область D_1 отобразится в некоторую область D_2 на поверхности S_0 и $\varphi(q) = p$. Таким образом, отображение первого возвращения можно определить как $\varphi(\psi)$. Действие этого отображения состоит в том, что исходная область D преобразуется в закрученную в форме спирали полосу D_1 , которая затем отображается в D_2 и некоторым образом накладывается на D (рис. 10б). В итоге $\varphi(\psi(D)) \cap D$ представляет собой множество, которое по построению аналогично подкове Смейла.

Более полное рассмотрение и строгий анализ описанного построения представлен в монографии [49] (см. также цитируемую там литературу). В других исследованиях [55, 56] приводятся примеры систем дифференциальных уравнений, имеющих физическую трактовку, для которых результаты Шильникова допускают прямую проверку.

4.3. Гомоклинические касания и дикie гиперболические множества

Динамические системы с гомоклиническими касаниями устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов, которые упоминались в разделе 4.1, могут проявлять ряд новых неожиданных свойств и, как следствие, обладать дополнительной сложностью траекторий. Это связано с так называемой неизолированностью касаний, которое объясняется тем, что системы с гомоклиническими касаниями являются плотными в пространстве динамических систем и образуют целые области, называемые областями Ньюхауса.

Впервые гомоклинические касания были описаны в работах [56, 57] (см. также [22, 58]), где изучались основные бифуркации, связанные с существованием негрубой гомоклинической кривой, приводящие к сложному поведению.

Пусть седловой цикл γ устроен так, что его устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия касаются по некоторой гомоклинической кривой Γ_0 (рис. 7б). В зависимости от геометрии и знаков мультипликаторов цикла, в такой системе возможно наличие нескольких различных типов гомоклинических касаний. Часть из них сводится друг к другу, однако несводимые комбинации могут быть только трёх разных классов [58]. При этом для каждого из них структура множества Δ траекторий, находящихся в малой окрестности негрубой кривой Γ_0 , может быть качественно различной.

Рассмотрим отображение Пуанкаре в окрестности цикла γ . Допустим, что $f(x, a)$ — сжимающее объём однопараметрическое семейство гладких диффеоморфизмов плоскости \mathbb{R}^2 , имеющее гиперболическую неподвижную точку \mathcal{H} с собственными значениями ρ и σ , $0 < |\rho| < 1 < |\sigma|$, $|\rho\sigma| \neq 1$. Предположим, что при $a = 0$ семейство $f(x, a)$ имеет негрубую гомоклиническую траекторию Q_0 , в точках которой устойчивое $w^s(\mathcal{H})$ и неустойчивое $w^u(\mathcal{H})$ многообразия имеют квадратичное касание, т.е. в локальных координатах $w^s = x$, а w^u задаётся как $a - x^2$ (или $a + x^2$).

Если неустойчивая ветвь $w^u(\mathcal{H})$ подходит к устойчивой $w^s(\mathcal{H})$ так, что касание происходит "снизу"

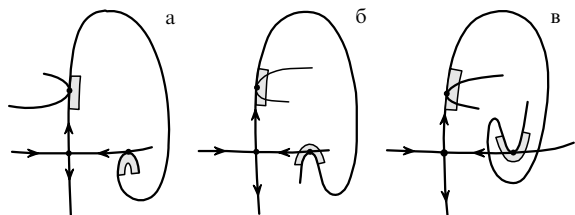


Рис. 11. Гомоклинические касания первого (а), (б) и второго (в) классов.

(рис. 11а, б), то такая структура называется касанием первого класса. В этом случае множество Δ включает в себя саму гомоклиническую траекторию Q_0 и точку \mathcal{H} . Диффеоморфизмы с таким типом касаний интересны тем, что они отвечают границам в пространстве параметров, отделяющим области, содержащие системы с простым поведением траекторий от областей с системами, обладающими хаосом. При переходе через такую границу сложная динамика возникает моментально, т.е. взрывным образом, в связи с чем это явление получило название Ω -взрыв. Такая динамика была открыта в работах [60, 61] (см. также [62]) и подробно исследована в [63–66].

При подходе сепаратрисной ветви "сверху", как показано на рис. 11в, имеет место касание второго класса. Множество Δ в системах такого типа имеет неравномерную гиперболическую структуру, т.е. все траектории, кроме Q_0 , — гиперболические.

Когда диффеоморфизм $f(x, a)$ устроен так, что участки кривых $w^u(\mathcal{H})$ и $w^s(\mathcal{H})$ касаются, как показано на рис. 12а, то такие касания относятся к третьему классу. В этом случае множество Δ содержит нетривиальные гиперболические подмножества и, следовательно, системы такого типа обладают хаотической динамикой. При этом оказывается, что касания третьего класса существуют в окрестности любой системы с гомоклиническим касанием.

Возникновение сложной динамики в таких системах вытекает из следующего качественного анализа [21]. Предположим, что гомоклиническое касание происходит при $a = 0$ (рис. 12а). Рассмотрим прямоугольную область U , содержащую на границе точку касания q_0 устойчивого $w^s(\mathcal{H})$ и неустойчивого $w^u(\mathcal{H})$ многообразий (рис. 13а). Действие отображения f приводит к тому, что для некоторого k точка $f^k(q_0)$ будет принадлежать $w^s(\mathcal{H})$. Тогда нетрудно видеть, что последовательные итерации $f^{i+k}(U)$ для достаточно больших i приведут к пересечению с U и рождению подковы (рис. 13б).

Как показано в работах [57, 58], в некоторых других случаях касаний подкова не возникает до тех пор, пока

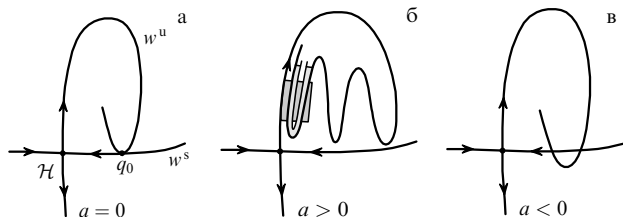


Рис. 12. Перестройка многообразий диффеоморфизма $f(x, a)$ в \mathbb{R}^2 .

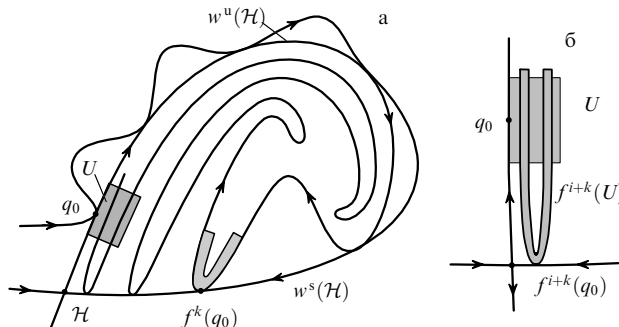


Рис. 13. Рождение подковы из гомоклинического касания.

под действием возмущений не появятся трансверсальные гомоклинические точки. Этот результат поясняет рис. 11, на котором показана эволюция полуокрестности гомоклинического касания под действием преобразования f .

При возмущении семейства $f(x, a)$ касания исчезают или появляются пересечения многообразий, и тогда в поведении диффеоморфизма происходит качественная перестройка. Именно, если $a > 0$, то касания отсутствуют (рис. 12б) и подковы при последовательных итерациях отображения исчезают. Однако легко понять, что при достаточно малых положительных a , т.е. ещё до момента касания, в системе будет иметь место очень сложная структура. При $a < 0$ отображение имеет трансверсальную гомоклиническую точку вблизи $f^k(q_0)$ и, как следствие, подкову.

Хотя рассмотренные системы обладают высокой степенью сложности, в описанной ситуации существуют эффекты, имеющие более тонкую природу. Эти эффекты связаны с рождением так называемых диких гиперболических множеств, впервые описанных Ньюхаусом [67–69]. Так именуется равномерно гиперболическое множество, устойчивое и неустойчивое многообразия которых имеют квадратичное касание, но это касание не устранено посредством малых гладких возмущений. Точнее, индивидуальные гомоклинические касания исчезают при слабых "шевелениях" системы, но в целом избавиться от них таким образом нельзя, поскольку неизбежно возникают новые касания.

Это довольно неожиданный результат, который в определённом смысле противоречит представлению о том, что если касание происходит в какой-либо точке, то вследствие структурной неустойчивости оно должно исчезнуть под действием возмущений (см. рис. 12). Однако такая наивная точка зрения неверна. В этом случае для общих семейств отображений $f(x, a)$ существуют интервалы, где плотные значения параметра a , при которых $f(x, a)$ имеет гомоклинические касания.

Для того чтобы показать, в каком смысле определённые типы касания обладают "устойчивостью", рассмотрим на плоскости гиперболическое инвариантное множество A , которое задано диффеоморфизмом $f(x, a)$. Из примера подковы Смейла, приведённого в разделе 3.2, следует, что для такого множества устойчивое и неустойчивое многообразия представляют собой произведение канторова множества на отрезок. Допустим, что имеет место квадратичное касание устойчивого $w^s(A)$ и неустойчивого $w^u(A)$ многообразий. В его окрестности $w^s(A)$ и $w^u(A)$ являются канторовыми множествами горизонтальных отрезков и парабол (рис. 14). Обозна-

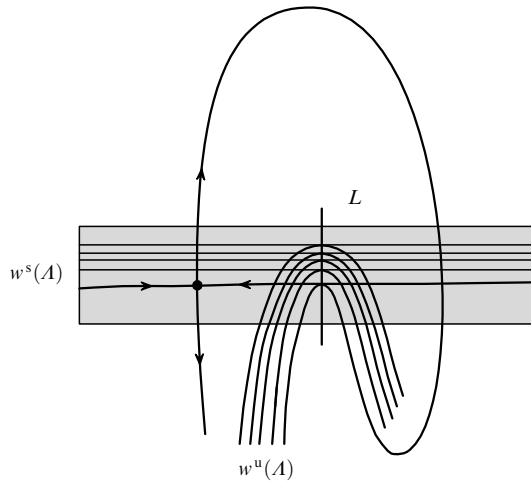


Рис. 14. Касание многообразий канторова множества.

чим как L кривую, проходящую через вершины парабол. На этой кривой существуют канторовы множества $K_s = w^s(A) \cap L$ и $K_u = w^u(A) \cap L$. Если имеется точка $q_0 = K_s \cap K_u$, то она будет точкой касания многообразий $w^s(A)$ и $w^u(A)$.

Для того чтобы определить возможность пересечения K_s и K_u , в работе [67] была использована метрическая характеристика канторова множества — его "толщина" $d(K)$. Для канторова множества на отрезке это понятие характеризует отношение длин интервалов, которые в процессе построения отбрасываются, к длинам остающихся промежутков. Как доказано в работе [66], если K_1, K_2 — канторовы множества, удовлетворяющие неравенству $d(K_1)d(K_2) > 1$, то (при некоторых дополнительных условиях) $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Это означает, что проблема доказательства касаний, которые не исчезают при возмущениях, может быть сведена к построению канторовых множеств, имеющих конечную толщину. Существование таких множеств как раз и было доказано в [67].

Позднее при адаптации такого подхода к динамическим системам в работе [69] было доказано, что в пространстве гладких динамических систем существуют открытые области, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями. Они называются областями Ньюхауса. Сами инвариантные гиперболические множества вблизи A , содержащие касания, называются дикими гиперболическими множествами.

Динамика систем с гомоклиническими касаниями экстремально сложна. Так, в работе [68] (см. также [70]) было доказано, что в областях Ньюхауса плотны системы, имеющие бесконечно много устойчивых циклов. У систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями было обнаружено счётное множество седловых, устойчивых и абсолютно неустойчивых циклов [71]. Более того, такие системы могут одновременно иметь счётное множество устойчивых и неустойчивых инвариантных торов, сосуществующих со счётным множеством седловых, устойчивых и абсолютно неустойчивых циклов [72].

В исследованиях [73] обнаружено, что при гладких возмущениях систем с гомоклиническими касаниями могут появляться как гомоклинические касания, так и циклы произвольно высоких порядков вырождения. Эти вырождения связаны с тем, что один из мультипликато-

ров становится равным $+1$ (или -1), и с обращением в нуль некоторого числа (или вообще всех) ляпуновских величин. Один из следующих отсюда фундаментальных выводов, который оказал большое влияние на нелинейную динамику в целом, — это результат о невозможности полного качественного описания моделей со сложным поведением в рамках конечно-параметрического семейства динамических систем [70, 74, 75]. Кроме того, ряд динамических свойств, которые ранее казались экзотическими, являются, наоборот, типичными для систем с гомоклиническими касаниями [76, 77].

Таким образом, негрубые гомоклинические траектории никогда не бывают изолированными. Более того, если гомоклинические касания имеют место в детерминированных системах, то они являются источником дополнительной динамической сложности и влекут за собой существенные перестройки в поведении систем.

