

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия двух проводящих заряженных шаров

В.А. Саранин, В.В. Майер

*Задача о взаимодействии двух проводящих заряженных шаров рассматривается в рамках трёх постановок: 1) шары поддерживаются при постоянных равных потенциалах; 2) один из шаров заряжен и изолирован, второй поддерживается при постоянном потенциале того же знака, что и заряд первого; 3) оба шара одноимённо заряжены и изолированы. Показано, что в общем случае это принципиально разные задачи: в первом случае шары всегда отталкиваются; во втором и третьем случаях всегда можно указать довольно обширные области параметров (отношение радиусов и отношение зарядов), в которых шары на близких расстояниях притягиваются. Найдены границы этих областей. Приводятся результаты экспериментов, в которых наблюдалось как отталкивание, так и притяжение одноимённо заряженных шаров. Результаты теории и эксперимента находятся в удовлетворительном качественном и количественном соответствии.*

PACS numbers: 01.50.My, 01.55.+b, 41.20.Cv

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201010f.1109

### Содержание

1. Введение (1109).
  2. Шары с равными потенциалами (1109).
  3. Взаимодействие шаров в случае, когда задан заряд одного шара и потенциал другого (1112).
  4. Изолированные шары с заданными зарядами (1113).
  5. Эксперименты (1114).
  6. Заключение (1116).
- Список литературы (1117).

### 1. Введение

Изучение взаимодействия двух заряженных проводящих шаров (сфер) имеет как прикладное (взаимодействие заряженных капель воды в атмосфере (см., например, [1–3])), так и очевидное научно-методическое значение. В частности, в [4] подробно рассмотрена задача о взаимодействии изолированных заряженных проводящих шаров. На практике, однако, также часто встречается ситуация, когда оба шара (или один из них) во время взаимодействия подключены к источнику напряжения. Эксперименты (их результаты представлены в разделе 5) в таких открытых системах шаров показали, что при этом возникают парадоксальные, на первый взгляд, эффекты. Так, например, стабильно наблюдался эффект, который заключался в том, что одноимённо

заряженные шары сначала отталкивались, а затем, с увеличением напряжения на одном из шаров, начинали притягиваться, вопреки ожиданию, что они будут отталкиваться ещё сильнее, — заряд шара, подключённого к источнику напряжения, увеличивался, сохраняя свой знак. Этот и некоторые другие эффекты представляют интерес не только с теоретической точки зрения, но и с практической, так как информация о взаимодействии заряженных частиц важна для технологических применений. Поэтому возникает необходимость осмысления и описания указанных эффектов. В настоящей статье сделана попытка такого описания и осмысления.

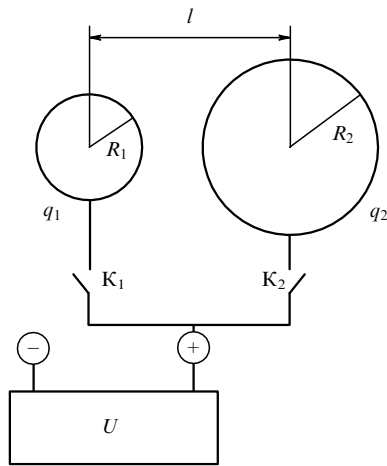
Ниже рассмотрены три типа задач о взаимодействии проводящих заряженных шаров: 1) шары подключены к одному и тому же источнику напряжения, их потенциалы постоянны и равны; 2) один из шаров подключён к источнику напряжения, другой имеет некоторый заряд того же знака и является изолированным; 3) оба шара одноимённо заряжены и изолированы. Как уже говорилось, последний тип задачи рассмотрен в [4], однако совместное рассмотрение всех трёх типов задач позволило выявить новые нюансы этого взаимодействия. Оказалось также, что асимптотический случай взаимодействия шаров с очень сильно различающимися радиусами на малом расстоянии между ними соответствует случаю взаимодействия шарика и бесконечной проводящей плоскости, который имеет большое прикладное значение [5, 6]. Результаты представленных экспериментов удовлетворительно согласуются с теоретическими результатами.

### 2. Шары с равными потенциалами

Сначала рассмотрим случай идеально проводящих шаров (или тонкостенных проводящих сфер) с равными

В.А. Саранин, В.В. Майер. Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко, физический факультет, ул. Первомайская 25, 427621 Глазов, Удмуртская Республика, Российская Федерация. Тел. (34141) 5-58-57  
E-mail: val-sar@yandex.ru, saranin@ggpi.org, varaksina\_ei@list.ru

Статья поступила 3 марта 2010 г.



**Рис. 1.** Схема эксперимента по взаимодействию заряженных шаров. Различным случаям взаимодействия шаров, описанным в статье, соответствуют различные положения ключей  $K_1$  и  $K_2$ .

потенциалами, которые поддерживаются постоянными за счёт подключения каждого шара к одному и тому же источнику внешнего напряжения (рис. 1, ключи  $K_1$  и  $K_2$  замкнуты).

Если потенциалы шаров поддерживаются постоянными, то выражение для потенциальной энергии взаимодействия шаров можно записать в виде [7]

$$W = \frac{1}{2} (c_{11} \varphi_1^2 + 2c_{12} \varphi_1 \varphi_2 + c_{22} \varphi_2^2), \quad (1)$$

где  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  — ёмкостные коэффициенты,  $\varphi_{1,2}$  — потенциалы шаров. Выражения для ёмкостных коэффициентов имеют вид [7]

$$c_{11} = \frac{1}{k} R_1 R_2 \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} [R_2 \sinh n\beta + R_1 \sinh (n-1)\beta]^{-1},$$

$$c_{12} = -\frac{R_1 R_2 \sinh \beta}{kl} \sum_{n=1}^{\infty} (\sinh n\beta)^{-1}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2)$$

$$c_{22} = \frac{1}{k} R_1 R_2 \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} [R_1 \sinh n\beta + R_2 \sinh (n-1)\beta]^{-1}.$$

Здесь  $\epsilon_0$  — электродинамическая постоянная; параметр  $\beta$  связан с расстоянием между центрами шаров  $l$  соотношением

$$\cosh \beta = \frac{l^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2}. \quad (3)$$

Когда шары поддерживаются при одинаковом потенциале от внешнего источника напряжения ( $\varphi_1 = \varphi_2 = U$ ), тогда

$$W(l) = \frac{U^2}{2} (c_{11} + 2c_{12} + c_{22}). \quad (4)$$

Силу взаимодействия шаров можно найти так:

$$F_l(l) = \frac{\partial W(l)}{\partial l}. \quad (5)$$

Причём, как показано в [7], в данном случае открытой системы производная берётся именно со знаком "+".

