

Памяти Виталия Лазаревича Гинзбурга

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ**Гравитационное излучение систем и роль их силового поля**

А.И. Никишов, В.И. Ритус

Рассматривается гравитационное излучение (ГИ) компактных релятивистских систем с известным тензором энергии-импульса (ТЭИ) и ГИ двух масс, движущихся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра инерции. Спектр ГИ заряда, совершающего круговое движение в постоянном магнитном поле, в поле кулоновского центра, в поле магнитного момента или в их совместном поле, в ультрарелятивистском пределе отличается от спектра его электромагнитного излучения (ЭМИ) коэффициентом $4\pi G m^2 \Gamma^2 / e^2$, где Γ порядка лоренц-фактора заряда, не зависит от частоты излучения, но зависит от направления волнового вектора и поведения поля вне орбиты. Для плосковолнового внешнего поля пропорциональность спектров гравитационного и электромагнитного излучений является строгой для любой скорости заряда. Приведены качественные оценки Γ для ультрарелятивистского движения заряда в произвольном поле, показывающие, что Γ^2 порядка отношения вкладов в ГИ нелокального и локального источников. Локализация внешних сил около орбиты нарушает пропорциональность спектров и ослабляет ГИ примерно в квадрат лоренц-фактора. Приведён спектр ГИ вращающейся релятивистской струны с массами на концах и показано, что вклады масс и струны одного порядка. В нерелятивистском пределе гармоники спектров ГИ всех рассмотренных вращающихся систем обладают универсальным поведением. Развивается траекторный метод вычисления спектра ГИ, согласно которому пространственные и, следовательно, поляризационные компоненты сохраняющегося ТЭИ в длинноволновом приближении находятся по временной компоненте ТЭИ входящих в систему масс. Этим методом найден спектр ГИ двух масс, движущихся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра инерции, и релятивистские поправки к нему.

PACS numbers: 04.20.-q, 04.30.-w, 41.60.-m

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201011b.1135

Содержание

1. Введение (1135).
2. Гравитационное излучение простых электромагнитных систем (1139).
 - 2.1. Сохранение тензора энергии-импульса и спектр гравитационного излучения тела, движущегося по кольцеобразному жёлобу.
 - 2.2. Гравитационное излучение заряда, движущегося по окружности в постоянном однородном магнитном поле.
 - 2.3. Гравитационное излучение заряда, движущегося в поле плоской электромагнитной волны.
 - 2.4. Гравитационное излучение заряда, вращающегося в поле кулоновского центра.
 - 2.5. О сохранении тензора энергии-импульса.
3. Гравитационное излучение систем с более сложным силовым полем (1145).
 - 3.1. Гравитационное излучение заряда, обращающегося в поле магнитного момента.
 - 3.2. Гравитационное излучение заряда, обращающегося в поле центра с зарядом и магнитным моментом.
 - 3.3. Гравитационное излучение релятивистской струны с массами на концах.
 - 3.4. Гравитационное излучение струны с ненагруженными концами.
 - 3.5. Поляризационные амплитуды в β^2 -приближении.
4. Гравитационное излучение масс, движущихся по эллиптическим орбитам (1151).
 - 4.1. Движение по кеплеровским орбитам.
 - 4.2. Траекторный метод вычисления амплитуд гравитационного излучения.
 - 4.3. Спектр и угловое распределение излучения.
 - 4.4. Асимметрия углового распределения в случае $m_1 \neq m_2$, $e \neq 0$.
 - 4.5. Спектр как функция полярного угла, интегральный спектр.
 - 4.6. Уточнение траекторного метода.
 - 4.7. Пример учёта энергии силового поля.
5. Гравитационное излучение заряда при пролётах через кулоновское поле и поле магнитного момента (1159).
 - 5.1. Пролёт заряда через кулоновское поле.
 - 5.2. Пролёт заряда через поле магнитного момента.
6. Обсуждение (1162).
7. Приложение. Коэффициенты Фурье $F_A(n, e)$, $f_{ij}(n, e)$ (1164).

Список литературы (1165).

А.И. Никишов, В.И. Ритус. Физический институт

им. П.Н. Лебедева РАН,

Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация

Тел. (499) 132-65-23, (499) 132-64-26. Факс (499) 135-85-33

E-mail: nikishov@lpi.ru, ritus@lpi.ru

Статья поступила 21 сентября 2010 г.

1. Введение

Источником гравитационного излучения (ГИ) в общей теории относительности является сохраняющийся полный тензор энергии-импульса (ТЭИ) системы. В то же время ТЭИ гравитационного поля не является однозначно определённой величиной [1, 2]. Это — одна из

причин, почему проблема излучения гравитационных волн в общем случае оказывается сложной и далёкой от окончательного решения, несмотря на значительные усилия [1].

В этих условиях детальное изучение ГИ (в общем случае — гравитационного поля) простой электродинамической системы — заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, представляет значительный интерес. Во-первых, у такого ГИ имеются некоторые общие черты с ГИ тела, движущегося в гравитационном поле. Во-вторых, при громадных энергиях частиц в планируемых ускорителях открывается возможность лабораторной проверки ультрарелятивистских эффектов общей теории относительности [3–5]. Представляет интерес также вопрос о том, какая информация о динамических свойствах системы передаётся ее ГИ, в частности, в какой мере она превосходит информацию, передаваемую электромагнитным излучением (ЭМИ) системы и при каких условиях ГИ наследует известные закономерности ЭМИ.

Как известно из электродинамики [6, 7], спектр классического ЭМИ заряда полностью определяется фурье-компонентами сохраняющейся плотности тока $j_z(q)$:

$$d\mathcal{E}_q = |j_z(q)|^2 \frac{d^3 q}{16\pi^3}, \quad j_z(q) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \dot{x}_z(\tau) \exp[-iqx(\tau)], \quad (1.1)$$

т.е. его траекторией $x_z(\tau)$, и не зависит от природы сил, двигающих заряд по этой траектории.

С другой стороны, спектр классического ГИ тела с массой m , движущегося по траектории $x_z(\tau)$, определяется фурье-компонентами сохраняющейся ТЭИ $T_{z\beta}(q)$ всей системы [7, 8]:

$$d\mathcal{E}_q = 8\pi G \left[T_{z\beta}(q) T^{z\beta*}(q) - \frac{1}{2} |T_z^\alpha(q)|^2 \right] \frac{d^3 q}{16\pi^3}. \quad (1.2)$$

Поскольку $T_{z\beta}(q)$ есть сумма ТЭИ рассматриваемого тела

$$t_{z\beta}(q) = m \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \dot{x}_z(\tau) \dot{x}_\beta(\tau) \exp[-iqx(\tau)] \quad (1.3)$$

и ТЭИ силового поля, движущего тело по заданной траектории, то спектр ГИ существенно зависит от природы этого силового поля. Исключением является случай нерелятивистского движения тела (или тел), образующего вместе с полем сил замкнутую систему. Тогда независимо от природы сил, действующих на тело, ГИ становится квадрупольным и описывается хорошо известными формулами [6]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_q}{dt} &= \frac{G}{4\pi} \left[\frac{1}{4} (\ddot{D}_{ij} n_i n_j)^2 + \frac{1}{2} \ddot{D}_{ij}^2 - \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ik} n_j n_k \right] d\Omega, \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \frac{G}{5} \ddot{D}_{ij}^2, \quad D_{ij} = \int t_{00}(\mathbf{x}, q^0) \left(x_i x_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{ij} \right) d^3 x, \end{aligned} \quad (1.4)$$

содержащими квадрупольный момент D_{ij} распределения движущейся массы; $\mathbf{n} = \mathbf{q}/q^0$. В общем же релятивистском случае по спектру ГИ можно судить о динамических свойствах его источника и это обстоятельство представляет значительный интерес.

В разделе 2 мы рассмотрим ГИ тела с массой m и зарядом e , движущегося под действием электромагнитных сил: в однородном магнитном поле, в кулоновском поле тяжёлого центра, в плосковолновом поле круговой или линейной поляризаций [9]. Хотя в каждом из этих случаев спектр ГИ обладает своей спецификой, в ультрарелятивистском пределе он совпадает со спектром $|j_z(q)|^2$ ЭМИ с точностью до замены квадрата заряда e^2 величиной $4\pi Gm^2 \Gamma^2$, где Γ пропорционально эффективному лоренц-фактору движущегося тела и существенно зависит от характера внешнего поля. В этом пределе волновой вектор излучения \mathbf{q} прижат к плоскости движения тела, составляя с ней малый угол $\alpha \lesssim \gamma^{-1} \ll 1$, а частота излучения в γ^3 раз превышает частоту ω основной гармоники, $q^0 \equiv |\mathbf{q}| \sim \gamma^3 \omega$. Таким образом, при $\gamma \gg 1$ в эффективном диапазоне частот и углов излучения имеет место соотношение

$$8\pi G \left[T_{\mu\nu}(q) T^{\mu\nu*}(q) - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu(q)|^2 \right] \approx \frac{4\pi Gm^2 \Gamma^2}{e^2} |j_\mu(q)|^2. \quad (1.5)$$

Поскольку в системе покоя ультрарелятивистски движущегося тела любое внешнее электромагнитное поле выглядит как плосковолновое, можно ожидать, что соотношение (1.5) будет не приближённым, а точным для спектра ГИ тела m , e , движущегося в плосковолновом электромагнитном поле. Действительно, как будет показано в разделе 2.3, для спектра ГИ при таком движении имеет место строгое соотношение

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q) T^{\mu\nu*}(q) - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu(q)|^2 &= \frac{m^2 \Gamma^2}{2e^2} |j_\mu(q)|^2, \\ \Gamma &= \frac{m_* q_\perp}{mq_-} = \gamma_* \cot \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где m_* — эффективная масса заряда, равная его средней кинетической энергии в системе координат, где он в среднем покоится, q_3 , \mathbf{q}_\perp — параллельная и перпендикулярная составляющие волнового вектора излучения \mathbf{q} по отношению к импульсу волны \mathbf{k} , $q_- = q^0 - q_3$, θ — угол между векторами \mathbf{q} и \mathbf{k} . Эффективные лоренц-фактор γ_* и скорость v_* определены соотношением $m_* = m\gamma_* = m(1 - v_*^2)^{-1/2}$.

Величина Γ при ультрарелятивистском движении в циркулярно поляризованной волне для указанных выше высоких частот ГИ стремится к лоренц-фактору γ , так как из-за ортогональности плоскости движения вектору \mathbf{k} угол θ отличается от $\pi/2$ не более чем на γ^{-1} , а эффективная масса совпадает с постоянной кинетической энергией тела в рассматриваемой системе.

При ультрарелятивистском движении в линейно поляризованной волне величина Γ по-прежнему даётся формулой (1.6), ультрарелятивизм лишь ограничивает снизу диапазон эффективных углов θ : $2 \arccot \sqrt{2} \leq \theta \leq \pi$. Сохранение зависимости Γ от угла θ в ультрарелятивистском случае связано с тем, что при движении заряда по траектории в форме восьмёрки, лежащей в плоскости, проходящей через вектор \mathbf{k} , угол между его скоростью \mathbf{v} и вектором \mathbf{k} четыре раза пробегает все значения между $\theta_0 = \arctan(2\sqrt{2}/v_*)$ и π (см. [6]). В ультрарелятивистском пределе этот диапазон углов расширяется ($\theta_0 \rightarrow 2 \arccot \sqrt{2}$ при $v_* \rightarrow 1$) и ограничивает эффективный угол излучения θ , так как излучение становится прижатым к направлению скорости.

Следует подчеркнуть, что величина $\Gamma(\theta)$ не совпадает с лоренц-фактором тела в точке, где его скорость \mathbf{v} образует угол θ с вектором \mathbf{k} . Это связано с тем, что в отличие от ЭМИ, которое в ультрарелятивистском пределе испускается вдоль вектора скорости заряда и формируется на участке траектории в γ раз меньшем локального радиуса кривизны, ГИ, хотя и испускается ультрарелятивистски движущимся заряженным телом вдоль вектора скорости, формируется в области порядка среднего радиуса кривизны траектории.

Сохранение протяжённой области формирования ГИ даже при ультрарелятивистском движении тела связано с тем, что наряду с испусканием ГИ локальным источником — ТЭИ тела $t_{\mu\nu}$ происходит испускание ГИ протяжённым источником — ТЭИ $\theta_{\mu\nu}$ внешнего и собственного электромагнитного полей. Последний механизм состоит в испускании локальным источником — током j_μ — виртуального фотона, который благодаря гравитационному взаимодействию с квантами внешнего электромагнитного поля образует реальный гравитон. В ультрарелятивистском пределе частота виртуального фотона в γ^3 раз превосходит частоту ω основной гармоники (определенную радиусом r кривизны траектории, $\omega \sim c/r$), а его "масса" порядка $\gamma^{3/2}\omega$, т.е. мала по сравнению с его частотой. Поэтому такой фотон испускается почти как реальный в направлении вектора скорости заряда и формируется на малом ($\sim c/\gamma\omega$) участке траектории заряда, но его гравитационное взаимодействие с квантами внешнего поля происходит на длине порядка длины волны последнего ($\sim c/\omega$). Ясно, что энергия и импульс гравитона по существу совпадают с энергией и импульсом виртуального фотона, но на вероятность появления гравитона оказывается состояние внешнего поля на длине формирования гравитона. Расширение области формирования ГИ от значений $\sim c/\omega\gamma$ до значений $\sim c/\omega$ приводит к отличию Γ от лоренц-фактора γ в момент испускания фотона и к его зависимости от структуры внешнего электромагнитного поля. Следует также подчеркнуть, что оба упомянутых выше механизма ГИ когерентны. При движении заряда в плоскостном поле их интерференция приводит к погашению ГИ под углом $\theta = \pi$, хотя ЭМИ под этим углом не запрещено.

С другой стороны, при $\theta \rightarrow 0$ $\Gamma(\theta)$ расходится, как θ^{-1} , и приводит к логарифмической особенности $d\theta/d\theta$ в спектре ГИ, так как плотность тока в точке $\theta = 0$ конечна и отлична от нуля. Возникновение этой особенности связано с тем, что при $\theta \rightarrow 0$ основную роль в испускании гравитонов играет второй, нелокальный механизм. Его амплитуда есть сумма двух амплитуд, пропорциональных функциям распространения $(q \pm k)^{-2}$ виртуальных фотонов, содержащихся в источнике гравитонов — ТЭИ поля этих фотонов и плоской электромагнитной волны. При $\theta \rightarrow 0$ пропагаторы фотонов обращаются в бесконечность, как $(q \pm k)^{-2} = \mp(2\omega q^0)^{-1}(1 - \cos\theta)^{-1} \approx \mp 1/\omega q^0\theta^2$, а оставшийся сомножитель поперечных компонент ТЭИ обращается в нуль, как θ (электромагнитное поле фотонов и поле плоской электромагнитной волны, распространяющиеся в одном направлении, снова являются плоской электромагнитной волной, которая, как известно, не может быть источником гравитонов, так как не имеет поперечных составляющих ТЭИ [6]). В результате амплитуда, а следовательно, и Γ при $\theta \rightarrow 0$ расходятся, как θ^{-1} .

Поскольку плотность тока в точке $\theta = 0$ отлична от нуля лишь для основной гармоники $q^0 = \omega$, то особенность спектра ГИ в этой точке может быть связана с аномально малой массой ($\sim \omega\theta$) виртуальных фотонов и, стало быть, с очень большой ($\sim 1/\omega\theta$) областью формирования ГИ, испущенного под столь малыми углами.

Подобное усиление нелокального механизма имеется и в процессе ГИ заряда, движущегося в постоянном однородном магнитном поле (раздел 3), если однородность поля соблюдается на протяжении l , заметно превышающем длину волны излучения λ , т.е. при $l \gg \lambda$. В этом случае внешнее поле характеризуется волновым вектором k_z , у которого $|\mathbf{k}| \sim l^{-1}$ и $k^0 = 0$, так что испущенные током j_μ виртуальные фотоны имеют очень малую массу, $|(q \pm k)^2| \sim q^0 l^{-1}$. Если считать $l = \infty$, то $T_{\mu\nu}(q)$ будет иметь полюс в точке $q^2 = 0$. Тогда спектр ГИ представится разложением по степеням q^2/ω^2 (ω — частота обращения по круговой орбите):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q)T^{\mu\nu*}(q) - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu(q)|^2 &= \\ = \left(\frac{\omega^2}{q^2}\right)^2 a_{-2} + \frac{\omega^2}{q^2} a_{-1} + a_0 + \dots, \end{aligned} \quad (1.7)$$

причём главный член будет пропорционален спектру ЭМИ,

$$a_{-2} = \frac{2m^2\gamma^2 q_\perp^2}{e^2\omega^2} |j_\mu(q)|^2. \quad (1.8)$$

Коэффициент пропорциональности фактически совпадает с соответствующим коэффициентом в (1.6) для циркулярно поляризованной волны. Действительно, последний получается из (1.7), (1.8) заменой $q \rightarrow q \pm k$, где k_z — волновой вектор волны с компонентами $k_3 = k^0 = \omega$, $k_1 = k_2 = 0$:

$$\frac{2m^2\gamma^2\omega^2 q_\perp^2}{e^2 q^4} \rightarrow \frac{m^2\gamma^2 q_\perp^2}{2e^2 q^2}. \quad (1.9)$$

Если считать $l \gg \lambda$, но конечным, то в формуле (1.7) появится зависимость от характера спадания магнитного поля на расстояниях $\sim l$. Например, при гауссовом спадании поля в плоскости движения $H(x) = H_0 \exp(-x_\perp^2/l^2)$ в первом члене (1.7) следует заменить q^{-4} на $\pi l^2/16q_\perp^2$, так как в этом случае поле характеризуется волновым вектором $k_{1,2} \sim l^{-1}$, $k_3 = k^0 = 0$. Второй член в этом случае исчезает.

Формулы (1.6), (1.7) и (1.8) наглядно демонстрируют различие спектров ГИ для различных электромагнитных силовых полей, двигающихся массивный заряд по одной и той же орбите. Итак, в формировании ГИ массивного заряда, движущегося во внешнем электромагнитном поле, существенную роль играет нелокальный механизм с участием виртуальных фотонов, который в ряде случаев (движение в плоскостном поле, в постоянном однородном магнитном поле, ультрарелятивистское движение) приводит к пропорциональности спектра ГИ спектру ЭМИ с коэффициентом пропорциональности, несущим информацию о нелокальном механизме в виде внешнего поля.

Такая связь спектра ГИ со спектром ЭМИ исчезает, если заменить внешнее электромагнитное поле локальным полем сил. Мы покажем это на примере ГИ тела, упруго сталкивающегося с очень массивными, но

малыми шарами, равномерно расставленными вдоль окружности, так что в пределе очень большого числа шаров результирующее движение тела будет равномерным движением по окружности (или движением по кольцеобразному жёлобу).

В электродинамике благодаря сохранению плотности тока её инвариантный квадрат, определяющий спектр ЭМИ, может быть выражен через поперечные компоненты тока в системе координат с осью 3 вдоль волнового вектора \mathbf{q} , $q^0 = |\mathbf{q}|$:

$$|j_z(q)|^2 = |j'_1(q')|^2 + |j'_2(q')|^2. \quad (1.10)$$

Аналогично, благодаря сохранению ТЭИ инвариант (1.2), определяющий спектр ГИ, можно выразить через поперечные компоненты ТЭИ в системе координат с осью 3 вдоль \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} T_{z\beta}(q)T^{z\beta*}(q) - \frac{1}{2}|T_z(q)|^2 = \\ = \frac{1}{2}|T'_{11}(q') - T'_{22}(q')|^2 + 2|T'_{12}(q')|^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Использование поперечных (поляризационных) компонент ТЭИ существенно облегчает описание ГИ системы и, в частности, оценку вкладов полевой и материальной составляющих ТЭИ. Так, из выражения (3.5) для ТЭИ поля и формулы (3.4) (см. раздел 3.1) следует, что по порядку величины пространственные компоненты ТЭИ поля

$$\theta_{ik}(q) \sim Flj, \quad (1.12)$$

где $j = j(q - k_{\text{ef}})$, F — напряжённость внешнего поля в области формирования радиационного фотона. Длина l определяется значением пропагатора фотона:

$$[(q - k)^2 - i\varepsilon]_{\text{ef}}^{-1} \sim \frac{1}{|\mathbf{q}||\mathbf{k}|_{\text{ef}}} \sim \frac{l}{|\mathbf{q}|}, \quad (1.13)$$

т.е. представляет собой длину пути фотона в поле до его превращения в гравитон. Если при $\gamma \gg 1$ соотношение (1.5) обязано вкладу ТЭИ поля, то для относительной амплитуды конверсии (как мы будем называть Γ) получаем оценку

$$\Gamma \sim \frac{eFl}{mc^2}. \quad (1.14)$$

Рассмотрим траектории с углом поворота порядка или больше 1 (в том числе финитные траектории), для которых радиус кривизны, определяемый законом движения $eF \sim mv^2\gamma/r$, не превышает размеров поля. Если поле заметно изменяется на расстояниях, много больших r , то $l \gg r$ и фактор $\Gamma \sim \gamma l/r \gg \gamma$. Подобная ситуация имеет место для ГИ заряда, движущегося по окружности в постоянном однородном магнитном поле, простирающемся далеко за пределы орбиты (см. раздел 2.2). Для поля, заметно меняющегося на расстояниях порядка радиуса орбиты (движение по окружности в кулоновском поле; см. раздел 2.4, либо движение в поле магнитного момента или в совместном поле кулоновского центра и магнитного момента, см. разделы 3.1, 3.2), получаем, очевидно, $\Gamma \sim \gamma \gg 1$. Наконец, для поля, простирающегося вдоль траектории на расстояние $l_{\parallel} \gtrsim r$, но имеющего малые поперечные размеры $l_{\perp} \ll r$, как в современных циклических ускорителях, получим $\Gamma \sim \gamma l/r \ll \gamma$, где $l \sim (l_{\perp}r)^{1/2} \ll r$; по этому поводу см. ниже замечание в

разделе 3.2 и формулу (3.31). В связи с этим мы не можем согласиться с авторами работы [4], что интенсивность ГИ в существующих и планируемых ускорителях может быть оценена по формуле для интенсивности ЭМИ с заменой квадрата заряда $e^2/4\pi$ на $Gm^2\gamma^2$: следует учсть ещё малый множитель l_{\perp}/r .

Рассмотрим теперь траектории с малым углом поворота $\Delta\phi \lesssim 1$, т.е. инфинитные траектории в поле малой протяжённости по сравнению с радиусом кривизны. Тогда, используя закон движения $eF \sim mv\gamma\Delta\phi/\Delta t$ и $l \sim v\Delta t$, получаем согласно (1.14) $\Gamma \sim \gamma\Delta\phi \lesssim \gamma$. Эта оценка верна при $\gamma^{-1} \lesssim \Delta\phi \lesssim 1$. При $\Delta\phi \lesssim \gamma^{-1}$ нужно учсть следующее обстоятельство. Формула (1.5) связывает ГИ с ЭМИ, определяемым поперечными к \mathbf{q} компонентами тока при $q^2 = 0$. Однако в (1.12) дают вклад и компоненты тока вне массовой поверхности, не связанные с ускорением частицы. Они в $1/\Delta\phi$ раз больше компонент, связанных с ускорением, и имеют поперечные к \mathbf{q} компоненты $\sim 1/\gamma\Delta\phi$ от поперечных компонент, определяющих ЭМИ. Следовательно, при $\Delta\phi \ll \gamma^{-1} \ll 1$ в указанной выше оценке появляется дополнительный фактор $1/\gamma\Delta\phi$. Таким образом, при $\Delta\phi \lesssim 1$

$$\Gamma \sim \gamma\Delta\phi \left(1 + \frac{1}{\gamma\Delta\phi} \right) = 1 + \gamma\Delta\phi. \quad (1.15)$$

В разделе 3 мы рассматриваем спектр ГИ заряда, движущегося по окружности в экваториальной плоскости поля магнитного момента, и показываем, что в ультрарелятивистском пределе он совпадает со спектром ГИ заряда, движущегося по окружности в кулоновском поле, если заменить параметр eM/r взаимодействия заряда с полем на $-ee'$. Более того, спектр ГИ заряда, ультрарелятивистски движущегося по окружности в совместном кулоновском поле и поле магнитного момента, описывается той же формулой с величиной в левой части неравенства (3.29) в качестве параметра взаимодействия. Таким образом, во всех случаях спектр ГИ характеризуется амплитудой конверсии $\Gamma = \gamma$ [11].

Для выяснения зависимости ГИ от пространственного распределения ТЭИ поля рассмотрен спектр ГИ релятивистской струны с точечными массами на концах и показано, что в ультрарелятивистском пределе вклады струны и масс одного порядка, несмотря на то, что энергия струны по порядку величины в γ раз больше энергии масс.

Показано, что спектр ГИ замкнутой системы, которая состоит из точечной массы, движущейся по окружности в поле центра, в нерелятивистском приближении, когда длина волны ГИ много больше размеров системы, имеет универсальный характер: ведущий член каждой гармоники ГИ не зависит от природы поля центра, и для всех гармоник с $n \geq 2$ вклад ТЭИ поля в $n - 1$ раз меньше вклада ТЭИ массы [11].

В разделе 4 излагается траекторный метод вычисления релятивистских поправок к ГИ слаборелятивистской системы. Метод основан на дифференциальном уравнении, связывающем пространственные компоненты сохраняющейся ТЭИ с его временной компонентой. Для таких систем пространственные компоненты ТЭИ малы по сравнению с временнóй. Поэтому дифференциальное уравнение позволяет находить их по временнóй компоненте материального ТЭИ для заданной траектории с последующим уточнением путём включения релятивистских поправок и учёта временнóй компоненты ТЭИ поля.

Этим методом найдены релятивистские поправки ко всем гармоникам ГИ двух масс, движущихся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра инерции.