Несмотря на свою абстрактность, гомоклинические касания и области Ньюхауса были найдены во многих, в том числе физических, системах. Так, они встречаются в семействах двумерных отображений, демонстрирующих переход к хаосу через удвоение периода [73], в системах типа Лоренца [78] и Дуффинга [22], при разрушении квазипериодического движения [79, 80] и в системах, содержащих гомоклиническую петлю типа "седло-фокус" [54, 81, 82] (см. рис. 10) и др.

Наиболее полная информация о гомоклинических касаниях, областях Ньюхауса и смежных с ними явлениях представлена в сборнике [59] и монографии [83].

4.4. Символическая динамика

Конструкция типа подковы, предложенная Смейлом для доказательства гиперболичности в окрестности грубой гомоклинической траектории, оказывается недостаточно универсальной. В частности, она не может быть адаптирована к широкому классу гамильтоновых систем. Кроме того, используя такой подход, невозможно обосновать гипотезу Биркгофа [52] (известную как проблема Пуанкаре–Биркгофа), утверждающую, что двумерный сохраняющий площадь диффеоморфизм в любой окрестности замыкания гомоклинической траектории содержит счётное множество периодических орбит.

В своё время Биркгофом было высказано предположение, что для доказательства данного утверждения можно применить методы так называемой символической динамики, когда вместо траектории системы рассматривается последовательность, соответствующая областям фазового пространства, которые посещает данная траектория. При этом каждая траектория кодируется посредством некоторого конечного или счётного алфавита бесконечной последовательностью. Иными словами, исходная траектория оказывается сопряжённой со сдвигом в пространстве полученных последовательностей. Несмотря на некоторую необычность такого подхода, он оказался весьма продуктивным и позволил доказать ряд важных утверждений, касающихся, например, гиперболичности динамических систем, сложности динамики в задаче трёх тел и др. [44].

Проблему Пуанкаре–Биркгофа полностью удалось решить Шильникову [84], который в доказательстве как раз и использовал возможность кодирования траекторий, лежащих в окрестности гомоклинической кривой. Невозможно себе представить, каким образом такую

сложную динамику можно было бы описать аналитически, используя традиционные подходы.

Простейшим примером символической системы служит так называемая топологическая схема Бернулли из двух символов. Рассмотрим некоторое множество \mathcal{X} , элементами которого являются бесконечные в обе стороны последовательности $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, составленные только из двух символов — 0 и 1. Если ввести метрику $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m 2^{-|m|}$, где $\delta_m = 0$ при $a_m = b_m$ и $\delta_m = 1$ при $a_m \neq b_m$, то \mathcal{X} будет компактом. Определим теперь отображение $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ как сдвиг на один символ, т.е. $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, где $b_n = a_{n+1}$. Построенное таким образом отображение, которое можно назвать отображением сдвига, будет удовлетворять определению хаотичности (см. раздел 2.3).

Теперь можно доказать, что между подковкой Смейла Ω и множеством \mathcal{X} существует взаимно однозначное соответствие φ , такое, при котором последовательность $\mathbf{b} = \varphi(f(p))$ получается из последовательности $\mathbf{a} = \varphi(p)$ посредством сдвига на один символ: $b_k = a_{k+1}$. Действительно, $\varphi(p) = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где $f^k(p) \in B_{a_k}$. Это означает, что точка p лежит в Ω только тогда, когда при всех k выполняется $f \in B_1 \cup B_2$ (см. рис. 6). Поскольку $f^{k+1}(p) = f^k(f(p))$, то из $\varphi(x)$ получится $\varphi(f(p))$ с помощью сдвига индексов.

Таким образом, получаем, что $\varphi \circ f|_{\Omega} = g \circ \varphi$. Значит, имеется топологическое сопряжение между $f|_{\Omega}$ и g . Иначе говоря, из $f|_{\Omega} = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ приходим к соотношению $f^k|_{\Omega} = \varphi^{-1} \circ g^k \circ \varphi$. Следовательно, существует преобразование φ траекторий f на Ω в траектории g на \mathcal{X} .

Для анализа систем с гомоклиническими и гетероклиническими траекториями посредством символического подхода используются более сложные построения (см. [22, 31, 44]). Основные положения символической динамики приведены в монографии [85].

5. Хаотические аттракторы динамических систем

Описанные конструкции указывают на существование гиперболических множеств и сложное поведение динамических систем при весьма общих предположениях. Однако в общем случае из этих результатов не следует асимптотической хаотичности типичных траекторий, поскольку при наличии диссипации в фазовом пространстве систем всегда будут присутствовать аттракторы. Если это регулярные аттракторы, о которых шла речь в разделе 2.2, то сложная динамика, которая связана с присутствием гиперболических множеств, описанных выше, окажется переходным процессом, так что в конечном счёте поведение таких систем будет стационарным, периодическим или квазипериодическим. Хаотическое поведение диссипативных систем обеспечивается наличием в их фазовом пространстве нетривиального подмножества — странного аттрактора. Впервые возможность существования такого подмножества была доказана в работе [14].

5.1. Странные и хаотические аттракторы

Аттрактор динамической системы называется странным, если он отличен от конечного объединения гладких подмногообразий пространства M [11, 23]. Напомним, что (гладким) подмногообразием пространства M называют такое подмножество W в пространстве M'

($M' \subseteq M$), которое локально выглядит как часть пространства M' и имеет в каждой точке единственную касательную. Таким образом, в определении странного аттрактора подчёркивается именно его негладкая структура: в некотором сечении он представляет собой канторово множество (т.е. фрактал). Это свойство и экспоненциальная неустойчивость траекторий на аттракторе явились причиной введения в работе [14] определения "странный", так как рождение такого множества в гладких динамических системах представлялось весьма необычным⁴.

Странные аттракторы обладают некоторой степенью гиперболичности, однако эта гиперболичность имеет иную форму, нежели равномерная гиперболичность, описанная в разделе 3. Такие аттракторы действительно являются сложно устроенными множествами, но всё же они не могут быть детально изучены в рамках гиперболической теории (подробно это рассмотрено, например, в обзоре [87]). Тем не менее хорошо известны примеры именно гиперболических аттракторов динамических систем (см. раздел 5.2), отвечающих равномерной гиперболичности.

Аналитических результатов, касающихся существования странных аттракторов, относительно мало. Так, считается, что в областях Ньюхауса в случае седлофокуса могут быть плотны хаотические системы со счётным числом странных аттракторов [88]. Более того, можно ожидать, что в окрестности семейства диффеоморфизмов, имеющего гомоклиническое касание устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболической точки, могут существовать подмножества систем, не имеющих устойчивых циклов, но обладающих странными аттракторами.

Ряд утверждений был доказан для семейства диффеоморфизмов произвольной размерности [89–92]. Основной результат, полученный в этом направлении, сводится к следующему. Пусть f_a — семейство диффеоморфизмов многообразия M , $\dim M \geq 2$, имеющее гомоклиническое касание при $a = \bar{a}$. Тогда существует множество $A \subset \mathbb{R}$ такое, что f_a обладает странным аттрактором для каждого $a \in A$ и $A \cap [\bar{a} - \varepsilon, \bar{a} + \varepsilon]$ имеет положительную меру Лебега для всех $\varepsilon > 0$.

Сейчас понятие "странный аттрактор" приобрело собирательный смысл — используя это понятие, хотят подчеркнуть хаотичность изучаемой системы. Обычно считается, что динамическая система обладает странным аттрактором, если в её фазовом пространстве имеется предельное множество, состоящее из хаотических траекторий. При этом хаотичность может быть обеспечена самыми разными критериями: гомоклиничностью, наличием положительного ляпуновского показателя, непрерывностью спектра, бифуркациями удвоения периода и т.п. (см. [28] и приведённые там ссылки). Таким образом, этот термин является скорее парадигмой, чем характеристикой какого-либо математического объекта.

Вместе с тем известно, что существуют странные нехаотические аттракторы [93], т.е. аттракторы, которые имеют фрактальную структуру, но при этом система с таким аттрактором не обладает хаосом ни в каком смысле. Поэтому широкое использование понятия

⁴ По выражению одного из авторов этого термина, Д. Рюэля, странные аттракторы выглядят странно [86].

"странный аттрактор" оказывается не всегда оправданным.

Если структура аттрактора хаотической системы неизвестна, как нередко бывает при численных и экспериментальных исследованиях, то правильнее было бы называть такие аттракторы хаотическими, акцентируя внимание именно на сложном движении траекторий. Это не противоречит тому, что хаотические аттракторы могут быть гиперболическими притягивающими множествами, иметь трансверсальную гомоклиническую траекторию и т.п.

Строгие математические результаты получены, главным образом, для аттракторов, обладающих свойствами гиперболичности. К ним относятся гиперболические аттракторы и аттракторы квазигиперболического типа, которые иногда называют стохастическими.

5.2. Гиперболические аттракторы

Множество A называется гиперболическим аттрактором динамической системы, если A — замкнутое топологически транзитивное гиперболическое множество и существует такая окрестность $U \supset A$, что $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$. Гиперболический аттрактор является структурно устойчивым (грубым) множеством. Это означает, что малые возмущения не могут привести к качественным перестройкам как самого аттрактора, так и поведения систем в целом. Динамические системы с гиперболическим типом аттрактора являются моделями структурно устойчивых систем с наиболее выраженными хаотическими свойствами [21, 50, 87].

Гиперболических аттракторов пока обнаружено немного, поэтому каждый пример, как правило, носит имя автора, который его построил. К хорошо известным аттракторам такого типа относятся соленоид Смейла – Вильямса (см., например, [3, 21, 30, 31, 87]) и аттрактор Плыкина [22, 31, 87, 94, 95].

К аттракторам, которые по свойствам близки к гиперболическим, принадлежат аттрактор Белых [29, 96, 97] и аттрактор Лози [21, 29, 98, 99]. Для описания данных аттракторов используется расширенное понятие гиперболичности, выходящее за рамки класса гладких обратимых отображений, поскольку такие аттракторы существуют в динамических системах с особенностями [97, 100–102].

Отметим, что аттрактор Лоренца [13, 103] и аттрактор Эно [13, 104] не относятся к гиперболическому типу: аттрактор Лоренца является негрубым (см. раздел 5.3), а для аттрактора Эно доказаны транзитивность и чувствительная зависимость от начальных условий [105] (см. также [89]).

Из всех гиперболических аттракторов конструкция Смейла–Вильямса топологически наиболее проста. Аттрактор получается посредством отображения тороидальной области в себя, которое рассматривается в пространстве размерностью три или более.

Пусть D — полноторий, т.е. заполненный двумерный тор. Разрежем его и распрямим так, чтобы получился цилиндр. Затем сильно растянем цилиндр и сожмём его вдоль радиуса. В результате будем иметь нечто похожее на толстый шнур круглого сечения. Сложим это шнур в виде двухоборотного обруча, склеив его концы, и затем вложим в исходный полноторий D . Тогда получим область D' , лежащую в D (рис. 15а). На следующем шаге такое преобразование применяется к области D' .

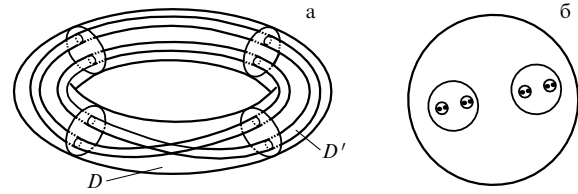


Рис. 15. Построение аттрактора Смейла – Вильямса.

Это приводит к тому, что D' трансформируется в область D'' , расположенную в D' и т.д.⁵ При этом в ходе построения площадь поперечного сечения сокращается более чем в два раза, т.е. общий объём уменьшается. В сечении такая конструкция представляет собой иерархию структур, показанную на рис. 15б.

Описанное построение формально можно записать следующим образом. Тороидальная область — это трёхмерная структура $T = S^1 \times D^2$, где S^1 — единичная окружность, D^2 — единичный диск в \mathbb{R}^2 . Тогда преобразование

$$f: T \rightarrow T, \quad f(x, y, \varphi) = \left(\frac{1}{k}x + \frac{1}{2}\cos\varphi, \frac{1}{k}y + \frac{1}{2}\sin\varphi, 2\varphi \right), \quad (3)$$

где значение $k > 2$ определяет степень сжатия тора "по толщине", задаёт соленоид как подмножество $T \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим сечение области T некоторой двумерной плоскостью. Тогда получим два диска радиуса $1/k$. При этом, очевидно, $f^2(T) \subset f(T)$.

При итерациях отображения (3) картина будет повторяться на всё меньших и меньших масштабах (рис. 15б). В результате в сечении множество $f^m(T)$ будет состоять из 2^m дисков. При $m \rightarrow \infty$ получим аттрактор Смейла – Вильямса, который является гиперболическим. Он устроен так, что растяжение в одном направлении и сжатие в другом являются равномерными.