Удобно все величины записать в безразмерных переменных, а силу выразить в единицах максимальной силы, вычисленной в кулоновском приближении, т.е. в предположении, что заряды шаров расположены в их центрах и всеми эффектами электрических изображений можно пренебречь. Максимальная сила вычисляется при соприкосновении шаров:

$$F_{Cm} = \frac{U^2 R_1 R_2}{k(R_1 + R_2)^2}. \quad (6)$$

Тогда для силы взаимодействия шаров получим

$$F_x(x) = F_{Cm} \frac{(R_1 + R_2)^2}{2R_1 R_2} (c'_{11} + 2c'_{12} + c'_{22}), \quad (7)$$

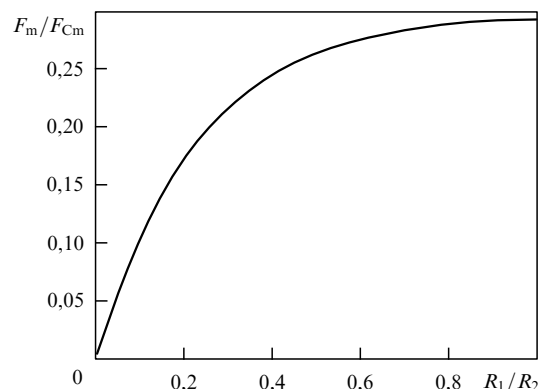
$$x = \frac{l}{R_1 + R_2}.$$

Здесь все величины, имеющие размерность длины, вычисляются в единицах  $R_1 + R_2$ , а штрихи обозначают производную по  $x$ .

Расчёты энергии и силы проводились на компьютере с помощью программного пакета Mathcad. При этом в суммах (2) удерживалось 200 слагаемых, а в проверочных расчётах — до 400. Увеличение числа слагаемых в два раза не меняло первых трёх значащих цифр в результатах. Как и следовало ожидать, для всех значений параметров и при любом расстоянии между шарами сила имеет характер силы отталкивания, убывающей с возрастанием расстояния между шарами. Зависимость максимальной силы отталкивания (в единицах  $F_{Cm}$ ) от отношения радиусов шаров показана на рис. 2. При этом наибольшее значение силы, реализующееся в случае одинаковых шаров, равно  $0,296F_{Cm}$  (здесь и далее численные результаты указываются с точностью до единицы последнего разряда). Этот результат является автомодельным, т.е. множитель 0,296 не зависит ни от величины радиусов шаров, ни от величины их зарядов. В дальнейшем автомодельность результатов будет пониматься именно в этом смысле.

Отдельно рассмотрим важный случай одинаковых шаров радиусом  $R$  с одинаковыми по величине потенциалами, допускающий аналитическое решение. Тогда  $\varphi_1 = \pm \varphi_2 = \pm U$  и

$$W = U^2 (c_{11} \pm c_{12}). \quad (8)$$



**Рис. 2.** Зависимость максимальной силы отталкивания от отношения радиусов шаров в случае равенства их потенциалов.

Учитывая выражения для ёмкостных коэффициентов, приведённые выше, можем записать

$$W = \frac{U^2 R}{k} \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j_n}}{\sinh n\beta}. \quad (9)$$

При этом  $j_n = n + 1$  в случае потенциалов одного знака и  $j_n = 0$  в случае потенциалов с разными знаками. Здесь параметр  $\beta$  связан с расстоянием между центрами шаров  $x$  соотношением

$$\cosh \beta = \frac{l}{2R} = x.$$

Сила, действующая на каждый из шаров:

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial l} = \frac{U^2 R}{k} \frac{\partial W}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial l}.$$

Вычисляя производные, найдём окончательное выражение для силы в единицах  $F_{Cm}$ :

$$F_x(x) = 2F_{Cm} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{j_n} (\coth \beta - n \coth n\beta) (\sinh n\beta)^{-1} \right]. \quad (10)$$

В [4] аналитически найдена асимптотика ряда, стоящего в правой части (10), при  $x \rightarrow 1$  ( $\beta \ll 1$ ). В случае потенциалов одного знака асимптотическое значение равно  $\ln 2/6 \approx 0,116$ . Тогда максимальное значение силы —  $0,232F_{Cm}$ . Численный расчёт с высокой степенью точности даёт в этом случае для ряда асимптотическое значение  $0,148$  [4], соответственно для силы получаем  $0,296F_{Cm}$ .

В случае потенциалов с разным знаком асимптотика ряда при сближении шаров выражается как  $-1/[2(x-1)]$ ,  $x-1 \ll 1$  [4]. Соответственно сила притяжения возрастает при сближении шаров по асимптотическому закону

$$F_x(x) = -\frac{F_{Cm}}{x-1}, \quad x-1 \ll 1. \quad (11)$$

Этот результат также может рассматриваться как авто-модельный.