Наконец, в разделе 5 рассмотрены спектры ГИ ультрарелятивистского заряда при пролётах через кулоновское поле и через поле магнитного момента в его экваториальной плоскости. При этом угол отклонения χ считается малым: $\chi \lesssim \gamma^{-1} \ll 1$. Показано, что, несмотря на некоторое различие траекторий в области формирования ГИ, спектры совпадают в эффективной области волновых векторов и характеризуются амплитудой конверсии, зависящей от направления волнового вектора и угла отклонения траектории.

Требование ультрарелятивизма можно ослабить до релятивизма и получить более общее выражение для квадрата электромагнитного тока, который, однако, не выделяется в этом случае из спектра ГИ, но может служить для его оценки по порядку величины.

Обозначения. Греческие индексы $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$ принимают значения 1, 2, 3, 0, латинские индексы i, j, k, l, \dots принимают значения 1, 2, 3. Используется метрика $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$, хевисайдовы единицы для заряда и электромагнитного поля, скорость света $c = 1$, кроме мест, где необходимо подчеркнуть релятивизм, и раздела 4.

2. Гравитационное излучение простых электромагнитных систем

2.1. Сохранение тензора энергии-импульса и спектр гравитационного излучения тела, движущегося по кольцеобразному жёлобу

Рассмотрим жёлоб как систему очень массивных, малых шаров с массами M , много большими массы m упругого сталкивающегося с ними тела, и тензорами энергии-импульса вида (1.3), где $m \rightarrow M$. Нетрудно убедиться, что пространственные компоненты этих тензоров по порядку величины в $M/m\gamma$ раз меньше соответствующих компонент ТЭИ движущегося тела и поэтому в пределе $(M/m\gamma) \rightarrow \infty$ ими можно пренебречь и использовать в качестве пространственных компонент ТЭИ всей системы пространственные компоненты тензора (1.3), т.е. $T_{ij}(q) = t_{ij}(q)$. Остальные четыре компоненты тензора $T_{\mu\nu}$ можно найти из четырёх законов сохранения:

$$q^\mu T_{\mu\nu}(q) = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, 0. \quad (2.1)$$

Тогда

$$T_{0j}(q) = -\frac{q^i}{q^0} t_{ij}(q), \quad T_{00}(q) = \frac{q^i q^j}{q^{02}} t_{ij}(q). \quad (2.2)$$

Для равномерного движения со скоростью $v = \omega r$ по окружности радиуса r в плоскости 1, 2 отличны от нуля следующие пространственные компоненты:

$$\begin{aligned} t_{11,22}(q) &= \frac{mv^2\gamma}{2} \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \left[J_n \pm \frac{1}{2} J_{n+2} \exp(-i2\varphi) \pm \frac{1}{2} J_{n-2} \exp(i2\varphi) \right] \exp(-in\varphi), \\ t_{12}(q) &= \frac{mv^2\gamma}{4i} \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times [J_{n-2} \exp(i2\varphi) - J_{n+2} \exp(-i2\varphi)] \exp(-in\varphi), \end{aligned} \quad (2.3)$$

2*

где $J_n = J_n(z)$ — функции Бесселя, $z = q_\perp r = |n|v \sin \theta$, θ, φ — полярный и азимутальный углы вектора \mathbf{q} , сумма берётся по целым $n \geq 0$. Отсюда из формулы (2.2) получаем для спектра ГИ выражение

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q) T^{\mu\nu*}(q) - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu(q)|^2 &= \\ = t \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \frac{m^2 v^4 \gamma^2}{4} &\left[J_{n+2}^2 + J_{n-2}^2 - \right. \\ - \sin^2 \theta (J_{n+2}^2 + J_{n-2}^2 + J_n J_{n+2} + J_n J_{n-2}) + \\ \left. + \frac{1}{2} \sin^4 \theta \left(J_n + \frac{1}{2} J_{n+2} + \frac{1}{2} J_{n-2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Оно существенно отличается от спектра ЭМИ заряда, движущегося по окружности:

$$|j_\mu(q)|^2 = t \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) e^2 [\cot^2 \theta J_n^2 + v^2 J_n'^2]. \quad (2.5)$$

Отличие сохраняется и в ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$, где эффективны $z \approx n \sim \gamma^3$, $\alpha \equiv (\theta - \pi/2) \sim \gamma^{-1}$, и квадратные скобки выражений (2.4), (2.5) принимают вид

$$\begin{aligned} [\dots]_{\text{ГИ}} &\approx 8 \left[\left(\alpha^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \right)^2 J_n^2 + \alpha^2 J_n'^2 \right], \\ [\dots]_{\text{ЭМИ}} &\approx \alpha^2 J_n^2 + J_n'^2, \end{aligned}$$

а вместо J_n и J_n' следует использовать их асимптотические представления через функцию Эйри $\Phi(y)$:

$$\begin{aligned} J_n(z) &\approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n} \right)^{1/3} \Phi(y), \quad J_n'(z) \approx -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n} \right)^{2/3} \Phi'(y), \\ y &= \left(\frac{n}{2} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Легко видеть, что соотношение (1.5) не выполняется, а если его рассматривать как оценку по порядку величины, то следует считать $\Gamma \sim 1$, а не $\Gamma \sim \gamma$, как это было бы для системы с нелокальным ТЭИ.

В нерелятивистском пределе в сумме (2.4) остаются только квадрупольные члены $n = \pm 2$. Согласно формуле (1.2) член $n = 2$ приводит к интенсивности ГИ

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Gm^2 v^4 \omega^2}{8\pi} \int d\Omega (1 + 6\cos^2 \theta + \cos^4 \theta) = \frac{8}{5} Gm^2 v^4 \omega^2, \quad (2.7)$$

составляющей $1/4$ интенсивности ГИ того же тела, вращающегося по орбите в поле сил с протяжённым ТЭИ (см. [6], § 110).

Это означает, что для нерелятивистской системы, в которой силовое поле обладает протяжённым ТЭИ, вклады локального и нелокального каналов в амплитуду ГИ совпадают, так что полная амплитуда вдвое больше амплитуды локального канала, а соответствующие интенсивности различаются в 4 раза. В разделе 2.4 мы продемонстрируем это непосредственным вычислением на примере ГИ заряда, удерживаемого на круговой орбите кулоновским центром.

В отличие от (1.6) дифференциальное распределение (2.4) (и (2.7)) не обращается в нуль при $\theta = \pi$.

Уместно, используя формулы (2.2), записать сохраняющийся ТЭИ $T^{\alpha\beta}$ в координатном представлении

в виде суммы $T^{z\beta}(x) = t^{z\beta}(x) + \tau^{z\beta}(x)$ ТЭИ точечной массы

$$t^{z\beta}(x) = m \int d\tau \dot{x}^z(\tau) \dot{x}^\beta(\tau) \delta(x - x(\tau)) \quad (2.8)$$

и полученного с его помощью тензора $\tau^{z\beta}(x)$ с нулевыми пространственными и ненулевыми смешанными и временной компонентами:

$$\begin{aligned} \tau^{ij}(x) &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \tau^{0\beta}(x) &= -\frac{1}{2} m \int d\tau \ddot{x}^\beta(\tau) \operatorname{sgn}(x^0 - x^0(\tau)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) + \\ &+ \delta_0^\beta \frac{1}{2} m \int d\tau |x^0 - x^0(\tau)| \ddot{x}^i(\tau) \partial_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)), \quad (2.9) \\ \beta &= 1, 2, 3, 0. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в отличие от (2.8) тензор $\tau^{z\beta}(x)$ содержит лишь пространственную δ -функцию под интегралом и не содержит временной.

Тензор $\tau^{z\beta}(x)$ отличен от нуля только в точках $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ траектории массы, где она обладает ускорением $\ddot{\mathbf{x}}(\tau) \neq 0$. В этом смысле тензор $\tau^{z\beta}$ локален. Но его значения в этих точках зависят от времени x^0 . Однако дивергенция этого тензора

$$\frac{\partial}{\partial x^z} \tau^{z\beta}(x) = -m \int d\tau \ddot{x}^\beta(\tau) \delta(x - x(\tau)) \quad (2.10)$$

полностью локальна. Она равна по величине, но противоположна по знаку, плотности силы, ускоряющей массу, т.е. дивергенции тензора $t^{z\beta}(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x^z} t^{z\beta}(x) = m \int d\tau \ddot{x}^\beta(\tau) \delta(x - x(\tau)). \quad (2.11)$$

Эти две дивергенции компенсируют друг друга, демонстрируя сохранение тензора $T^{z\beta}(x)$, но уже в координатном представлении.

Тензор $\tau^{z\beta}$ можно было бы наполнить физическим содержанием и назвать ТЭИ жёлоба, если бы силу (2.11), действующую на массу m со стороны жёлоба, можно было бы связать, например, с упругими свойствами жёлоба и изменением его энергии в некотором эффективном объёме вблизи соприкосновения с массой. Изменение энергии в объёме, движущемся по жёлобу вместе с массой, и стало бы дополнительным протяжённым источником ГИ.

В этом обзоре значительное внимание будет уделено полю сил, удерживающих массу на орбите, и соответствующему ТЭИ.

2.2. Гравитационное излучение заряда,

движущегося по окружности

в постоянном однородном магнитном поле

Источником ГИ заряда, движущегося в электромагнитном поле, является сохраняющийся тензор $T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu}$, состоящий из ТЭИ $t_{\mu\nu}$ точечного заряда (1.3) и ТЭИ $\theta_{\mu\nu}$ внешнего ($\varphi_{z\beta}$) и собственного ($f_{z\beta}$) электромагнитных полей [6, 8]:

$$\theta_{\mu\nu} = -F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{z\beta} F^{z\beta}, \quad (2.12)$$

$$F_{z\beta} = \varphi_{z\beta} + f_{z\beta}.$$

Квадратичные по $f_{z\beta}$ члены тензора $\theta_{\mu\nu}$ можно опустить, так как мы не учитываем действия собственного поля заряда на него самого. На квантовом уровне это соответствует пренебрежению радиационными поправками. В этом приближении тензор $T_{\mu\nu}$ строго сохраняется, а в выражении для силы Лоренца фигурирует только внешнее по отношению к заряду поле $\varphi_{z\beta}$, а не $\varphi_{z\beta} + f_{z\beta}$.

Для рассмотренных ниже внешних полей квадратичные по $\varphi_{z\beta}$ члены $\theta_{\mu\nu}$ не являются источником ГИ и их также можно опустить. Таким образом, для фурьеобраза $\theta_{\mu\nu}(q)$ мы будем использовать выражение

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}(q) &= -\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\varphi_{\mu z}(k) f^z_\nu(q-k) + \varphi_{vz}(k) f^z_\mu(q-k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varphi_{z\beta}(k) f^{z\beta}(q-k) \right], \quad (2.13) \end{aligned}$$

где согласно уравнениям Максвелла собственное поле можно выразить через плотность тока:

$$f_{z\beta}(q) = \frac{i}{q^2} [q_z j_\beta(q) - q_\beta j_z(q)]. \quad (2.14)$$

Для постоянного однородного магнитного поля \mathbf{H} , направленного вдоль оси 3, отличны от нуля лишь компоненты

$$\varphi_{12}(k) = -\varphi_{21}(k) = H(2\pi)^4 \delta(k). \quad (2.15)$$

Для заряда, движущегося в таком поле по круговой траектории

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= r \sin \Omega \tau, & x_2(\tau) &= r \cos \Omega \tau, \\ x_3 &= 0, & x^0(\tau) &= \gamma \tau, \end{aligned} \quad (2.16)$$

с собственной частотой $\Omega = \omega \gamma$, фиксированной полем ($\Omega = eH/m$), пространственные компоненты тензора $t_{\mu\nu}$ были приведены в (2.3). Отличные от нуля пространственные компоненты тензора $\theta_{\mu\nu}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \theta_{11}(q) &= \theta_{22}(q) = -\theta_{33}(q) = \frac{iH}{q^2} [q_1 j_2(q) - q_2 j_1(q)], \\ \theta_{13}(q) &= \frac{iH}{q^2} q_3 j_2(q), \quad \theta_{23}(q) = -\frac{iH}{q^2} q_3 j_1(q), \end{aligned} \quad (2.17)$$

через пространственные компоненты плотности тока, равные

$$j_1(q) \pm i j_2(q) = ev \sum_n 2\pi \delta(q^0 - n\omega) J_{n\mp 1}(z) \exp[-i(n \mp 1)\phi]. \quad (2.18)$$

Оставшиеся смешанные и временные компоненты тензоров $t_{\mu\nu}$ и $\theta_{\mu\nu}$ можно определить по тем же формулам (1.3) и (2.13)–(2.15); с другой стороны, можно восстановить соответствующие компоненты сохраняющегося тензора $T_{\mu\nu}$ через его пространственные компоненты по формулам (2.2). Оба пути приводят к одному и тому же результату (1.7) для спектра ГИ.

Обращение пропагатора фотона в бесконечность означает, что процесс является каскадным: сначала ток испускает реальный фотон, который затем при движении в постоянном поле превращается в гравитон [12–14].

Интересно, что при этом постоянное поле передает гравитону нулевой 4-импульс.

Поскольку реальное магнитное поле рано или поздно перестаёт быть однородным, можно представить себе, что его источники не дают вклада в рассматриваемые фурье-компоненты ТЭИ. Если такое магнитное поле спадает на расстояниях $\sim l \gg \lambda = 2\pi\omega^{-1}$, например, как $H(x) = H \exp(-x_\perp^2/l^2)$ или как $H(x) = H \exp(-|x_3|/l)$, то в формулах (2.17) для θ_{ik} множитель $1/q^2$ заменится на $i\sqrt{\pi}/4q_\perp$ или на $i\tilde{l}/2|q_3|$, что приведёт к соответствующей замене и в выражении (1.7) для спектра.

2.3. Гравитационное излучение заряда, движущегося в поле плоской электромагнитной волны
ГИ заряда в плосковолновом внешнем поле обязано тем же источникам $t_{\mu\nu}$ и $\theta_{\mu\nu}$, причём вклад последнего осуществляется через виртуальный фотон собственного поля заряда, чтобы гравитон был реальным.

Рассмотрим сначала ГИ заряда в поле циркулярно поляризованной волны

$$\begin{aligned}\varphi_{z\beta}(x) &= -\varphi_{z\beta}^{(1)} \sin(kx) + \varphi_{z\beta}^{(2)} \cos(kx), \\ \varphi_{z\beta}^{(i)} &= k_z a_\beta^i - k_\beta a_z^i, \quad a_z^i a^{jz} = a^2 \delta_{ij}, \quad k_z a^{iz} = k^2 = 0.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Выберем систему координат, где заряд в среднем покойится, а волна распространяется вдоль оси 3 с волновым вектором $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k^0 = \omega$ и амплитудами потенциала $a_z^i = a\delta_z^i$. Тогда траекторией заряда будет окружность в плоскости $x_3 = \text{const}$, вдоль которой он движется со скоростью $v = \xi$, $\xi = ea/m_*$, $m_* = (m^2 + e^2 a^2)^{1/2}$ и фазой, как в (2.16), если выбрать $x_3 = \pi/\omega$ вместо $x_3 = 0$. Поэтому компоненты $t_{\mu\nu}$ те же, что и в (2.3), но с фазовым множителем $p \equiv \exp(-iq_3\pi/\omega)$. Добавим к ним ещё смешанные и временную компоненты

$$\begin{aligned}t_1^0 \pm it_2^0 &= mv\gamma \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) J_{n\mp1} \exp[-i(n\mp1)\varphi], \\ t_{00} &= mr \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) J_n \exp(-in\varphi),\end{aligned}\quad (2.20)$$

которые нужно снабдить тем же множителем p .

Так как фурье-компоненты поля сводятся к двум δ -функциям:

$$\begin{aligned}\varphi_{z\beta}(q) &= (2\pi)^4 \frac{i}{2} [\Phi_{z\beta} \delta(q - k) - \Phi_{z\beta}^* \delta(q + k)], \\ \Phi_{z\beta} &= \varphi_{z\beta}^{(1)} - i\varphi_{z\beta}^{(2)},\end{aligned}\quad (2.21)$$

то тензор $\theta_{\mu\nu}(q)$ легко находится через компоненты тока $j_z(q \mp k)$, которые отличаются от компонент тока для движения (2.16) множителем $\exp[-i(q_3 \mp \omega)\pi/\omega] = -p$. Опуская общий для тензоров $t_{\mu\nu}$ и $\theta_{\mu\nu}$ фазовый множитель p , получим

$$\begin{aligned}\theta_{11} = -\theta_{22} &= \frac{mv^2}{4} \gamma \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{q_\perp}{vq_-} J_{n-1} - J_{n-2} \right) \exp[-i(n-2)\varphi] + \right. \\ &\left. + \left(\frac{q_\perp}{vq_-} J_{n+1} - J_{n+2} \right) \exp[-i(n+2)\varphi] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{12} &= \frac{mv^2\gamma}{4i} \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{q_\perp}{vq_-} J_{n-1} - J_{n-2} \right) \exp[-i(n-2)\varphi] - \right. \\ &- \left. \left(\frac{q_\perp}{vq_-} J_{n+1} - J_{n+2} \right) \exp[-i(n+2)\varphi] \right\}, \\ \theta_{13} &= \theta_1^0 = \frac{mv^2\gamma}{8} \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \left[2 \frac{q_3 - \omega}{vq_-} J_{n-1} - \frac{q_\perp}{q_-} (J_{n-2} - J_n) \right] \exp[-i(n-1)\varphi] + \\ &+ \left[2 \frac{q_3 + \omega}{vq_-} J_{n+1} - \frac{q_\perp}{q_-} (J_{n+2} - J_n) \right] \exp[-i(n+1)\varphi], \\ \theta_{23} &= \theta_2^0 = \theta_{00} = \frac{mv^2\gamma}{8i} \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \left[2 \frac{q_3 - \omega}{vq_-} J_{n-1} - \frac{q_\perp}{q_-} (J_{n-2} - J_n) \right] \exp[-i(n-1)\varphi] - \\ &- \left[2 \frac{q_3 + \omega}{vq_-} J_{n+1} - \frac{q_\perp}{q_-} (J_{n+2} - J_n) \right] \exp[-i(n+1)\varphi], \\ \theta_{33} &= \theta_3^0 = \theta_{00} = \frac{mv^2\gamma}{2} \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \frac{q^0 + q_3 - q^0 v^{-2}}{q_-} J_n \exp(-in\varphi).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Здесь $q_- = q^0 - q_3$; бесселевы функции зависят от $z = q_\perp r$.

Вычисляя с помощью формул (2.3), (2.19), (2.22) спектр ГИ, получаем

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} T^{\mu\nu*} - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu|^2 &= \\ = t \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \frac{m^2 \gamma^2 q_\perp^2}{2q_-^2} &\left[\frac{q_3^2}{q_\perp^2} J_n^2 + v^2 J_n'^2 \right].\end{aligned}\quad (2.23)$$

Сравнение со спектром (2.5) ЭМИ заряда, двигающегося по окружности, показывает, что спектры ГИ и ЭМИ связаны простым соотношением (1.6) с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от частоты излучения q^0 или номера гармоники (см. также [10]).

Перейдём теперь к ГИ заряда в поле линейно поляризованной волны

$$\begin{aligned}\varphi_{z\beta}(x) &= -\Phi_{z\beta} \sin(kx), \quad \Phi_{z\beta} = k_z a_\beta - k_\beta a_z, \\ k^2 &= ak = 0.\end{aligned}\quad (2.24)$$

В системе координат, где заряд в среднем покойится, а волновой вектор направлен по третьей оси, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k^0 = \omega$, траектория заряда имеет вид восьмёрки, лежащей в плоскости волнового вектора \mathbf{k} и амплитуды электрического поля $\mathbf{E} = \omega\mathbf{a}$. Она описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x_1(\tau) &= -\frac{\xi}{\omega} \sin \Omega_* \tau, \quad x_2(\tau) = 0, \\ x_3(\tau) &= \frac{\xi^2}{8\omega} \sin 2\Omega_* \tau, \quad x^0(\tau) = \gamma_* \tau + \frac{\xi^2}{8\omega} \sin 2\Omega_* \tau,\end{aligned}\quad (2.25)$$

где

$$\Omega_* = \omega\gamma_*, \quad \gamma_* = \frac{m_*}{m}, \quad \xi = \frac{ea}{m_*};$$

$m_* = (m^2 + (1/2)e^2 a^2)^{1/2}$ — эффективная масса заряда, равная его средней кинетической энергии в рассматриваемой системе.

Тогда отличные от нуля компоненты ТЭИ заряда равны

$$\begin{aligned} t_{11}(q) &= m_* \xi^2 \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) A_2(s\alpha\beta), \\ t_{13}(q) &= -\frac{m_* \xi^3}{4} \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) (2A_3 - A_1), \\ t_{33}(q) &= \frac{m_* \xi^4}{16} \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) (4A_4 - 4A_2 + A_0), \\ t_1^0(q) &= -m_* \xi \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right) A_1 + \frac{\xi^2}{2} A_3 \right], \\ t_3^0(q) &= \frac{m_* \xi^2}{4} \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) \times \\ &\quad \times \left[\xi^2 A_4 + (2 - \xi^2) A_2 - \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right) A_0 \right], \\ t_{00}(q) &= m_* \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) \times \\ &\quad \times \left[\frac{\xi^4}{4} A_4 + \xi^2 \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right) A_2 + \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right)^2 A_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь $A_n(s\alpha\beta)$ — функции, введённые в [15]:

$$A_n(s\alpha\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cos^n \varphi \exp [i(\alpha \sin \varphi - \beta \sin 2\varphi - s\varphi)], \quad (2.27)$$

с аргументами $\alpha = -\xi q_1/\omega$, $\beta = \xi^2 q_-/8\omega$.

Поскольку фурье-компоненты поля теперь равны

$$\varphi_{\alpha\beta}(q) = (2\pi)^4 \frac{i}{2} \Phi_{\alpha\beta} [\delta(q - k) - \delta(q + k)], \quad (2.28)$$

то согласно формулам (2.13), (2.14) для ТЭИ поля получаем

$$\begin{aligned} \theta_{11}(q) &= -\theta_{22}(q) = \frac{a}{4} \left[j_1 + j_1 - \frac{q_1}{q_-} (j_- + j_+) \right], \\ \theta_{12}(q) &= -\frac{aq_2}{4q_-} (j_- + j_+), \\ \theta_{13}(q) &= \theta_1^0(q) = \frac{a}{4q_-} [(q^0 - k^0) j_3 - (q_3 - k_3) j^0 + \\ &\quad + (q^0 + k^0) j_3 - (q_3 + k_3) j^0], \\ \theta_{23}(q) &= \theta_2^0(q) = -\frac{aq_2}{4q_-} (j_1 + j_1), \\ \theta_{33}(q) &= \theta_3^0(q) = \theta_{00}(q) = \frac{a}{4q_-} [q_1 (j^0 + j_3 + j^0 + j_3) - \\ &\quad - (q^0 - k^0 + q_3 - k_3) j_1 - (q^0 + k^0 + q_3 + k_3) j_1]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь j_α — фурье-компоненты плотности тока; однокомпоненты, написанные в скобках первыми, зависят от $q - k$, а написанные вторыми — от $q + k$. Выражения для этих компонент отличаются от $j_\alpha(q)$

заменой функций $A_n(s)$ функциями $A_n(s \mp 1)$:

$$\begin{aligned} j_1(q \mp k) &= -e\xi \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) A_1(s \mp 1, \alpha\beta), \\ j_3(q \mp k) &= \frac{e\xi^2}{4} \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) \times \\ &\quad \times [2A_2(s \mp 1, \alpha\beta) - A_0(s \mp 1, \alpha\beta)], \\ j^0(q \mp k) &= e \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) \times \\ &\quad \times \left[\left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right) A_0(s \mp 1, \alpha\beta) + \frac{\xi^2}{2} A_2(s \mp 1, \alpha\beta) \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Образуя теперь сохраняющийся ТЭИ $T_{\mu\nu}(q)$, находим для спектра ГИ выражение

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q) T^{\mu\nu*}(q) - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu(q)|^2 &= \\ = t \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) \frac{m^2 q_1^2}{2q_-^2} [-A_0^2 + x^2 (A_1^2 - A_0 A_2)], \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $x = ea/m$, $A_n \equiv A_n(s\alpha\beta)$. При выводе были использованы некоторые соотношения для функций A_n , а именно $(s - 2\beta)A_0 - \alpha A_1 + 4\beta A_2 = 0$,

$$A_n(s - 1) - A_n(s + 1) = \frac{2}{n + 1} [4\beta A_{n+3}(s) - \alpha A_{n+2}(s) + (s - 2\beta) A_{n+1}(s)], \quad (2.33)$$

$$A_n(s - 1) + A_n(s + 1) = 2A_{n+1}(s). \quad (2.34)$$

Спектр (2.31) связан со спектром ЭМИ заряда в линейно поляризованной волне

$$|j_\mu(q)|^2 = t \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) \frac{e^2}{\gamma_*^2} [-A_0^2 + x^2 (A_1^2 - A_0 A_2)] \quad (2.35)$$

соотношением (1.6).