Другой известный гиперболический аттрактор построен в работе [94]. Этот аттрактор получается применением специального отображения к области D , состоящей из объединения трёх областей: D_1, D_2 и D_3 , каждая из которых представляет собой полукруг с concentрически вырезанным меньшим полукругом, причём сумма диаметров полукругов D_2 и D_3 меньше диаметра полукруга D_1 . Два полукруга, D_2 и D_3 , приклеены по диаметру к большему полукругу D_1 (рис. 16а). Отображение $f: D \rightarrow D$ переводит каждый радиус данного разбиения области D в радиус того же разбиения при помощи некоторого сжатия. В результате получается картина, показанная на рис. 16б. Посредством

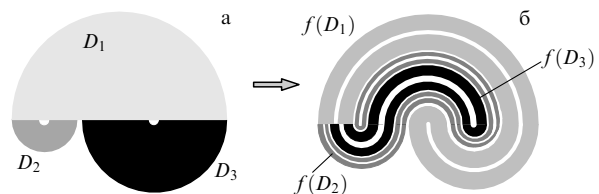


Рис. 16. Построение аттрактора Плыкина.

⁵ Такой объект иногда называют соленоидом Виеториса – ван-Данцига.

обобщения такой конструкции можно построить множество гиперболических аттракторов с различной топологической структурой (см. [95]).

Долгое время считалось, что аттрактор Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина и другие гиперболические аттракторы являются искусственными математическими конструкциями и физически реализуемых систем с такими аттракторами не существует. Однако не так давно в работах [33, 34] были построены динамические системы, имеющие в фазовом пространстве множество, по свойствам очень похожее на гиперболический аттрактор типа Смейла–Вильямса. Более того, в работе [106] свойства такого аттрактора изучены *экспериментально*. В других исследованиях была показана возможность существования аттрактора Плыкина в модифицированной системе Лоренца [107] и модели нейрона [108]. Недавно в работе [35] был предложен пример неавтономной системы, которая в сечении имеет аттрактор типа аттрактора Плыкина на плоскости (см. также [109] и данные там ссылки).

Однако необходимо отметить, что многие математики не признают существование гиперболических аттракторов в физически реализуемых системах.

5.3. Стохастические и другие аттракторы

По-видимому, адекватным математическим образом наблюдаемого развитого хаотического поведения физической системы может служить предложенный А.Г. Синаем стохастический аттрактор [110]. При этом, однако, определение "стохастический" не ассоциируется с наличием в системе случайных внешних возмущений или шумов. Этот термин заимствован из теории вероятностей и связывается с существованием инвариантной меры (см. раздел 7.5).

Всякое гиперболическое предельное множество является стохастическим аттрактором. Для такого аттрактора свойства растяжения и сжатия на неустойчивых и устойчивых многообразиях соответственно являются грубыми, однако геометрическая картина и степень растяжения и сжатия в различных точках аттрактора может различаться. При этом такой аттрактор не содержит устойчивые траектории, и они не могут там появиться при малых возмущениях системы.

Формальное определение стохастического аттрактора опирается на понятие инвариантной меры и свойство перемешивания. Напомним, что аттрактор \mathcal{A} — это инвариантное замкнутое множество, у которого существует такая окрестность U , что $U_t = F^t U \subset U$ и $\bigcap_t U_t = \mathcal{A}$. Аттрактор \mathcal{A} является стохастическим, если для любой абсолютно непрерывной инвариантной меры μ в U её смещение μ_t при $t \rightarrow \infty$ сходится к предельной инвариантной мере ν , которая не зависит от μ , и динамическая система $(\mathcal{A}, \nu, \{F^t\})$ обладает свойством перемешивания [110].

Известный пример стохастического аттрактора — аттрактор Лоренца, который возникает в знаменитой системе Лоренца при $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$ [97],

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = rx - xz - y, \quad \dot{z} = xy - bz,$$

описывающей в определённом приближении конвективное движение жидкости [103], дисковые динамо (см. [11]), а также некоторые модели лазеров [111]. Доказательство существования аттрактора Лоренца опирается на довольно сложные построения, основанные на сочетании

строгих математических выкладок и численного анализа. В работах [36, 37] доказано, что аттрактор Лоренца устойчив, т.е. он сохраняется при малых изменениях параметров и имеет единственную SRB-меру (см. раздел 7.5). Эти свойства, в частности, означают, что аттрактор Лоренца является физически наблюдаемым объектом.

Однако далеко не все хаотические аттракторы, которые наблюдаются в моделях реальных физических систем, обладают такими "хорошими" свойствами. Это связано с тем, что хаотические аттракторы могут содержать в себе бесконечное множество седловых циклов (см. раздел 2.3). При этом неустойчивое многообразие цикла также принадлежит аттрактору. Тогда бифуркации, связанные с касанием устойчивого и неустойчивого многообразий, приводят к появлению бесконечного множества устойчивых периодических траекторий, что подробно описано в разделе 4.3. Такие аттракторы принадлежат к квазистохастическому типу (т.е. являются так называемыми квазиаттракторами) [112, 113]. Слабые возмущения систем с квазистохастическим аттрактором приводят к сложным качественным перестройкам как в динамике системы, так и в структуре самого аттрактора (о физических аспектах подробнее см. [114]).

Показателен следующий пример. Аналитические результаты теории бифуркаций показывают, что в системе Лоренца с параметрами, сколь угодно близкими к значениям $b = 8/3$, $\sigma = 10,2$, $r = 30,2$, существуют устойчивые предельные циклы [115, 116]. Однако до сих пор никакими численными методами их не удалось выявить. Более того, всегда найдётся область параметров, в которой, согласно строгой теории, будут существовать устойчивые циклы, однако численно эти циклы будет невозможно обнаружить, какой бы высокой ни была точность компьютерных расчётов.

Таким образом, динамика диссипативных систем с типичными хаотическими аттракторами в определённом смысле аналогична динамике гамильтоновых систем, у которых, наряду со стохастическими слоями, существуют инвариантные торы Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ) [13].

6. Хаос в физических системах

Физический интерес к хаотическим явлениям возник довольно давно и связано это было с возможностью описания систем с очень большим числом степеней свободы (подробнее см. [13]). Однако с открытием экспоненциальной неустойчивости оказалось, что практически любая типичная нелинейная система более чем с одной степенью свободы может проявлять хаотические свойства. При этом одним из основных вопросов является вопрос о мере хаотических траекторий.

В то же время известно, что в нелинейных системах хаотические траектории всегда граничат с множеством сосуществующих регулярных (нехаотических) орбит и мера таких регулярных траекторий может быть нулевой. Как следует из представленного выше материала, ответ на вопрос о роли таких регулярных траекторий в динамике может быть отнюдь не простым.

6.1. Хаос и странные аттракторы

Когда говорят о физическом проявлении хаоса, то обычно имеют в виду такое поведение системы, при

котором её хаотические траектории становятся неотличимыми от некоторого случайного процесса. Это означает, что должно существовать определённое соответствие между решениями некоторого стохастического уравнения и детерминированных уравнений. Однако динамика хаотических систем не является полностью случайной (см. раздел 9). Несмотря на некоторую парадоксальность этих утверждений, исследования в течение последних сорока лет показали, что подход к изучению хаоса, развиваемый в рамках теории динамических систем, вполне оправдал себя.

Основополагающим понятием при исследовании хаотических систем оказывается понятие грубости, или структурной устойчивости [19]. Исторически первыми были построены грубые хаотические аттракторы. Все они были созданы исходя из геометрических предпосылок и без привлечения модельных уравнений, описывающих какой-либо реальный процесс. С физической точки зрения более важны именно грубые свойства, которые сохраняются при малых возмущениях и, следовательно, являются наблюдаемыми. Напротив, особенность негрубых систем состоит в том, что они могут качественно изменяться под действием возмущений. Поэтому, вообще говоря, вследствие неточности измерений, неучтённых факторов, округлений и т.п., построенные уравнения будут адекватными, только если их качественные свойства сохраняются при возмущениях. Таким образом, математически структурная устойчивость считалась необходимым условием при создании модельных систем.

Однако в основе хаотичности лежит экспоненциальная неустойчивость. При этом, для того чтобы система обладала хаотическим поведением (т.е. имела чувствительную зависимость от начальных условий), необходима только неустойчивость, фигурирующая в определении гиперболичности. Но вовсе не обязательно, чтобы эта неустойчивость была одинаковой для всех траекторий. Более того, для различных траекторий количество неустойчивых направлений может быть разным. Так устроен, например, аттрактор Лоренца. Аттракторы такого типа не разрушаются при малых возмущениях, однако их геометрическая структура, вообще говоря, может изменяться. В другой ситуации, вследствие гомоклинических касаний, возникающих в типичных системах, хаотические аттракторы с необходимостью будут содержать устойчивые циклы большого периода с очень малыми областями притяжения. Это означает, что такие аттракторы — негрубые и их детальная структура ненаблюдаема. Тем не менее свойство экспоненциальной неустойчивости чрезвычайно важно, поскольку в принципе позволяет наблюдать хаотическое поведение в соответствующих системах экспериментально.

Таким образом, при описании хаотических систем имеет место качественный подход, который, как отмечено в монографии [22], в определённом смысле аналогичен вопросу: является ли длина стержня рациональным или иррациональным числом (спрашивается только о качественном свойстве стержня)?

Вот что писал В.И. Арнольд [117] об одном из хаотических аттракторов (аттракторе Эно [104]), обнаруженном численно в двумерном отображении: "*Наблюдаемое в численном эксперименте приближение к множеству, имеющему локально вид произведения канторова множества на отрезок, не удаётся описать в рамках*

*действующих определений гиперболичности*⁶ (не исключено даже, что в это множество вкраплены области притяжения длинных циклов). Таким образом, математики не признают множество Эно гиперболическим. В то же время с точки зрения экспериментатора движение фазовой точки под действием итераций отображения имеет ярко выраженный стохастический характер".

Следовательно, в контексте динамического хаоса подход, основанный на понятии структурной устойчивости, нуждается в пересмотре. Именно, при построении динамической системы, описывающей какой-либо физический процесс, необходимо, чтобы только существенные (с той или иной точки зрения) свойства сохранялись при малых возмущениях. Это качественно отличается от общепринятой концепции, согласно которой требуется сохранение всех качественных свойств при возмущении. Естественно, в каждом конкретном случае следует определить, какие именно возмущения допустимы и какие свойства существенны для исследуемой системы.

6.2. Неустойчивые множества и захват траекторий

Хорошо известно, что в типичном случае гамильтоновы системы не интегрируемы и не хаотичны [118], но проявляют сложную динамику в том смысле, что в их фазовом пространстве иерархия КАМ-островков устойчивости сосуществует с хаотическим слоем, сформированным одной или несколькими эргодическими компонентами (см. [13, 22, 42]). Это, в частности, означает, что, в целом, регулярная и хаотическая динамика тесно переплетены. Такой тип поведения гамильтоновых систем, описанный во многих работах, наблюдался также экспериментально (см. [42] и приведённые там ссылки).

Разделённое фазовое пространство приводит к довольно неожиданному эффекту залипания (stickiness), или захвата [119–121], который заключается в том, что хаотическая траектория, попадая в малую окрестность КАМ-островков, может оставаться там достаточно долго.

Когда фазовая точка находится в хаотической области вдали от множества КАМ-торов, она будет двигаться случайным образом. Однако если эта точка попадает в область вблизи такого множества, то она оказывается захваченной его окрестностью. В окрестности КАМ-торов фазовая точка может пребывать произвольно долгое, но конечное время, в течение которого система будет вести себя регулярно. При этом экспоненциальное расщепление корреляций, которое было присуще системе до захвата в область вблизи КАМ-торов, сменится расщеплением степенного типа [122]. По истечении этого интервала времени система вновь "обретает" хаотические свойства. Затем вся картина повторяется.

Таким образом, гамильтонова система с разделённым фазовым пространством в целом проявляет перемежающийся динамический режим: вслед за хаотическим поведением в течение продолжительного времени наблюдается почти регулярная динамика. Такой процесс, очевидно, отражается на статистических свойствах гамильтоновых систем.

⁶ Позднее было доказано [105], что аттрактор Эно является хаотическим в смысле определения, данного в разделе 2.3. (Примеч. А.Ю.Л.)

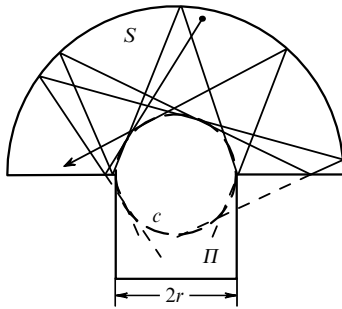


Рис. 17. Бильярд с границей в форме гриба [122].

Явление захвата было обнаружено при исследовании многих задач, возникающих в ходе анализа ряда физических явлений. Среди них — кинетическое описание многочастичных систем, задачи физики плазмы, задача о динамике частицы в потенциальной яме и др. (см. [42, 120] и приведённые там ссылки). Однако в общем случае неизвестно, будет ли наблюдаться захват в системах, где существует конечное или бесконечное число КАМ-островков [121].