Если шары поддерживаются при одинаковых потенциалах и в них существенно проявляются эффекты электрической индукции, то их заряды равны [7, 8]

$$q_{1i} = U(c_{11} + c_{12}), \quad q_{2i} = U(c_{22} + c_{12}). \quad (12)$$

В соответствии с (8), (9) для одинаковых шаров это даёт

$$q_i = \frac{UR}{k} \left( \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sinh n\beta} \right). \quad (13)$$

В [4] найдена асимптотика выражения, стоящего в (13) в скобках при  $x \rightarrow 1$  ( $\beta \ll 1$ ). Асимптотическое значение равно  $\ln 2$  (сумма знакопеременного гармонического ряда). Таким образом, заряжаясь от одного источника напряжения, при соприкосновении каждый шар получает заряд

$$q_i = \frac{UR}{k} \ln 2 \approx 0,693 \frac{UR}{k}, \quad (14)$$

т.е. примерно 0,693 того заряда, который он приобрёл бы, заряжаясь от данного источника напряжения инди-

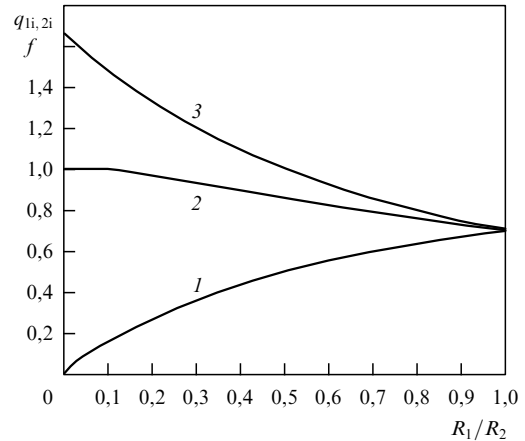


Рис. 3. Зависимость величины зарядов шаров от отношения их радиусов: 1 — для меньшего шара, 2 — для большего, 3 — результат табулирования коэффициента  $f$  (см. формулу (19)) при разных отношениях радиусов шаров.

видуально, вдали от второго шара [8]. Этот результат также является авто-модельным. Теперь если взять реальные заряды шаров (14) и вычислить максимальную силу их взаимодействия в кулоновском приближении (заряды в центрах шаров)

$$F_{Ci} = \frac{kq_i^2}{4R^2}, \quad (15)$$

то реальная сила (10) на близких расстояниях между шарами будет равна

$$F_x(1,001) \approx \frac{0,296}{(\ln 2)^2} F_{Ci} = 0,616F_{Ci}. \quad (16)$$

Получилось значение силы такое же, как и для изолированных шаров, имеющих заряды  $q_i$ , найденное в [4].

Вернемся к случаю шаров с разными радиусами. Если по формулам (12) вычислить заряды шаров в единицах  $UR_1/k$ ,  $UR_2/k$  и построить график зависимости величины зарядов от отношения радиусов, то получатся кривые, обозначенные на рис. 3 как 1 (меньший шар) и 2 (большой шар) [8]. Теперь понятно, почему сила взаимодействия шаров с сильно различающимися радиусами стремится к нулю (см. рис. 2) — заряд меньшего шара стремится к нулю (см. рис. 3). Однако не всё так просто. В работе [6] рассматривалась задача о взаимодействии проводящих шара и бесконечной плоскости при их соприкосновении и подключении к источнику напряжения. Для величины заряда шара, в частности, там получено

$$q_{1i} \approx \frac{1}{k} 1,64R_1^2 E_0, \quad (17)$$

где  $E_0$  — напряжённость поля, создаваемая однородно заряженной бесконечной плоскостью. Бесконечную плоскость можно приближённо заменить шаром с очень большим радиусом  $R_2 \gg R_1$ , тогда выражение (17) можно преобразовать так:

$$q_{1i} = 1,64R_1^2 \frac{q_{2i}}{R_2^2} = 1,64 \frac{UR_2}{k} \left( \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) = 1,64 \frac{UR_1}{k} \left( \frac{R_1}{R_2} \right). \quad (18)$$

Для получения этого результата в рамках задачи о взаимодействии двух шаров обратимся к первой формуле (12), обозначим  $\gamma = R_1/R_2$  и разложим выражения для  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  в ряд сначала по  $\gamma$ , затем по  $\beta$ . В формуле для  $c_{12}$  примем  $l \approx R_1 + R_2$ . Тогда

$$k c_{11} \approx R_1 \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sinh n\beta} - \gamma \left( \frac{\cosh \beta}{\sinh n\beta} - \coth n\beta \frac{\sinh \beta}{\sinh n\beta} \right) \right],$$

$$k c_{12} \approx -R_1(1-\gamma) \sinh \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh n\beta}.$$

Далее, на близких расстояниях между шарами  $\beta \ll 1$  полагаем  $\cosh \beta \approx 1$ ,  $\sinh \beta \approx \beta$ ,  $\sinh n\beta \approx n\beta$ ,  $\coth n\beta \approx 1/n\beta$  и после несложных преобразований находим

$$k(c_{11} + c_{12}) \approx R_1 \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = R_1 \left( \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645 R_1 \left( \frac{R_1}{R_2} \right).$$

Теперь, учитывая (12), получим последнее выражение в (18).

Для соответствующих компьютерных расчётов при произвольных отношениях радиусов первая формула (12) была записана в виде

$$q_{1i} = f \frac{UR_1}{k} \left( \frac{R_1}{R_2} \right), \quad f = \frac{k}{R_1} \left( \frac{R_2}{R_1} \right) (c_{11} + c_{12}). \quad (19)$$

Здесь ёмкостные коэффициенты вычислялись по формулам (2) при  $l = 1,001(R_1 + R_2)$ , что соответствует почти соприкасающимся шарам. Результат табулирования коэффициента  $f$  при разных отношениях радиусов шаров показан кривой 3 на рис. 3.

Таким образом, при совместной зарядке сильно различающихся по размерам шаров, расположенных вблизи друг друга, меньший шар получает заряд пропорциональный квадрату его радиуса, напряжённости поля, созданной большим шаром на его же поверхности, и коэффициенту  $f$ , который в зависимости от отношения радиусов изменяется в пределах  $\ln 2 \leq f(R_1/R_2) \leq \pi^2/6$ .

### 3. Взаимодействие шаров в случае, когда задан заряд одного шара и потенциал другого

Рассмотрим ситуацию, когда проводящий шар радиусом  $R_1$  является изолированным и имеет заряд  $Q_1 > 0$ , а второй проводящий шар радиусом  $R_2$ , соединённый проводником с положительным полюсом источника напряжения, имеет потенциал  $U_2$  относительно бесконечности. Расстояние между центрами шаров  $l \geq R_1 + R_2$  (на рис. 1 ключ  $K_2$  замкнут, ключ  $K_1$  разомкнут).