Таким образом, спектры ГИ и ЭМИ заряда в поле плоской волны различаются лишь не зависящим от частоты излучения коэффициентом

$$\frac{4\pi Gm^2}{e^2} \gamma_*^2 \cot^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.36)$$

(здесь учтён множитель $8\pi G$, опущенный в (2.23) и (2.31), см. (1.2)). Хотя мы уже обсуждали его во введении, заметим, что соотношение (1.6) возникает из-за совместного действия локального и нелокального механизмов ГИ. В результате окончательный ответ зависит от $j_\alpha(q)$, в то время как $\theta_{\mu\nu}(q)$ зависит от $j_\alpha(q \pm k)$. В ультрапрелиativистском пределе нелокальный механизм становится преобладающим. Поясним это на формуле (2.31). Если в левой части вместо $T_{\mu\nu}$ взять только полевой источник $\theta_{\mu\nu}$, то для него получим ($\theta_\mu^\mu = 0$)

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}(q) \theta^{\mu\nu*}(q) &= t \sum_s 2\pi \delta(q^0 - s\omega) \times \\ &\quad \times m^2 \left[-\frac{x^2}{2 + x^2} A_0 A_2 + \frac{q_1^2}{2q_-^2} x^2 (A_1^2 - A_0 A_2) \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

т.е. выражения (2.31) и (2.37) существенно различаются первыми членами. Но в ультрапрелиativистском случае, когда $x \gg 1$, основной вклад в интеграл (2.27) для A_n даёт

перевальная точка $\varphi = \psi$, где

$$\cos \psi \Big|_{x \gg 1} \approx -\frac{q_1}{\sqrt{2} q_-}$$

(см. [15]). Поскольку азимутальный угол прижат к значению 0 или π , то $q_1 \approx \pm q_\perp$. Поэтому $A_2 \approx \cos^2 \psi A_0 \approx \approx (q_\perp^2/2q_-^2)A_0$ и формула (2.37) переходит в (2.31), где, разумеется, для функций A_0^2 и $A_1^2 - A_0 A_2$ нужно использовать их асимптотические выражения (см. [15, 16]).

Заметим, что формулы (2.23) и (2.31) допускают переход к пределу бесконечно тяжёлой массы заряда и описывают в этом случае угловое распределение ГИ, образующегося при падении плоской электромагнитной волны на неподвижный кулоновский центр:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} T^{\mu\nu*} - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu|^2 \Big|_{m \rightarrow \infty} &= \\ &= t \sum_{n=\pm 1} 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \frac{e^2 a^2}{8} \cot^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{1 + \cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \right. \\ &\quad \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

(здесь верхняя строчка относится к циркулярной поляризации, нижняя — к линейной). Этот результат соглашается с [17].

2.4. Гравитационное излучение заряда, вращающегося в поле кулоновского центра

Рассмотрим движение заряда e по окружности (2.16) в кулоновском поле притяжения неподвижного заряда e' . Это поле в отличие от магнитного и плосковолнового обладает непрерывным спектром волновых векторов

$$\varphi_{\alpha\beta}(k) = -i \frac{e'}{k^2} (k_\alpha \delta_\beta^0 - k_\beta \delta_\alpha^0) 2\pi\delta(k^0). \quad (2.39)$$

Используя в интеграле (2.13) для пропагаторов k^{-2} и $(q-k)^{-2}$ причинные собственно-временные представления, можно выполнить гауссово интегрирование по \mathbf{k} и интегрирование по одному из собственных времён. Тогда тензор $\theta_{\mu\nu}$ представится интегралом по безразмерной переменной u (отношению одного из собственных времён к их сумме):

$$\theta_{\mu\nu}(q) = -\frac{iee'}{8\pi|\mathbf{q}|} \int_0^1 du \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(i\tau) a_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

$$f = -q_\alpha x^\alpha(\tau) + u(\mathbf{q}\mathbf{x}(\tau) + |\mathbf{q}|r).$$

Для компонент $a_{\mu\nu}$ получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \left[(1-u)(\mathbf{q}^2 \delta_{ij} - 2q_i q_j) + \right. \\ &\quad + (1-2u) \frac{|\mathbf{q}|}{r} (\delta_{ij} \mathbf{q}\mathbf{x} - q_i x_j - q_j x_i) + \\ &\quad + u \frac{\mathbf{q}^2}{r^2} (2x_i x_j - \delta_{ij} r^2) + i \frac{2|\mathbf{q}|}{r^3} x_i x_j \left. \right] \dot{x}^0 + \\ &\quad + q^0 \left[q_i \dot{x}_j + q_j \dot{x}_i - \delta_{ij} \mathbf{q}\dot{\mathbf{x}} + \frac{|\mathbf{q}|}{r} (x_i \dot{x}_j + x_j \dot{x}_i) \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} a_i^0 &= \left[(1-2u) \left(\mathbf{q}^2 + \frac{|\mathbf{q}|}{r} \mathbf{q}\mathbf{x} \right) + i \frac{|\mathbf{q}|}{r} \right] \dot{x}_i + \\ &\quad + u \frac{|\mathbf{q}|}{r} \mathbf{q}\dot{\mathbf{x}} x_i - (1-u) \mathbf{q}\dot{\mathbf{x}} q_i, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$a_{00} = \left[(1-2u) \left(\mathbf{q}^2 + \frac{|\mathbf{q}|}{r} \mathbf{q}\mathbf{x} \right) + 2i \frac{|\mathbf{q}|}{r} \right] \dot{x}^0 - q^0 \mathbf{q}\dot{\mathbf{x}}. \quad (2.43)$$

Заметим, что в силу бесследовости ТЭИ электромагнитного поля $a_{ii} = a_{00}$. Движение по окружности описывается координатами (2.16).

Таким образом, $a_{\mu\nu}$ являются полиномами не старше 2-го порядка по координатам $x_{1,2}(\tau)$ с коэффициентами, квадратичными по компонентам q_α и линейно зависящими от u и скоростей $\dot{x}_{1,2}(\tau)$, $\dot{x}^0(\tau)$, τ — собственное время заряда e . Зависимость от скоростей $\dot{x}_{1,2}$, \dot{x}^0 появилась в результате использования формулы (2.14) для собственного поля и выражения (1.1) для тока. Интеграл по τ в (2.40) можно представить в виде ряда по бесселевым функциям с аргументом $z_1 = (1-u)z$, $z = q_\perp r$. Произведение зарядов исключается законом движения $tuv\omega = -ee'/4\pi r^2$.

Помимо ТЭИ $\theta_{\mu\nu}(q)$ внешнего и собственного полей, сохраняющийся ТЭИ всей системы содержит ТЭИ $t_{\mu\nu}(q)$ заряда e (см. (2.3), (2.20)), а также ТЭИ $\tau_{\mu\nu}(q)$ кулоновского центра с нулевыми пространственными и ненулевыми смешанными и временнóй компонентами гармоник $n = \pm 1$:

$$\begin{aligned} \tau_1^0(q) \pm i\tau_2^0(q) &= -mv\gamma(1-v^2 - iv) \exp(iv) 2\pi\delta(q^0 \mp \omega), \\ \tau_{00}(q) &= -\frac{mv\gamma q_\perp}{2\omega} (1-v^2 - iv) \exp(iv) \times \\ &\quad \times [\exp(-i\varphi) 2\pi\delta(q^0 - \omega) - \exp(i\varphi) 2\pi\delta(q^0 + \omega)]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Дивергенция этого тензора $iq_x \tau^{x\beta}(q)$ совпадает с плотностью силы, действующей на неподвижный заряд e' со стороны обращающегося вокруг него заряда e . Её нетривиальные компоненты таковы

$$\begin{aligned} f^1(q) \pm i f^2(q) &= \pm imv\gamma\omega(1-v^2 - iv) \exp(iv) 2\pi\delta(q^0 \mp \omega), \\ f^0(q) &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

В то же время дивергенция $iq^x \tau_x^\beta(q)$ ТЭИ $t_{x\beta}(q)$ движущегося по окружности заряда e совпадает с плотностью силы $g^\beta(q)$, действующей на этот заряд. Её нетривиальные компоненты таковы

$$\begin{aligned} g^1(q) \pm ig^2(q) &= \mp imv\gamma\omega \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\quad \times J_{n\mp 1}(z) \exp[-i(n\mp 1)\varphi], \\ g^0(q) &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Напомним, что $z = q_\perp r = |n|v \sin \theta$, θ , φ — полярный и азимутальный углы вектора \mathbf{q} .

Мы отложим обсуждение связи сил $f^\beta(q)$, $g^\beta(q)$ с дивергенцией $iq^x \theta_x^\beta(q)$ ТЭИ кулоновского и собственного полей до следующего раздела.

В отличие от предыдущих разделов, где спектр ГИ рассчитывался по инвариантному произведению компонент ТЭИ (см. (1.2)), здесь мы найдём его как сумму квадратов двух независимых поляризационных амплитуд, обозначаемых $T_+(q)$ и $T_\times(q)$. Действительно, если записать инвариантное выражение для спектра в системе координат, где волновой вектор \mathbf{q} направлен вдоль 3-й оси, пометив тензорные компоненты в этой системе штрихом и используя закон сохранения $q^x T_{x\beta}(q) = q'^x T'_{x\beta}(q') = 0$ и равенство $q^2 = q'^2 = 0$, то получим

$$\begin{aligned} T_{x\beta}(q) T^{x\beta*}(q) - \frac{1}{2} |T_x^x(q)|^2 &= \\ &= \frac{1}{2} |T'_{11}(q') - T'_{22}(q')|^2 + 2 |T'_{12}(q')|^2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Выражения

$$T_+(q) = T'_{11}(q') - T'_{22}(q'), \quad T_\times(q) = T'_{12}(q'), \quad (2.48)$$

в которых три пространственные компоненты ТЭИ справа можно снова выразить через $T_{ij}(q)$, и будут двумя поперечными компонентами, описывающими ГИ системы с независимыми поляризациями.

Почти все рассматриваемые в этом обзоре системы имеют осевую симметрию. Это означает, что в сферической системе координат с полярной осью вдоль оси симметрии угловое распределение ГИ не должно зависеть от азимутального угла φ вектора \mathbf{q} . Выбирая вектор \mathbf{q} в плоскости 1, 3 и обозначая его полярный угол через θ , для таких систем имеем связь

$$T'_{11} - T'_{22} = T_{11} \cos^2 \theta - 2T_{13} \sin \theta \cos \theta + T_{33} \sin^2 \theta - T_{22}, \quad (2.49)$$

$$T'_{12} = T_{12} \cos \theta - T_{32} \sin \theta. \quad (2.50)$$

Поперечные компоненты полного ТЭИ представляются суммами $T_A = \theta_A + t_A$, $A = +, \times$, поперечных компонент ТЭИ поля и ТЭИ материального тела. ТЭИ кулоновского центра в поперечные компоненты полного ТЭИ вклада не даёт, так как у него нет пространственных компонент.

Используя формулу (2.40) для пространственных компонент $\theta_{ij}(q)$ ТЭИ поля и формулы (2.49), (2.50), связывающие поперечные компоненты тензора с его пространственными компонентами, получаем для двух поперечных компонент $\theta_A(q)$, $A = +, \times$, следующие выражения (см. также [18]):

$$\theta_A(q) = \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \times \\ \times m\gamma v^2 \int_0^1 du \exp(i\zeta u) [\alpha_A J_n(z_1) + \beta_A J'_n(z_1)], \quad (2.51)$$

$$\alpha_+ = \frac{\zeta^2}{z_1^2} (1 + \cos^2 \theta) - (i\zeta u - 1) \left[\frac{n^2}{z_1^2} (1 + \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta \right], \quad (2.52)$$

$$\beta_+ = \frac{1}{z_1} (1 + \cos^2 \theta) (i\zeta u - \zeta^2 - 1), \quad (2.53)$$

$$\alpha_\times = in \left[-\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{z_1^2} (\zeta^2 + 1 - i\zeta u) \right] \cos \theta, \quad (2.54)$$

$$\beta_\times = \frac{in}{z_1} (i\zeta u - 1 - v^2) \cos \theta. \quad (2.55)$$

Здесь $z_1 = (1 - u)z$, $z = |n|v \sin \theta$, $\zeta = |\mathbf{q}|r = |n|v$. Для контроля выражений (2.52)–(2.55) полезно замечание Питерса, приведённое в разделе 5.1 ниже формулы (5.25).

Поперечные компоненты ТЭИ массы m равны

$$t_+(q) = \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) m\gamma v^2 \left\{ \left[\frac{n^2}{z^2} - 1 + \frac{n^2}{z^2} \cos^2 \theta \right] J_n(z) - \frac{1}{z} (1 + \cos^2 \theta) J'_n(z) \right\}, \quad (2.56)$$

$$t_\times(q) = \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) m\gamma v^2 \frac{in}{z} \left[\frac{1}{z} J_n(z) - J'_n(z) \right] \cos \theta. \quad (2.57)$$

Как видно из приведённых выражений для θ_A , t_A , спектр ГИ, определяемый инвариантом $1/2 |T_+|^2 + 2|T_\times|^2$,

$T_A = \theta_A + t_A$, весьма сложен. Поэтому рассмотрим его здесь лишь в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах.

Определим амплитуду $T_{An}(q)$ n -й гармоники соотношением

$$T_A(q) = \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) T_{An}(q), \quad (2.58)$$

$$T_{An}(q) = \theta_{An}(q) + t_{An}(q).$$

Тогда можно показать, что в нерелятивистском приближении, когда $z \ll 1$,

$$\theta_{+n}(q) \approx m\gamma v^2 \begin{cases} \frac{z}{16} (1 - 3 \cos^2 \theta), & n = 1, \\ \frac{z^{n-2} (1 + \cos^2 \theta)}{2^n (n-1)!}, & n \geq 2, \end{cases} \quad (2.59)$$

$$\theta_{\times n}(q) \approx m\gamma v^2 \begin{cases} \frac{iz}{16} \cos \theta, & n = 1, \\ -\frac{iz^{n-2} \cos \theta}{2^n (n-1)!}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (2.60)$$

Для аналогичных амплитуд материального тела

$$t_{+n}(q) \approx m\gamma v^2 \begin{cases} -\frac{z}{8} (3 - \cos^2 \theta), & n = 1, \\ \frac{z^{n-2} (1 + \cos^2 \theta)}{2^n (n-2)!}, & n \geq 2, \end{cases} \quad (2.61)$$

$$t_{\times n}(q) \approx m\gamma v^2 \begin{cases} \frac{iz}{8} \cos \theta, & n = 1, \\ -\frac{iz^{n-2} \cos \theta}{2^n (n-2)!}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (2.62)$$

Коэффициент $m\gamma v^2$, равный здесь mv^2 , сохранён в релятивистской форме лишь для удобства сравнения приближённых формул с релятивистскими формулами (2.51), (2.56), (2.57). Видно, что для квадрупольной и более высоких гармоник вклад ТЭИ поля в $n-1$ раз меньше вклада ТЭИ массы. Подчеркнём, что для квадрупольной гармоники, главной в нерелятивистском приближении, полевой и материальный вклады одинаковы.

Приведём в нерелятивистском пределе дифференциальные и полные интенсивности ГИ для 1-й и 2-й гармоник:

$$\left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu*} - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu|^2 \right)_{n=1, v \rightarrow 0} \approx \\ \approx t 2\pi\delta(q^0 - \omega) \frac{9}{64} m^2 v^6 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta + \frac{1}{72} \sin^4 \theta \right), \quad (2.63)$$

$$\left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu*} - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu|^2 \right)_{n=2, v \rightarrow 0} \approx \\ \approx \frac{5}{28} Gm^2 \omega^2 v^6, \quad (2.64)$$

$$\left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu*} - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu|^2 \right)_{n=2, v \rightarrow 0} \approx \\ \approx t 2\pi\delta(q^0 - 2\omega) m^2 v^4 \left(1 - \sin^2 \theta + \frac{1}{8} \sin^4 \theta \right), \quad (2.65)$$

$$\left(T_{\mu\nu} T^{\mu\nu*} - \frac{1}{2} |T_\mu^\mu|^2 \right)_{n=2, v \rightarrow 0} \approx \frac{32}{5} Gm^2 \omega^2 v^4. \quad (2.66)$$

Как и следовало ожидать, последние две формулы для квадрупольного излучения определяют основной вклад и совпадают с известными результатами, полученными по формуле Эйнштейна (см. [6], § 110). Они в 4 раза превосходят дифференциальную и полную интенсивности ГИ тела с локализованным ТЭИ (см. (2.7)).

В ультрарелятивистском пределе основной вклад даёт чисто полевой источник $\theta_{\mu\nu}$, так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|T_+|^2 + 2|T_\times|^2 \Big|_{v \rightarrow 1} &\approx \frac{1}{2}|\theta_+|^2 + 2|\theta_\times|^2 \Big|_{v \rightarrow 1} \approx \\ &\approx t \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \frac{m^2}{2\pi^2} \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \times \\ &\times \left[-\Phi^2 + \gamma^2 \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} (y\Phi^2 + \Phi'^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Здесь мы воспользовались асимптотическими выражениями (2.6) для функций Бесселя, когда $z_1 \approx n \sim \gamma^3 \gg 1$, а также тем, что эффективные значения переменной интегрирования $u \sim n^{-1} \sim \gamma^{-3}$. Заметим, что вклад локального тензора $t_{\mu\nu}$, как и интерференционный вклад, в γ^2 и γ раз меньше полевого вклада (2.67). Поскольку выражение для $|j_z(q)|^2$ в том же пределе отличается от (2.67) заменой $m^2 \rightarrow 2e^2/\gamma^2$, то связь между спектрами ГИ и ЭМИ определяется в этом пределе формулой (1.5), в которой $\Gamma = \gamma$. Это согласуется с ранее полученным результатом Сушкова и Хрипловича [18].

2.5. О сохранении тензора энергии-импульса

Хорошо известный ТЭИ массы m , приведённый в формуле (1.3), в случае равномерного движения по окружности имеет компоненты (2.3), (2.20). ТЭИ неподвижного кулоновского центра, компоненты которого приведены в (2.44), менее известен. Поэтому приведём здесь его вывод. Это удобнее всего сделать, если найти силу, действующую на заряд центра e' со стороны движущегося по окружности заряда e .

Очевидно, что фурье-образ плотности этой силы представляется интегралом

$$\mathbf{f}(q) = \int d^4x \exp(-iqx)e'\mathbf{E}(x)\delta(\mathbf{x}), \quad (2.68)$$

где e' — заряд тяжёлого кулоновского центра, находящегося в точке $\mathbf{x} = 0$, а $\mathbf{E}(x)$ — напряжённость электрического поля, создаваемого движущимся зарядом e , в точке $x^z = (\mathbf{x}, t)$. Представляя поле $\mathbf{E}(x)$ интегралом Фурье с компонентами

$$f_{i0}(k) = \frac{i}{k^2} [k_i j_0(k) - k_0 j_i(k)], \quad i = 1, 2, \quad (2.69)$$

(ср. с (2.14)), получим для ненулевых компонент вектора $\mathbf{f}(q)$ выражение

$$f^i(q) = ie' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_i j_0 - q_0 j_i}{\mathbf{k}^2 - q_0^2}, \quad i = 1, 2, \quad (2.70)$$

в котором после интегрирования по x -пространству нулевая компонента 4-вектора k_z стала равной q_0 . Используя для тока $j_z(k)$ представление (1.1), а для пропагатора $(\mathbf{k}^2 - q_0^2)^{-1}$ — собственно-временное представление, можно провести интегрирование как по \mathbf{k} , так и по собственному времени виртуального фотона. В результате, $\mathbf{f}(q)$ оказывается интегралом только по

собственному времени заряда e :

$$\mathbf{f}(q) = \frac{ie'}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(iq^0\gamma\tau + i|\mathbf{q}|r) \left[\frac{q^0 \dot{\mathbf{x}}}{r} + \gamma \left(\frac{|\mathbf{q}|}{r^2} + \frac{i}{r^3} \right) \mathbf{x} \right]. \quad (2.71)$$

Используя здесь закон движения (2.16), получаем для \mathbf{f} представление (2.45).

Поскольку $\mathbf{f}(q)$ должно быть дивергенцией соответствующего ТЭИ $\tau_{\alpha\beta}(q)$, то

$$f^\beta(q) = iq^\alpha \tau_\alpha^\beta(q). \quad (2.72)$$

Для $\beta = 1, 2$ правая часть (2.72) сводится к одному члену $iq^0 \tau_0^\beta(q)$, что позволяет найти смешанные компоненты $\tau_0^\beta(q) = -\tau_\beta^0(q)$ (см. (2.44)). Для $\beta = 0$ левая часть (2.72) равна нулю, а правая содержит три слагаемых, из которых два уже известны. Это позволяет найти третью слагаемое $iq^0 \tau_0^0(q)$ и, следовательно, временнюю компоненту $\tau_0^0(q) = -\tau_{00}(q)$ (см. (2.44)).

Вычисляя дивергенцию полевого тензора $\theta_{\alpha\beta}$, приведённого в (2.40)–(2.43), можно показать, что

$$iq^\alpha \theta_\alpha^\beta(q) = -f^\beta(q) - g^\beta(q). \quad (2.73)$$

Это означает, что ТЭИ $T_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}$ всей системы сохраняется.

3. Гравитационное излучение систем с более сложным силовым полем

3.1. Гравитационное излучение заряда, обращающегося в поле магнитного момента

Рассмотрим движение заряда по окружности в экваториальной плоскости поля

$$\mathbf{H} = \frac{3\mathbf{r}(\mathfrak{M}\mathbf{r}) - \mathfrak{M}r^2}{4\pi r^5} = \nabla(\mathfrak{M}\nabla) \frac{1}{4\pi r} \quad (3.1)$$

магнитного момента \mathfrak{M} . Согласно уравнению движения

$$mv^2\gamma = \frac{e\omega\mathfrak{M}_\omega}{4\pi cr}, \quad (3.2)$$

необходимо, чтобы проекция \mathfrak{M}_ω магнитного момента на направление вектора угловой скорости заряда имела тот же знак, что и заряд: $e\mathfrak{M}_\omega = |e\mathfrak{M}| > 0$.

Используя фурье-компоненты

$$\varphi_{\alpha\beta}(k) = -\frac{\mathfrak{M}\mathbf{k}}{k^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} k^\gamma 2\pi\delta(k^0) \quad (3.3)$$

поля (3.1) и фурье-компоненты собственного поля заряда

$$f_{\alpha\beta}(q) = \frac{i}{q^2} [q_\alpha j_\beta(q) - q_\beta j_\alpha(q)], \quad (3.4)$$

нетрудно построить компоненты тензора энергии-импульса поля

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}(q) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} &\left[\varphi_{\mu\alpha}(k) f^\alpha_\nu(q-k) + \varphi_{\nu\alpha}(k) f^\alpha_\mu(q-k) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varphi_{\alpha\beta}(k) f^{\alpha\beta}(q-k) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

опустив квадратичные комбинации $\varphi\varphi$ и ff по соображениям, изложенным в разделе 2. Интегрирование по

волновым векторам \mathbf{k} внешнего поля удобно провести, используя для пропагаторов k^{-2} и $(q-k)^{-2}$ причинные собственno-временные представления, а для плотности тока $j_z(q-k)$ представление

$$j_z(q) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \dot{x}_z(\tau) \exp\left(-iqx(\tau)\right). \quad (3.6)$$

Тогда $\theta_{\mu\nu}(q)$ выразится интегралом

$$\theta_{\mu\nu}(q) = \frac{e\mathfrak{M}_\omega}{8\pi|\mathbf{q}|} \int_0^1 du \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(i\gamma) a_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

в котором $f = -q_x x^z(\tau) + u[\mathbf{q}x(\tau) + |\mathbf{q}|r]$, переменная $u = t(s+t)^{-1}$, где s и t — собственные времена квантов внешнего и собственного полей, $a_{\mu\nu}$ — полиномы не старше второго порядка по координатам $x_{1,2}(\tau)$ или скоростям $\dot{x}_{1,2}(\tau)$.

Для двух поперечных компонент ТЭИ поля с помощью формул (2.49), (2.50) и формулы (3.7) получаем

$$\begin{aligned} \theta_A(q) &= \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega)m\gamma v^2 \times \\ &\times \int_0^1 du \exp(i\zeta u) [\alpha_A J_n(z_1) + \beta_A J'_n(z_1)]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь индекс A принимает значения $+$ и \times , коэффициенты α_A, β_A равны

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \frac{3}{2} (1 - i\zeta u) \sin^2 \theta - \left(\frac{n^2}{z_1^2} - \frac{1}{2} \right) [2\zeta^2 u(1-u) \cos^2 \theta + \\ &+ (i\zeta u - 1)(1 + \cos^2 \theta)], \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \beta_+ &= \frac{1}{z_1} [2\zeta^2 u(1-u) \cos^2 \theta + (i\zeta u - 1)(1 + \cos^2 \theta)] + \\ &+ i \sin \theta [i\zeta(1-u) - \zeta u(i + \zeta u) \cos^2 \theta], \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \alpha_\times &= \frac{n}{2z_1} (-\zeta^2 u^2 + i\zeta - 2i\zeta u) \sin \theta \cos \theta - \\ &- \frac{in}{z_1^2} \left[\frac{1}{2} \zeta^2 u(1-u)(1 + \cos^2 \theta) + i\zeta u - 1 \right] \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\beta_\times = \frac{in}{z_1} \left[\frac{1}{2} \zeta^2 u(1-u)(1 + \cos^2 \theta) + i\zeta u - 1 \right] \cos \theta, \quad (3.12)$$

$$z_1 = (1-u)z, \quad z = |n|v \sin \theta, \quad \zeta = |\mathbf{q}|r = |n|v. \quad (3.13)$$

Чтобы получить поперечные компоненты T_+, T_\times полного ТЭИ, к компонентам (3.8) нужно добавить поперечные компоненты ТЭИ материального тела:

$$\begin{aligned} t_+(q) &= \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega)m\gamma v^2 \left\{ \left[\frac{n^2}{z^2} - 1 + \frac{n^2}{z^2} \cos^2 \theta \right] J_n(z) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{z} (1 + \cos^2 \theta) J'_n(z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$t_\times(q) = \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega)m\gamma v^2 \frac{in}{z} \left[\frac{1}{z} J_n(z) - J'_n(z) \right] \cos \theta. \quad (3.15)$$

Эти выражения следуют из формулы (2.3) и формул (2.48)–(2.50) раздела 2.