Недавно в работе [123] были построены довольно любопытные и весьма наглядные семейства гамильтоновых систем, в фазовом пространстве которых имеются чётко разделённые хаотические и регулярные компоненты. В простейшем случае динамика этих семейств определяется единственным КАМ-островком и единственной эргодической хаотической компонентой.

Такое поведение демонстрируют бильярды с напоминающей по форме гриб границей, которая состоит из полукруга S и прямоугольного основания Π (рис. 17). В конфигурационном пространстве такого бильярда границу между эргодической и регулярной компонентами образуют находящиеся в полукруге S траектории, которые касаются окружности c , имеющей радиус r . При этом, как видно из рис. 17, регулярная область состоит из траекторий, которые не пересекают эту окружность, оставаясь в полукруге S и не попадая в основание Π . Однако хаотические орбиты всегда с необходимостью попадают в основание бильярда.

На примере таких бильярдов недавно было обнаружено [124], что для наблюдения динамического захвата хаотической траектории вовсе необязательно существование иерархии островков стабильности. Более того, в данном бильярде этот процесс происходит благодаря наличию бесконечного множества нулевой меры неустойчивых периодических траекторий, существующих в хаотической области. Иными словами, множества нулевой меры могут оказывать значительное влияние на поведение системы в целом.

Этот результат представляется весьма неожиданным, поскольку, с точки зрения динамики, всегда считалось, что такие множества не должны приниматься в расчёт и их существованием можно пренебречь. Конечно, поскольку мера таких множеств — нулевая, асимптотически они не влияют на эргодичность динамической системы. Тем не менее захват хаотических траекторий вблизи границы регулярной области происходит именно благодаря существованию таких множеств.

Известно также много других систем (см. [42] и приведённые там ссылки), содержащих множества меры нуль, которыми нельзя пренебречь при анализе дина-

мики. Одна из них — это подкова Смейла в системе Дuffинга при некоторых значениях параметров. Появление такого множества влечёт за собой экспоненциальную неустойчивость по отношению к начальным условиям, однако почти все траектории с течением времени покидают его, притягиваясь к регулярным аттракторам. При этом, однако, период такого переходного хаотического процесса может быть сколь угодно большим.

Показателен пример с подковой в так называемой задаче захвата (см. [43, 44]), в которой двойная звезда захватывает пришедшую из бесконечности третью звезду⁷. В работе [43] было доказано, что присутствие подковы приводит к появлению возможности захвата в системе. Ещё один пример — бильярд Синая [10] и Бунимовича [126] (бильярд типа "стадион"). В таких бильярдах все траектории, за исключением множества меры нуль, — хаотические. Тем не менее эти множества сильно влияют на динамику и долговременные характеристики движения [42].

Таким образом, вся сложность, проявляемая динамическими системами, может заключаться в существовании множеств, которым обычно пренебрегают. Отсюда следует, что общий подход к описанию хаотических систем требует нового видения.

7. Эргодические аспекты динамического хаоса

В полной мере описание динамики хаотических систем представляет собой неразрешимую (по крайней мере, в настоящее время) задачу. Однако существует иной подход, при котором изучаются только типичные свойства динамической системы. Такая точка зрения, игнорирующая рассмотрение исключительных (редких) траекторий, принята в эргодической теории или метрической теории динамических систем, где в качестве основополагающего представления используется понятие меры.

Наличие инвариантных мер для динамических систем, по крайней мере одной инвариантной меры, обеспечивается теоремами существования. Одной из них является теорема Крылова–Боголюбова, согласно которой для динамических систем с компактным фазовым пространством всегда существует хотя бы одна инвариантная мера. В других случаях существование инвариантных мер следует из динамических законов.

Эргодическая теория сейчас бурно развивается ввиду возможности её использования в различных приложениях (см., например, [29, 127] и приведённые там ссылки). С помощью рассматриваемых в этой теории характеристик, таких как размерность, энтропия, показатели Ляпунова и др., можно получить более полную информацию о свойствах изучаемых систем, отличить детерминированный сигнал от стохастического и охарактеризовать глубину хаотичности.

Некоторые важные свойства динамических систем, рассматриваемых эргодической теорией, например выполнение центральной предельной теоремы, экспоненциальное убывание корреляций, бернуллиевость и К-свойство, положены в основу современного представления о детерминированном хаосе. В разделах 7.1–7.5

⁷ Эта известная проблема относится к вопросу о финальных движениях в задаче трёх тел (см. по этому поводу фундаментальное руководство [125]).

мы опишем понятия, которые чрезвычайно полезны в приложениях.

7.1. Показатели Ляпунова

Как известно, в окрестности стационарной точки динамику системы (1) можно изучить с помощью собственных значений матрицы линеаризации. Для анализа движения в окрестности периодического движения служат мультипликаторы. В общем случае для исследования поведения в окрестности произвольной траектории используются (характеристические) показатели Ляпунова.

Геометрически показатели Ляпунова характеризуют степень растяжения и сжатия в системе вдоль устойчивых и неустойчивых направлений (см. рис. 5). Пусть $x(t)$ — типичная фазовая траектория системы (1), а $x_1(t)$ — близкая к ней траектория, т.е. $x_1(t) = x(t) + \xi(t)$. Рассмотрим функцию

$$\Xi(\xi(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\xi(t)|}{|\xi(0)|},$$

которая определена на векторах начального смещения $\xi(0)$, таких, что $|\xi(0)| = \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда, в зависимости от направления вектора $\xi(0)$, функция $\Xi(\xi(0))$ будет принимать конечный ряд значений $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Эти значения и называются показателями Ляпунова (см., например, [41, 128, 129] и данные там ссылки). Совокупность всех возможных показателей Ляпунова называется ляпуновским спектром.

Строгое обоснование теория показателей Ляпунова получила после доказательства известной мультипликативной эргодической теоремы [130–132], которая устанавливает их существование для почти всякого $x \in M$.

Показатели Ляпунова — это универсальные инвариантные характеристики, позволяющие судить о некоторых свойствах динамической системы. В частности, как вытекает из геометрического представления, показатели Ляпунова служат мерой хаотичности: если имеются положительные показатели, то поведение динамической системы будет хаотическим.

Число характеристических показателей равно размерности n фазового пространства исходной динамической системы, и их можно упорядочить по убыванию: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Для систем дифференциальных уравнений (1) один из показателей Ляпунова, отвечающий смещению вдоль траектории, которая не оканчивается в особой точке, всегда равен нулю. Для гамильтоновых систем показатели обладают следующей симметрией: $\lambda_j = -\lambda_{2k-j+1}$, где k — число степеней свободы. Следовательно, для гамильтоновых систем по крайней мере два показателя будут равны нулю. В случае полностью интегрируемых систем все показатели нулевые.

Сумма всех ляпуновских показателей равна среднему вдоль траектории значению дивергенции векторного поля, задающего динамику системы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{div} \dot{\xi} dt = \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Относительное изменение фазового объёма, как известно, определяется знаком при дивергенции. Следовательно, для гамильтоновых систем $\sum_j \lambda_j = 0$, а для диссипативных систем $\sum_j \lambda_j < 0$.

Показатели Ляпунова также несут информацию о размерности странного аттрактора динамической системы (см. раздел 7.3). Величина

$$D_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|},$$

где j определяется из условий $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{j+1} < 0$, называется ляпуновской размерностью, или размерностью Каплана–Йорка — по именам авторов, выдвинувших в своё время гипотезу о связи фрактальной размерности и характеристических показателей. Значение D_L даёт оценку сверху хаусдорфовой размерности аттрактора [133, 134].

Поскольку показатели Ляпунова определяют степень неустойчивости, то они естественным образом оказываются связанными с энтропией динамической системы.

7.2. Энтропия

Каждая динамическая система может быть охарактеризована некоторой величиной (иногда бесконечной), которая называется энтропией. Неожиданным оказывается то обстоятельство, что если энтропия положительна, то система обладает также и другими, довольно сильными, статистическими свойствами. Более того, для двумерных диффеоморфизмов такая динамическая сложность обусловлена существованием подков в фазовом пространстве [31] (см. раздел 3).

Энтропия — это в известном смысле мера упорядоченности (неупорядоченности) системы. В настоящее время для описания этого свойства в том или ином контексте используется большое число различных характеристик, для которых также употребляется термин "энтропия". Так, в теории информации энтропия H вводится для систем, которые могут находиться в состояниях x_i с вероятностями $p_i = p(x_i)$, с помощью формулы Шеннона

$$H = - \sum_i p_i \log p_i. \quad (4)$$

Похожим образом можно дать определение метрической энтропии динамической системы, или энтропии Колмогорова–Синяя. Благодаря этому понятию удалось строго сформулировать абсолютный критерий хаотичности как неустойчивого по Ляпунову движения с положительной метрической энтропией.

Из соотношений для энтропии следует, что эта величина служит мерой экспоненциального разбегания (или сближения) траекторий динамической системы. Этот факт сам по себе был известен давно, но энтропийный подход дал возможность по-новому подойти к исследованию сложных систем [135].

Предположим, что динамическая система представлена отображением $x_{n+1} = f(x_n)$ на компактном множестве A . Пусть также определено разбиение множества A на конечное число измеримых подмножеств A_i . Будем обозначать множество точек, отображаемых в A_i преобразованием f^k , как $f^{-k}(A_i)$. Не выписывая все разбиения, порождаемые таким обратным отображением, представим общий случай: на m -м шаге разбиение на $A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(m)} = A_{i_1} \cap f^{-1}(A_{i_2}) \cap f^{-2}(A_{i_3}) \cap \dots \cap f^{-(m-1)}(A_{i_m})$ — это точки из множества A_{i_1} , которые на следующих $m-1$ шагах попадут последовательно в $A_{i_2}, A_{i_3}, \dots, A_{i_m}$.

Вычислим энтропию каждого разбиения по формуле, аналогичной формуле Шеннона:

$$H^{(m)} = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} p(A_{i_1 i_2 \dots i_m}) \log p(A_{i_1 i_2 \dots i_m}).$$

Если обозначить $\varepsilon = \max_i \text{diam } A_i$, то энтропия динамической системы определится как

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} (H^{(m+1)} - H^{(m)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H^{(m)}. \quad (5)$$

Иными словами, энтропия задаётся как асимптотический прирост неопределённости для разбиения бесконечно малого диаметра. Заметим, что на практике привычное определение энтропии никогда не используется. Вместо этого энтропия обычно оценивается с помощью ляпуновских показателей (см. (8)), либо рассчитывается аппроксимирующая её величина K_2 , которая вводится следующим образом.

Рассмотрим энтропию Реньи

$$H_q = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_i p_i^q \right). \quad (6)$$

Легко показать, что энтропия Шеннона (4) при $q \rightarrow 1$ является частным случаем энтропии Реньи. Используя эту величину, можно также ввести обобщённую размерность D_q (см. раздел 7.3) и величину K_q , которая называется обобщённой энтропией, наиболее общим образом характеризующей меру неупорядоченности динамической системы. Именно, если в определение энтропии K (см. (5)) подставить H_q вместо H , то получим

$$K_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} (H_q^{(m+1)} - H_q^{(m)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H_q^{(m)}.$$

Одно из важнейших свойств величины K_q можно записать в виде последовательности неравенств

$$K = K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_{q-1} \leq K_q \leq \dots, \quad (7)$$

где K — энтропия Колмогорова–Синяя. Таким образом, энтропию Колмогорова–Синяя можно оценить сверху, если найти K_i , $i = 2, 3, \dots$ (см. раздел 7.3). В свою очередь, энтропия Колмогорова–Синяя выражается через показатели Ляпунова следующим образом [132]:

$$K_1 = \int_M \sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i(x) d\mu. \quad (8)$$

В ряде случаев соотношение (8) может быть упрощено. Если f — дифференцируемое отображение конечномерного многообразия и μ — эргодическая вероятностная мера для динамической системы, то $K_1 \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$ [128, 132]. Равенство в последнем выражении имеет место, если рассматривать одну хаотическую компоненту движения, т.е. если μ — мера Синяя–Рюэля–Боуэна [128] (см. раздел 7.5).

Величина энтропии не зависит от способа разбиения фазового пространства. Кроме того, если две динамические системы имеют равные энтропии, то их статистические законы движения одинаковы [136, 137].

7.3. Размерностные характеристики

Обобщённая размерность D_q определяется следующим образом:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

где ε — характерный размер ячеек, на которые разбивается фазовое пространство. Поясним смысл обобщённой размерности D_q для различных q . Если $q = 0$, то $p_i^q = 1$. Полученная величина называется фрактальной размерностью, или ёмкостью множества. В некоторых случаях D_0 называют также хаусдорфовой размерностью. Это связано с тем, что, хотя существует ряд исключений, для типичных аттракторов (которые встречаются в численных расчётах и физических экспериментах) значения ёмкости и хаусдорфовой размерности очень близки.