Для нахождения силы взаимодействия шаров запишем сначала их потенциальную энергию в виде

$$W = \frac{1}{2} (Q_1 \varphi_1 + q_2 U_2). \quad (20)$$

Выразим потенциал первого шара через его заряд, а заряд второго шара — через его потенциал. Для этого запишем [7]

$$Q_1 = c_{11} \varphi_1 + c_{12} U_2, \quad U_2 = s_{22} q_2 + s_{12} Q_1. \quad (21)$$

Отсюда

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{c_{11}} - \frac{U_2 c_{12}}{c_{11}}, \quad q_2 = \frac{U_2}{s_{22}} - \frac{Q_1 s_{12}}{s_{22}}. \quad (22)$$

Здесь  $s_{ik}$  — так называемые потенциальные коэффициенты. Так как для ёмкостных коэффициентов известны явные выражения, то потенциальные коэффициенты выразим через ёмкостные [7]:

$$s_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{12} = -\frac{c_{12}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{22} = \frac{s_{11} c_{11}}{c_{22}}. \quad (23)$$

Запишем потенциальную энергию в единицах  $W_{Cm} = Q_1 U_2 R_2 / (R_1 + R_2)$  в виде

$$W(l) = \frac{W_{Cm}}{2b} \left[ \left( \frac{1}{\alpha_1 c_{11}} - \frac{c_{12}}{c_{11}} \right) + \left( \frac{\alpha_1}{s_{22}} - \frac{s_{12}}{s_{22}} \right) \right],$$

$$\alpha_1 = \frac{U_2 (R_1 + R_2)}{k Q_1}, \quad b = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Здесь все величины, имеющие размерность длины, измеряются в единицах  $R_1 + R_2$ . Силу взаимодействия будем вычислять по формуле

$$F_l(l) = \frac{1}{2} \left( -Q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial l} + U_2 \frac{\partial q_2}{\partial l} \right). \quad (25)$$

Тогда, учитывая (21), (22), в безразмерных переменных получим

$$F_x(x) = \frac{F_{Cm}}{2b} \left[ \left( \frac{c'_{11}}{\alpha_1 c_{11}^2} + \frac{c'_{12} c_{11} - c'_{11} c_{12}}{c_{11}^2} \right) - \left( \frac{\alpha_1 s'_{22}}{s_{22}^2} + \frac{s'_{12} s_{22} - s'_{22} s_{12}}{s_{22}^2} \right) \right],$$

$$F_{Cm} = \frac{Q_1 U_2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

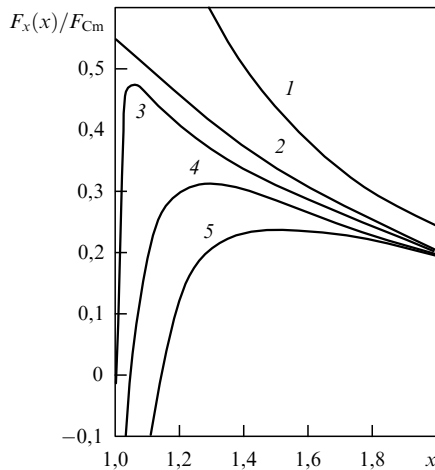
Штрихи означают производные по  $x = l / (R_1 + R_2)$ .

Прежде всего рассмотрим случай одинаковых шаров,  $R_1 = R_2 = R$ , которые вблизи друг друга ( $x \rightarrow 1$ ) имеют одинаковые потенциалы  $U_2$  и одинаковые заряды  $q_{2i} = Q_1 = \ln 2 U_2 R / k$ . Тогда параметр  $\alpha_1 = 2 / \ln 2 \approx 2,89$ . В этом случае результат расчёта силы по (26) в Mathcad с удержанием в суммах 200 слагаемых даёт силу, имеющую характер отталкивания во всей области определения  $x > 1$ . Сила достигает максимального значения при сближении шаров,  $x \rightarrow 1$ , равного  $F_x(1,001) \approx 0,426 F_{Cm}$ . Если эту силу выразить в единицах максимальной силы, вычисленной в кулоновском приближении с реальным зарядом  $q_{2i}$ , то вновь получим автомоделный результат работы [4]

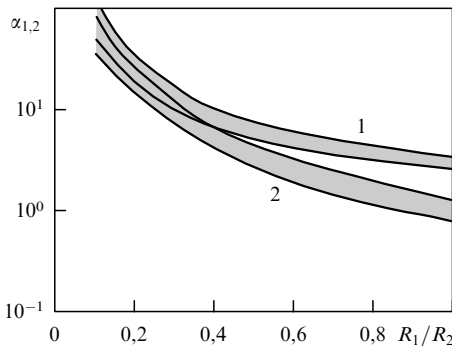
$$F_x(1,001) \approx \frac{0,426}{\ln 2} \frac{k Q_1 q_{2i}}{(R_1 + R_2)^2} \approx 0,616 F_{Ci}.$$

Этот результат позволяет данное решение также причислить к автомоделным.

Сила взаимодействия одинаковых шаров сохраняет характер силы отталкивания во всей области определения  $x \geq 1$  только при  $2,56 < \alpha_1 < 3,28$  (т.е. когда потенциалы шаров равны или близки друг другу на малых расстояниях между ними), вне этой области вблизи точки соприкосновения шаров появляется участок силы притяжения.



**Рис 4.** Результат расчёта силы взаимодействия для шаров с разными радиусами при различных значениях параметра  $\alpha_1$ . Кривая 1 соответствует кулоновскому закону  $1/x^2$ , кривая 2 —  $\alpha_1 = 6,12$ , кривая 3 —  $\alpha_1 = 5,11$ , кривая 4 —  $\alpha_1 = 3$ , кривая 5 —  $\alpha_1 = 25$ .



**Рис 5.** Выделены области параметров, внутри которых на близких расстояниях между шарами сила имеет характер силы отталкивания. Область 1 ( $\alpha_1$ ) соответствует случаю, в котором больший шар подключён к источнику напряжения, а меньший является изолированным и имеет некоторый заряд. Область 2 ( $\alpha_2$ ) соответствует случаю, в котором оба шара имеют некоторые заряды и являются изолированными.