В нерелятивистском пределе, когда $|n|v \ll 1$, аргументы бесселевых функций и параметр ζ малы: $z_1 \sim z \sim \zeta \ll 1$. Физически это условие означает малость разме-

ров орбиты по сравнению с длиной волны излучения. Разлагая бесселевы функции, получим для интегралов, определяющих ТЭИ поля,

$$\begin{aligned} \int_0^1 du \exp(i\zeta u) (\alpha_+ J_n + \beta_+ J'_n) &\approx \\ &\approx \begin{cases} \frac{z}{16} (1 - 3 \cos^2 \theta), & n = 1, \\ \frac{z^{n-2} (1 + \cos^2 \theta)}{2^n (n-1)!}, & n \geq 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 du \exp(i\zeta u) (\alpha_\times J_n + \beta_\times J'_n) &\approx \\ &\approx \begin{cases} \frac{iz}{16} \cos \theta, & n = 1, \\ -\frac{iz^{n-2} \cos \theta}{2^n (n-1)!}, & n \geq 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Аналогичные величины в ТЭИ материального тела (3.14), (3.15) равны

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2}{z^2} - 1 + \frac{n^2}{z^2} \cos^2 \theta \right) J_n - \frac{1}{z} (1 + \cos^2 \theta) J'_n &\approx \\ &\approx \begin{cases} -\frac{z}{8} (3 - \cos^2 \theta), & n = 1, \\ \frac{z^{n-2} (1 + \cos^2 \theta)}{2^n (n-2)!}, & n \geq 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\frac{in}{z} \cos \theta \left(\frac{1}{z} J_n - J'_n \right) \approx \begin{cases} \frac{iz}{8} \cos \theta, & n = 1, \\ -\frac{iz^{n-2} \cos \theta}{2^n (n-2)!}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Обратим внимание на то, что для гармоник с $n \geq 2$ вклад ТЭИ поля в $n-1$ раз меньше вклада ТЭИ тела.

Таким образом, для спектра ГИ в нерелятивистском приближении получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |T_+|^2 + 2|T_\times|^2 &\Big|_{n=1, v \ll 1} = \\ &= t2\pi\delta(q^0 - \omega) \frac{9}{64} m^2 v^6 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta + \frac{1}{72} \sin^4 \theta \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |T_+|^2 + 2|T_\times|^2 &\Big|_{n \geq 2, nv \ll 1} = \\ &= t2\pi\delta(q^0 - n\omega) m^2 v^4 \left(\frac{nz^{n-2}}{2^{n-1} (n-1)!} \right)^2 \times \\ &\times \left(1 - \sin^2 \theta + \frac{1}{8} \sin^4 \theta \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Как и следовало ожидать, вклад второй гармоники является наибольшим и совпадает с найденным по формуле Эйнштейна.

В ультрарелятивистском пределе, когда $\gamma \gg 1$, в спектре ГИ будут существенны такие гармоники и углы, для которых $n \approx z_1 \approx z \approx \zeta \sim \gamma^3$, $\alpha = \theta - \pi/2 \sim \gamma^{-1}$, а эффективные значения $u \sim \gamma^{-3}$. Тогда для интегралов (3.16), (3.17) получим

$$\int_0^1 du \exp(i\zeta u) (\alpha_+ J_n + \beta_+ J'_n) \approx -iJ'_n(z), \quad (3.22)$$

$$\int_0^1 du \exp(i\zeta u) (\alpha_\times J_n + \beta_\times J'_n) \approx -\frac{1}{2} J_n(z) \cos \theta, \quad (3.23)$$

причём в качестве $J_n(z)$ и $J'_n(z)$ следует использовать их асимптотические представления через функцию Эйри:

$$\begin{aligned} J_n(z) &\approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n} \right)^{1/3} \Phi(y), \quad J'_n(z) \approx -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n} \right)^{2/3} \Phi'(y), \\ \Phi(y) &= \int_0^\infty dt \cos \left(yt + \frac{t^3}{3} \right), \quad y = \left(\frac{n}{2} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Выражения (3.18), (3.19) для ТЭИ материального тела в рассматриваемом пределе равны

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2}{z^2} - 1 + \frac{n^2}{z^2} \cos^2 \theta \right) J_n - \frac{1}{z} (1 + \cos^2 \theta) J'_n &\approx \\ \approx 2 \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{2\gamma^2} \right) J_n(z), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\frac{in}{z} \cos \theta \left(\frac{1}{z} J_n - J'_n \right) \approx -i \cos \theta J'_n(z). \quad (3.26)$$

Как видно, поперечные компоненты ТЭИ тела в γ раз меньше поперечных компонент ТЭИ поля и ими можно пренебречь. Тогда для спектра ГИ в ультрапрелятивистском пределе получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |T_+|^2 + 2|T_x|^2 \Big|_{\gamma \gg 1} &\approx \\ \approx t \sum_n 2\pi \delta(q^0 - n\omega) \frac{1}{2} m^2 \gamma^2 (\alpha^2 J_n^2 + J_n'^2) &= \\ = \frac{m^2 \gamma^2}{2e^2} |j_\mu(q)|^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Таким образом, для рассматриваемой системы спектры ГИ и ЭМИ в ультрапрелятивистском пределе связаны соотношением (1.5), в котором $\Gamma = \gamma$.

3.2. Гравитационное излучение заряда, обращающегося в поле центра с зарядом и магнитным моментом

Уравнение движения заряда e , вращающегося со скоростью v и частотой ω по окружности радиуса r в экваториальной плоскости центра с зарядом e' и магнитным моментом \mathfrak{M} , имеет вид

$$m\gamma v^2 = \frac{1}{4\pi r} \left(-ee' + \frac{e\mathfrak{M}_\omega \omega}{c} \right). \quad (3.28)$$

Для существования такой орбиты необходимо, чтобы

$$-ee' + \frac{e\mathfrak{M}_\omega \omega}{c} > 0. \quad (3.29)$$

Сохраняющийся ТЭИ системы состоит из ТЭИ $t_{\alpha\beta}$ материального тела, ТЭИ $\theta_{\alpha\beta}^M$ поля, пропорционального полю магнитного момента, и ТЭИ $\theta_{\alpha\beta}^C$ поля, пропорционального кулоновскому полю. Поперечные компоненты первых двух тензоров даются формулами (3.14), (3.15) и (3.8). Поперечные компоненты ТЭИ $\theta_{+,x}^C$ были приведены в разделе 2 для чисто кулоновской задачи.

В настоящей задаче, где совместно действуют оба внешних поля, нужно заменить в компонентах (3.8) и (2.51) коэффициенты $m\gamma v^2$ коэффициентами

$$\frac{e\mathfrak{M}_\omega \omega}{4\pi c r} \equiv k^M m\gamma v^2, \quad -\frac{ee'}{4\pi r} \equiv k^C m\gamma v^2$$

соответственно, т.е. использовать в качестве ТЭИ поля сумму $k^M \theta_A^M + k^C \theta_A^C$.

Можно показать, что в нерелятивистском пределе интегралы

$$\int_0^1 du \exp(i\zeta u) [\alpha_A J_n + \beta_A J'_n]$$

для любого n совпадают с (3.16), (3.17), т.е. даются правыми частями этих формул. В ультрапрелятивистском пределе эти величины для эффективных значений n и θ совпадают с (3.22), (3.23).

Таким образом, как в нерелятивистском, так и в ультрапрелятивистском пределах компоненты $\theta_A^M(q)$ и $\theta_A^C(q)$ оказываются одинаковыми. Но тогда сумма

$$k^M \theta_A^M(q) + k^C \theta_A^C(q) \approx \theta_A^M(q) \approx \theta_A^C(q),$$

так как $k^M + k^C = 1$ в силу уравнения движения (3.28). Это означает, что спектр ГИ заряда, вращающегося в этом сложном поле, в нерелятивистской области определяется формулами (3.20), (3.21), а в ультрапрелятивистской области — формулой (3.27). Заметим, что в промежуточной области, когда скорость заряда не очень мала и не слишком близка к 1, поперечные компоненты $\theta_A^M(q)$ и $\theta_A^C(q)$ заметно различаются и спектр ГИ оказывается чувствительным к характеру поля, в котором движется заряд.

Одним из мотивов выполнения этой работы было желание выяснить наиболее существенные свойства поля, влияющие на формирование амплитуды конверсии Γ . Определяя коэффициент пропорциональности между двумя инвариантами (см. (1.5)), Γ должно быть интегральной инвариантной характеристикой системы. У четырёх электромагнитных систем, рассмотренных в разделах 2, 3, с одинаковыми орбитами заряда, но различными полями (движение по окружности в кулоновском поле, в поле циркулярно-поляризованной волны, в поле магнитного момента, в поле кулоновского центра и магнитного момента), амплитуда конверсии Γ оказалась одинаковой и равной γ .

Для круговой траектории такая простейшая формула для Γ возникает, по-видимому, из-за отсутствия у поля собственного масштаба длины. В самом деле, если рассмотреть спектр ГИ заряда, движущегося по окружности в экранированном кулоновском поле с потенциалом $(e'/4\pi r) \exp(-\eta r)$, то при $\gamma \gg 1$ главные в этом пределе члены поперечных компонент $\theta_A(q)$ ТЭИ поля будут отличаться от (3.8) множителем

$$C = \frac{\eta r}{1 + \eta r} \exp(\eta r) K_1(\eta r), \quad (3.30)$$

где $K_1(x)$ — функция Макдональда. Таким образом, $\Gamma = C\gamma$. Коэффициент $C(\eta r)$ с ростом ηr монотонно падает от 1 до 0, причём при $\eta r \gg 1$ он ведёт себя как $(\pi/2\eta r)^{1/2}$. Вывод формулы (3.30) предполагает, что $\eta r \ll \gamma^{3/2}$, $\gamma \gg 1$, и допускает ее использование при $\eta r \gg 1$.

Корневая зависимость амплитуды конверсии от собственного масштаба длины η^{-1} поля при $\eta r \gg 1$ может быть легко понята, если учесть, что Γ пропорционально длине l области конверсии (см. (1.14)). Действительно, при $\gamma \gg 1$ область конверсии фотонов в гравитоны

вытянута вдоль касательной к орбите заряда, располагаясь между точкой касания к окружности радиуса r и точкой пересечения касательной с окружностью радиуса $r + \eta^{-1}$ (где поле и конверсия заметно ослабли), т.е. имеет длину

$$l \sim [(r + \eta^{-1})^2 - r^2]^{1/2} \Big|_{\eta r \gg 1} \approx r \left(\frac{2}{\eta r} \right)^{1/2}. \quad (3.31)$$

Заметим, что классическое рассмотрение финитного релятивистского движения заряда в кулоновском поле возможно, если классический радиус орбиты

$$r = -\frac{ee'}{4\pi mv^2\gamma} \Big|_{\gamma \gg 1} \approx -\frac{ee'}{4\pi mc^2\gamma}$$

больше \hbar/p , т.е. если заряд кулоновского центра превышает 137. С другой стороны, при $|e'/e| > 170$ кулоновское поле рождает пары и экранирует себя [19].

Заметим также, что поскольку при $\gamma \gg 1$ заряд движется по орбите почти со скоростью света, то область конверсии, образуемая его полем, лежащим вне орбиты, перемещается со сверхсветовой скоростью.

Как показано в разделе 2 работы [9], вклад поперечных компонент ТЭИ материального тела в ГИ при $\gamma \gg 1$ порядка вклада тока в ЭМИ, если заменить Gm^2 на $e^2/4\pi$. Поэтому относительная амплитуда Γ по порядку величины определяет отношение поперечных компонент θ_+ , θ_\times тензора $\theta_{\alpha\beta}$ к поперечным компонентам t_+ , t_\times тензора $t_{\alpha\beta}$. Интересно выяснить, как зависит это отношение (или Γ) от распределения в пространстве тензора $\theta_{\alpha\beta}(x)$. С этой целью рассмотрим ГИ неэлектромагнитной системы, в которой тензор $\theta_{\alpha\beta}(x)$ сосредоточен на линии, соединяющей материальную частицу с центром вращения.

3.3. Гравитационное излучение

релятивистской струны с массами на концах

Релятивистская струна с массами на концах [20] не является электромагнитной системой. Ее можно рассматривать как реалистическую модель системы двух тел, связанных силовым полем, которое сосредоточено на соединяющей их линии. Поэтому ГИ будет исходить не только от локальных источников — точечных масс, но и от протяжённого источника — струны. Интересно сравнить вклады в ГИ этих двух источников, особенно в ультрарелятивистском пределе, когда энергия, сосредоточенная в струне, примерно в γ раз превосходит энергию масс на её концах.

Рассматриваемая система описывается действием

$$S = -\mu \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma [(\dot{x}\dot{x}')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{1/2} - \sum_{i=1}^2 m_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ - \left[\frac{dx_\alpha(\tau, \sigma_i(\tau))}{d\tau} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.32)$$

где μ — константа, характеризующая натяжение струны, m_1, m_2 — массы на концах струны, $x^\alpha(\tau, \sigma)$ — 4-вектор, параметрически описывающий мировую поверхность струны. Точка и штрих обозначают частные производные по τ и по σ соответственно.

Выберем эволюционный параметр τ совпадающим со временем $t = x^0(\tau, \sigma)$. В этом случае действие (3.32)

примет форму

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \mathcal{L}_{\text{стр}} - \sum_{i=1}^2 m_i \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_i^2} \right), \quad (3.33)$$

$$\mathcal{L}_{\text{стр}} = -\mu \sqrt{\mathbf{x}'^2(1 - \dot{\mathbf{x}}^2) + (\dot{\mathbf{x}}\mathbf{x}')^2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \sigma), \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t, \sigma_i).$$

Уравнения Эйлера, описывающие движение струны, получаются варьированием действия S :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \mathbf{x}'} \right) = 0. \quad (3.34)$$

Уравнения движения масс на концах струны совпадают с граничными условиями

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{x}}_1}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_1^2}} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \mathbf{x}'}, \quad \sigma = \sigma_1, \\ m_2 \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{x}}_2}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_2^2}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \mathbf{x}'}, \quad \sigma = \sigma_2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Эти уравнения обладают частным решением

$$\begin{aligned} x^1(\tau, \sigma) &= \sigma \sin \omega \tau, \quad x^2(\tau, \sigma) = \sigma \cos \omega \tau, \\ x^3(\tau, \sigma) &= 0, \quad x^0(\tau, \sigma) = t = \tau, \end{aligned} \quad (3.36)$$

которое описывает вращение струны как прямолинейного отрезка с угловой скоростью ω . В (3.36) в качестве t выбрано координатное время, а в качестве σ — расстояние рассматриваемой точки на струне от центра вращения, взятое с соответствующим знаком. Поскольку

$$\begin{aligned} m_i \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{x}}_i}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}_i^2}} &= -\frac{m_i \omega^2 \sigma_i}{\sqrt{1 - \sigma_i^2 \omega^2}} (\sin \omega t, \cos \omega t, 0), \\ \mp \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \mathbf{x}'} \Big|_{\sigma_1, \sigma_2} &= \pm \mu \sqrt{1 - \sigma_i^2 \omega^2} (\sin \omega t, \cos \omega t, 0), \end{aligned} \quad (3.37)$$

то из граничных условий следует, что

$$\sigma_i \omega = \pm \frac{m_i \omega}{2\mu} \mp \sqrt{1 + \left(\frac{m_i \omega}{2\mu} \right)^2} \leqslant 0. \quad (3.38)$$

Верхний и нижний знаки здесь и ниже соответствуют $i = 1$ и $i = 2$. Так как

$$v_i = \mp \sigma_i \omega, \quad i = 1, 2, \quad (3.39)$$

это скорость массы m_i , то натяжение струны μ можно выразить через массу и скорость любой из масс:

$$\frac{\mu}{\omega} = m_i v_i \gamma_i^2, \quad \gamma_i = (1 - v_i^2)^{-1/2}. \quad (3.40)$$

ТЭИ системы состоит из ТЭИ $t_{\mu\nu}$ масс на концах струны и ТЭИ струны [21]

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}(x) &= \mu \int d\tau d\sigma [(\dot{x}\dot{x}')^2 - \dot{x}^2 x'^2]^{-1/2} \delta(x - x(\tau, \sigma)) \times \\ &\times \{ x'^2 \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu + \dot{x}^2 x'_\mu x'_\nu - (x' \dot{x})(\dot{x}_\mu x'_\nu + \dot{x}_\nu x'_\mu) \}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Последнее выражение можно упростить, наложив калибровочное условие $x'_x \dot{x}^x = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\theta_{\mu\nu}(x) &= \mu \int d\tau d\sigma \left(-\frac{x'^2}{\dot{x}^2} \right)^{1/2} \delta(x - x(\tau, \sigma)) \times \\ &\times \left(\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu + \frac{\dot{x}^2}{x'^2} x'_\mu x'_\nu \right).\end{aligned}\quad (3.42)$$

Используя (3.36) и (3.38), для плотности энергии и энергии струны получаем

$$\theta_{00}(x) = \mu \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{(1 - \omega^2 \sigma^2)^{1/2}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau, \sigma)), \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}E^{\text{str}} &= \int d^3x \theta_{00}(x) = \frac{\mu}{\omega} \int_{-v_1}^{v_2} \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{\mu}{\omega} (\arcsin v_2 + \arcsin v_1) = \sum_{i=1}^2 m_i v_i \gamma_i^2 \arcsin v_i.\end{aligned}\quad (3.44)$$

В последнем выражении использована связь (3.40) между натяжением и скоростью v_i конца струны, нагруженного массой m_i . Интересно, что при ультрарелятивистском движении хотя бы одного из концов струны, её энергия E^{str} в $\pi/2$ раз превосходит энергию $E^{\text{mass}} = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2$ масс на её концах.

Перейдём теперь от (3.41) к фурье-компонентам и с их помощью и с использованием формул (2.48)–(2.50) построим поперечные компоненты $\theta_A(q)$, описывающие ГИ струны:

$$\begin{aligned}\theta_+(q) &= \sum_n 2\pi \delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \frac{\mu}{\omega} \int_{-v_1}^{v_2} \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}} \left\{ \left[\left(\frac{n^2}{z^2} - \frac{1}{2} \right) (1 + \cos^2 \theta) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \sin^2 \theta \right] J_n(z) - (1 + \cos^2 \theta) \frac{1}{z} J'_n(z) \right\},\end{aligned}\quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\theta_\times(q) &= \sum_n 2\pi \delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \frac{\mu}{\omega} i \cos \theta \int_{-v_1}^{v_2} \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}} \frac{n}{z} \left[\frac{1}{z} J_n(z) - J'_n(z) \right].\end{aligned}\quad (3.46)$$

Здесь $z = |n| x \sin \theta$, $x = \omega \sigma$ — скорость точки струны с координатой σ .

Заметим, что ТЭИ струны можно представить в виде суммы двух слагаемых, соответствующих двум половинам струны, т.е. интервалам $\sigma_1 \leq \sigma < 0$ и $0 < \sigma \leq \sigma_2$. В частности,

$$\theta_A(q) = \theta_A(q, -v_1) + \theta_A(q, v_2), \quad (3.47)$$

$$\theta_A(q, \mp v_{1,2}) = \sum_n 2\pi \delta(q^0 - n\omega) \theta_{An}(q, \mp v_{1,2}).$$

Здесь первое и второе слагаемые представляют вклады в интеграл по x с участков $-v_1 \leq x < 0$ и $0 < x \leq v_2$.

В случае равных масс $m_1 = m_2$ равны и их скорости $v_1 = v_2$. В этом случае соотношение

$$\theta_{An}(q, v) = (-1)^n \theta_{An}(q, -v) \quad (3.48)$$

приводит к интерференции ГИ с противоположных половин струны, в результате которой амплитуды

$\theta_{An}(q)$ излучения нечётных гармоник обращаются в нуль, а амплитуды чётных гармоник удваиваются по сравнению с амплитудами излучения каждой половины. Аналогичная интерференция наблюдается и у ГИ системы двух равных масс на концах струны. Поперечные компоненты ТЭИ этой системы равны сумме

$$t_A(q) = t_A(q, -v) + t_A(q, v) \quad (3.49)$$

компонент, определяемых формулами (3.14), (3.15) с противоположными знаками v .

Заметим также, что сумма $t_A(q, v) + \theta_A(q, v)$ представляет собой амплитуду ГИ с поляризацией A самостоятельного объекта — струны длины r с закреплённым концом $\sigma = 0$ и концом $\sigma = r$, нагруженным массой m и вращающимся вокруг закреплённого конца с угловой скоростью ω .

Такой объект естественно возникает при рассмотрении струны с массами m_1, m_2 , одна из которых очень велика по сравнению с другой. Если, например, массу m_1 устремить к бесконечности, то её расстояние $r_1 = -\sigma_1$ до неподвижной на струне точки $\sigma = 0$ и её скорость $v_1 = -\sigma_1 \omega$ устремлятся к нулю:

$$\sigma_1 \omega = \frac{m_1 \omega}{2\mu} - \sqrt{1 + \left(\frac{m_1 \omega}{2\mu} \right)^2} \approx -\frac{\mu}{m_1 \omega} \rightarrow 0, \quad m_1 \rightarrow \infty. \quad (3.50)$$

Как будет видно из дальнейшего (см. (3.51), (3.52)), заменив mv^2 на $m_1 v_1^2 = \mu^2/m_1 \omega^2 \rightarrow 0$, тяжёлая масса не излучает гравитационных волн и можно рассматривать струну с закреплённым в точке $\sigma = 0$ концом. Для такой струны амплитудой ГИ с поляризацией A будет сумма $t_A(q, v_2) + \theta_A(q, v_2)$.

Проанализируем поведение $\theta_A(q, v)$ в нерелятивистском и ультрарелятивистском предельных случаях. При $nv \ll 1$, разлагая бесселевы функции в (3.45), (3.46), получаем

$$\theta_{+n}(q, v) \approx \begin{cases} \frac{mv^3}{16} (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin \theta, & n = 1, \\ \frac{mv^n (n \sin \theta)^{n-2}}{2^n (n-1)!} (1 + \cos^2 \theta), & n \geq 2,\end{cases} \quad (3.51)$$

$$\theta_{\times n}(q, v) \approx \begin{cases} i \frac{mv^3}{16} \sin \theta \cos \theta, & n = 1, \\ -i \frac{mv^n (n \sin \theta)^{n-2}}{2^n (n-1)!} \cos \theta, & n \geq 2.\end{cases} \quad (3.52)$$

Эти выражения в точности совпадают с нерелятивистскими гармониками поперечных компонент ТЭИ поля в рассмотренных выше системах (см. разделы 2, 3).

Это совпадение не является случайным. Можно показать, что сохраняющийся тензор $T_{\alpha\beta}(q)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}q_i q_j \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} T_{ij}(q) + 2q_i \frac{\partial}{\partial q_l} T_{ik}(q) + \\ + 2q_i \frac{\partial}{\partial q_k} T_{il}(q) + 2T_{kl}(q) = \\ = -q^{02} \int d^3x \exp(-iqx) x_k x_l T^{00}(\mathbf{x}, q^0).\end{aligned}\quad (3.53)$$

Для замкнутой нерелятивистской системы в правой части этого уравнения можно приближённо считать $T^{00}(\mathbf{x}, q^0) \approx t^{00}(\mathbf{x}, q^0)$. Предполагая, что система состоит из одной точечной массы, движущейся в силовом поле, будем искать решение полученного уравнения в форме

$$T_{ij}(q) = t_{ij}(q) + m \int dt \exp(iq^0 t) f(\mathbf{q}\mathbf{x})(\ddot{x}_i x_j + \ddot{x}_j x_i) + \dots, \quad (3.54)$$

где точками обозначены ненужные нам члены типа (5.26) (см. ниже). Тогда для функции $f(z)$ получим уравнение и решение

$$z f'(z) + f(z) = \frac{1}{2} \exp(-iz), \quad f(z) = \frac{1 - \exp(-iz)}{2iz}. \quad (3.55)$$

Разложив $f(z)$ в ряд по степеням z и предполагая движение круговым, получим нерелятивистские выражения для всех гармоник $T_{ij}(q)$. Их поперечные компоненты приведены в разделе 2 (см. также (3.51), (3.52)).

При $\gamma \gg 1$ в формулах (3.45), (3.46) будут существенны $n \approx z \sim \gamma^3$, $v - |x| \sim \gamma^{-2}$, $\alpha \equiv \pi/2 - \theta \sim \gamma^{-1}$. Проведя соответствующие разложения и используя представления (2.6), получаем

$$\theta_{+n}(q, v) \approx \frac{2m\gamma}{\pi n} \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1/2}} \Phi''(y), \quad (3.56)$$

$$\theta_{\times n}(q, v) \approx i \frac{m\gamma\alpha}{2\pi} \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1/2}} \Phi'(y), \quad (3.57)$$

$$y = \left(\frac{n}{2\gamma^3}\right)^{2/3} (\xi + \gamma^2\alpha^2).$$

Величины этих ультрарелятивистских поперечных компонент ТЭИ струны оказываются того же порядка, что и величины поперечных компонент ТЭИ материального тела на конце струны (ср. формулы (3.14), (3.15) и (3.24), (3.26) с формулами (3.56) и (3.57)).

Причина, по которой ГИ струны при $\gamma \gg 1$ оказывается того же порядка, что и ГИ массы на её конце, заключается в следующем. Условие $v - |x| \sim \gamma^{-2}$ означает, что излучение испускается с малых участков вблизи концов струны, точки которых имеют такие скорости x , что соответствующий им лоренц-фактор $\gamma(x) \equiv \gamma \equiv (1 - x^2)^{-1/2}$ порядка γ . Хотя энергия струны более чем в γ раз превосходит энергию массы, ее распределение вдоль струны таково, что энергия, которая движется в пространстве с лоренц-фактором порядка γ , составляет лишь γ^{-1} часть всей энергии струны:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\omega} (\arcsin v - \arcsin v') \Big|_{\gamma' \sim \gamma \gg 1} &\approx \\ &\approx \frac{\mu}{\omega} \left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{\gamma} \right) \sim \frac{\mu}{\omega} \gamma^{-1}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

т.е. оказывается как раз порядка энергии массы на ее конце (см. (3.44)).