Если $q = 1$, то числитель и знаменатель в соотношении (6) обращаются в нуль, поскольку $\sum p_i = 1$. Однако нетрудно показать, что тогда

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}.$$

Поскольку соотношение $\sum p_i \ln p_i$ определяет энтропию, то величина D_1 описывает, как при $\varepsilon \rightarrow 0$ возрастает количество информации о рассматриваемом множестве. Поэтому D_1 называется информационной размерностью.

Если $q = 2$, то

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum p_i^2}{\ln \varepsilon},$$

где p_i^2 — вероятность того, что по крайней мере две точки находятся в i -й ячейке. Следовательно, значение D_2 определяется через бинарные корреляции в распределении вероятностей. Поэтому D_2 называют корреляционной размерностью.

Для $q = 3, 4, \dots$ размерности D_3, D_4, \dots связаны с корреляциями высших порядков, и они дают дополнительную информацию о структуре рассматриваемых множеств. Кроме того, определена обобщённая размерность D_q при $q \rightarrow \infty$ [138].

Отметим, что энтропия и размерность в определённом смысле являются независимыми инвариантами. Так, в случае квазипериодической динамики с большим числом несоизмеримых частот (т.е. тора высокой размерности) энтропия равна нулю. Но, например, для пилообразного одномерного отображения $x_{n+1} = lx_n \pmod{1}$ при $l \gg 1$ энтропия может быть достаточно велика. Поэтому при исследованиях реальных систем необходимо уметь рассчитывать обе эти характеристики.

7.4. Оценки энтропии и размерности

Для расчётов обобщённых величин вводится понятие обобщённого корреляционного интеграла:

$$C_q(\varepsilon) = \left(\sum_i p_i^q \right)^{1/(q-1)}.$$

Поскольку $-\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) = H_q^{(m)}(\varepsilon)$, то C_q — это переобозначение H_q . Следовательно, связи с другими обобщёнными величинами сохраняются. Обобщённый корреляционный интеграл удобен тем, что для случая $q = 2$ он значительно упрощается:

$$C_2(\varepsilon) \equiv C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_i S_i(\varepsilon),$$

где S_i — число точек внутри i -й ячейки, N — число элементов последовательности. Величина C_2 называется

корреляционным интегралом. Алгоритм его вычисления хорошо разработан (см. [41, 139, 140] и приводимые там ссылки).

Вернёмся к методу определения обобщённой размерности D_q и энтропии K_q . Отмеченная связь $-\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) = H_q^{(m)}(\varepsilon)$ позволяет выразить обобщённые величины через обобщённый корреляционный интеграл:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{H_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_q^{(m)}(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

$$K_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} H_q^{(m)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{\ln C_q^{(m)}(\varepsilon)}{m}.$$

Исходя из приведённых соотношений, можно ожидать, что при малых ε и достаточно больших m выполняется $\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) \simeq D_q \ln \varepsilon - K_q w + \text{const}$, где $w = (m - 1)\tau$ — так называемая ширина окна реконструкции. Отсюда, кроме оценки D_q , можно получить, фиксируя масштаб ε и исследуя зависимость от w , оценку обобщённой энтропии K_q динамической системы.

В исследованиях [141, 142] была предложена иная схема расчёта K_2 -энтропии, в которой используется представление K_q как предела разности $H_q^{(m+1)} - H_q^{(m)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $m \rightarrow \infty$:

$$K_2 \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} K_2^{(m)}(\varepsilon), \quad K_2^{(m)} = \frac{1}{k\tau} \ln \frac{C^{(m)}(\varepsilon)}{C^{(m+k)}(\varepsilon)}.$$

Здесь $C^{(m)}(\varepsilon)$ — это корреляционный интеграл $C_2^{(m)}(\varepsilon)$. Зависимость $K_2^{(m)}$ от размерности вложения m можно аппроксимировать по методу наименьших квадратов следующим соотношением:

$$K_2^{(m)}(\varepsilon) = K_2(\varepsilon) + \frac{b}{m^c},$$

где b и c — некоторые положительные величины.

Итак, в случае малого фиксированного ε энтропия K_2 определяется как предел $K_2^{(m)}$ при $m \rightarrow \infty$.

7.5. Статистические свойства динамических систем

Динамическая система хаотична, если её поведение обладает некоторыми свойствами, присущими случайным процессам, которые рассматриваются в теории вероятностей. В данном разделе мы представим иерархию хаотических свойств динамических систем [143, 144]. При этом каждое последующее свойство является более сильным по сравнению с предыдущим.

I. Существование инвариантной меры [30, 31, 145, 146]. Для динамических систем с компактным фазовым пространством доказаны достаточно общие теоремы существования инвариантной меры. Так, в гамильтоновых системах это следует из теоремы Лиувилля. Для диссипативных систем инвариантная мера часто оказывается сосредоточенной на аттракторе.

Важной частью этого направления исследований является доказательство существования так называемых физически наблюдаемых мер, или SRB-мер (мер Синяя–Рюэля–Боуэна), введённых в 1970-х годах [147–150] (см. также [151]). Наличие в системе SRB-меры означает, что существует такая определённая на аттракторе инвариантная мера, относительно которой почти все траектории, сосредоточенные в окрестности аттрактора, оказываются равномерно распределёнными. Тогда

среднее по времени любой непрерывной функции будет совпадать со средним по пространству, которое и определяется инвариантной мерой. Отсюда и название — физически наблюдаемая мера.

Хорошо известно, что странные аттракторы в подавляющем большинстве случаев не описываются аналитически — их можно изучить только численно. Важность SRB-меры состоит в том, что из её существования следует, что изображения странных (хаотических) аттракторов, полученные с помощью компьютеров, соответствуют реально существующему аттрактору.

Гиперболический аттрактор имеет SRB-меру. Для неоднородных гиперболических аттракторов такие меры были также построены для семейства отображений Эно [152], уравнений Лоренца [36, 37] и других динамических систем (см. [151]).

Одно из важных следствий существования инвариантной меры в консервативных системах — это известная теорема Пуанкаре о возвращении [127], согласно которой система, за исключением множества начальных условий нулевой меры, возвращается в окрестность первоначального состояния бесконечно много раз. В своё время этот результат послужил причиной возникновения парадокса Цермело в статистической механике [153], который был выдвинут в качестве возражения против Н-теоремы Больцмана для кинетического уравнения газа [154]. Газ частиц, который можно рассматривать как компактную гамильтонову систему, должен возвращаться в область, в которой он находился в начальный момент. Например, если газ занимал только половину некоторого объёма, то спустя какое-то время все частицы вновь соберутся в той же половине. Такое событие противоречит Н-теореме Больцмана, из которой следует, что система из большого числа сталкивающихся частиц необратимо стремится к состоянию равновесия.

Разрешение этого парадокса, данное Больцманом [155], опирается на два основных момента: крайне малую вероятность возвращения и огрубление функции распределения. Для систем статистической механики время возврата чрезвычайно велико и поэтому вероятность подобного возврата составляет ничтожно малую величину. Процедура огрубления для функции распределения не предусматривает учёт таких редких событий, что делает релаксацию к равновесию необратимой.

Хотя такое объяснение представляется достаточно разумным, остаётся неясным, каким образом в исходной системе происходит огрубление, так как процесс огрубления неоднозначен, а сама система остаётся неизменной. Обсуждение данных вопросов можно найти в работах [13, 42, 156, 157].

II. Если мера уже построена, то естественно исследовать вопрос об эргодических свойствах системы по отношению к этой мере [144, 146]. Согласно эргодической теореме Биркгофа–Хинчина (см., например, [29, 127]), из существования инвариантной меры вытекает возможность усреднения по времени почти всюду, т.е. наличие временных средних.

III. Перемешивание [13, 29–31, 127, 144, 146]. Преобразование $F^t : M \rightarrow M$ называется перемешивающим, если для любых двух функций h и g справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M h(F^t x) g(x) d\mu = \int_M h(x) d\mu \int_M g(x) d\mu,$$

т.е. спустя достаточно большой промежуток времени $h(F^t x)$ и $g(x)$ будут статистически независимыми. Выражение $\int h(F^t x)g(x) d\mu$ называется временной корреляционной функцией. Существование в системе перемешивания влечёт необратимость и непредсказуемость динамики (см. [13]).

IV. К-свойство (квазирегулярное, как предложил А.Н. Колмогоров, или колмогоровское по современной терминологии) [29, 127, 135]. Если динамическая система является К-системой, то её энтропия положительна. Такое деление динамических систем на К-системы и детерминированные преобразования с нулевой энтропией формализует очень важное представление о стохастических и детерминированных системах, рассматриваемых в статистической физике (см. также раздел 9).

V. Бернуллиевость [126, 135]. Поведение динамической системы является тем случайнее, чем лучше оно представляется последовательностью независимых случайных величин. Если кодирование динамической системы в регулярный стационарный процесс (см. раздел 4.4) представляет собой такую последовательность, то динамическая система называется бернуллиевской.

VI. Выполнение условий центральной предельной теоремы [85, 144].

Пусть $f: M \rightarrow M$ — некоторое преобразование пространства M в себя. Для заданной функции g рассмотрим временные флуктуации (около среднего):

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(f^k(x)) - \bar{g},$$

где $\bar{g} = \int_M g(x) d\mu(x)$. Выполнение центральной предельной теоремы означает, что найдётся $\sigma = \sigma(g)$, при котором

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ x : \sigma \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(f^k(x)) - \bar{g} \right] < a \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du.$$

Смысл данного соотношения состоит в том, что последовательность значений $g(f^k(x))$, порождаемых динамической системой f , описывается стандартной нормальной функцией распределения, а временные флуктуации не стремятся ни к какому пределу, но имеют предельное гауссово распределение.

Это свойство присуще гиперболическим динамическим системам и рассеивающим бильярдам.

VII. Экспоненциальное убывание корреляций [145]. В приложениях важно не только установить наличие перемешивания (см. пункт III), но и оценить скорость сходимости к пределу. Если для некоторой функции g с нулевым средним, $\bar{g} = 0$, найдутся числа $C > 0, 0 < q < 1$, такие, что

$$\left| \int_M g(f^k(x))g(x) d\mu \right| \leq C(g)q^{|k|},$$

то g обладает свойством экспоненциального убывания корреляций.

8. Реконструкция динамических систем

Как уже отмечалось, несмотря на интенсивное развитие теории динамических систем и наличие достаточно

мощного теоретического аппарата, адекватное описание хаотических процессов является весьма непростой, если вообще разрешимой, проблемой. Более того, большинство сложных систем, которые рассматриваются в естественных дисциплинах, невозможно исследовать в рамках модели (1), поскольку далеко не всегда удаётся вывести какие-либо уравнения исходя из первых принципов. Поэтому изучение систем, особенно при экспериментальных исследованиях, часто реализуется посредством обработки регистрируемых сигналов, произведённых системой. Например, в аритмологии в качестве такого сигнала используется электрокардиограмма, в сейсмологии — запись колебаний земной коры, в метеорологии — данные метеонаблюдений, в финансовом анализе — курс ценных бумаг и т.п. [158–162]. Обычно такой сигнал называется наблюдаемой, а метод исследования — реконструкцией динамических систем [139, 163].

Наблюдаемая — это последовательность значений некоторой переменной (или переменных), регистрируемых непрерывно или через некоторые промежутки времени. Часто вместо термина "наблюдаемая" используется понятие "временной ряд". Ясно, что наличие только лишь временного ряда вместо полного решения уравнений сильно ограничивает наши знания об изучаемой системе. Это налагает большие ограничения на возможности метода реконструкции.

Скалярным временным рядом $\{x_i\}_{i=1}^N$ называется массив из N чисел, представляющих собой значения некоторой динамической переменной $x(t)$, измеренной с постоянным шагом τ по времени, $t_i = t_0 + (i-1)\tau$; $x_i = x(t_i), i = 1, \dots, N$.

Современное исследование временных рядов основано на идее [163] о том, что удовлетворительную геометрическую картину странного аттрактора можно получить, если вместо переменных, входящих в систему (1), использовать так называемые векторы задержки: $z_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}$. Впервые данный подход к анализу временных рядов был математически обоснован в работе Ф. Такенса [165].