Перейдём к обсуждению результатов расчётов для шаров с разными радиусами. Примем, например,  $R_2/R_1 = 2$ . В этом случае оказывается, что при относительно малых  $\alpha_1 < 5,11$  на близких расстояниях между шарами есть область, в которой сила имеет характер силы притяжения (рис. 4, кривая 4,  $\alpha_1 = 3$ ). При  $5,11 < \alpha_1 < 7,44$  сила во всей области определения является силой отталкивания. Причём она достигает максимального значения  $0,541F_{Cm}$  в том случае, когда шары, находясь вблизи друг друга, имеют одинаковые потенциалы. Это происходит при  $\alpha_1 = 6,12$ . (При этом потенциал первого шара рассчитывался по формуле (22).) Соответствующая зависимость силы от расстояния между центрами шаров изображена на рис. 4 кривой 2 (кривая 1 соответствует кулоновскому закону  $1/x^2$ ). При  $\alpha_1 > 7,44$  вблизи точки соприкосновения шаров вновь появляется область силы притяжения (кривая 5,  $\alpha_1 = 25$ ).

На рисунке 5, выполненном в полулогарифмическом масштабе, выделены области параметров, в которых сила взаимодействия шаров имеет характер силы оттал-

кивания во всей области определения  $x \geq 1$ . Область 1 соответствует  $\alpha_1$  и случаю заданного заряда первого шара и потенциала второго. Кривой 3 на рис. 4 отвечает пограничное значение параметра  $\alpha_1 = 5,11$ , соответствующее нижней границе области 1 на рис. 5. При этом значение силы вблизи точки соприкосновения шаров  $x = 1$  близко к нулю, а максимума, равного  $0,469F_{Cm}$ , сила достигает при  $x \approx 1,08$ .

#### 4. Изолированные шары с заданными зарядами

В этом случае шары первоначально заряжены до некоторых зарядов  $q_1 > 0, q_2 > 0$ , а оба ключа на схеме рис. 1 разомкнуты. Потенциальная энергия и сила взаимодействия шаров в этом случае рассчитываются по формулам [4]:

$$W(x) = \frac{kq_1q_2}{R_1 + R_2} \frac{\alpha_2^2 c_{11} - 2\alpha_2 c_{12} + c_{22}}{2\alpha_2(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} = \frac{kq_1q_2}{R_1 + R_2} V(x), \tag{27}$$

$$\alpha_2 = \frac{q_2}{q_1},$$

$$F_x(x) = -F_{Cm} \frac{\partial V(x)}{\partial x}, \quad F_{Cm} = \frac{kq_1q_2}{(R_1 + R_2)^2}. \tag{28}$$

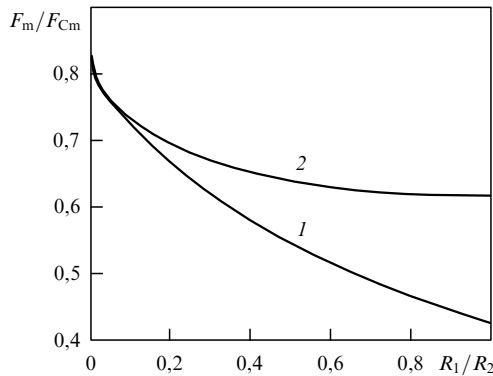
Когда шары одинаковы,  $R_1 = R_2$ , и одинаково заряжены,  $q_1 = q_2$ , имеем автомоделный результат для силы отталкивания, причём на близких расстояниях между шарами [4]  $F_x(1,001) \approx 0,616F_{Cm}$ . Расчёты силы по (28) показывают, что сила отталкивания сохраняется во всей её области определения  $x \geq 1$  лишь при  $1/1,24 < q_2/q_1 < 1,24$ . При других отношениях зарядов шаров на близких расстояниях между ними появляется область силы притяжения.

В случае шаров с разными радиусами повторяется ситуация, изложенная в разделах 2, 3: при одинаковых или близких потенциалах шаров вблизи точки их соприкосновения сила является силой отталкивания во всей области определения. Например, при  $R_2/R_1 = 2$  потенциалы вблизи точки соприкосновения шаров ( $x = 1,001$ ) равны с точностью до трёх значащих цифр при  $q_2/q_1 = 3,47$ , а сила отталкивания  $F_x(1,001) \approx 0,633$  и убывает с возрастанием расстояния между шарами. При этом контроль за потенциалами шаров осуществлялся по формулам

$$\varphi_1 = s_{11}q_1 + s_{12}q_2, \quad \varphi_2 = s_{22}q_2 + s_{12}q_1. \tag{29}$$

На рисунке 5 выделена область параметров 2, в которой сила взаимодействия шаров имеет характер силы отталкивания во всей области её определения  $x \geq 1$ . Отметим, что в работе [4] нет упоминаний об этой области.

Существование таких областей (1 и 2, рис. 5) физически можно объяснить так: если заряд одного из шаров относительно мал, то решающую роль играет взаимодействие большего заряда с его же изображением в слабозаряженном шаре, а это взаимодействие характеризуется силой притяжения, поэтому верхняя и нижняя части плоскости ( $\alpha = q_2/q_1, R_1/R_2$ ) являются областями сил притяжения. Именно этим обстоятельством объясняется эффект притяжения шаров при увеличении потенциала (заряда) на одном из них, о котором говорилось во введении.



**Рис. 6.** Зависимость максимальной силы отталкивания при равных потенциалах шаров в зависимости от отношения их радиусов в случаях, когда один из шаров заряжен и изолирован, а другой имеет постоянный потенциал (кривая 1) и когда оба шара заряжены и изолированы (кривая 2). Предельный случай бесконечно малого отношения радиусов соответствует взаимодействию шарика с бесконечной плоскостью [6].