3.4. Гравитационное излучение струны с ненагруженными концами

Прежде чем переходить к пределу $m_{1,2} = 0$ (или $v_{1,2} = 1$), перепишем формулы (3.45), (3.46) для $m_1 = m_2 = m$ в

виде

$$\begin{aligned} \theta_+ &= \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \frac{\mu}{\omega} \int_{-v}^v \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) [J_{n+2}(z) + J_{n-2}(z)] - \right. \\ &\left. - \sin^2 \theta \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) J_n(z) \right\}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \theta_\times &= \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) \frac{\mu}{\omega} \frac{i}{4} \cos \theta \times \\ &\times \int_{-v}^v \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}} [J_{n+2}(z) - J_{n-2}(z)]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Теперь, перейдя к пределу $v = 1$, можно провести интегрирование бесселевых функций с помощью формулы 7.7.2 (11) справочника [22]. Тогда получим

$$\begin{aligned} \theta_+ &= \sum_k 2\pi\delta(q^0 - 2k\omega) \frac{\pi\mu}{2\omega} \left\{ J_{k+1}^2(x) + J_{k-1}^2(x) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \sin^2 \theta [J_{k+1}(x) + J_{k-1}(x)]^2 \right\} = \\ &= \sum_k 2\pi\delta(q^0 - 2k\omega) \frac{\pi\mu}{\omega} \{ \cot^2 \theta J_k^2(x) + J_k'^2(x) \}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \theta_\times &= \sum_k 2\pi\delta(q^0 - 2k\omega) \frac{i\pi\mu \cos \theta}{4\omega} [J_{k+1}^2(x) - J_{k-1}^2(x)] = \\ &= \sum_k 2\pi\delta(q^0 - 2k\omega) \left(-\frac{i\pi\mu}{\omega} \right) \cot \theta J_k(x) J_k'(x), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$x = k \sin \theta.$$

Спектр ГИ определяется комбинацией

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\theta_+|^2 + 2|\theta_\times|^2 &= t \sum_k 2\pi\delta(q^0 - 2k\omega) \left(\frac{\pi\mu}{\omega} \right)^2 \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} [\cot^2 \theta J_k^2(x) + J_k'^2(x)]^2 + 2 \cot^2 \theta J_k^2(x) J_k'^2(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Излучаемая за время $t \gg \omega^{-1}$ энергия равна

$$\mathcal{E} = t 4\pi G \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int d\Omega \{ \dots \}, \quad (3.64)$$

где $\{ \dots \}$ — выражение в фигурных скобках (3.63).

Рассмотрим поведение членов этого ряда при $k \gg 1$. В этом случае вместо бесселевых функций можно использовать функции Эйри (см. (3.24)). Тогда, принимая во внимание, что эффективны $\cos \theta \sim (2/k)^{1/3}$, получим

$$\begin{aligned} k^2 \int d\Omega \{ \dots \} &\approx \\ &\approx \frac{8}{\pi^3 k} \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1/2}} [y^2 \Phi^4(y) + \Phi'^4(y) + 6y \Phi^2(y) \Phi'^2(y)]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Таким образом, ряд (3.64) расходится логарифмически. Эта расходимость, по-видимому, исчезнет при учёте

квантовых эффектов, существенных как раз при излучении высоких гармоник.

3.5. Поляризационные амплитуды в β^2 -приближении

Найденные в предыдущих разделах релятивистские попеченные амплитуды $T_+(q)$, $T_\times(q)$ ГИ для трёх случаев — струны с массой, заряда в поле магнитного момента и заряда в кулоновском поле — резко различаются между собой. Однако в нерелятивистском приближении, при $\beta = v/c \ll 1$, главные члены их гармоник для всех трёх случаев совпадают (см. обсуждение в разделах 2.4, 3.1, 3.3). Полученные релятивистские амплитуды позволяют найти для всех гармоник и следующие члены разложения по малому параметру β .

Рассмотрим для всех трёх случаев разложение по β основной, второй гармоники, вклад которой в амплитуды T_+ , T_\times при $\beta \ll 1$ является наибольшим, удержав в разложении члены вплоть до второго порядка малости. Определив амплитуду $T_{An}(q)$ n -й гармоники соотношением

$$T_A(q) = \sum_n 2\pi\delta(q^0 - n\omega) T_{An}(q), \quad (3.66)$$

$$T_{An}(q) = t_{An}(q) + A_{An}(q), \quad A = +, \times,$$

приведём выражения для материальной t_{A2} и полевой θ_{A2} составляющих 2-й гармоники. Естественно, что $t_{A2}(q)$ для всех трёх случаев одинаковы:

$$\begin{aligned} t_{+2}(q) &= \frac{1}{2} mv^2\gamma \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta - \beta^2 \sin^2\theta \right\}, \\ t_{\times 2}(q) &= -i \frac{1}{4} mv^2\gamma \cos\theta \left\{ 1 - \beta^2 \sin^2\theta \right\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Что же касается полевых составляющих $\theta_{A2}(q)$, то для всех трёх случаев они различны, но различны лишь в членах порядка β^2 .

Для струны с массой

$$\begin{aligned} \theta_{+2}^{\text{str}}(q) &= \frac{1}{2} mv^2\gamma \left\{ \left(1 + \frac{2}{3} \beta^2 \right) \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \right\}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\theta_{\times 2}^{\text{str}}(q) = -i \frac{1}{4} mv^2\gamma \cos\theta \left\{ 1 + \frac{2}{3} \beta^2 - \frac{1}{3} \beta^2 \sin^2\theta \right\}.$$

Для заряда в поле магнитного момента

$$\theta_{+2}^M(q) = \frac{1}{2} mv^2\gamma \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta - \frac{1}{3} \beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \right\},$$

$$\theta_{\times 2}^M(q) = -i \frac{1}{4} mv^2\gamma \cos\theta \left\{ 1 - \frac{1}{3} \beta^2 \sin^2\theta \right\}. \quad (3.69)$$

Для заряда в кулоновском поле

$$\begin{aligned} \theta_{+2}^C(q) &= \frac{1}{2} mv^2\gamma \left\{ \left(1 - \frac{4}{3} \beta^2 \right) \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \beta^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \right\}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\theta_{\times 2}^C(q) = -i \frac{1}{4} mv^2\gamma \cos\theta \left\{ 1 - \frac{4}{3} \beta^2 - \frac{1}{3} \beta^2 \sin^2\theta \right\}.$$

Тогда для суммы $T_{A2}(q)$ получаем

$$\begin{aligned} T_{+2}(q) &= \frac{1}{2} mv^2\gamma \left\{ (1 + \delta\beta^2)(1 + \cos^2\theta) - \right. \\ &\quad \left. - \beta^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{3} \cos^2\theta \right) \right\}, \\ T_{\times 2}(q) &= -i \frac{1}{2} mv^2\gamma \cos\theta \left\{ 1 + \delta\beta^2 - \frac{2}{3} \beta^2 \sin^2\theta \right\}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

где параметр $\delta = 1/3, 0, -2/3$ для перечисленных выше трёх случаев.

Полученные выражения обладают следующими важными свойствами:

1. При выключении релятивистской поправки, т.е. при $\beta = 0$, полевые компоненты совпадают с материальными:

$$\theta_{A2}(q) = t_{A2}(q), \quad A = +, \times. \quad (3.72)$$

2. Все приведённые выражения не содержат линейных по β членов и представляют собой разложения по β^2 , если учесть, что и $\gamma = 1 + (1/2)\beta^2$.

3. Поправку $\delta\beta^2$, различную для трёх рассмотренных случаев, можно переместить из фигурных скобок выражений (3.71) и сделать аддитивной добавкой к лоренц-фактору γ , так что $T_{A2}(q)$ приобретают вид

$$\begin{aligned} T_{+2}(q) &= \frac{1}{2} mv^2(\gamma + \delta\beta^2) \times \\ &\quad \times \left\{ 1 + \cos^2\theta - \beta^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{3} \cos^2\theta \right) \right\}, \\ T_{\times 2}(q) &= -i \frac{1}{2} mv^2(\gamma + \delta\beta^2) \cos\theta \left\{ 1 - \frac{2}{3} \beta^2 \sin^2\theta \right\}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Таким образом, для рассмотренных трёх случаев попеченные компоненты $T_{A2}(q)$ ТЭИ обладают одинаковой угловой зависимостью, но различаются величиной амплитуды. Различие обязано добавкам $\delta\beta^2$ того же порядка, что и нерелятивистская кинетическая энергия $(1/2)\beta^2$ массы в единицах mc^2 . Поэтому оно связано с нелокальными свойствами силового поля, удерживающего массу на орбите, и может быть интересным с экспериментальной точки зрения. В этой связи особенно интересно ГИ масс, движущихся по эллиптическим орбитам вокруг общего центра. Такое движение могут испытывать густоты тёмной материи и их ГИ могло бы стать важным источником информации об этих объектах.

4. Гравитационное излучение масс, движущихся по эллиптическим орбитам

4.1. Движение по кеплеровским орбитам

Рассмотрим гравитационное излучение двух точечных масс m_1, m_2 , движущихся по кеплеровским орбитам вокруг общего центра притяжения, находящегося в общем фокусе каждого из эллипсов. Выбрав в плоскости движения декартовую систему координат с осями 1, 2 и началом в общем фокусе, можно описать движение массы m_1 координатами

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \cos\psi, \quad x_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \sin\psi, \quad (4.1)$$

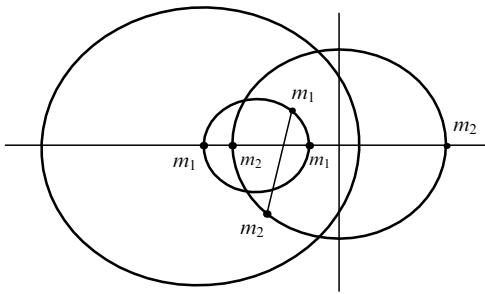


Рис. 1. Эллиптические траектории движения тяжелой m_1 и легкой m_2 масс вокруг общего центра притяжения. Приведены положения масс в перигалактии, апоастре и для угла ψ , лежащего между 0 и $\pi/2$.

а массы m_2 — координатами

$$\xi_1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r \cos \psi, \quad \xi_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r \sin \psi. \quad (4.2)$$

Здесь ψ — угол между направлением на массу m_1 и осью 1, которая направлена из фокуса к массе m_1 в момент её наибольшего сближения с массой m_2 ; r — расстояние между массами, зависящее от угла ψ ,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}, \quad p = a(1 - e^2). \quad (4.3)$$

Параметр p , эксцентриситет e и отношение масс m_1/m_2 полностью определяют орбиты. Таким образом, если $m_1 > m_2$, то более тяжёлая масса m_1 движется по малому эллипсу, более легкая m_2 — по большому эллипсу, а точка с координатами

$$r_1 = r \cos \psi, \quad r_2 = r \sin \psi, \quad (4.4)$$

по ёщё большему эллипсу (см. рис. 1 для случая $m_1 = 2m_2$, $e = 1/2$). Все три эллипса имеют одинаковый эксцентриситет e , а их большие полуоси равны соответственно

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} a, \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2} a, \quad a. \quad (4.5)$$

Угловая скорость движения масс по орбитам определяется уравнением

$$\dot{\psi} = A(1 + e \cos \psi)^2, \quad A = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{p^3}}, \quad (4.6)$$

которое имеет решение

$$At = \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\psi}{2} \right) - \frac{e \sin \psi}{(1 - e^2)(1 + e \cos \psi)}. \quad (4.7)$$

В частных случаях $e = 0$ (окружность) и $e = 1$ (парабола, p конечно и равно $2r_{\min}$) получаем

$$At = \psi, \quad 2At = \tan \frac{\psi}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\psi}{2}. \quad (4.8)$$

Для эллиптических орбит период T и основная частота ω определяются формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}}, \quad (4.9)$$

которая соответствует закону Кеплера — отношение квадратов периодов обращения планет вокруг Солнца равно отношению кубов их больших полуосей.

Как видно из (4.7), связь времени t с углом ψ довольно сложна, если $e \neq 0$. Лагранж ввёл вместо ψ переменную u , связанную с ψ соотношениями

$$\cos \psi = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}, \quad \sin \psi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u}. \quad (4.10)$$

Обратная связь u с ψ даётся этими же формулами с заменой $u \leftrightarrow \psi$, $e \leftrightarrow -e$. Тогда связь времени t и расстояния r с переменной u определяется формулами

$$\omega t = u - e \sin u, \quad r = a(1 - e \cos u). \quad (4.11)$$

Отсюда

$$r_1 = a(\cos u - e), \quad r_2 = a\sqrt{1 - e^2} \sin u. \quad (4.12)$$

Безразмерные переменные $\tau \equiv \omega t$, ψ и u когда-то назывались главной, истинной и эксцентрической аномалиями. Время t и угол ψ монотонно растут с ростом u , а в точках, кратных π , все аномалии совпадают: $\tau = \psi = u = k\pi$. Введение переменной u в описание движения планет привело к появлению функций Бесселя.

Так, описывающие движение по эллипсу функции r_1 , r_2 , гармонические по u , но не по времени t , представляются рядами Фурье по гармоническим функциям времени:

$$\begin{aligned} \sin u &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{ne} J_n(ne) \sin nt, \\ \cos u &= -\frac{1}{2} e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J'_n(ne) \cos nt. \end{aligned}$$

Заметим, что написанные выше формулы предполагают, что движение масс m_1 , m_2 по своим орбитам происходит против часовой стрелки. Для того чтобы перейти к движению по часовой стрелке, в формулах (4.6)–(4.8) нужно изменить знак у времени t . В формулах (4.10)–(4.12) это эквивалентно изменению знака у переменной u .

4.2. Траекторный метод вычисления амплитуд гравитационного излучения

Гравитационное излучение определяется, как мы знаем, пространственными компонентами тензора энергии-импульса (ТЭИ) масс m_1 , m_2 и поля сил, удерживающих их на орбите. Сохраняющийся ТЭИ удовлетворяет соотношению

$$q_i q_j T_{ij}(q) = \frac{q^{02}}{c^2} T_{00}(q), \quad (4.13)$$

в котором $q = (\mathbf{q}, q^0)$ — волновой вектор и частота, пока независимые, а все компоненты $T_{\alpha\beta}(q)$ имеют размерность эрг с. Будем исходить, однако, не из этого уравнения, а из уравнения, полученного дифференцированием его обеих частей по компонентам q_k , q_l волнового вектора:

$$\frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} q_i q_j T_{ij}(q) = \frac{q^{02}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} T_{00}(q). \quad (4.14)$$

Основное наше приближение состоит в замене в правой части уравнения (4.14) $T_{00}(q)$ -компоненты полного ТЭИ компонентой $t_{00}(q)$ ТЭИ масс m_1, m_2 и притом в нерелятивистском приближении. Сначала мы возьмём $t_{00}(q)$ в самом низшем приближении. Затем уточним его включением в t_{00} первой релятивистской поправки. Наконец, мы попытаемся добавить к $t_{00}(q)$ компоненту $\theta_{00}(q)$ ТЭИ поля сил также в нерелятивистском приближении. Так как вклады отдельных масс в t_{00} аддитивны, оставим для простоты дальнейшего изложения только одну из них. Заменяя, таким образом, в правой части $T_{00}(q)$ на

$$t_{00}(q) = mc^2 \int dt \exp [iq^0 t - i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)], \quad (4.15)$$

получим справа

$$\frac{q^{02}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} t_{00}(q) = -q^{02} m \int dt \exp [iq^0 t - i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)] x_k(t) x_l(t). \quad (4.16)$$

Будем искать решение $T_{ij}(q)$ уравнения (4.14) с приближённой правой частью (4.16) подстановкой

$$T_{ij}(q) = t_{ij}(q) + m \int dt \exp (iq^0 t) f(\mathbf{q}\mathbf{x}) (\ddot{x}_i x_j + x_i \ddot{x}_j), \quad (4.17)$$

где

$$t_{ij}(q) = m \int dt \exp [iq^0 t - i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)] \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t) \quad (4.18)$$

— пространственные компоненты ТЭИ массы m в нерелятивистском приближении, а $f(z)$ — неизвестная функция, которую требуется найти. Второй член в формуле (4.17) можно назвать пространственной частью $\theta_{ij}(q)$ ТЭИ силового поля, ускоряющего массу m . Нетрудно показать, что в нерелятивистском приближении вклады $t_{ij}(q)$ и $\theta_{ij}(q)$ совпадают.

Используя приведённые выражения, левую часть уравнения (4.14) можно представить в виде

$$m \int dt \exp (iq^0 t) \left\{ \exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x}) [2\dot{x}_k \dot{x}_l - 2i(\mathbf{q}\mathbf{x})(\dot{x}_k x_l + x_k \dot{x}_l) - x_k x_l (\mathbf{q}\dot{\mathbf{x}})^2] + 2x_k x_l (\mathbf{q}\ddot{\mathbf{x}}) [(\mathbf{q}\mathbf{x}) f''(\mathbf{q}\mathbf{x}) + 2f'(\mathbf{q}\mathbf{x})] + 2(\ddot{x}_k x_l + x_k \ddot{x}_l) [(\mathbf{q}\mathbf{x}) f'(\mathbf{q}\mathbf{x}) + f(\mathbf{q}\mathbf{x})] \right\}. \quad (4.19)$$

Потребуем теперь, чтобы функция $f(z)$ удовлетворяла уравнению

$$z f'(z) + f(z) = \frac{1}{2} \exp (-iz). \quad (4.20)$$

В этом случае

$$z f''(z) + 2f'(z) = -\frac{i}{2} \exp (-iz). \quad (4.21)$$

Тогда левая часть уравнения (4.14) становится такой

$$\begin{aligned} m \int dt \exp (iq^0 t - i\mathbf{q}\mathbf{x}) [2\dot{x}_k \dot{x}_l - 2i(\dot{x}_k x_l + x_k \dot{x}_l) \mathbf{q}\dot{\mathbf{x}} - x_k x_l (\mathbf{q}\dot{\mathbf{x}})^2 - i x_k x_l \mathbf{q}\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{x}_k x_l + x_k \ddot{x}_l] &\equiv \\ &\equiv m \int dt \exp (iq^0 t) \frac{d^2}{dt^2} (x_k x_l \exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Таким образом, если пробная функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению (4.20), то уравнение (4.14) с прибли-

жённой правой частью (4.16) сводится к связи фурье-образа функции $g_{kl}(t, \mathbf{q}) \equiv x_k(t) x_l(t) \exp [-i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)]$ с фурье-образом её второй производной по t :

$$\begin{aligned} m \int dt \exp (iq^0 t) \frac{d^2}{dt^2} (x_k x_l \exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x})) &= \\ &= -q^{02} m \int dt \exp (iq^0 t) x_k x_l \exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Связь (4.23) между фурье-образом функции $g(t)$ и её второй производной $g''(t)$ требует соблюдения условий, приведённых в § 717 3-го тома курса Г.М. Фихтенгольца [23]. В нашем случае они будут выполнены, если вместо периодической функции $g(t)$ рассматривать функцию $g(t) \exp (-et^2)$ с исчезающим малым параметром e . Тогда на интервале времени, много большем периода функции $g(t)$, но малом по сравнению с $1/\sqrt{e}$, эта функция останется периодической и, вместе с тем, будет удовлетворять уравнению (4.23).

Используем в качестве решения уравнения (4.20) функцию

$$f(z) = \frac{1 - \exp (-iz)}{2iz}. \quad (4.24)$$

Тогда тензор $T_{ij}(q)$, определяемый формулой (4.17), будет точным решением уравнения (4.14) с приближённой правой частью (4.16).

Для двух масс m_1, m_2 этот тензор будет иметь вид

$$\begin{aligned} T_{ij}(q) = \int dt \exp (iq^0 t) &\left\{ m_1 [\exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j + \right. \\ &+ f(\mathbf{q}\mathbf{x}) (\ddot{x}_i x_j + x_i \ddot{x}_j)] + \\ &\left. + m_2 [\exp (-i\mathbf{q}\xi) \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j + f(\mathbf{q}\xi) (\ddot{\xi}_i \xi_j + \xi_i \ddot{\xi}_j)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Предполагая, что размеры источника излучения малы по сравнению с длиной волны, разложим $\exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x})$ и $\exp (-i\mathbf{q}\xi)$ в ряды Тейлора и используем связь координат x_i, ξ_i с координатами r_i (см. (4.1), (4.2), (4.4)). Тогда получим

$$\begin{aligned} T_{ij}(q) = \mu \int dt \exp (iq^0 t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} [2(n+1)\dot{r}_i \dot{r}_j + \ddot{r}_i r_j + r_i \ddot{r}_j] \times \\ \times \frac{(-i\mathbf{q}\mathbf{r})^n}{(n+1)!} C_n, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $\mu = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$ — приведённая масса, а

$$C_n = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^{n+1}, \quad (4.27)$$

так что

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}, \quad C_2 = \frac{m_2^3 + m_1^3}{(m_1 + m_2)^3}. \quad (4.28)$$

В дальнейшем ограничимся первыми тремя членами ряда в (4.26).

Введём безразмерные тензоры $Q_A(\tau, e)$, $A = ij, ijk, ijk\ldots$, периодически зависящие от безразмерного времени $\tau = \omega t$, симметричные по первым двум индексам ij , а также по остальным двум или более индексам:

$$\begin{aligned} 2\dot{r}_i \dot{r}_j + \ddot{r}_i r_j + r_i \ddot{r}_j &= v^2 Q_{ij}(\tau, e), \\ (4\dot{r}_i \dot{r}_j + \ddot{r}_i r_j + r_i \ddot{r}_j)r_k &= av^2 Q_{ijk}(\tau, e), \\ (6\dot{r}_i \dot{r}_j + \ddot{r}_i r_j + r_i \ddot{r}_j)r_k r_l &= a^2 v^2 Q_{ijkl}(\tau, e), \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

Здесь $v = a\omega$ — характерная скорость на эллиптической орбите. Тогда

$$T_{ij}(q) = \frac{1}{2} \mu v^2 \int dt \exp(iq^0 t) \left\{ Q_{ij}(\tau, e) - i \frac{1}{2} C_1 a q_k Q_{ijk}(\tau, e) - \frac{1}{6} C_2 a^2 q_k q_l Q_{ijkl}(\tau, e) + \dots \right\}. \quad (4.30)$$

Разлагая функции $Q_A(\tau, e)$ в ряды Фурье по $\cos nt$ или $\sin nt$ соответственно чётному или нечётному числу двоек в A и обозначая коэффициенты Фурье через $F_A(n, e)$,

$$\begin{aligned} Q_A(\tau, e) &= \sum_{n \geq 0} F_A(n, e) \begin{cases} \cos nt \\ \sin nt \end{cases}, \\ F_A(n, e) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau Q_A(\tau, e) \begin{cases} \cos nt \\ \sin nt \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

получаем после интегрирования по времени t

$$\begin{aligned} T_{ij}(q) &= \frac{1}{2} \mu v^2 \sum_{n \geq 0} \pi \delta(q^0 - n\omega) \times \\ &\times \left\{ F_{ij} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} - i \frac{1}{2} C_1 a q_k F_{ijk} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} C_2 a^2 q_k q_l F_{ijkl} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Здесь

$$F_A(n, e) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

означает, что $F_A(n, e)$ с чётным числом двоек в A умножается на 1, а с нечётным — на i . В формуле (4.32) предполагается, что $q^0 > 0$, а также, что движение масс по орбитам совершается против часовой стрелки. Для перехода к движению по часовой стрелке нужно изменить знак у τ в функциях $Q_A(\tau, e)$. Согласно разложению (4.31) это приведёт к изменению знака у коэффициентов Фурье $F_A(n, e)$ с нечётным числом двоек в индексе A .

Так как для гравитонов $|\mathbf{q}| = q^0/c$, то произведение $a q_k = n \beta e_k$, где $\beta = v/c$, а e_k — компоненты единичного вектора \mathbf{e} вдоль волнового вектора гравитона \mathbf{q} :

$$e_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad e_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad e_3 = \cos \theta. \quad (4.33)$$

Напомним, что в (4.32) входят только первые две компоненты этого вектора.

Таким образом, (4.32) — это разложение $T_{ij}(q)$ по степеням нерелятивистской эффективной скорости $\beta = v/c \ll 1$, возникающим в результате разложения по волновому вектору.

Вследствие вещественности ТЭИ в x -пространстве его фурье-образ должен удовлетворять условию

$$T_{ij}(q) = T_{ij}^*(-q). \quad (4.34)$$

Полученное для $q^0 > 0$ выражение (4.32) автоматически будет удовлетворять этому условию, если в выражении для интеграла по времени

$$\begin{aligned} \int dt \exp(iq^0 t) \begin{cases} \cos nt \\ \sin nt \end{cases} &= \pi \delta(q^0 - n\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \\ &+ \pi \delta(q^0 + n\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

удержать не только первое, но и второе слагаемое, работающее при $q^0 < 0$. Удержание обоих слагаемых эквивалентно замене в выражении (4.32) суммы по положительным $n \geq 0$ суммой по всем целым $n \geq 0$. Такая эквивалентность следует из чётной (нечётной) зависимости от n функций $P_A(n)$ с чётным (нечётным) числом двоек в A .

Таким образом, обозначая выражение в фигурных скобках (4.32) через $G_{ij}(n, a\mathbf{q})$, можно представить $T_{ij}(q)$ в двух разных формах

$$\begin{aligned} T_{ij}(q) &= \frac{1}{2} \mu v^2 \sum_{n \geq 0} \pi \delta(q^0 - n\omega) G_{ij}(n, a\mathbf{q}) = \\ &= \frac{1}{2} \mu v^2 \sum_{n \geq 0} \pi [\delta(q^0 - n\omega) G_{ij}(n, a\mathbf{q}) + \\ &+ \delta(q^0 + n\omega) G_{ij}^*(n, -a\mathbf{q})], \end{aligned} \quad (4.36)$$

пригодных для любого знака q^0 и удовлетворяющих (4.34). В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать только физически интересный случай $q^0 > 0$.