8.1. Элементы теории Такенса

Пусть задана динамическая система $F^t(x)$ с фазовым пространством M . Величины, образующие временной ряд, являются значениями некоторой функции состояния $x(t)$ этой динамической системы на многообразии W^d из M : $x_i = h(x(t_i)) = h(F^{t_i}(x_0))$. Рассмотрим построение векторов задержки, если временной шаг равен τ . Очевидно, для векторов состояния $x(t_i) = x_i$ справедливы равенства: $x_{i+1} = F^\tau(x_i), x_{i+2} = F^{2\tau}(x_i), \dots, x_{i+m-1} = F^{(m-1)\tau}(x_i)$. Поэтому для компонент z -векторов задержки выполняется

$$\begin{aligned} x_i &= h(x_i) \equiv \Phi_0(x_i), \\ x_{i+1} &= h(x_{i+1}) = h(F^\tau(x_i)) \equiv \Phi_1(x_i), \\ x_{i+2} &= h(x_{i+2}) = h(F^{2\tau}(x_i)) \equiv \Phi_2(x_i), \\ &\dots, \\ x_{i+m-1} &= h(x_{i+m-1}) = h(F^{(m-1)\tau}(x_i)) \equiv \Phi_{m-1}(x_i). \end{aligned}$$

Поскольку все компоненты вектора $z_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}$ можно связать с одним и тем же состоянием динамической системы x_i , то существует векторная функция A , отображающая векторы $x_i \in W^d$ в векторы

m -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^m :

$$z_i = A(x_i), \quad x_i \in W^d, \quad z_i \in \mathbb{R}^m.$$

Приведённые рассуждения и составляют основное содержание теоремы Такенса [164], утверждающей, что при $m \geq 2d + 1$ типичным свойством отображения A является вложение W^d в \mathbb{R}^m . Другими словами, образ W^d в \mathbb{R}^m ($V^d = A(W^d)$) не имеет самопересечений. При этом функция A является дифференцируемой и имеет обратную дифференцируемую функцию A^{-1} , определённую на V^d : $W^d = A^{-1}(V^d)$. Тогда на V^d можно определить динамическую систему, так как $x_i = A^{-1}(z_i)$, а $x_{i+1} = F^\tau(x_i)$:

$$z_{i+1} = A(x_{i+1}) = A(F^\tau(A^{-1}(z_i))) \equiv \Psi(z_i), \quad z_i \in V^d,$$

где $\Psi: V^d \rightarrow V^d$. Легко видеть, что если в этом выражении оставить последнюю компоненту, то получится покомпонентный вариант записи временного ряда: $x_i = G(x_{i-1}, \dots, x_{i-m})$. Данное соотношение можно использовать для решения задачи прогнозирования, поскольку для этого требуется знать только величину m .

Таким образом, мы имеем два преобразования, Φ и Ψ :

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F^\tau(x_i) \equiv \Phi(x_i), \quad x \in W^d, \\ z_{i+1} &= \Psi(z_i), \quad z \in V^d. \end{aligned}$$

Так как $z = A(x)$, то это — различные представления одного и того же отображения. Поэтому характеристики, инвариантные относительно невырожденной замены, у обеих систем должны совпадать.

Следовательно, размерность аттрактора, энтропию динамической системы и некоторые другие инвариантные характеристики можно определить по измеряемым величинам.

В прикладном анализе временных рядов выделяются две основные задачи: задача идентификации и задача прогноза.

8.2. Задача идентификации

Задача идентификации при анализе наблюдаемых предполагает изучение вопроса о том, каковы параметры системы, породившей данный временной ряд, — корреляционная размерность, энтропия, показатели Ляпунова и др. (см. раздел 7).

Поскольку энтропия — это величина, характеризующая меру неупорядоченности системы, то она естественным образом оказывается связанной с понятием предсказуемости. При этом под предсказуемостью можно понимать: а) как с течением времени происходит потеря информации о системе вследствие возрастания первоначальной погрешности и б) как увеличивается разница между истинной и возмущённой траекториями.

Энтропия K связана с первой трактовкой — она определяет время предсказуемости поведения динамической системы:

$$T_K \sim \frac{1}{K} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

где ε — относительная погрешность данных о её состоянии. Отметим, что зависимость от ε только логарифми-

ческая. Вторая трактовка связана с понятием показателей Ляпунова. В этом случае также можно ввести горизонт прогноза:

$$T_\lambda \sim \frac{1}{\lambda_{\max}} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

где λ_{\max} — максимальный показатель Ляпунова. По порядку величины обе эти оценки совпадают. Однако на практике значение времени предсказуемости считают по упрощённым формулам: $T_K \sim K^{-1}$ и $T_\lambda \sim \lambda_{\max}^{-1}$.

8.3. Задача прогноза

По-видимому, задача прогноза — одна из старейших задач анализа временных рядов. Она возникла задолго до появления теории динамических систем и относилась к проблеме предсказания в теории случайных процессов.

Задача прогноза имеет целью по данным наблюдений предсказать будущие значения измеряемых характеристик изучаемого объекта, т.е. составить прогноз на некоторый отрезок времени. Сейчас разработано и обосновано несколько различных методов прогноза. Однако все они подразделяются на два основных типа: локальные и глобальные. Такое деление проводится по области определения параметров аппроксимирующей функции, рекуррентно устанавливающей следующее значение временного ряда по нескольким предыдущим [139].

Исторически первыми были разработаны глобальные методы, в которых на основе статистического анализа предлагалось использовать авторегрессию, скользящее среднее и др. Позднее в рамках нелинейной динамики появились новые практические методики:

- сингулярный спектральный анализ (ССА) [166, 167];
- локальная аппроксимация (ЛА) [168];
- сочетание ССА – ЛА [169].

Метод ССА имеет строгое обоснование и используется главным образом для определения основных составляющих временного ряда, а также для подавления шума [166, 170]. Существуют также основанные на этом методе оригинальные алгоритмы прогноза [167].

Локальные методы прогноза, основанные на ЛА, имеют преимущество перед остальными в задачах, связанных с прогнозированием нерегулярных рядов [171, 172]. Применение ЛА не требует априорной информации о системе, породившей временной ряд, и нет необходимости в построении специфической модели, описывающей динамику исследуемого ряда (см. [41]).

С развитием нелинейной динамики оказалось, что задача прогноза является значительно более сложной и часто не укладывается в схемы, предоставляемые теорией. В частности, длина обрабатываемого ряда должна быть достаточно большой, а шумовая составляющая — довольно малой величиной. Один из эффективных подходов, который позволяет преодолеть эти трудности и исследовать зашумлённые ряды относительно небольшой длины, основан на методе ССА – ЛА [169].

Однако эти важные темы относятся к иной проблематике — реконструкции динамических систем по временным рядам, и поэтому их описание не входит в задачу данного обзора. Основные результаты, относящиеся к затронутым в этом разделе вопросам, отражены в публикациях [41, 139, 158, 173–176] (см. также приведённые там ссылки).

9. Случайность и хаос

Статистические свойства детерминированных систем (см. раздел 7.5) отражают случайный характер их динамики. Однако для таких систем будущее состояние однозначно определяется оператором эволюции и заданными начальными условиями. Поэтому правомерным является вопрос: в каком смысле динамические системы могут обладать случайными (или статистическими) свойствами?

Иногда высказывается мнение, что хаос и случайность — это собирательные термины, обозначающие одно и то же явление непредсказуемости. Однако такой подход в принципе неверен, поскольку хаотические и случайные системы имеют глубокие различия. Теория Такенса (см. раздел 8.1) позволяет отличить динамический процесс от чисто случайного, т.е. недетерминированного. Этот аспект оказывается очень важным и для приложений, поскольку он позволяет установить приросту экспериментально полученного сигнала.

9.1. Конечномерные и бесконечномерные наблюдаемые
Последовательность измерений $\hat{x} = \{x_n\}_{n=0}^N$ называется детерминированно порождённой, если выполнены следующие условия [165, 177, 178]:

а) существуют конечномерная динамическая система f , точка y_0 и функция ϕ такие, что для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется $\phi(f^n(y_0)) = x_n$;

б) расстояние $\text{dist}(f^k x, f^k x') \leq \text{const} \exp(\lambda k) \text{dist}(x, x')$, т.е. максимальный ляпуновский показатель (см. раздел 7.1) для f является ограниченным;

в) функция ϕ липшиц-непрерывна, т.е. $|\phi(x) - \phi(x')| \leq L|x - x'|$ для некоторой величины L , называемой константой Липшица.

Введём пространство B всех наблюдаемых как множество $\hat{x} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|/2^n < \infty$. При соответствующем введении нормы пространство B будет полным нормированным линейным пространством. Зададим в B динамическую систему посредством отображения сдвига $\hat{x} \mapsto f\hat{x}$, где $f\hat{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Тогда получим универсальную динамическую систему, порождающую любую ограниченную последовательность наблюдений.

Рассмотрим предельное множество $A(\hat{x})$ и предельную ёмкость $D_0(A)$ наблюдаемой. Их нетрудно ввести, если рассмотреть произвольную последовательность \hat{x} как начальное состояние универсальной динамической системы в пространстве B . Если $D_0(A) < \infty$, то данной наблюдаемой соответствует конечномерная динамическая система. При выполнении дополнительного условия об ограниченности энтропии и максимального показателя Ляпунова рассматриваемый процесс будет детерминированно порождённым.

Таким образом, исследование наблюдаемого сигнала может дать ответ на принципиальный вопрос о конечномерности и детерминированности исследуемого процесса. Однако этим не исчерпывается значимость данного подхода.

9.2. К определению хаоса и случайности

Опираясь на понятия энтропии и размерности, хаотическую динамику можно определить иначе, чем это было сделано в разделе 2.3. Такой подход был предложен Такенсом в работе [165] (см. также [179]). В известном

смысле это определение физически лучше обосновано, поскольку оно опирается на более привычные понятия.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n \geq 0}$, которая получена в результате измерений какого-либо установившегося процесса или представляет собой значения динамической переменной системы (1), записанные в некоторые дискретные моменты времени n . Для этой последовательности может выполняться одно из трёх допустимых соотношений для энтропии: $H = 0$, $0 < H < \infty$ или $H \rightarrow \infty$.

Если система является динамической с компактным пространством состояний, то для неё значение $H \rightarrow \infty$ исключается. Это соотношение выполняется, только если система эволюционирует стохастическим (случайным) образом. Когда $0 < H < \infty$, то говорят, что система обладает хаотическим поведением. Следовательно, динамическая система хаотична, если в пространстве состояний существует некоторое подмножество Ω , такое, что любая траектория, которая начинается в Ω , имеет положительную энтропию. Наконец, при $H = 0$ в соответствующей системе наблюдается регулярная динамика.

Таким образом, данное определение хаоса отличается от других тем, что здесь дополнительно говорится о стохастической динамике. Однако при этом оно включает два общих элемента: стационарная, периодическая и квазипериодическая динамика не хаотичны; система с хаосом обладает чувствительной зависимостью от начальных условий. Это последнее утверждение вытекает из соотношения (8), которое связывает энтропию и экспоненциальную неустойчивость (см. раздел 2.3).

10. Заключение

Развитие теории динамических систем во второй половине XX в. привело к чрезвычайно важным следствиям не только в теоретической физике и математике, но и в естествознании в целом — открытию динамического хаоса и связанных с ним свойств. Оказалось, что многие нелинейные системы, несмотря на полную детерминированность, т.е. отсутствие шумов, стохастических возмущений и т.п., могут демонстрировать поведение, подобное случайным процессам. Тем самым возникающая статистика поведения систем определяется исключительно особенностями динамики. И хотя предпосылки такой идеологии наметились ещё более ста лет назад в работах А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре, основные открытия и осмысление этого явления произошли в 60–80-х годах прошлого века.

Необходимо отметить, что для изучения хаотических систем классические аналитические средства, такие, например, как ряды теории возмущений, асимптотические методы и т.п., оказались непригодными. Так, подкову Смейла, с которой в известном смысле началось современное исследование хаотических явлений, невозможно описать соотношениями в математическом стиле XIX в. Для построения и анализа таких конструкций потребовалось разработать совершенно новые методы, развитие которых и привело к важным открытиям в теории динамических систем.

Основной целью данного обзора является описание различных подходов, используемых при анализе нелинейных хаотических динамических систем. Естественно,

что целые направления остались за рамками нашего рассмотрения. В частности, мы практически не затронули такие обширные разделы, как сценарии рождения хаоса, динамика одномерных отображений, пространственно-временной хаос и турбулентность, голоморфная динамика и фрактальные множества и др. Однако некоторые из них представлены в работах, учебных пособиях и монографиях, приведённых в списке литературы.

Главные достижения теории хаотических динамических систем можно кратко резюмировать следующим образом.

Доказано, что даже очень простые системы (как, например, система Лоренца) могут проявлять случайные свойства. Это в корне поменяло представление о случайности, которая, как предполагалось, может возникать только в системах с большим числом степеней свободы.

На основе анализа бильярдных задач был достигнут значительный прогресс в понимании происхождения случайности в газе твёрдых сфер и, как следствие, в обосновании эргодической гипотезы Больцмана.

С помощью теории хаотических динамических систем удалось частично решить проблему возникновения необратимости в обратимых детерминированных уравнениях движения.

Доказано, что хаос может рождаться универсальными путями, независимо от природы системы. Это выдающееся открытие, подтверждённое также экспериментально, привело, в частности, к созданию метода ренормгруппы в теории динамических систем.