На рисунке 6 показаны зависимости максимальной силы отталкивания при равных потенциалах шаров вблизи точки их соприкосновения в зависимости от отношения их радиусов. Кривая 1 соответствует случаю, когда один шар имеет некоторый заряд и является изолированным, а второй поддерживается при некотором постоянном потенциале (этот случай рассмотрен в разделе 3). Кривая 2 соответствует заряженным изолированным шарам. Тот факт, что при увеличении отношения радиусов различие между этими случаями стирается, вполне понятен: при больших отношениях  $R_2/R_1$  (при малых  $R_1/R_2$ ) больший шар, будучи подключённым к источнику напряжения, получает заряд, близкий к  $U_2 R_2/k$  [8] (напомним, что при  $R_2 = R_1$  он получает заряд величиной всего  $0,693 U_2 R_2/k$ ). Более того, если силу взаимодействия измерять в единицах

$$F_{Ci} = \frac{kq_{1i}q_{2i}}{(R_1 + R_2)^2},$$

где  $q_{1i} = U(c_{11} + c_{12})$ ,  $q_{2i} = U(c_{22} + c_{12})$  — заряды, полученные шарами от источника напряжения (при этом ёмкостные коэффициенты должны вычисляться в точке соприкосновения шаров, в расчётах бралось  $x = 1,001$ ), то и кривая на рис. 2, и кривая 1 на рис. 6 совпадут с кривой 2 на рис. 6.

Максимальную кулоновскую силу при  $R_1 \ll R_2$  можно представить в следующем виде:

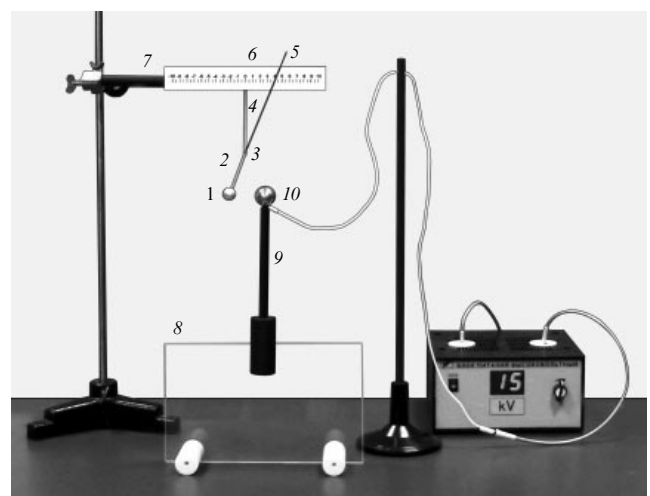
$$F_{Cm} = \frac{kq_1q_2}{(R_1 + R_2)^2} = q_1 \frac{kq_2}{R_2^2(1 + R_1/R_2)^2} \approx q_1 E_2, \quad (30)$$

где  $E_2 = kq_2/R_2^2$  — напряжённость поля на поверхности большего шара в идеальном случае отсутствия эффектов электрических изображений. В работе [6] было установлено, что соприкасающиеся проводящий шар и бесконечная проводящая плоскость, подключённая к источнику напряжения, взаимодействуют с силой  $F_x = 0,832qE_0$ , где  $E_0$  — напряжённость поля вблизи однородно заряженной плоскости,  $q$  — заряд, приобретённый шаром. Из рисунка 6 видно, что при малых  $R_1/R_2$ , т.е. когда радиус одного шара намного больше радиуса

другого и больший шар практически можно заменить плоскостью, обе кривые асимптотически приближаются к значению 0,832 (в частности, при  $R_1/R_2 = 0,01$  в расчётах получается  $F_x = 0,826q_1 E_2$ ).

## 5. Эксперименты

Фотография экспериментальной установки представлена на рис. 7. Основным элементом установки является электростатический динамометр, представляющий собой физический маятник, груз которого обладает электрическим зарядом. В установку, кроме динамометра, входят высоковольтный источник питания и проводящий шар, установленный на изолирующей стойке, с возможностью перемещения в плоскости колебаний маятника в горизонтальном и вертикальном направлениях. Собственно динамометр состоит из покрытого алюминиевой фольгой пенопластового шара 1, полиэтиленового стержня 2, соединённого с шаром, стальной оси вращения 3 с подшипниками из стеклянных бусинок, полиэтиленового держателя 4, стрелки 5 и шкалы 6. Электростатический динамометр закреплён на эбонитовом стержне 7. Под динамометром на столе находится направляющая пластина 8 из оргстекла, по которой перемещается стойка 9 из эбонита. Нижняя часть стойки имеет прорезь, обеспечивающую возможность перемещения стойки по вертикали. На конце стойки закреплён стальной никелированный шар 10, который проводом в высоковольтной изоляционной оболочке соединён с одним из полюсов высоковольтного источника. Второй полюс источника заземлён. Параметры электростатического динамометра: расстояние от центра масс подвижной системы до её оси вращения  $CO = a = 12,2$  мм, расстояние от центра шара до оси вращения  $b = 56,0$  мм, расстояние от оси вращения до шкалы  $c = 100$  мм, масса маятника  $m = 0,76$  г (рис. 8). Условием равновесия подвижной системы динамометра (маятника), имеющей ось вращения,



**Рис. 7.** Экспериментальная установка: 1 — пенопластовый шар, покрытый алюминиевой фольгой, 2 — полиэтиленовый стержень, 3 — стальная ось вращения, 4 — полиэтиленовый держатель, 5 — стрелка, 6 — шкала, 7 — эбонитовый стержень, 8 — направляющая пластина, 9 — стойка из эбонита, 10 — стальной никелированный шар, соединённый с одним из полюсов высоковольтного источника.

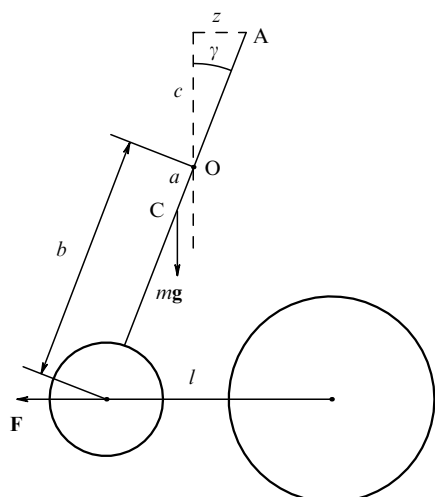


Рис. 8. Схема электростатического динамометра. (К вычислению силы, действующей на подвижный шар в равновесии.)