4.3. Спектр и угловое распределение излучения

Спектр и угловое распределение излучения определяются формулой

$$dE_{\mathbf{q}} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(\frac{1}{2} |T_+(q)|^2 + 2|T_{\times}(q)|^2 \right) \frac{d^3 q}{16\pi^3}, \quad (4.37)$$

где компоненты T_+ , T_{\times} связаны с компонентами T_{11} , T_{22} и T_{12} формулами

$$\begin{aligned} T_+ &= (\sin^2 \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi) T_{11} - \\ &- 2 \sin \varphi \cos \varphi (1 + \cos^2 \theta) T_{12} + (\cos^2 \varphi - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) T_{22}, \\ T_{\times} &= \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi (T_{11} - T_{22}) - \cos \theta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) T_{12}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Представим эти компоненты в виде, аналогичном (4.36):

$$T_A(q) = \frac{1}{2} \mu v^2 \sum_{n>0} \pi \delta(q^0 - n\omega) G_A(n, a\mathbf{q}), \quad A = +, \times.$$

Тогда

$$\begin{aligned} dE_{\mathbf{q}} &= t \frac{G(\mu v^2)^2}{16\pi c^2} \times \\ &\times \sum_{n>0} \delta(q^0 - n\omega) \left(\frac{1}{2} |G_+(n)|^2 + 2|G_{\times}(n)|^2 \right) d^3 q. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Здесь t — время излучения, которое должно быть много большим периода $T = 2\pi/\omega$. Тогда $dE_{\mathbf{q}}/t$ — спектральное и угловое распределение средней мощности излучения.

Несложные, но громоздкие вычисления приводят к следующему результату для углового распределения n -й гармоники:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |G_+(n)|^2 + 2|G_{\times}(n)|^2 &= \frac{1}{2} |G_{11}|^2 (1 - e_1^2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} |G_{22}|^2 (1 - e_2^2)^2 + 2|G_{12}|^2 (1 - e_1^2)(1 - e_2^2) + \\ &+ \operatorname{Re} G_{11} G_{22}^* (e_1^2 e_2^2 - e_3^2) - 2 \operatorname{Re} G_{11} G_{12}^* e_1 e_2 (1 - e_1^2) - \\ &- 2 \operatorname{Re} G_{22} G_{12}^* e_1 e_2 (1 - e_2^2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Напомним, что тензор G_{ij} определяется выражением в фигурных скобках (4.32), зависящим от шести независимых безразмерных величин: номера гармоники n , экс-

центричеситета e , отношения масс m_1/m_2 , скорости $\beta = v/c$ и углов θ, φ . Образованные из трёх комплексных компонент тензора G_{ij} шесть билинейных комбинаций, входящих в угловое распределение (4.40), таковы:

Для $ij = 11, 22$ и 12

$$|G_{ij}(n, \beta)|^2 = F_{ij}^2 \pm C_1 \beta_n e_2 F_{ij} F_{ij2} + \\ + \frac{1}{4} C_1^2 \beta_n^2 (e_1^2 F_{ij1}^2 + e_2^2 F_{ij2}^2) - \frac{1}{3} C_2 \beta_n^2 F_{ij} (e_1^2 F_{ij11} + e_2^2 F_{ij22}), \quad (4.41)$$

здесь и ниже $\beta_n = n\beta$, знак $+$ при втором члене соответствует индексам $ij = 11$ или 22 , а знак $-$ соответствует индексу $ij = 12$.

$$\operatorname{Re} G_{11}(n, \beta) G_{22}^*(n, \beta) =$$

$$= F_{11} F_{22} + \frac{1}{2} C_1 \beta_n e_2 (F_{112} F_{22} + F_{11} F_{222}) + \\ + \frac{1}{4} C_1^2 \beta_n^2 (e_1^2 F_{111} F_{221} + e_2^2 F_{112} F_{222}) - \\ - \frac{1}{6} C_2 \beta_n^2 [e_1^2 (F_{1111} F_{22} + F_{11} F_{2211}) + \\ + e_2^2 (F_{1122} F_{22} + F_{11} F_{2222})]. \quad (4.42)$$

Для $ii = 11$ или 22

$$\operatorname{Re} G_{ii}(n, \beta) G_{12}^*(n, \beta) = \frac{1}{2} C_1 \beta_n e_1 (F_{ii} F_{121} - F_{ii1} F_{12}) + \\ + \frac{1}{4} C_1^2 \beta_n^2 e_1 e_2 (F_{ii1} F_{122} + F_{ii2} F_{121}) - \\ - \frac{1}{3} C_2 \beta_n^2 e_1 e_2 (F_{ii} F_{1212} + F_{ii12} F_{12}). \quad (4.43)$$

Заметим, что если в выражении для $\operatorname{Re} G_{11} G_{22}^*$ заменить $F_{22}, F_{22k}, F_{22kl}$ на $F_{11}, F_{11k}, F_{11kl}$, то оно перейдёт в $|G_{11}|^2$, как и должно быть. Аналогично, замена $F_{11}, F_{11k}, F_{11kl}$ на $F_{22}, F_{22k}, F_{22kl}$ переводит это выражение в $|G_{22}|^2$.

4.4. Асимметрия углового распределения

в случае $m_1 \neq m_2, e \neq 0$

В случае $m_1 > m_2$ и $e \neq 0$ ось 1 направлена из общего фокуса в сторону большего эллипса, по которому движется меньшая масса m_2 . В этом случае угловое распределение излучения асимметрично относительно направления по и против оси 2. Для азимутальных углов $\varphi = \pm\pi/2$, когда $e_1 = 0$, а $e_2 = \pm \sin \theta$, получаем из (4.40)–(4.43):

$$\frac{1}{2} |G_+|^2 + 2|G_\times|^2 = \frac{1}{2} |G_{11}|^2 + \frac{1}{2} |G_{22}|^2 \cos^4 \theta + \\ + 2|G_{12}|^2 \cos^2 \theta - 2 \operatorname{Re} G_{11} G_{22}^* \cos^2 \theta. \quad (4.44)$$

В билинейных комбинациях тензора G_{ij} линейные по $C_1 \beta$ члены для углов $\varphi = \pm\pi/2$ различаются знаком, в то время как остальные не меняются. Поэтому разность угловых распределений для углов $\varphi = \pm\pi/2$ отлична от нуля:

$$\left(\frac{1}{2} |G_+|^2 + 2|G_\times|^2 \right)_{\varphi=\pi/2} - \left(\frac{1}{2} |G_+|^2 + 2|G_\times|^2 \right)_{\varphi=-\pi/2} = \\ = C_1 \beta_n \sin \theta [F_{11} F_{112} + F_{22} F_{222} \cos^4 \theta - \\ - 2(F_{11} F_{222} + F_{22} F_{112} + 2F_{12} F_{122}) \cos^2 \theta]. \quad (4.45)$$

Этот замечательный релятивистский эффект (параметр $\beta_n = n\beta = nv/c$ содержит скорость света) вызван тем, что при $m_1 > m_2$ и $e \neq 0$ массы имеют наибольшие скорости в области их наибольшего сближения (т.е. вблизи периастра), так что ГИ по существу формируется в этой области. При выбранном нами направлении движения масс против часовой стрелки скорость меньшей массы m_2 в периастре направлена против оси 2, а большей массы m_1 — по оси 2. Поскольку скорость и кинетическая энергия лёгкой массы в m_1/m_2 раз превосходят скорость и кинетическую энергию тяжёлой, то ГИ системы двух масс обязана скорее лёгкой массе, чем тяжёлой, и формируясь в области наибольшего их сближения, более интенсивно в направлении скорости лёгкой массы.

Заметим, что если изменить направление движения масс на противоположное, т.е. на движение по часовой стрелке, то, как мы знаем из обсуждения ниже формулы (32), коэффициенты Фурье $F_A(n, e)$ с нечётным числом двоек в индексе A изменят знак. В этом случае изменят знак и разность угловых распределений для углов $\varphi = \pm\pi/2$ (см. (4.45)), так как скорость лёгкой массы в области наибольшего сближения с тяжёлой будет направлена теперь по оси 2, а не против неё.

Заметим также, что асимметрия исчезает в случае равных масс, так как $C_1 = 0$, а также в случае нулевого эксцентриситета $e = 0$. В этом последнем случае коэффициенты F_{ij} отличны от нуля только для квадрупольной гармоники $n = 2$, в то время как коэффициенты F_{ijk} — только для гармоник $n = 1$ и $n = 3$.

4.5. Спектр как функция полярного угла, интегральный спектр

Интегрируя по φ угловое распределение n -й гармоники (4.40) получаем распределение интенсивности излучения этой гармоники по углу θ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} |G_+(n)|^2 + 2|G_\times(n)|^2 \right) = \\ = \frac{1}{2} I_1 (F_{11}^2 + F_{22}^2) + 2I_2 F_{12}^2 + I_3 F_{11} F_{22} + \\ + \frac{1}{4} C_1^2 \beta_n^2 \left[\frac{1}{2} I_4 (F_{111}^2 + F_{222}^2) + \frac{1}{2} I_5 (F_{112}^2 + F_{221}^2) + \right. \\ \left. + 2I_6 (F_{121}^2 + F_{122}^2) + I_7 (F_{111} F_{221} + F_{112} F_{222}) - \right. \\ \left. - 2I_8 (F_{111} F_{112} + F_{112} F_{121} + F_{221} F_{122} + F_{222} F_{121}) \right] - \\ - \frac{1}{3} C_2 \beta_n^2 \left[\frac{1}{2} I_4 (F_{11} F_{1111} + F_{22} F_{2222}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} I_5 (F_{11} F_{1122} + F_{22} F_{2211}) + 2I_6 (F_{12} F_{1211} + F_{12} F_{1222}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} I_7 (F_{1111} F_{22} + F_{11} F_{2211} + F_{1122} F_{22} + F_{11} F_{2222}) - \right. \\ \left. - 2I_8 (F_{11} F_{1212} + F_{1112} F_{12} + F_{22} F_{1212} + F_{2212} F_{12}) \right]. \quad (4.46)$$

В то время как коэффициенты Фурье $F_A(n, e)$ зависят от номера гармоники n и эксцентриситета e , зависимость от угла θ содержится в полиномах $I_r(s)$ чётной степени по

$$s = \sin \theta$$

$$\begin{aligned} I_1(s) &= 2\pi \left(1 - s^2 + \frac{3}{8} s^4 \right), \\ I_2(s) &= 2\pi \left(1 - s^2 + \frac{1}{8} s^4 \right), \\ I_3(s) &= 2\pi \left(-1 + s^2 + \frac{1}{8} s^4 \right), \\ I_4(s) &= 2\pi \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{3}{4} s^4 + \frac{5}{16} s^6 \right), \\ I_5(s) &= 2\pi \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{4} s^4 + \frac{1}{16} s^6 \right), \\ I_6(s) &= 2\pi \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} s^4 + \frac{1}{16} s^6 \right), \\ I_7(s) &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} s^4 + \frac{1}{16} s^6 \right), \\ I_8(s) &= 2\pi \left(\frac{1}{8} s^4 - \frac{1}{16} s^6 \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Заметим, что угловое распределение релятивистской поправки определяется пятью полиномами $I_r(s)$ 6-го порядка по s , равными нулю при $\theta = 0$ и π , в то время как угловое распределение основных, нерелятивистских членов определяется тремя полиномами 4-го порядка, отличными от нуля в этих точках. Таким образом, релятивистская поправка не меняет интенсивности излучения при $\theta = 0$ и π . Обратим также внимание на интересную симметрию выражений в двух квадратных скобках релятивистской поправки. Функция во второй квадратной скобке, составленная из членов типа $F_{ij}F_{mnkl}$, переходит в функцию первой квадратной скобки, если в каждом её члене последний индекс четырёхиндексного коэффициента убрать и сделать его третьим индексом двухиндексного коэффициента, т.е. $F_{ijl}F_{mnk}$ заменить на $F_{ijl}F_{mnl}$. Ясно, что обратная перестановка $F_{ijl}F_{mnk} \rightarrow F_{ijl}F_{mnkl}$ меняет функцию в первой квадратной скобке на функцию во второй.

Оставшееся интегрирование по углу θ приводит к спектру

$$\begin{aligned} \int d\Omega \left(\frac{1}{2} |G_+(n)|^2 + 2|G_\times(n)|^2 \right) = \\ = \frac{16\pi}{15} \left\{ F_{11}^2 + F_{22}^2 + 3F_{12}^2 - F_{11}F_{22} + \right. \\ + \frac{1}{28} C_1^2 \beta_n^2 [F_{111}^2 + F_{222}^2 + 3(F_{112}^2 + F_{221}^2) + \\ + 5(F_{121}^2 + F_{122}^2) - F_{111}F_{221} - F_{112}F_{222} - \\ - 2(F_{112}F_{121} + F_{111}F_{122} + F_{222}F_{121} + F_{221}F_{122})] - \\ - \frac{1}{21} C_2 \beta_n^2 [F_{11}F_{1111} + F_{22}F_{2222} + \\ + 3(F_{11}F_{1122} + F_{22}F_{2211}) + 5F_{12}(F_{1211} + F_{1222}) - \\ - \frac{1}{2} (F_{1111}F_{22} + F_{11}F_{2211} + F_{1122}F_{22} + F_{11}F_{2222}) - \\ \left. - 2(F_{11}F_{1212} + F_{1112}F_{12} + F_{22}F_{1212} + F_{2212}F_{12}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Спектр, разумеется, сохраняет отмеченную выше перестановочную симметрию выражений в двух квадратных скобках релятивистской поправки.

Используя это выражение в формуле (4.39) и проводя оставшееся интегрирование по $q^2 dq$, получаем полную энергию \mathcal{E} , излучённую за время t ,

$$\mathcal{E} = t \frac{G(\mu v^2)^2 \omega^2}{15c^5} \sum_{n>0}^{\infty} n^2 \left\{ \dots \right\}, \quad (4.49)$$

а также мощность излучения $P = \mathcal{E}/t$. Здесь в фигурных скобках заключено то же самое выражение, что и в фигурных скобках формулы (4.48).

Если оставить в фигурных скобках только первые четыре члена, то выражение для мощности n -й гармоники

$$P(n) = \frac{G(\mu v^2)^2 \omega^2}{15c^5} n^2 (F_{11}^2 + F_{22}^2 + 3F_{12}^2 - F_{11}F_{22}) \quad (4.50)$$

в точности совпадёт с $P(n)$, полученным в работе Петерса и Мэтьюса [24] (формулы (19), (20)). При сравнении следует учесть, что $4J_n(ne) = F_{11} + F_{22}$, $n \neq 0$. Коэффициенты Фурье $F_A(n, e)$, $A = ij, ijk, ikl$, а также важнейшие их свойства приведены в приложении.

Петерс и Мэтьюс обращают внимание на то, что средняя мощность излучения, т.е. мощность $P(n)$, про-суммированная по всем гармоникам, оказывается круто возрастающей функцией e при $e \rightarrow 1$ (см. формулу (16) в [24]). В действительности, предел $e \rightarrow 1$ при постоянном a нефизичен. В этом случае максимальная и минимальная скорости каждой из масс на эллиптических орбитах стремятся к ∞ и 0 соответственно. Так, для массы m_2

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)(1+e)}{a(1-e)}} \Big|_{e \rightarrow 1} \rightarrow \infty, \\ v_{\min} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)(1-e)}{a(1+e)}} \Big|_{e \rightarrow 1} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Для того чтобы не вступить в противоречие с теорией относительности, переход к пределу $e \rightarrow 1$ следует соверша-ть при постоянном $p = a(1 - e^2)$. В этом случае эллипс переходит в параболу, средняя мощность $\langle P \rangle$ стремится к нулю, так как период $T \rightarrow \infty$, а полная энергия, излучённая за время T , конечна, равна

$$\mathcal{E} = \frac{64\pi}{5} \left(\frac{G\mu^2}{p} \right) \left(\frac{v_*}{c} \right)^5 \left(1 + e^2 \frac{73}{24} + e^4 \frac{37}{96} \right), \quad (4.52)$$

и стремится к конечной энергии

$$\mathcal{E} = \frac{170\pi}{3} \left(\frac{G\mu^2}{p} \right) \left(\frac{v_*}{c} \right)^5, \quad v_* = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{p}}, \quad (4.53)$$

излучённой с обеих параболических орбит, принадлежа-щих массам m_1, m_2 . Здесь v_* — эффективная скорость на орбите, а максимальная не превышает $2v_*$. Ясно, что нерелятивистское рассмотрение справедливо, пока $v_* \ll c$. При $v_* = c$ параметр $p = G(m_1 + m_2)/c^2$, т.е. становится удвоенным гравитационным (шварцшиль-довским) радиусом системы двух масс, а излучённая энергия \mathcal{E} на два порядка превышает энергию взаимодей-ствия двух масс. Заметим, что при $e \rightarrow 1$ и конечном p

частота ω основной гармоники стремится к нулю, в то время как максимальная угловая частота $\dot{\psi}_{\max}$ остаётся конечной, а их отношение

$$\frac{\dot{\psi}_{\max}}{\omega} = \sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}}$$

определяет максимум в распределении гармоник по n .

4.6. Уточнение траекторного метода

Как упоминалось в разделе 4.2, формула (4.32) — это разложение $T_{ij}(q)$ по степеням нерелятивистской скорости $\beta = v/c \ll 1$ и, одновременно, по степеням волнового вектора \mathbf{q} . Однако, удерживая в фигурных скобках (4.32) члены порядка β^2 , мы должны уточнить и приближённое выражение (4.16), использованное в правой части уравнения (4.14). Заменим $t_{00}(q)$ его точным выражением

$$t_{00}(q) = mc^2 \int dt \exp [iq^0 t - i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)] \gamma(t), \quad (4.54)$$

в котором, однако, для лоренц-фактора $\gamma(t)$ удержим только низший член разложения $\sim \beta^2$:

$$\gamma(t) \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2(t). \quad (4.55)$$

В этом случае правая часть уравнения (4.14) модифицируется и примет форму (4.16) с γ -фактором под интегралом,

$$\begin{aligned} \frac{q^{02}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} t_{00}(q) &= \\ &= -q^{02} m \int dt \exp [iq^0 t - i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)] \gamma(t) x_k(t) x_l(t), \end{aligned} \quad (4.56)$$

а решение уравнения (4.14) для $T_{ij}(q)$ примет вид

$$\begin{aligned} T_{ij}(q) &= m \int dt \exp (iq^0 t) \left\{ \gamma \dot{x}_i \dot{x}_j \exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x}) + \right. \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} \gamma (\ddot{x}_i x_j + x_i \ddot{x}_j) + \dot{\gamma} (\dot{x}_i x_j + x_i \dot{x}_j) \right] \frac{\exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x}) - 1}{(-i\mathbf{q}\mathbf{x})^2} + \\ &\quad \left. + \dot{\gamma} x_i x_j \frac{\exp (-i\mathbf{q}\mathbf{x}) - 1 + i\mathbf{q}\mathbf{x}}{(-i\mathbf{q}\mathbf{x})^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

(ср. с (4.17), (4.18)). В самом деле, для такого тензора уравнение (4.14) с приближённой модифицированной правой частью (4.56) сводится к связи фурье-образа функции $\gamma(t) x_k(t) x_l(t) \exp [-i\mathbf{q}\mathbf{x}(t)]$ с фурье-образом её второй производной по t независимо от того, используется ли для γ -фактора его приближённое (4.55) или точное значение (ср. с (4.23)).

Используя снова малость отношения размеров излучающей системы к длине волны, т.е. малость $\mathbf{q}\mathbf{x}$, представим выражение в фигурных скобках с точностью до членов порядка $v^2 \beta^2$. Тогда получим

$$\begin{aligned} T_{ij}(q) &= \frac{1}{2} m \int dt \exp (iq^0 t) \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{d^2}{dt^2} (\gamma x_i x_j) - \frac{1}{2} i\mathbf{q}\mathbf{x} (4\dot{x}_i \dot{x}_j + \ddot{x}_i x_j + x_i \ddot{x}_j) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} (\mathbf{q}\mathbf{x})^2 (6\dot{x}_i \dot{x}_j + \ddot{x}_i x_j + x_i \ddot{x}_j) \right\}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Как и следовало ожидать, γ -фактор проник только в часть, не зависящую от волнового вектора \mathbf{q} , так как члены, зависящие от \mathbf{q} , уже порядка $v^2 \beta$ и $v^2 \beta^2$. В результате для системы двух масс тензор $T_{ij}(q)$ представляется в форме (4.32), где F_{ij} заменяется на \tilde{F}_{ij} ,

$$\tilde{F}_{ij}(n, e) = F_{ij}(n, e) + \frac{1}{2} C_2 \beta^2 f_{ij}(n, e), \quad (4.59)$$

причём $\beta = v/c = a\omega/c \ll 1$, а коэффициент Фурье

$$f_{ij}(n, e) = -\frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \frac{r_i r_j (\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2)}{a^2 v^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos nt \\ \sin nt \end{array} \right\}. \quad (4.60)$$

Явные выражения всех коэффициентов Фурье вместе с их свойствами приведены в приложении. Используя их, можно написать явные выражения поляризационных амплитуд

$$T_{An}(q) = \frac{1}{4} \mu v^2 G_A(n, q), \quad A = +, \times,$$

n -й гармоники, полученных траекторным методом в β^2 -приближении без учёта θ_{00} -компоненты ТЭИ силового поля. В частном случае $e = 0$ и $m_2 \ll m_1$, когда $C_2 = 1$, для амплитуд 2-й гармоники получаем

$$\begin{aligned} T_{+2}^{\text{trj}}(q) &= \\ &= \frac{1}{2} \mu v^2 \gamma \left\{ 1 + \cos^2 \theta - \beta^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \right) \right\} \exp(2i\varphi), \\ T_{\times 2}^{\text{trj}}(q) &= -i \frac{1}{2} \mu v^2 \gamma \cos \theta \left\{ 1 - \frac{2}{3} \beta^2 \sin^2 \theta \right\} \exp(2i\varphi) \end{aligned} \quad (4.61)$$

(ср. с (3.73), где $\varphi = 0$). Эти амплитуды совпадают с амплитудами ГИ заряда в поле магнитного момента. По-видимому, из-за сильного спадания этого поля его нелокальные свойства проявляются в амплитудах ГИ в членах более высокого порядка, чем β^2 .

Обсудим теперь замену F_{ij} на \tilde{F}_{ij} в членах, билинейных по F_{ij} , содержащихся, например, в выражениях (4.41), (4.42), (4.46), (4.48), (4.49). Такая замена означает, что

$$\begin{aligned} F_{ij}^2 &\rightarrow F_{ij}^2 + C_2 \beta^2 F_{ij} f_{ij}, \\ F_{11} F_{22} &\rightarrow F_{11} F_{22} + \frac{1}{2} C_2 \beta^2 (F_{11} f_{22} + F_{22} f_{11}). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Таким образом, в упомянутых выражениях появляются дополнительные члены порядка β^2 , линейные по $f_{ij}(n, e)$. В членах, линейных по F_{ij} , но билинейных по коэффициентам Фурье (таких как $F_{ij} F_A$, $A = mnk, mnkl$), содержащихся в выражениях (4.41)–(4.43), (4.45), (4.46), (4.48), (4.49), замену (4.59) проводить не следует, так как это приводило бы к превышению точности — к появлению членов порядка β^3, β^4 .

Итак, траекторный метод позволяет находить поперечные амплитуды ГИ с членами $\sim \beta^2$, используя лишь компоненту $t_{00}(q)$ ТЭИ масс. Однако мы знаем по трём примерам с движением массы по одной и той же окружности, но под действием разных силовых полей, что эти поля приводят к разным добавкам порядка β^2 к лоренц-фактору, определяющему амплитуды поперечных компонент T_+ , T_\times (см. (3.73)). Поскольку γ — это кинетическая энергия массы в единицах mc^2 , то добавка к

ней того же порядка, что и нерелятивистская кинетическая энергия $(1/2)\beta^2$, может рассматриваться как эффективная энергия силового поля, участвующая в ГИ. Продемонстрируем на примере струны с массой учёт этой энергии траекторным методом, используя в правой части уравнения (4.14) помимо компоненты $t_{00}(q)$ компоненту $\theta_{00}(q)$ ТЭИ силового поля.

4.7. Пример учёта энергии силового поля

Применим траекторный подход к вычислению гравитационного излучения струны длины r с одним закреплённым концом и массой m на другом конце. Добавим к компоненте $t_{00}(q)$ ТЭИ массы компоненту $\theta_{00}(q, v)$ ТЭИ струны (используем обозначение формулы (3.47)). Согласно разделу 3.3 она равна

$$\begin{aligned} \theta_{00}(q, v) &= \mu \int dt \exp(iq^0 t) \times \\ &\times \int_0^r \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - (\omega\sigma/c)^2}} \exp[-iq\mathbf{x}(\tau, \sigma)] = \\ &= \frac{mv^2\gamma^2}{\beta} \int dt \exp(iq^0 t) \int_0^{\arcsin\beta} d\alpha \exp\left[-i\frac{\sin\alpha}{\beta} \mathbf{qr}(t)\right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Последняя формула получена переходом от переменной σ к безразмерной переменной α ,

$$\sigma = \frac{\sin\alpha}{\beta} r, \quad (4.64)$$

так что показатель экспоненциальной функции в интегrale по α приобретает форму

$$-iq\mathbf{x}(\tau, \sigma) = -i \frac{\sin\alpha}{\beta} \mathbf{qr}(t), \quad (4.65)$$

в которой $r_1 = r \cos\omega t$, $r_2 = r \sin\omega t$ — координаты конца струны с массой. Мы воспользовались также связью (3.40) между натяжением струны и скоростью $v = \omega r$ её конца и выбрали направление вращения против часовой стрелки.