Найдено, что случайность может быть обусловлена как внутренними свойствами, так и внешними факторами. При этом, исследуя временные ряды наблюдаемых, всегда можно отличить случайное, стохастическое, поведение систем от детерминированного хаоса и тем самым установить конечномерность изучаемого процесса.

Разработанные методы анализа временных рядов позволили использовать на практике результаты теории динамических систем для расчёта таких характеристик, как энтропия, показатели Ляпунова и размерность. Это дало возможность, используя только экспериментальные данные, определять горизонт прогноза рассматриваемого процесса и в отдельных случаях предсказывать дальнейшую эволюцию системы. Данное направление приобретает всё большую популярность в таких прикладных областях, как финансовый анализ и медицина.

Наконец, нельзя не сказать и об эстетической привлекательности полученных результатов. Благодаря публикациям книг Б. Мандельброта [180], Х.-О. Пайтгена и П. Рихтера [181], компьютерные изображения фрактальных множеств, странных аттракторов и их областей притяжения открыли художественную сторону теории хаоса. Как заметил Д. Рюэль, это область исследования, в которой будут найдены новые гармонии [182].

Таким образом, мир хаоса и теории динамических систем поистине удивителен и, однажды открыв его для себя, остаёшься навсегда очарованным его красотой.

Автор признателен В.Б. Брагинскому и А.Р. Джаноеву за плодотворные дискуссии, а также рецензенту за ценные замечания, способствовавшие улучшению обзора.

Список литературы

1. Гинзбург В Л, в сб. *Физика XX века. Развитие и перспективы* (Отв. ред. Е П Велихов) (М.: Наука, 1984) с. 281
2. Smale S, in *Differential and Combinatorial Topology* (Gen. Ed. S S Cairns) (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1965) p. 63
3. Smale S *Bull. Am. Soc.* **73** 747 (1967); Смейл С *УМН* **25** 113 (1970)
4. Аносов Д В *ДАН СССР* **145** 707 (1962) [Anosov D V *Sov. Math. Dokl.* **3** 1068 (1962)]
5. Аносов Д В *ДАН СССР* **151** 1250 (1963) [Anosov D V *Sov. Math. Dokl.* **4** 1153 (1963)]
6. Аносов Д В *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны* (М.: Наука, 1967)
7. Шильников Л П *ДАН СССР* **160** 558 (1965) [Shil'nikov L P *Sov. Math. Dokl.* **6** 163 (1965)]
8. Шильников Л П *ДАН СССР* **172** 298 (1967) [Shil'nikov L P *Sov. Math. Dokl.* **8** 102 (1967)]
9. Синай Я Г *ДАН СССР* **153** 1261 (1963)
10. Синай Я Г *УМН* **25** 141 (1970) [Sinai Ya G *Russ. Math. Surv.* **25** 137 (1970)]
11. Синай Я Г, Шильников Л П (Ред. пер. с англ.) *Странные аттракторы*. Сб. статей (М.: Мир, 1981)
12. Мухин Р Р *Очерки по истории динамического хаоса (исследования в СССР в 1950–1980-е годы)* (М.: Вест-Консалтинг, 2007)
13. Лоскутов А Ю *УФН* **177** 989 (2007) [Loskutov A *Phys. Usp.* **50** 939 (2007)]
14. Ruelle D, Takens F *Commun. Math. Phys.* **20** 167 (1971)
15. Ruelle D *Lecture Notes Phys.* **12** 292 (1975)
16. Рабинович М И, Сушик М М *УФН* **160** (1) 3 (1990) [Rabinovich M I, Sushchik M M *Sov. Phys. Usp.* **33** 1 (1990)]
17. Landa P S, McClintock P V E *Phys. Rep.* **397** 1 (2004)
18. Hartman P *Ordinary Differential Equations* (New York: Wiley, 1964) [Хартман Ф *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (М.: Мир, 1970)]
19. Андронов А А, Понтрягин Л С *ДАН СССР* **14** 247 (1937) [Andronov A A, Pontryagin L S *C.R. Acad. Sci. USSR* **14** 247 (1937)]
20. Milnor J *Commun. Math. Phys.* **99** 177 (1985)
21. Афраймович В С, в кн. *Нелинейные волны. Динамика и эволюция* (Отв. ред. А В Гапонов-Грехов, М И Рабинович) (М.: Наука, 1989) с. 16
22. Guckenheimer J, Holmes P *Nonlinear Oscillations: Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer, 1997) [Гукенхеймер Дж, Холмс Ф *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (М. – Ижевск: Инст. комп. исслед., 2002)]
23. Арнольд В И и др., в сб. *Динамические системы-5* (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 5, Под ред. В И Арнольда, Р В Гамкрелидзе) (М.: ВИНТИ, 1986) с. 5 [Arnold V I et al., in *Dynamical Systems V: Bifurcation Theory and Catastrophe Theory* (Encyclopedia of Mathematical Sciences) (Berlin: Springer, 1994) p. 1]
24. Eckmann J-P *Rev. Mod. Phys.* **53** 643 (1981)
25. Devaney R L *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* 2nd ed. (New York: Addison-Wesley Publ. Co., 2003)
26. Banks J et al. *Am. Math. Mon.* **99** 332 (1992)
27. Assaf D (IV), Gadbois S *Am. Math. Mon.* **99** 865 (1992)
28. Колесов А Ю, Розов Н Х *УМН* **64** (4) 125 (2009) [Kolesov A Yu, Rozov N Kh *Russ. Math. Surv.* **64** 701 (2009)]
29. Синай Я Г *Современные проблемы эргодической теории* (М.: Физматлит, 1995)
30. Katok A B, Hasselblatt B *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в теорию динамических систем* (М.: Изд-во МЦНМО, 2005)]
31. Katok A B, Hasselblatt B *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995) [Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в современную теорию динамических систем* (М.: Факториал, 1999)]
32. Аносов Д В, Солодов В В, в сб. *Динамические системы-9* (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 66) (М.: ВИНТИ, 1991) с. 12 [Anosov D V, Solodov V V, in *Dynamical Systems IX* (Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 66) (Berlin: Springer, 1995) p. 10]
33. Kuznetsov S P *Phys. Rev. Lett.* **95** 144101 (2005)
34. Kuznetsov S P, Pikovsky A *Physica D* **232** 87 (2007)

35. Кузнецов С П *Нелинейная динамика* **5** 403 (2009)
36. Tucker W C R. *Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* **328** 1197 (1999)
37. Tucker W *Found. Comput. Math.* **2** 53 (2002)
38. Smale S *The Mathematics of Time. Essays on Dynamical Systems, Economic Processes, and Related Topics* (Berlin: Springer, 1980)
39. Smale S, in *The Chaos Avant-Garde. Memories of the Early Days of Chaos Theory* (Eds R Abraham, Y Ueda) (Singapore: World Scientific, 2000) p. 7
40. Holmes P J, Moon F C *Trans. ASME E* **50** 1021 (1983)
41. Лоскутов А Ю, Михайлов А С *Основы теории сложных систем* (М. – Ижевск: РХД, Инст. комп. исслед., 2007)
42. Заславский Г М *Гамильтонов хаос и фрактальная динамика* (М. – Ижевск: РХД, Инст. комп. исслед., 2010)
43. Алексеев В М *УМН* **24** (1) 185 (1969)
44. Алексеев В М *Лекции по небесной механике* (М. – Ижевск: РХД, 2001)
45. Levi M *Mem. AMS* **214** 1 (1981)
46. Holmes P J. *Sound Vib.* **84** 173 (1982)
47. Moon F C *Chaotic Vibrations* (New York: Wiley, 1987) [Мун Ф *Хаотические колебания* (М.: Мир, 1990)]
48. Poincaré H *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (Paris: Gauthier-Villars, 1982) [*New Methods of Celestial Mechanics* (Washington: NASA, 1960)]; Пуанкаре А *Новые методы небесной механики* (М.: Наука, 1971)]
49. Шильников Л П и др. *Методы качественной теории в нелинейной динамике* Ч. 1 (М. – Ижевск: Инст. комп. исслед., 2004), Ч. 2 (М. – Ижевск: РХД, Инст. комп. исслед., 2009)
50. Песин Я Б, в сб. *Динамические системы-2* (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 2) (М.: ВИНТИ, 1985) с. 123
51. Birkhoff G D *Collected Mathematical Papers* (New York: Am. Math. Soc., 1950)
52. Birkhoff G D *Mém. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei* **1** 85 (1935)
53. Katok A *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **51** 137 (1980)
54. Шильников Л П *Матем. сб.* **81** 92 (1970) [Shil'nikov L P *Math. USSR Sb.* **10** 91 (1970)]
55. Arnéodo A, Couillet P, Tresser C *Commun. Math. Phys.* **79** 573 (1981)
56. Arnéodo A, Couillet P, Tresser C *J. Stat. Phys.* **27** 171 (1982)
57. Гаврилов Н К, Шильников Л П *Матем. сб.* **88** 475 (1972) [Gavrilov N K, Shil'nikov L P *Math. USSR Sb.* **17** 467 (1972)]
58. Гаврилов Н К, Шильников Л П *Матем. сб.* **90** 139 (1973) [Gavrilov N K, Shil'nikov L P *Math. USSR Sb.* **19** 139 (1973)]
59. Гонченко С В, Шильников Л П (Ред.) *Гомоклинические касания. Сб. статей*. (М. – Ижевск: РХД, Инст. комп. исслед., 2007)
60. Palis J *Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math.* **14** 221 (1970)
61. Hirsch M, Pugh C *Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math.* **14** 133 (1970)
62. Nitecki Z *Differentiable Dynamics* (Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1971) [Нитецкий З *Введение в дифференциальную динамику* (М.: Мир, 1975)]
63. Newhouse S, Palis J *Astérisque* **31** 44 (1976)
64. Palis J, Takens F *Invent. Math.* **82** 397 (1985)
65. Palis J, Takens F *Ann. Math.* **125** 337 (1987)
66. Стенькин О В, Шильников Л П *Матем. сб.* **189** (4) 125 (1998) [Sten'kin O V, Shil'nikov L P *Sb. Math.* **189** 603 (1998)]
67. Newhouse S E *Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math.* **14** 191 (1970)
68. Newhouse S E *Topology* **13** 9 (1974)
69. Newhouse S E *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **50** 101 (1979)
70. Gonchenko S V, Shil'nikov L P, Turaev D V *Chaos* **6** 15 (1996)
71. Гонченко С В, Тураев Д В, Шильников Л П *Труды МИАН* **216** 76 (1997) [Gonchenko S V, Turaev D V, Shil'nikov L P *Proc. Steklov Inst. Math.* **216** 70 (1997)]
72. Гонченко С В, Стенькин С В, Шильников Л П *Нелинейная динамика* **2** 3 (2006)
73. Гонченко С В, Тураев Д В, Шильников Л П, в сб. *Динамические системы-6* (Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения, Т. 67) (М.: ВИНТИ, 1999) с. 69 [Gonchenko S V, Turaev D V, Shil'nikov L P *J. Math. Sci.* **105** (1) 1738 (2001)]
74. Gonchenko S V et al. *Nonlinearity* **10** 409 (1997)
75. Gonchenko S V, Shil'nikov L P, Turaev D V *Physica D* **62** 1 (1993)
76. Downarowicz T, Newhouse S *Invent. Math.* **160** 453 (2005)
77. Kaloshin V Yu *Commun. Math. Phys.* **211** 253 (2000)
78. Shil'nikov A L, Shil'nikov L P, Turaev D V *Int. J. Bifurcat. Chaos* **3** 1123 (1993)
79. Newhouse S, Palis J, Takens F *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.* **57** 5 (1983)
80. Афраймович В С, Шильников Л П, в сб. *Методы качественной теории дифференциальных уравнений* (Отв. ред. Е А Леонтович-Андропова) (Горький: ГГУ, 1983) с. 3
81. Овсянников И М, Шильников Л П *Матем. сб.* **130** 552 (1986) [Ovsyannikov I M, Shil'nikov L P *Math. USSR Sb.* **58** 557 (1987)]
82. Овсянников И М, Шильников Л П *Матем. сб.* **182** 1043 (1991) [Ovsyannikov I M, Shil'nikov L P *Math. USSR Sb.* **73** 415 (1992)]
83. Palis J, Takens F *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
84. Шильников Л П *Матем. сб.* **74** 378 (1967) [Shil'nikov L P *Math. USSR Sb.* **3** 353 (1967)]
85. Боуэн Р *Методы символической динамики* (М.: Мир, 1979)
86. Ruelle D *Hasard et Chaos* (Paris: O. Jacob, 1991) [*Chance and Chaos* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1991)]; Рюэль Д *Случайность и хаос* (М. – Ижевск: РХД, 2001)]
87. Плыкин Р В, Сатаев Е А, Шлячков С В, в сб. *Динамические системы-9* (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 66) (М.: ВИНТИ, 1991) с. 100
88. Гонченко С В, Тураев Д В, Шильников Л П, в сб. *Итоги науки и техники* (Сер. Современная математика и ее приложения, Т. 7) (М.: ВИНТИ, 2003) с. 92
89. Mora L, Viana M *Acta Math.* **71** 1 (1993)
90. Viana M, in *Proc. of XIth Intern. Congress of Mathematical Physics, Paris, France, July 18–23, 1994* (Ed. D Iagolnitzer) (Cambridge, MA: Intern. Press, 1995) p. 142
91. Viana M *Bull. Braz. Math. Soc.* **24** (1) 13 (1993)
92. Palis J, Viana M *Ann. Math.* **140** 207 (1994)
93. Grebogi C et al. *Physica D* **13** 261 (1984)
94. Плыкин Р В *Матем. сб.* **94** 243 (1974) [Plykin R V *Math. USSR Sb.* **23** 233 (1974)]
95. Плыкин Р В *УМН* **39** (6) 75 (1984) [Plykin R V *Russ. Math. Surv.* **39** (6) 85 (1984)]
96. Белых В Н, в сб. *Системы фазовой синхронизации* (Под ред. В В Шахгильдяна, Л Н Белостоиной) (М.: Радио и связь, 1982) с. 161
97. Бунимович Л А, в сб. *Динамические системы-2* (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 2) (М.: ВИНТИ, 1985) с. 173
98. Collet P, Levi Y *Commun. Math. Phys.* **93** 461 (1984)
99. Lozi R J. *Physique Colloq.* **39** C5-9 (1978)
100. Sataev E A *J. Math. Sci.* **95** 2564 (1999)
101. Misiurewicz M *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **357** 348 (1980)
102. Pesin Ya B *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **12** 123 (1992)
103. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** 130 (1963)
104. Hénon M *Commun. Math. Phys.* **50** 69 (1976)
105. Benedicks M, Carleson L *Ann. Math.* **133** 73 (1991)
106. Кузнецов С П, Селезнев Е П *ЖЭТФ* **129** 400 (2006) [Kuznetsov S P, Seleznev E P *JETP* **102** 355 (2006)]
107. Morales C A *Ann. Inst. Henri Poincaré* **13** 589 (1996)
108. Belykh V, Belykh I, Mosekilde E *Int. J. Bifurcat. Chaos* **15** 3567 (2005)
109. Kuznetsov S P *Chaos* **19** 013114 (2009)
110. Синай Я Г, в сб. *Нелинейные волны* (Отв. ред. А В Гапонов-Грехов) (М.: Наука, 1979) с. 192
111. Haken H A *Advanced Synergetics* (Berlin: Springer-Verlag, 1983) [Хакен Г *Синергетика* (М.: Мир, 1985)]
112. Afraimovich V S, Shilnikov L P, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (Eds G I Barenblatt, G Iooss, D D Joseph) (New York: Pitman, 1983) p. 1
113. Garrido L, Simó C *Lect. Notes Phys.* **179** 1 (1983)
114. Анищенко В С и др. *УФН* **175** 163 (2005) [Anishchenko V S et al. *Phys. Usp.* **48** 151 (2005)]
115. Афраймович В С, Быков В В, Шильников Л П *УМН* **35** (4) 164 (1980)
116. Быков В В, в сб. *Методы качественной теории дифференциальных уравнений* (Отв. ред. Е А Леонтович-Андропова) (Горький: ГГУ, 1980) с. 44
117. Арнольд В И *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (М.: Наука, 1978) [Arnold V I *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Springer-Verlag, 1983)]
118. Markus L, Meyer K R *Mem. Am. Math. Soc.* **144** 1 (1974)
119. Perry A D, Wiggins S *Physica D* **71** 102 (1994)
120. Zaslavsky G M *Phys. Rep.* **371** 461 (2002)
121. Bunimovich L A *Nonlinearity* **21** (2) T13 (2008)