является равенство моментов сил

$$Fb \cos \gamma = mga \sin \gamma,$$

откуда сила, действующая на шарик динамометра по горизонтали, равна

$$F = \frac{mga}{b} \tan \gamma = \left( \frac{mga}{bc} \right) z = Kz, \quad (31)$$

где  $K$  — чувствительность динамометра для миллиметровой шкалы,  $K = 0,016 \text{ мН мм}^{-1}$ . На расстоянии 2 м от установки строго против динамометра располагался цифровой фотоаппарат, настроенный таким образом, чтобы получилось резкое изображение шариков и миллиметровых делений шкалы динамометра. В качестве высоковольтного источника использовался транзисторный преобразователь с умножителем напряжения, дающий на выходе разность потенциалов, регулируемую в пределах от 0 до 50 кВ. Напряжение измерялось высоковольтным вольтметром, состоящим из микроамперметра с пределом измерения 60 мкА и соединённого с ним последовательно резистора с сопротивлением  $r_1 = 400 \text{ МОм}$ . Наряду с микроамперметром применялся также переведённый в режим вольтметра мультиметр типа М-838, имеющий в этом режиме внутреннее сопротивление 1 МОм. Внутреннее сопротивление высоковольтного источника определялось методом двух нагрузочных резисторов с сопротивлениями  $r_1 = 400 \text{ МОм}$  и  $r_2 = 200 \text{ МОм}$ . Для получения высокого напряжения использовался также высоковольтный блок питания (см. рис. 7), снабжённый встроенным цифровым измерителем напряжения, обеспечивающим получение регулируемой разности потенциалов в пределах от 0 до 30 кВ. Штатный измеритель напряжения этого прибора был проверен посредством высоковольтного вольтметра, совпадение показаний было удовлетворительным, с точностью до двух значащих цифр.

В экспериментах исследовалась зависимость силы электростатического взаимодействия проводящих шаров, заряженных прикосновением к полюсу определённого потенциала  $U_2$ , от расстояния  $l$  между центрами

шаров. Радиусы шара динамометра и стального шара равнялись соответственно  $R_1 = 8,5 \text{ мм}$  и  $R_2 = 13,5 \text{ мм}$ .

Порядок проведения эксперимента был следующим: 1) отрицательный полюс высоковольтного блока питания заземлялся, положительный полюс соединялся со стальным шаром на стойке; 2) с помощью регулятора высоковольтного блока питания напряжение повышалось до требуемого значения; 3) перемещением держателя по направляющей стальной шар приближался к шару динамометра до тех пор, пока расстояние между их не соприкасающимися поверхностями не становилось порядка или менее 1 мм; 4) перемещением держателя по вертикали центры обоих шаров устанавливались на одной горизонтали и в этом положении расположение всех элементов установки фотографировалось; 5) стальной шар пошагово удалялся от шара динамометра при сохранении при этом горизонтальности линии, соединяющей их центры, и на каждом шаге расположение частей приборов фотографировалось; 6) эксперимент заканчивался, когда стрелка динамометра оказывалась вблизи нуля.

Полученная серия фотографий сохранялась в памяти компьютера. Устанавливалось необходимое увеличение и определялся масштаб. С этой целью по экрану дисплея в условных единицах (у.е.) измерялось расстояние по изображению шкалы электростатического динамометра. Например, если  $10 \text{ см} = 13,2 \text{ у.е.}$ , то тогда масштаб составляет  $M = 7,56 \text{ мм у.е.}^{-1}$ . По экрану измерялось в условных единицах расстояние  $l$  между центрами шаров и с помощью масштаба выражалось в миллиметрах. По изображению шкалы динамометра на экране измерялось смещение стрелки в миллиметрах и по известной чувствительности динамометра  $K$  вычислялась сила электростатического взаимодействия между шарами. По этим данным строился график зависимости силы от величины, обратной квадрату безразмерного расстояния между центрами шаров  $x = l/(R_1 + R_2)$  (рис. 9). Из экспериментального графика можно сделать вывод о том, что при достаточно больших расстояниях между шарами закон Кулона выполняется (прямая на рис. 9). Если шары находятся на небольшом расстоянии друг от друга, то сила электростатического взаимодействия между ними меньше, чем требует закон Кулона при сосредоточении зарядов в центрах шаров.

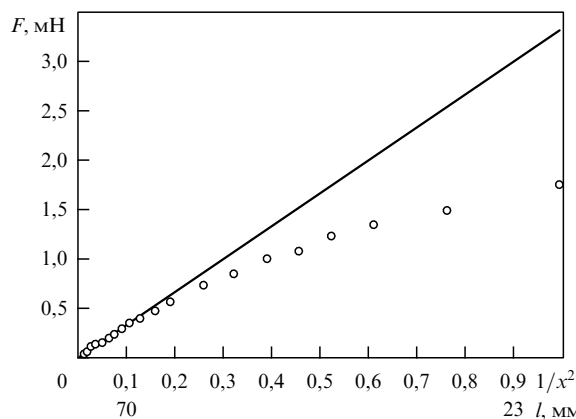


Рис. 9. Зависимость силы электростатического взаимодействия от величины  $1/x^2 = (R_1 + R_2)^2 / l^2$ . Кружками показаны экспериментальные данные. Напряжение 15 кВ. Ниже оси абсцисс для примера приведены два значения расстояния в миллиметрах.