Тогда добавочный член в правой части уравнения (4.14) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{q^{02}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} \theta_{00}(q, v) &= -q^{02} m \beta \gamma^2 \int dt \exp(iq^0 t) \times \\ &\times \int_0^{\arcsin\beta} d\alpha \left(\frac{\sin\alpha}{\beta}\right)^2 \exp\left(-i\frac{\sin\alpha}{\beta} \mathbf{qr}\right) r_k(t) r_l(t). \end{aligned} \quad (4.66)$$

До сих пор никаких предположений о величине скорости, т.е. параметре $\beta = v/c$, не сделано.

Однако мы развиваем траекторный метод вычисления амплитуд излучения $T_+(q)$, $T_\times(q)$ в нерелятивистском приближении с учётом релятивистских поправок порядка β^2 . Найдём в этом приближении полученное выражение (4.66). Так как $\mathbf{qr} \sim \beta$, то удерживая в разложении экспоненциальной функции три первых члена и вычисляя соответствующие интегралы по α ,

$$\int_0^{\arcsin\beta} d\alpha \left(\frac{\sin\alpha}{\beta}\right)^k = \frac{\beta}{k+1} \left(1 + \frac{k+1}{2(k+3)} \beta^2 + \dots\right), \quad k = 2, 3, 4,$$

получаем для добавочного члена (4.66) выражение

$$\begin{aligned} \frac{q^{02}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} \theta^{00}(q, v) &= \\ &= -q^{02} m \beta^2 \gamma^2 \frac{1}{3} \int dt \exp(iq^0 t) r_k(t) r_l(t) \times \\ &\times \left[1 + \frac{3}{10} \beta^2 - i \frac{3}{4} \mathbf{qr} + \frac{3}{10} (\mathbf{qr})^2\right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Сравнивая его с основным выражением для правой части уравнения (4.14), использующим $t^{00}(q)$ -компоненту,

$$\begin{aligned} \frac{q^{02}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} t^{00}(q) &= \\ &= -q^{02} m \gamma \int dt \exp(iq^0 t) r_k(t) r_l(t) \left[1 - i\mathbf{qr} - \frac{1}{2} (\mathbf{qr})^2\right], \end{aligned} \quad (4.68)$$

видим, что выражение (4.67) составляет $(1/3)\beta^2$ по отношению к (4.68) и, таким образом, получено с превышением точности — в нём можно положить $\gamma = 1$, а в квадратной скобке опустить все члены, кроме 1. Тогда учёт добавки к амплитудам (4.61), полученным траекторным методом с помощью лишь компоненты $t^{00}(q)$ материального ТЭИ, эквивалентен замене в этих амплитудах лоренц-фактора γ множителем $\gamma + (1/3)\beta^2$:

$$\gamma \rightarrow \gamma + \frac{1}{3} \beta^2 = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{1}{3} \beta^2 = 1 + \frac{5}{6} \beta^2, \quad (4.69)$$

после чего они в точности совпадают с амплитудами струны, приведёнными в (3.73), $\delta = 1/3$. Добавка $(1/3)\beta^2$ к $\gamma = 1 + (1/2)\beta^2$, т.е. к кинетической энергии массы в единицах mc^2 , играет роль эффективной энергии силового поля, участвующего в ГИ.

Рассмотренные ранее релятивистские амплитуды ГИ для трёх случаев — струны, заряда в поле магнитного момента и заряда в кулоновском поле — в β^2 -приближении отличались друг от друга лишь членами порядка β^2 , добавленными к лоренц-фактору $\gamma = 1 + (1/2)\beta^2$:

$$\begin{aligned} T_{+2}(q) &= \frac{1}{2} mv^2 (\gamma + \delta\beta^2) \times \\ &\times \left\{1 + \cos^2\theta - \beta^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{3} \cos^2\theta\right)\right\}, \\ T_{\times 2}(q) &= -i \frac{1}{2} mv^2 (\gamma + \delta\beta^2) \cos\theta \left\{1 - \frac{2}{3} \beta^2 \sin^2\theta\right\}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

т.е. различались значением параметра δ , равным $1/3$, 0 , $-2/3$ для этих случаев. Это означает, что нелокальность различных силовых полей,двигающих точечную массу по одной и той же заданной траектории, проявляется в амплитудах T_+ , T_\times слабо — лишь в членах $\sim \beta^2$. В то же время их локальное воздействие на частицу одинаково и хорошо передаётся траекторным методом, учитывющим лишь локальную компоненту $t^{00}(q)$ материального ТЭИ и сохранение полного ТЭИ.

Итак, в случае круговой орбиты траекторный метод позволяет найти главные члены амплитуд $T_+(q)$, $T_\times(q)$ всех гармоник. При этом для квадрупольной гармоники релятивистские поправки $\sim \beta^2$ отражают как локальное, так и нелокальное влияние силового поля. Первые находятся траекторным методом точно, а вторые тре-

буют привлечения компоненты θ^{00} ТЭИ силового поля в правой части уравнения (4.14).

Для движения по эллиптическим траекториям траекторный метод позволяет найти в β^2 -приближении амплитуды T_+, T_\times для всех гармоник, используя в правой части уравнения (4.14) t_{00} -компоненту ТЭИ масс, а нелокальные эффекты силового поля, как и в случае круговых орбит, позволяет учесть в виде добавок порядка β^2 к главным коэффициентам Фурье $F_{ij}(n, e)$, не связанным с волновым вектором \mathbf{q} гравитона.

5. Гравитационное излучение заряда при пролётах через кулоновское поле и поле магнитного момента

5.1. Пролёт заряда через кулоновское поле

Траектория заряда e , пролетающего мимо кулоновского центра с зарядом e' , является плоской кривой, которую можно описать параметрическими уравнениями

$$x_1(\xi) = r(\xi) \cos \varphi(\xi), \quad x_2(\xi) = r(\xi) \sin \varphi(\xi), \quad (5.1)$$

$$t(\xi) = \frac{b}{(1 - v^2)^{1/2}} \left(\sinh \xi + \frac{\varkappa}{\gamma^2} \xi \right),$$

где r — расстояние между зарядом и центром, φ — угол отклонения от оси симметрии (ось 1), t — время,

$$r(\xi) = a + b \cosh \xi, \quad (5.2)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{(1 - v^2)^{1/2}} \arcsin \frac{(1 - \varkappa^2)^{1/2} \sinh \xi}{\cosh \xi + \varkappa}.$$

Эти формулы получены методом, приведённым в § 39 монографии [6].

Движение заряда характеризуется тремя независимыми параметрами: размерным параметром удара β , безразмерным лоренц-фактором v заряда на бесконечности и безразмерным параметром

$$v = \frac{\alpha}{Mc}, \quad (5.3)$$

равным отношению произведения зарядов $\alpha = ee'/4\pi$ к моменту импульса частицы M , умноженному на скорость света; все остальные параметры являются их функциями:

$$a = \frac{v}{(1 - v^2)^{1/2}} \beta, \quad b = \beta \left(1 + \frac{v^2}{\gamma^2 - 1} \right)^{1/2}, \quad \varkappa = \frac{a}{b}. \quad (5.4)$$

Мы рассматриваем случай отталкивания, т.е. $v > 0$. Распространение на случай притяжения довольно просто. Окончательная формула (5.31) справедлива для обоих знаков v .

Приведём также выражение для угла рассеяния:

$$\chi = \pi - [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)] = \pi - \frac{2}{(1 - v^2)^{1/2}} \arccos \varkappa. \quad (5.5)$$

Рассмотрим прежде всего спектр ЭМИ заряда. Будем характеризовать направление волнового вектора \mathbf{q} углом δ наклона \mathbf{q} к плоскости (1, 2) и углом ψ между плоскостью (1, 3) и осью 2, так что

$$\mathbf{q} = |\mathbf{q}|(\cos \delta \sin \psi, \cos \delta \cos \psi, \sin \delta). \quad (5.6)$$

Тогда, используя условия $q^z j_z(q) = 0$ сохранения тока и $q^2 = 0$, получим для спектра ЭМИ

$$|j_z(q)|^2 = (1 - \cos^2 \delta \sin^2 \psi) |j_1|^2 + (1 - \cos^2 \delta \cos^2 \psi) |j_2|^2 - 2 \cos^2 \delta \sin \psi \cos \psi \operatorname{Re} j_1 j_2^*. \quad (5.7)$$

Компоненты плотности тока определяются интегралами

$$j_1(q) = eb \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp [-i f(\xi)] \times \\ \times \left[\sinh \xi \cos \varphi(\xi) - \left(\frac{1 - \varkappa^2}{1 - v^2} \right)^{1/2} \sin \varphi(\xi) \right], \quad (5.8)$$

$$j_2(q) = eb \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp [-i f(\xi)] \times \\ \times \left[\sinh \xi \sin \varphi(\xi) + \left(\frac{1 - \varkappa^2}{1 - v^2} \right)^{1/2} \cos \varphi(\xi) \right], \quad (5.9)$$

$$f(\xi) = q_1 r(\xi) \cos \varphi(\xi) + q_2 r(\xi) \sin \varphi(\xi) - \\ - q^0 b (1 - v^{-2})^{-1/2} \left(\sinh \xi + \frac{\varkappa}{\gamma^2} \xi \right). \quad (5.10)$$

Ограничимся в дальнейшем ультратрелиativистским случаем $v \gg 1$ и, более того, потребуем, чтобы параметр v был меньше или порядка v^{-1} , т.е.

$$v \lesssim \frac{1}{\gamma} \ll 1. \quad (5.11)$$

Тогда $\varkappa \approx v \ll 1$ и с точностью до членов четвертого порядка малости по параметрам, фигурирующим в условии (5.11),

$$\left(\frac{1 - \varkappa^2}{1 - v^2} \right)^{1/2} \approx 1, \quad b \approx \beta.$$

Кроме того, угол рассеяния χ и эффективные значения углов δ, ψ будут малыми:

$$\chi \approx 2v; \quad |\delta|, |\psi| \sim \frac{1}{v} \ll 1. \quad (5.12)$$

Проведя соответствующие разложения в формулах (5.1) и (5.8)–(5.10), получим:

$$x_1(\xi) = \beta \left[1 + v \cosh \xi - \frac{1}{2} v^2 \sinh \xi \arcsin (\tanh \xi) + \dots \right], \quad (5.13)$$

$$x_2(\xi) = \beta \left[\sinh \xi - \frac{1}{2} v^2 \sinh \xi + \frac{1}{2} v^2 \arcsin (\tanh \xi) + \dots \right],$$

$$j_1 \approx e\beta v S, \quad j_2 \approx e\beta C, \quad (5.14)$$

$$|j_z(q)|^2 \approx e^2 \beta^2 [v^2 |S|^2 + (\delta^2 + \psi^2) |C|^2 - 2v\psi \operatorname{Re} (SC^*)], \quad (5.15)$$

где

$$(S, C) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (\sinh \xi, \cosh \xi) \exp [-i f(\xi)], \quad (5.16)$$

$$f(\xi) = \eta - z \sinh \xi + w \cosh \xi + s \arcsin (\tanh \xi), \quad (5.17)$$

$$\eta = \beta q^0 \psi, \quad z = \frac{1}{2} \beta q^0 \left(\delta^2 + \psi^2 + v^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right), \quad (5.18)$$

$$w = \beta q^0 v \psi, \quad s = \frac{1}{2} \beta q^0 v^2.$$

Обратим внимание на то, что $|j_x(q)|^2$ — чётная функция ψ . Это следует из того, что при изменении знака ψ и комплексном сопряжении функция $S(\psi)$ меняет знак, а $C(\psi)$ не меняется,

$$S^*(-\psi) = -S(\psi), \quad C^*(-\psi) = C(\psi),$$

что в свою очередь следует из свойства $f(\xi, \psi) = -f(-\xi, -\psi)$. Чётность квадрата тока по ψ означает, что интенсивность ЭМИ, испущенного вдоль начального и конечного направлений, одинакова.

Поскольку угол отклонения χ заряда настолько мал, что выполнены условия (5.11), (5.12), кулоновское поле эффективно действует на заряд только на длине порядка параметра удара $\beta \approx b$. Следовательно, эффективны $\xi \sim 1$ (см. (5.1), (5.2), (5.13)). Тогда из (5.17) видно, что в интегралах S , C будут эффективны z , w , $s \sim 1$ и соответственно $q^0 \sim \beta^{-1}\gamma^2$ (ср. § 77 в [6]).

Интегралы S , C не выражаются через известные специальные функции. Однако, когда угол отклонения $\chi \ll \gamma^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} S &\approx 2i \exp(-i\eta) K_1(z), \quad C \approx 2i \frac{w}{z} \exp(-i\eta) K_1(z), \\ \chi &\ll \gamma^{-1} \ll 1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

В этом случае спектр ЭМИ даётся формулой

$$|j_x(q)|^2 = 4e^2 v^2 \beta^2 K_1^2(z) \left[1 - \frac{4\psi^2}{\gamma^2(\delta^2 + \psi^2 + 1/\gamma^2)^2} \right], \quad (5.20)$$

а полная энергия, излучённая при пролете,

$$\mathcal{E}_{EM} = \int \frac{d^3 q}{16\pi^3} |j_x(q)|^2 = \frac{\pi e^4 e'^2 \gamma^2}{4(4\pi)^3 m^2 \beta^3} \quad (5.21)$$

и согласуется с формулой задачи 1 к § 73 в [6].

Перейдём теперь к вычислению спектра ГИ. Он определяется двумя поперечными компонентами полного ТЭИ, которые очень просто выражаются через компоненты ТЭИ в системе координат K' с осью 3' вдоль вектора \mathbf{q} (см. (2.47), (2.48)). Переход в систему K' из рассматриваемой нами системы координат K , где траектория лежит в плоскости (1, 2) симметрично относительно оси 1, а волновой вектор излучения характеризуется углами δ , ψ (см. (5.6)), может быть сделан двумя пространственными поворотами. А именно, поворотом $K \rightarrow K''$ вокруг оси 3 на угол ψ , в результате чего вектор \mathbf{q} попадает в плоскость ($3 \equiv 3'', 2''$) промежуточной системы координат K'' , и поворотом $K'' \rightarrow K'$ вокруг оси 1'' на угол $\theta = \pi/2 - \delta$, так что вектор \mathbf{q} оказывается лежащим вдоль оси 3' системы K' . Выражая фигурирующие в (2.47), (2.48) компоненты $T'_{ij}(q')$ ТЭИ в системе K' через компоненты $T_{ij}(q)$ в системе K , получим:

$$\begin{aligned} T_+(q) &= (\cos^2 \psi - \sin^2 \delta \sin^2 \psi) T_{11} - \\ &- 2 \sin \psi \cos \psi (1 + \sin^2 \delta) T_{12} + (\sin^2 \psi - \sin^2 \delta \cos^2 \psi) T_{22} + \\ &+ 2 \sin \delta \cos \delta (\sin \psi T_{13} + \cos \psi T_{23}) - \cos^2 \delta T_{33}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} T_x(q) &= \sin \delta \sin \psi \cos \psi (T_{11} - T_{22}) + \\ &+ \sin \delta (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) T_{12} - \cos \delta (\cos \psi T_{13} - \sin \psi T_{23}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Для построения пространственных компонент $T_{ij} = t_{ij} + \theta_{ij}$ используем формулы (1.3), (2.13), (2.39), (2.40)

разделов 1, 2. Тогда

$$t_{ij}(q) = m \int_{-\infty}^{\infty} d\xi x'_i x'_j (t'^2 - \mathbf{x}'^2)^{-1/2} \exp[-if(\xi)], \quad (5.24)$$

$$i, j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \theta_{ij}(q) &= -i\alpha|\mathbf{q}| \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp[-if(\xi)] \times \\ &\times \int_0^1 du \exp[iu(\mathbf{q}\mathbf{x} + |\mathbf{q}|r)] \times \\ &\times \left\{ \frac{x_i x'_j + x_j x'_i}{2r} + t' \frac{x_i x_j}{r^2} \left(u + \frac{i}{|\mathbf{q}|r} \right) \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где штрих обозначает производную по ξ . Многоточием в формуле (5.25) обозначены члены вида

$$(q_i b_j + q_j b_i) A, \quad \delta_{ij} B, \quad (5.26)$$

где A , B — инвариантные относительно вращений функции, которые зависят от \mathbf{q} и векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , характеризующих траекторию заряда в целом и направленных вдоль оси симметрии траектории и вдоль касательной к траектории в ее вершине, \mathbf{b} — один из векторов \mathbf{q} , \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 .

При повороте системы координат $K \rightarrow K'$ члены (5.26) перейдут в

$$(q'_i b'_j + q'_j b'_i) A, \quad \delta_{ij} B \quad (5.27)$$

и в поперечные компоненты ТЭИ (2.48) вклада не дадут, так как $q'_1 = q'_2 = 0$. Поэтому члены (5.26) можно не вычислять, как и компоненты T_{13} , T_{23} , T_{33} . Это замечание принадлежит Питерсу [25].

Рассматривая в дальнейшем ультраколлинистический случай, а точнее, случай (5.11), приведём соответствующие выражения для компонент t_{ij} , θ_{ij} , $i, j = 1, 2$:

$$t_{11} \approx \alpha v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tanh \xi \sinh \xi \exp[-if(\xi)], \quad (5.28)$$

$$t_{12} \approx \alpha S, \quad t_{22} \approx \frac{\alpha}{v} C,$$

$$\theta_{11} \approx \alpha v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \tanh \xi \exp[-\xi - if(\xi)],$$

$$\theta_{12} \approx \frac{1}{2} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp[-\xi - if(\xi)], \quad (5.29)$$

$$\theta_{22} \approx \alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sinh \xi \exp[-\xi - if(\xi)].$$

Здесь $f(\xi)$ даётся формулой (5.17) и использовано соотношение $m\gamma v \approx \alpha$. Видно, что компоненты θ_{ij} — порядка t_{ij} , за исключением $\theta_{22} \sim vt_{22} \ll t_{22}$. Для компонент T_{ij} получаем

$$T_{11} \approx \alpha v S, \quad T_{12} \approx \frac{1}{2} \alpha (S + C), \quad T_{22} \approx \frac{\alpha}{v} C. \quad (5.30)$$

Подставляя эти компоненты в (5.22), (5.23), опуская все члены, содержащие T_{13} , T_{23} , T_{33} , и учитывая малость углов δ , ψ (см. (5.12)), находим спектр ГИ:

$$8\pi G \left(\frac{1}{2} |T_+|^2 + 2|T_x|^2 \right) = \frac{4\pi G m^2 \gamma^2}{e^2} [(v - \psi)^2 + \delta^2] |j_x(q)|^2. \quad (5.31)$$

Здесь спектр $|j_x(q)|^2$ дается формулой (5.15).

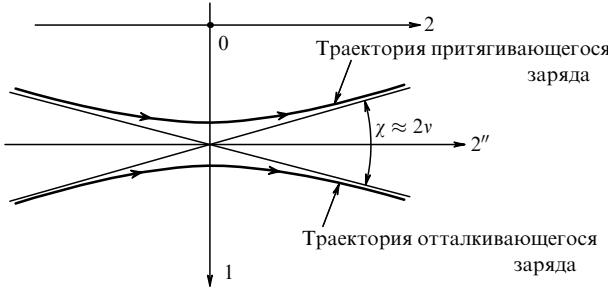


Рис. 2. Траектории заряда в кулоновском поле притяжения и отталкивания с одинаковым параметром удара, иллюстрирующие формулу (5.32).

Таким образом, при ультрарелятивистском пролёте заряда через кулоновское поле и угол отклонения $\chi \lesssim \gamma^{-1}$ спектр ГИ пропорционален спектру ЭМИ, причём амплитуда конверсии

$$\Gamma = \gamma [(v - \psi)^2 + \delta^2]^{1/2}, \quad (5.32)$$

т.е. зависит от направления волнового вектора и параметров орбиты.

Обратим внимание на то, что Γ , не обладая какой-либо симметрией по ψ , монотонно меняется от наибольшего значения при $\psi = -v$ до наименьшего при $\psi = v$. Это означает, что ГИ, испущенное вдоль начального направления движения заряда, более интенсивно, чем испущенное вдоль конечного, как в случае отталкивания, так и в случае притяжения (рис. 2). По-видимому, это связано с тем, что ЭМИ, испущенное вдоль начального направления, конвертируется в гравитоны на большей длине, чем ЭМИ, испущенное вдоль конечного направления движения заряда.

Так как v и эффективные значения углов ψ, δ ограничены условиями (5.11), (5.12), то $\Gamma \sim 1$. Это согласуется с оценкой (1.15), данной во введении.

В то время как пропорциональность спектров ГИ и ЭМИ обязана ультрарелятивизму, уменьшение величины Γ до значений $\Gamma \sim 1$ связано с сокращением области формирования ГИ по существу до области формирования ЭМИ. Это приводит к тому, что оба источника ГИ — локальный ТЭИ $t_{\alpha\beta}$ материального тела и нелокальный ТЭИ $\theta_{\alpha\beta}$ собственного и внешнего электромагнитных полей — дают вклады одного порядка.

При $v \ll \gamma^{-1} \ll 1$, подставляя в формулу (5.31) выражение (5.20), получим спектр ГИ, найденный в этом приближении Гальцовым и др. и приведённый в [26]. В формуле (17.20) книги [26] направление вектора \mathbf{q} определяется углами θ, φ :

$$\mathbf{q} = |\mathbf{q}|(\sin \theta \cos \varphi, \cos \theta, \sin \theta \sin \varphi),$$

а не ψ, δ (см. (5.6)), но малость всех углов, кроме φ , упрощает связи: $\psi = \theta \cos \varphi, \delta = \theta \sin \varphi$. Интегрирование спектра по волновому вектору \mathbf{q} даёт полную энергию \mathcal{E}_G ГИ, отличающуюся от \mathcal{E}_{EM} (5.21) множителем $4\pi Gm^2/e^2$, — результат, ранее найденный Питерсоном [27].

Выше мы считали движение заряда ультрарелятивистским, т.е. $\gamma \gg 1$. В более общем, но всё же релятивистском случае движения, когда скорость не мала, а $\gamma - 1 \gtrsim 1$, выделения фактора $|j_\alpha(q)|^2$ из выражения для спектра ГИ (см. 1.5) не происходит. Тем не менее

полезно привести спектр ЭМИ и в этом случае, так как он представляет самостоятельный интерес, а также потому, что его можно использовать для оценки ГИ.

Значительную часть вычислений можно провести так же, как и выше, но параметры χ и v будут теперь заметно различаться, оставаясь одного порядка по величине: $\chi \approx v/v, v = v_\infty$ — скорость заряда на бесконечности. Координаты $x_{1,2}(\xi)$ в отличие от (5.13) зависят теперь не от двух, а от трёх параметров:

$$x_1(\xi) = b \left[1 + \chi \cosh \xi - \frac{1}{2} v^2 \sinh \xi \arcsin (\tanh \xi) + \dots \right],$$

$$x_2(\xi) = b \left[\sinh \xi - \frac{1}{2} \chi^2 \sinh \xi + \frac{1}{2} v^2 \arcsin (\tanh \xi) + \dots \right]. \quad (5.33)$$

Квадрат плотности тока содержит не одну, как в (5.20), а две функции Макдональда,

$$|j_\alpha(q)|^2 = 4e^2 a^2 \left\{ \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2(1-v \cos \theta)^2} \right] K_1^2(z) + \frac{1}{\gamma^4 v^2} \left[\frac{2}{1-v \cos \theta} - 1 - \frac{1}{\gamma^2(1-v \cos \theta)^2} \right] K_0^2(z) \right\}. \quad (5.34)$$

Аргумент z функций Макдональда и направление \mathbf{n} волнового вектора определяются формулами

$$z = \frac{b q^0}{v} (1 - v \cos \theta), \quad (5.35)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{q}}{q^0} = (\sin \theta \cos \varphi, \cos \theta, \sin \theta \sin \varphi).$$

Спектр ЭМИ, определяемый формулой (1.1), позволяет провести интегрирование по частоте $q^0 = |\mathbf{q}|$. Возникающее угловое распределение ЭМИ имеет вид

$$\frac{d\mathcal{E}_{EM}^{\mathbf{q}}}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi \cdot 32} \left(\frac{v}{b} \right)^3 \left\{ \frac{3}{(1-v \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2(1-v \cos \theta)^2} \right] + \frac{1}{\gamma^4 v^2} \left[\frac{2}{(1-v \cos \theta)^4} - \frac{1}{(1-v \cos \theta)^3} - \frac{1}{\gamma^2(1-v \cos \theta)^5} \right] \right\}. \quad (5.36)$$

Неизменность квадрата плотности тока при замене $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$ означает тождественность спектра ЭМИ, испущенного вдоль начального и конечного направлений движения заряда. После интегрирования по углам получаем полную энергию излучения

$$\mathcal{E}^{EM} = \frac{\pi e^4 e'^2 \gamma^2}{4(4\pi)^3 m^2 \beta^3 v} \left(1 + \frac{1}{3\gamma^2} \right), \quad (5.37)$$

приведённую в задаче § 73 курса [6]. Заметим, что в отличие от [6], мы используем хевисайдовы единицы, в которых заряд e связан с зарядом e_G в гауссовых единицах соотношением $e = \sqrt{4\pi} e_G$, обозначаем параметр удара через β , а также полагаем скорость света $c = 1$.

Знание квадрата плотности тока позволяет оценить ГИ при пролёте заряда мимо кулоновского центра по формуле

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{q}} = A^2 |j_\alpha(q)|^2 \frac{d^3 q}{16\pi^3}. \quad (5.38)$$

Здесь A — амплитуда конверсии фотона в гравитон на всём пути фотона. Её можно найти интегрированием амплитуды конверсии на участке dx вдоль пути фотона:

$$dA = \frac{\sqrt{4\pi G}}{c^2} E_{\perp}(x) dx. \quad (5.39)$$

Здесь $E_{\perp}(x)$ — величина поля в поперечном направлении к волновому вектору фотона в точке с координатой x вдоль фотонного пути.