122. Chirikov B V, Shepelyansky D L *Physica D* **13** 395 (1984)
123. Bunimovich L A *Chaos* **11** 802 (2001)
124. Altmann E G, Motter A E, Kantz H *Chaos* **15** 033105 (2005)
125. Marchal C *The Three-Body Problem* (Amsterdam: Elsevier, 1990) [Маршал К *Задача трех тел* (М.: Ижевск: РХД, 2004)]
126. Bunimovich L A *Commun. Math. Phys.* **65** 295 (1979)
127. Корнфельд И П, Синай Я Г, Фомин С В *Эргодическая теория* (М.: Наука, 1980) [Cornfeld I P, Fomin S V, Sinai Ya G *Ergodic Theory* (New York: Springer-Verlag, 1982)]
128. Eckmann J-P, Ruelle D *Rev. Mod. Phys.* **57** 617 (1985)
129. *Lyapunov Exponents. Proc of a Workshop, Bremen, Germany, November 12–15, 1984* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1186, Eds L Arnold, V Wihstutz) (Berlin: Springer-Verlag, 1986)
130. Оселедец В И *Труды Моск. матем. об-ва* **19** 179 (1968) [Oseledets V I *Trans. Mosc. Math. Soc.* **19** 197 (1968)]
131. Миллионщиков В М *Матем. сб.* **78** (2) 179 (1969) [Millionshchikov V M *Math. USSR Sb.* **7** 171 (1969)]
132. Песин Я Б *УМН* **32** (4) 55 (1977) [Pesin Ya B *Russ. Math. Surv.* **32** (4) 55 (1977)]
133. Kaplan J L, Yorke J A *Lect. Notes Math.* **730** 228 (1979)
134. Paladin G, Vulpiani A *Phys. Rep.* **156** 147 (1987)
135. Martin N F G, England J W *Mathematical Theory of Entropy* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984) [Маргин Н, Инглленд Дж *Математическая теория энтропии* (М.: Мир, 1988)]
136. Ornstein D S *Ergodic Theory, Randomness, and Dynamical Systems* (New Haven: Yale Univ. Press, 1974) [Орнштейн Д *Эргодическая теория, случайность и динамические системы* (М.: Мир, 1978)]
137. Billingsley P *Ergodic Theory and Information* (New York: Wiley, 1965) [Биллингсли П *Эргодическая теория и информация* (М.: Мир, 1969)]
138. Hentschel H G E, Procaccia I *Physica D* **8** 435 (1983)
139. Малинецкий Г Г, Потапов А Б *Современные проблемы нелинейной динамики* (М.: УРСС, 2000)
140. Лоскутов А Ю, Козлов А А, Хаханов Ю М *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **17** (4) 98 (2009)
141. Grassberger P, Procaccia I *Physica D* **9** 189 (1983)
142. Grassberger P, Procaccia I *Phys. Rev. A* **28** 2591 (1983)
143. Синай Я Г, в сб. *Динамические системы-2* (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2) (М.: ВИНТИ, 1985) с. 115
144. Синай Я Г *Введение в эргодическую теорию* (М.: ФАЗИС, 1996)
145. Синай Я Г *УМН* **46** (3) 147 (1991) [Sinai Ya G *Russ. Math. Surv.* **46** (3) 177 (1991)]
146. Halmos P R *Lectures on Ergodic Theory* (Tokyo: Math. Soc. of Japan, 1956) [Халмош П Р *Лекции по эргодической теории* (Ижевск: РХД, 1999)]
147. Синай Я Г *УМН* **27** (4) 21 (1972) [Sinai Ya G *Russ. Math. Surv.* **27** (4) 21 (1972)]
148. Bowen R, Ruelle D *Invent. Math.* **29** 181 (1975)
149. Ruelle D *Am. J. Math.* **98** 619 (1976)
150. Bowen R *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470) (Berlin: Springer, 1975)
151. Young L-S *J. Stat. Phys.* **108** 733 (2002)
152. Benedicks M, Young L-S *Invent. Math.* **112** 541 (1993)
153. Zermelo E *Ann. Phys.* **293** 485 (1896)
154. Больцман Л *Избранные труды* (М.: Наука, 1984)
155. Boltzmann L *Wiedemann Ann.* **60** 392 (1896)
156. Крылов Н С *Работы по обоснованию статистической физики* (М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950) [Krylov N S *Works on the Foundations of Statistical Physics* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1979)]
157. Пустыльников Л Д *УМН* **50** (1) 143 (1995) [Pustyl'nikov L D *Russ. Math. Surv.* **50** (1) 145 (1995)]
158. Безручко Б П, Смирнов Д А *Математическое моделирование и хаотические временные ряды* (Саратов: Колледж, 2005)
159. Loskutov A, Mironyuk O *Int. J. Bifurcat. Chaos* **17** 3709 (2007)
160. Ардашев А В, Лоскутов А Ю *Практические аспекты современных методов анализа variability сердечного ритма* (М.: Медпрактика, 2010)
161. Лоскутов А, Котляров О *Валютный спекулянт* (11) 8 (2008)
162. Локутов А Ю *Экономика и мат. методы* **46** 58 (2010)
163. Gouesbet G, Meunier-Guttin-Cluzel S, Ménard O (Eds) *Chaos and Its Reconstruction* (New York: Nova Sci. Publ., 2003)
164. Packard N H et al. *Phys. Rev. Lett.* **45** 712 (1980)
165. Takens F *Lect. Notes Math.* **898** 336 (1981)
166. Vautard R, Yiou P, Ghil M *Physica D* **58** 95 (1992)
167. Данилов Д Л, Жиглявский А А (Ред.) *Главные компоненты временных рядов: метод "Гусеница"*. Сб. статей (СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 1997)
168. Farmer J D, Sidorowich J J *Phys. Rev. Lett.* **59** 845 (1987)
169. Истомин И А, Котляров О Л, Лоскутов А Ю *ТМФ* **142** 148 (2005) [Istomin I A, Kotlyarov O L, Loskutov A Yu *Theor. Math. Phys.* **142** 128 (2005)]
170. Лоскутов А Ю и др. *Письма в Астрон. журн.* **27** 867 (2001) [Loskutov A Yu et al. *Astron. Lett.* **27** 745 (2001)]
171. Farmer J D, Sidorowich J J, in *Evolution, Learning, and Cognition* (Ed. Y C Lee) (Singapore: World Scientific, 1988) p. 277
172. Лоскутов А Ю и др. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон.* **6** 3 (2002)
173. Abarbanel H D I et al. *Rev. Mod. Phys.* **65** 1331 (1993)
174. Franses P H *Time Series Models for Business and Economic Forecasting* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998)
175. Ghil M et al. *Rev. Geophys.* **40** (1) 1003 (2002)
176. Shumway R H, Stoffer D S *Time Series Analysis and its Applications* (Berlin: Springer, 2000)
177. Афраймович В С, Рейман А М, в кн. *Нелинейные волны. Динамика и эволюция* (Отв. ред. А В Гапонов-Грегов, М И Рабинович) (М.: Наука, 1989) с. 238
178. Takens F, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (Eds G I Barenblatt, G Iooss, D D Joseph) (New York: Pitman, 1983) p. 314
179. Broer H W et al. *Structures in Dynamics: Finite Dimensional Deterministic Studies* (Amsterdam: North-Holland, 1991) [Брур Х В и др. *Структуры в динамике. Конечномерные детерминированные системы* (М.–Ижевск: РХД, Инст. комп. исслед., 2003) с. 119]
180. Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (New York: W.H. Freeman, 1983) [Мандельброт Б *Фрактальная геометрия природы* (М.: Ин-т комп. исслед., 2002)]
181. Peitgen H-O, Richter P H *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems* (Berlin: Springer-Verlag, 1986) [Пайтген Х-О, Рихтер П Х *Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем* (М.: Мир, 1993)]
182. Ruelle D *Math. Intell.* **2** 126 (1980)

Fascination of chaos

A. Loskutov

Physics Faculty, Lomonosov Moscow State University,
Vorob'evy gory, 119992 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-495) 939-51 56. Fax (7-495) 939-29 88. E-mail: Loskutov@chaos.phys.msu.ru

This review introduces most of the concepts used in the study of chaotic phenomena in nonlinear systems and has as its objective to summarize the current understanding of results from the theory of chaotic dynamical systems and to describe the original ideas underlying the study of deterministic chaos. The presentation relies on informal analysis, with abstract mathematical ideas visualized geometrically or by examples from physics. Hyperbolic dynamics, homoclinic trajectories, homoclinic tangencies, wild hyperbolic sets and different types of attractors which appear in dynamical systems are considered. The key aspects of ergodic theory are discussed, and the basic statistical properties of chaotic dynamical systems are described. The fundamental difference between stochastic dynamics and deterministic chaos is explained. The review concludes by the investigation of the possibility to study complex systems on the basis of the analysis of registered signals, i.e. the generated time series.

PACS numbers: **02.50. -r, 05.45. -a, 47.52. +j**
Bibliography — 182 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180** (12) 1305–1329 (2010)

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201012c.1305
Received 17 May 2010, revised 5 August 2010
Physics – Uspekhi **53** (12) (2010)