Для фотона, излучённого на минимальном расстоянии β от кулоновского центра,

$$A = \frac{\sqrt{4\pi G}}{c^2} \frac{e'}{4\pi\beta}. \quad (5.40)$$

Выразим A через угол отклонения $\chi \approx 2\kappa \ll 1$, используя соотношения

$$\frac{e'}{4\pi\beta} = \frac{pcv}{e}, \quad v \approx \frac{v}{c} \kappa \approx \frac{v}{2c} \chi.$$

Тогда

$$A \approx \sqrt{\frac{4\pi Gm^2}{e^2}} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma \chi. \quad (5.41)$$

5.2. Пролёт заряда через поле магнитного момента

Рассмотрим теперь ГИ заряда, пролетающего через поле магнитного момента в экваториальной плоскости. Движение характеризуется теми же параметрами β , γ , что и при пролёте через кулоновское поле, а роль безразмерного параметра взаимодействия $v = \alpha/Mc$ играет параметр

$$v = -\frac{e\mathfrak{M}}{4\pi M\beta c}, \quad (5.42)$$

где \mathfrak{M} — величина магнитного момента, направленного вдоль оси 3. Решения уравнений движения находятся итерациями по этому параметру, который считается малым. В нулевом приближении частица движется параллельно оси 2. В результате двух итераций получим:

$$\begin{aligned} x_1(\xi) &= \beta \left[1 + v \cosh \xi - \frac{3}{2} v^2 \sinh \xi \arcsin (\tanh \xi) + \dots \right], \\ x_2(\xi) &= \beta \left[\sinh \xi + \frac{1}{2} v^2 \arcsin (\tanh \xi) + \dots \right], \\ t(\xi) &= \frac{\beta}{(1 - \gamma^{-2})^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{2} v^2 \right) \sinh \xi + \dots, \\ r(\xi) &= \beta (\cosh \xi + v + \dots). \end{aligned} \quad (5.43)$$

При малом v угол отклонения $\chi \approx 2v$ (ср. с (5.12)).

Несмотря на то, что решения (5.43) уравнений движения отличаются от (5.13), (5.1) членами порядка v^2 , при условии (5.11) в эффективной области \mathbf{q} функция $f(\xi) = q_x x^2(\xi)$ совпадает с (5.17). В предэкспоненциальных же множителях выражений для j_1 , j_2 электромагнитного тока и t_{11} , t_{12} , t_{22} ТЭИ материального тела членами второго порядка малости по v , γ^{-1} можно пренебречь. Поэтому $|j_z(q)|^2$ и t_{ij} оказываются теми же, что и в (5.15) и (5.28). Вычисления показывают, что поперечные компоненты θ_+ , θ_x ТЭИ поля совпадают с поперечными

компонентами, построенными из компонент (5.29) в кулоновском случае. Таким образом, спектр ГИ заряда, пролетающего через поле магнитного момента, при условии $v \lesssim \gamma^{-1} \ll 1$ даётся той же формулой (5.31), что и спектр ГИ заряда при пролёте через кулоновское поле.

В более общем случае релятивистского движения заряда, когда $\gamma - 1 \gtrsim 1$, а параметр v по-прежнему мал, $v \ll 1$, временная координата $t(\xi)$ в (5.43) отличается от координаты $t(\xi)$ в случае кулоновского поля отсутствием слагаемого $(x/\gamma^2)\xi$ (см. (5.1)). Это приводит к тому, что теперь квадрат плотности тока оказывается равным

$$|j_z(q)|^2 = 4e^2 b^2 v^2 \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - v \cos \theta)^2} \right] K_1^2(z). \quad (5.44)$$

Здесь z и \mathbf{n} те же, что и в (5.35).

Интегрирование спектра ЭМИ, определяемого формулой (1.1), по частоте q^0 приводит к угловому распределению

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathbf{n}}^{\text{EM}}}{d\Omega} = \frac{3e^4 \mathfrak{M}^2 v}{32(4\pi)^3 m^2 b^5 \gamma^2} \left[\frac{1}{(1 - v \cos \theta)^3} - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - v \cos \theta)^5} \right]. \quad (5.45)$$

В результате интегрирования этого распределения по углам получаем полную энергию, излученную зарядом при пролёте поля магнитного момента,

$$\mathcal{E}^{\text{EM}} = \frac{\pi e^4 \mathfrak{M}^2 \gamma^2 v}{4(4\pi)^3 m^2 b^5}. \quad (5.46)$$

Это выражение полезно сравнить с энергией (5.37), излучённой зарядом в кулоновском поле при тех же условиях.

При $\gamma \gg 1$ различие с кулоновским случаем исчезает, причём $(e\mathfrak{M}/b)^2$ соответствует $(ee')^2$.

Оценка интенсивности ГИ при пролёте заряда через поле магнитного момента проводится так же, как в кулоновском случае — умножением спектра (1.1) ЭМИ на квадрат соответствующей амплитуды конверсии фотона в гравитон. Эта амплитуда определяется той же формулой (5.39), но содержащей поперечную составляющую $H_{\perp}(x)$ магнитного поля вместо электрического. В результате,

$$A = \sqrt{\frac{4\pi Gm^2}{e^2}} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \gamma \chi,$$

где χ — угол рассеяния. Это выражение совпадает с (5.41) и по порядку величины определяется корневым множителем. Таким образом, при пролётах релятивистского заряда через рассматриваемые поля усиления ГИ не происходит [27].

6. Обсуждение

В электромагнитных системах, рассмотренных в разделах 2 и 3, движение заряда осуществляется внешними полями, ТЭИ $\theta_{\mu\nu}$ которых нелокален и дает существенный вклад в ГИ системы. Поэтому классическое ГИ системы в отличие от ее ЭМИ может служить источником информации о ее внутренней структуре. Более того, для ультрарелятивистских систем вклад нелокального источника $\theta_{\mu\nu}$ в γ^2 раз превышает вклад локального

источника, а спектр ГИ при $\gamma \gg 1$ оказывается пропорциональным спектру ЭМИ. Аргументом в пользу универсальности этого обстоятельства является почти плосковолновость внешнего поля в системе покоя ультрарелятивистского заряда. Для плосковолнового поля соотношение (1.5) является точным при любой скорости заряда. Это было показано в [9] для монохроматического поля с линейной и циркулярной поляризациями и справедливо, по-видимому, для плосковолнового поля более общего вида.

Пропорциональность спектров ГИ и ЭМИ и порядок величины $\Gamma \sim \gamma$ при $\gamma \gg 1$ тесно связаны с тем, что из двух источников ГИ — локального ТЭИ $t_{z\beta}$ материального тела и нелокального ТЭИ $T_{z\beta}$ собственного и внешнего электромагнитных полей — именно последний становился основным в ультрарелятивистском пределе. Это означает, что ГИ образуется путём предварительного излучения зарядом виртуального или реального фотона на участке траектории, в γ раз меньшем ее радиуса r кривизны, и последующей конверсии этого фотона в гравитон при взаимодействии с квантами внешнего поля на пути порядка l — протяжённости внешнего поля в направлении распространения фотона.

Когда ТЭИ поля доминирует над ТЭИ материального тела, ток $j(q - k_{\text{ef}})$, фигурирующий в оценке (1.12), находится почти на массовой поверхности, и для амплитуды конверсии Γ справедлива оценка (1.14). Если ТЭИ поля и материального тела одного порядка, то оценка (1.14) для Γ остаётся справедливой при условии, что поперечные к \mathbf{q} компоненты токов $j(q - k_{\text{ef}})$ и $j(q)$ сравнимы по величине. Если же поперечные компоненты тока $j(q - k_{\text{ef}})$ много больше поперечных компонент $j(q)$, как это имеет место при почти прямолинейном пролёте заряда через поле ($\chi \ll \gamma^{-1} \ll 1$), то $\Gamma \sim 1$ (см. (1.15)).

Использование пространственных компонент сохраняющегося тока и сохраняющегося ТЭИ для описания спектров ЭМИ и ГИ удобно не только для оценки вкладов полевой и материальной составляющих ТЭИ в спектр ГИ. Поляризационные амплитуды, образованные пространственными компонентами, непосредственно определяют спектры ЭМИ и ГИ и их вычисление существенно облегчает расчёты спектров (см. (1.10), (1.11)).

В этой связи заметим, что из-за несохранения тензоров $t_{\mu\nu}$ и $\theta_{\mu\nu}$ порознь их вкладам в ГИ, рассматриваемым в релятивистской инвариантной форме, трудно придать самостоятельное значение. Так, величина $t_{\mu\nu}t^{\mu\nu*} - (1/2)|t_\mu^\mu|^2$ оказывается отрицательной для движения заряда по круговой орбите [28]. Однако если с помощью закона сохранения смешанные и временную компоненты полного ТЭИ $T_{\mu\nu}$ выразить через его пространственные компоненты (см. формулу (10.4.14) в [8]), то члены в интенсивности ГИ, квадратичные по пространственным компонентам t_{ij} , дадут положительный вклад материального тензора, квадратичные по θ_{ij} — положительный вклад полевого тензора, а билинейные по t_{ij} и θ_{kl} — интерференционный вклад.

С этой точки зрения формула (2.4) определяет вклад материального тензора тела, равномерно движущегося по окружности, независимый от силового поля. В ультрарелятивистском пределе и эффективной области \mathbf{q} этот вклад, подобно ЭМИ, формируется на участке траектории, малом по сравнению с локальным радиусом кривизны r , и описывается для этого участка асимптотиче-

скими формулами раздела 2.1. Для контактных сил, рассмотренных в разделе 2.1, ГИ определяется только вкладом материального тензора.

Для электромагнитных систем, рассмотренных в разделах 2, 3, 5, вклад в спектр ГИ полевого тензора θ_{ij} сравним с вкладом t_{ij} , а при $\gamma \gg 1$ — в γ^2 раз больше последнего и пропорционален спектру ЭМИ.

Зависимость амплитуды Γ от характеристик силового поля, направления волнового вектора и параметров движения массивной частицы, особенно ее лоренц-фактора, определяется поведением собственного поля заряда и внешнего поля в сравнительно большой области. В случае $\chi \ll 1$ место испускания фотона не локализовано и поэтому количественно учтеть конверсию фотонов в гравитоны. Однако для оценки спектра ГИ достаточно знания качественного поведения Γ , поскольку свойства спектра ЭМИ $|j_z(q)|^2$ можно считать известными.

Для неэлектромагнитных систем представляет интерес качественное сравнение поперечных компонент θ_+ , θ_\times и t_+ , t_\times . Для вращающейся релятивистской струны, нагруженной массами, вклады этих компонент в ГИ оказались одного порядка, несмотря на то, что энергия струны в $\pi\gamma/2$ раз превосходит энергию масс на её концах.

Заметим, что вклад в ГИ ТЭИ материального тела при круговом движении описывается точным выражением (2.4). При произвольном ультрарелятивистском движении тела для вклада его ТЭИ в ГИ в эффективной области \mathbf{q} имеет место оценка

$$8\pi G \left(\frac{1}{2} |t_+|^2 + 2|t_\times|^2 \right) \sim \frac{4\pi Gm^2}{e^2} |j_z(q)|^2. \quad (6.1)$$

При круговом движении для низших гармоник в этой оценке справа появляется дополнительный фактор γ^2 . В этом случае областью формирования излучения является вся окружность и эффективны углы излучения порядка 1. Поэтому при переходе от компонент j_i и t_{ij} к поперечным компонентам последние не уменьшаются в γ и γ^2 раз соответственно в отличие от компонент в эффективной области \mathbf{q} .

Результаты этой статьи справедливы и для сгустка заряженных частиц, размеры которого малы по сравнению с рассматриваемой длиной волны излучения, так что излучение на этой длине волны когерентно. Поскольку длина волны основного излучения отдельной частицы в γ^3 раз короче длины волны первой гармоники, то возможна ситуация, когда сгусток излучает низшие гармоники когерентно, а гармоники с $n \sim \gamma^3$ — некогерентно.

Система двух масс, движущихся вокруг общего центра инерции по эллиптическим орбитам, возможно является существенным компактным объектом тёмной материи. ГИ такой системы — ценный источник информации о её структуре. Излагаемый в разделе 4 траекторийный метод вычисления пространственных компонент сохраняющегося ТЭИ системы двух масс опирается на приближённое знание его временных компоненты. Будучи обобщением метода Эйнштейна вычисления квадрупольного излучения, он позволяет найти в длинноволновом приближении поляризационные амплитуды всех гармоник ГИ и поправки к ним за счёт релятивистского движения масс и учёта силового поля вне орбиты.

Мы рады возможности опубликовать эту статью в номере, посвящённом памяти В.Л. Гинзбурга. Ему, по-видимому, был бы наиболье интересен как раз раздел 4. В этой связи мы сохранили здесь явное обозначение скорости света c , к чему он так привык в своих статьях. По-видимому, он заметил бы нам, что учитывая низшие релятивистские поправки нужно было бы ввести их и в эллиптические траектории. Мы знаем, где и как такие поправки могут проявиться, но не всё сразу, Виталий Лазаревич.

Работа поддержанна грантом РФФИ № 08-02-01118.

7. Приложение.

Коэффициенты Фурье $F_A(n, e)$, $f_{ij}(n, e)$

Все коэффициенты Фурье выражаются через бесселевы функции $J_n(ne)$ и их комбинации

$$S_{ns}(ne) = J_{n-s}(ne) - J_{n+s}(ne),$$

$$C_{ns}(ne) = J_{n-s}(ne) + J_{n+s}(ne),$$

где n — номер гармоники, а $s = 1, 2, 3, 4$. Эти функции обладают свойствами:

1) $S_{ns}(ne) = 0$ при $n = 0$, $s \geq 0$, $C_{ns}(ne) = 0$ при $n = 0$, $s \geq 1$, но $C_{00}(0) = 2$;

2) $C_{ns}(ne)$ — чётные, а $S_{ns}(ne)$ — нечётные функции номера n ;

3) при изменении знака e $S_{ns}(-ne) = (-1)^{n-s} S_{ns}(ne)$, $C_{ns}(-ne) = (-1)^{n-s} C_{ns}(ne)$.

$$F_{11} = -n(S_{n2} - 2eS_{n1}),$$

$$F_{12} = -\sqrt{1-e^2} n(C_{n2} - 2J_n),$$

$$F_{22} = (1-e^2)nS_{n2}.$$

$$f_{11} = -n^2 \left[(1-e^2)(C_{n2} - eC_{n1}) - \frac{1}{n} S_{n2} \right],$$

$$f_{12} = -\sqrt{1-e^2} n^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} e^2 \right) S_{n2} - eS_{n1} - \frac{1}{n} C_{n2} \right],$$

$$f_{22} = (1-e^2)n^2 \left[C_{n2} - eC_{n1} - \frac{1}{n} S_{n2} \right].$$

$$F_{111} = -2n \left[\frac{1}{4} S_{n3} - eS_{n2} + \left(\frac{1}{4} + e^2 \right) S_{n1} \right],$$

$$F_{112} = 2\sqrt{1-e^2} (eS_{n2} + S_{n1}) - F_{222},$$

$$F_{121} = 2\sqrt{1-e^2} (eS_{n2} - S_{n1}) - F_{222},$$

$$F_{122} = 2(eC_{n2} - C_{n1}) - F_{111},$$

$$F_{221} = 2[eC_{n2} + (1-2e^2)C_{n1}] - F_{111},$$

$$F_{222} = \frac{1}{2}(1-e^2)^{3/2}n(C_{n3} - C_{n1}).$$

$$F_{1111} = -n \left[\frac{1}{4} S_{n4} - \frac{3}{2} eS_{n3} + \left(\frac{1}{2} + 3e^2 \right) S_{n2} - e \left(\frac{3}{2} + 2e^2 \right) S_{n1} \right],$$

$$F_{1112} = -\sqrt{1-e^2} n \left[\frac{1}{4} C_{n4} - \frac{3}{4} eC_{n3} - \frac{1}{2} C_{n2} + e(3-2e^2)C_{n1} \right],$$

$$F_{1211} = -\sqrt{1-e^2} n \left[\frac{1}{4} C_{n4} - \frac{3}{2} eC_{n3} + (1+3e^2)C_{n2} - e \left(\frac{15}{4} - e^2 \right) C_{n1} \right],$$

$$F_{1122} = (1-e^2) \left(4J_n + n \left[\frac{1}{4} S_{n4} - \frac{3}{2} S_{n2} + 2eS_{n1} \right] \right),$$

$$F_{1212} = (1-e^2) \left(-2J_n + n \left[\frac{1}{4} S_{n4} - \frac{3}{4} eS_{n3} + \frac{5}{4} eS_{n1} \right] \right),$$

$$F_{2211} = (1-e^2) \left(4J_n + n \left[\frac{1}{4} S_{n4} - \frac{3}{2} eS_{n3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3 \left(\frac{1}{2} + e^2 \right) S_{n2} - \frac{11}{2} eS_{n1} \right] \right),$$

$$F_{1222} = (1-e^2)^{3/2} n \left[\frac{1}{4} C_{n4} - C_{n2} + \frac{3}{2} J_n \right],$$

$$F_{2212} = (1-e^2)^{3/2} n \left[\frac{1}{4} C_{n4} - \frac{3}{4} eC_{n3} + \frac{1}{2} C_{n2} \right],$$

$$F_{2222} = -(1-e^2)^2 n \left(\frac{1}{4} S_{n4} - \frac{1}{2} S_{n2} \right).$$

Коэффициенты Фурье $F_A(n, e)$ являются чётными или нечётными функциями номера n

$$F_A(-n, e) = \pm F_A(n, e)$$

соответственно чётному или нечётному числу двоек в объединённом индексе A . При изменении знака e $F_A(n, e)$ ведут себя как чётные (нечётные) функции e соответственно чётности (нечётности) суммы n и числа индексов в A , т.е.

$$F_A(n, -e) = (-1)^n F_A(n, e) \quad \text{для } A = ij, ijk, kl,$$

$$F_A(n, -e) = (-1)^{n+1} F_A(n, e) \quad \text{для } A = ijk.$$

Это означает, что коэффициенты $F_{ij}(n, e)$ и $F_{ijkl}(n, e)$ разлагаются по чётным степеням e ,

$$F_A(n, e) = a_0 + a_2 e^2 + a_4 e^4 + \dots,$$

если n — чётно, и по нечётным степеням e ,

$$F_A(n, e) = a_1 e + a_3 e^3 + \dots,$$

если n — нечётно. Коэффициенты $F_{ijk}(n, e)$, наоборот, разлагаются по чётным степеням e , если n — нечётно, и по нечётным, если n — чётно.

Таким образом, для $e = 0$ отличны от нуля коэффициенты

$$F_{11}(n) = f_{11}(n) = -2\delta_{n2}, \quad F_{1111}(n) = -\delta_{n2} - \delta_{n4},$$

$$F_{12}(n) = f_{12}(n) = -2\delta_{n2}, \quad F_{1112}(n) = \delta_{n2} - \delta_{n4},$$

$$F_{22}(n) = f_{22}(n) = 2\delta_{n2}, \quad F_{1211}(n) = -2\delta_{n2} - \delta_{n4},$$

$$F_{111}(n) = -\frac{1}{2} \delta_{n1} - \frac{3}{2} \delta_{n3}, \quad F_{1122}(n) = 4\delta_{n0} - 3\delta_{n2} + \delta_{n4},$$

$$F_{112}(n) = \frac{5}{2} \delta_{n1} - \frac{3}{2} \delta_{n3}, \quad F_{1212}(n) = -2\delta_{n0} + \delta_{n4},$$

$$\begin{aligned} F_{121}(n) &= -\frac{3}{2} \delta_{n1} - \frac{3}{2} \delta_{n3}, & F_{2211}(n) &= 4\delta_{n0} + 3\delta_{n2} + \delta_{n4}, \\ F_{122}(n) &= -\frac{3}{2} \delta_{n1} + \frac{3}{2} \delta_{n3}, & F_{1222}(n) &= -2\delta_{n2} + \delta_{n4}, \\ F_{221}(n) &= \frac{5}{2} \delta_{n1} + \frac{3}{2} \delta_{n3}, & F_{2212}(n) &= \delta_{n2} + \delta_{n4}, \\ F_{222}(n) &= -\frac{1}{2} \delta_{n1} + \frac{3}{2} \delta_{n3}. & F_{2222}(n) &= \delta_{n2} - \delta_{n4}. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Захаров В Д *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна* (М.: Наука, 1972) [Zakharov V D *Gravitational Waves in Einstein's Theory* (New York: Halsted Press, 1973)]
2. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman, 1973) [Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* (М.: Мир, 1977)]
3. Braginsky V B, Caves C M, Thorne K S *Phys. Rev. D* **15** 2047 (1977)
4. Diambrini Palazzi G, Fargion D *Phys. Lett. B* **197** 302 (1987)
5. Melissinos A C *Nuovo Cimento B* **62** 190 (1981)
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1994)]
7. Schwinger J *Particles, Sources, and Fields* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1970) [Швингер Ю *Частицы, источники, поля* (М.: Мир, 1973)]
8. Weinberg S *Gravitation and Cosmology* (New York: Wiley, 1972) [Вайнберг С *Гравитация и космология* (М.: Мир, 1975)]
9. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **96** 1547 (1989) [Nikishov A I, Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **69** 876 (1989)]
10. Гальцов Д В, Грапп Ю В *ЖЭТФ* **68** 777 (1975) [Gal'tsov D V, Grats Yu V *Sov. Phys. JETP* **41** 387 (1976)]
11. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **98** 1151 (1990) [Nikishov A I, Ritus V I *JETP* **71** 643 (1990)]
12. Герценштейн М Е *ЖЭТФ* **41** 113 (1961) [Gertsenshtein M E *Sov. Phys. JETP* **14** 84 (1962)]
13. Пустовойт В И, Герценштейн М Е *ЖЭТФ* **42** 163 (1962) [Pustovoit V I, Gertsenshtein M E *Sov. Phys. JETP* **15** 116 (1962)]
14. Weber J "Gravitation and light", in *Gravitation and Relativity* (Eds H Chiu, W F Hoffmann) (New York: W.A. Benjamin, 1964) Ch. 5 [Вебер Дж "Гравитация и свет", в сб. *Гравитация и относительность* (Под ред. Х Цзю, В Гофмана) (М.: Мир, 1965) с. 374]
15. Никишов А И, Ритус В И *ЖЭТФ* **46** 776 (1964) [Nikishov A I, Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **19** 529 (1964)]
16. Ритус В И *Труды ФИАН* **111** 5 (1979)
17. Мицкевич Н *Физические поля в общей теории относительности* (М.: Наука, 1969)
18. Сушкиков О П, Хриплович И Б *ЖЭТФ* **66** 3 (1974) [Sushkov O P, Khriplovich I B *Sov. Phys. JETP* **39** 1 (1974)]
19. Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971) [Zel'dovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1972)]
20. Барабашов Б М, Нестеренко В В *Модель релятивистской струны в физике адронов* (М.: Энергоатомиздат, 1987) [Barbashov B M, Nesterenko V V *Introduction to the Relativistic String Theory* (Singapore: World Scientific, 1990)]
21. Turok N *Nucl. Phys. B* **242** 520 (1984)
22. Bateman H, Erdélyi A *Higher Transcendental Functions* Vol. 2 (New York: McGraw-Hill, 1954) [Бейтмен Г, Эрдэйи А *Высшие трансцендентные функции* Т. 2 (М.: Наука, 1966)]
23. Фихтенгольц Г М *Курс дифференциального и интегрального исчисления* Т. 3 (М.: Наука, 1969) [Fichtenholz G M *Infinite Series: Rudiments* (New York: Gordon and Breach, 1970)]
24. Peters P C, Mathews J *Phys. Rev.* **131** 435 (1963)
25. Peters P C *Phys. Rev. D* **5** 2476 (1972)
26. Гальцов Д В, Грац Ю В, Петухов В И *Излучение гравитационных волн электродинамическими системами* (М.: Изд-во МГУ, 1984)
27. Peters P C *Phys. Rev. D* **8** 4628 (1973)
28. Ритус В И *ЖЭТФ* **80** 1288 (1981) [Ritus V I *Sov. Phys. JETP* **53** 659 (1981)]

Gravitational radiation of systems and the role of their force field

A.I. Nikishov, V.I. Ritus

P.N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prospekt, 53, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-499) 132-65 23, (7-499) 132-64 26. Fax (7-499) 135-85 33
E-mail: nikishov@lpi.ru, ritus@lpi.ru

Gravitational radiation (GR) from compact relativistic systems with a known energy momentum tensor (EMT) and GR from two masses elliptically orbiting their common center of inertia are considered. In the ultrarelativistic limit, the GR spectrum of a charge rotating in a uniform magnetic field, a Coulomb field, a magnetic moment field, and a combination of the last two fields differs by a factor of $4\pi Gm^2\Gamma^2/e^2$ (Γ being of the order of the charge's Lorentz factor) from its electromagnetic radiation (EMR) spectrum. This factor is independent of the radiation frequency but does depend on the wave vector direction and the way the field behaves outside of the orbit. For a plane wave external field, the proportionality between the gravitational and electromagnetic radiation spectra is exact, whatever the velocity of the charge. Qualitative estimates of Γ are given for a charge moving ultrarelativistically in an arbitrary field, showing that it is of the order of the ratio of the nonlocal and local source contributions to the GR. The localization of external forces near the orbit violates the proportionality of the spectra and reduces GR by about the Lorentz factor squared. The GR spectrum of a rotating relativistic string with masses at the ends is given, and it is shown that the contributions by the masses and string are of the same order of magnitude. In the nonrelativistic limit, the harmonics of GR spectra behave universally for all the rotating systems considered. A trajectory method is developed for calculating the GR spectrum. In this method the spatial — and hence polarization — components of the conserved energy momentum tensor are calculated in the long wavelength approximation from the time component of the EMTs of the constituent masses of the system. Using this method, the GR spectrum of two masses moving in elliptic orbits about their common center of inertia is calculated, as are the relativistic corrections to it.

PACS numbers: 04.20.-q, 04.30.-w, 41.60.-m

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201011b.1135

Bibliography — 28 references

Received 21 September 2010

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **180** (11) 1135–1165 (2010)

Physics – Uspekhi **53** (11) (2010)