Для количественных оценок на прямолинейном участке графика (см. рис. 9) выбиралось определённое расстояние между центрами шаров и соответствующее ему значение силы взаимодействия. Например, расстоянию  $l = 81$  мм, почти в 10 раз превышающему радиус меньшего шара, соответствует измеренная динамометром сила  $F \approx 0,24$  мН. В опыте после соприкосновения шаров, больший из которых поддерживался при потенциале  $U_2 = 15$  кВ, заряд меньшего шара, согласно теории и зависимости  $l$ , представленной на рис. 3, для отношения радиусов шаров  $R_1/R_2 = 8,5/13,5 = 0,629$  равен  $q_{1i} = 0,564 U_2 R_1/k = 7,99$  нКл. Заряд соединённого с высоковольтным источником большего шара, следовательно, имеющего неизменный потенциал относительно земли, на больших расстояниях между шарами равен  $q_2 = U_2 R_2/k = 22,5$  нКл. Тогда сила взаимодействия между шарами, вычисленная по закону Кулона в зоне его действия,  $F = kq_{1i}q_2/l^2 \approx 0,25$  мН, что с точностью до 4% совпадает с экспериментальным значением. Таким образом, электростатический динамометр с достаточной точностью измеряет электростатическую силу взаимодействия шаров, а измерители напряжения также достаточно точно измеряют потенциал большего шара относительно земли.

Для качественного и количественного сравнения результатов теории и эксперимента при различных рабочих напряжениях графики зависимости силы от обратного квадрата расстояния сводились к безразмерным следующим образом. Вместо измеренной в эксперименте силы взаимодействия использовалось отношение  $F/F_{Cm}$ , где  $F_{Cm}$  — найденное графически максимальное значение силы Кулона при  $x = 1$ , когда заряды соприкасающихся шаров считаются сосредоточенными в их центрах (для зависимости на рис. 9  $F_{Cm} \approx 3,35$  мН). Так получают зависимости, изображённые на рис. 10, где также представлены обработанные аналогичным образом результаты опытов с напряжением 10 кВ. Прямая 1 соответствует кулоновскому закону взаимодействия, кривая 2 — силе взаимодействия шаров, вычисленной по формуле (26) при параметрах эксперимента  $R_1/R_2 = 0,629$  и  $\alpha_1 = U_2(R_1 + R_2)/(kq_{1i}) = 4,59$ . При этом

$$F_{Cm} = \frac{q_{1i}U_2R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

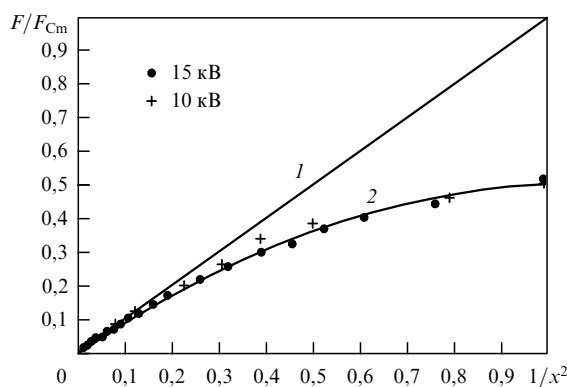


Рис. 10. Зависимость нормированной силы взаимодействия шаров от обратного квадрата расстояния между центрами шаров. Прямая 1 — закон Кулона, кривая 2 — расчёт силы по формуле (26).

Видно, что экспериментальные результаты достаточно хорошо ложатся на теоретическую кривую 2.

Притяжение одноимённо заряженных шаров наблюдалось в двух случаях, один из которых был упомянут выше. А именно: первоначально шары, находясь в соприкосновении, заряжались от источника при некотором напряжении, в результате чего меньший шар отклонялся на некоторый угол и находился в этом положении в равновесии. Далее больший шар немного отодвигали, увеличивая расстояние между шарами, и одновременно увеличивали напряжение на большем шаре примерно в полтора раза, тогда отталкивание шаров сменялось их притяжением и соприкосновением. После чего меньший шар вновь отталкивался, отклоняясь уже на больший угол. Второй случай притяжения шаров наблюдался, когда заряд одного из шаров, наоборот, уменьшался. Для этого шары сначала одноимённо заряжались, как и в первом случае. Затем расстояние между ними слегка увеличивали и больший шар отключали от источника напряжения. Спустя некоторое время (порядка нескольких секунд) отталкивание сменялось притяжением. Происходило это потому, что один из шаров терял заряд быстрее, чем другой, и их потенциалы начинали ощутимо различаться. В соответствии с изложенной выше теорией, увеличивая или уменьшая заряд одного из шаров, мы уходим из узкой области сил отталкивания (см. рис. 5) вверх или вниз, попадая в область действия сил притяжения.

Следует отметить, что конечная проводимость воздуха в некоторых опытах может играть решающую роль. Так, например, в опытах, описанных в [9], с шаром и диском, подключёнными к одному и тому же источнику напряжения, наблюдалось неотталкивание шара от диска (его прилипание к диску) при напряжениях вплоть до значений порядка 10 кВ. Вероятно, такое проявление эффектов электрических изображений становилось возможным благодаря слабым токам с острых краёв диска, обеспечивающим наличие разности потенциалов между шаром и диском.

## 6. Заключение

Проведённое исследование показало, что характер взаимодействия шаров в рамках трёх рассмотренных постановок задачи в общем случае различен. Так, если шары во время взаимодействия подключены к одной и той же клемме источника напряжения, то они всегда отталкиваются друг от друга. В двух других рассмотренных случаях (один шар заряжен и затем изолирован, другой подключён к источнику напряжения, оба шара одноимённо заряжены и затем изолированы) всегда можно найти область параметров, в которой на близких расстояниях шары будут притягиваться. Исключением является случай, когда первоначально в результате подбора параметров или соприкосновения потенциалы шаров, находящихся на близком расстоянии друг от друга, равны. Тогда шары после их удаления друг от друга всегда будут отталкиваться (если исключить потерю заряда вследствие проводимости воздуха), сила отталкивания будет убывать с возрастанием расстояния между шарами, стремясь к кулоновской. Такой сценарий взаимодействия шаров реализуется независимо от того, остаются оба шара (или один из них) подключёнными к источнику напряжения или нет. Эта ситуация была



реализована в эксперименте (см. рис. 9, 10). Согласно теории и эксперименту, реальная сила взаимодействия шаров при их сближении меньше силы, вычисленной в кулоновском приближении (точечные заряды в центрах шаров). В частности, при соприкосновении шаров эта сила равна  $jkq_{1i}q_{2i}/(R_1 + R_2)^2$ ,  $j < 1$ ,  $q_{1i}$ ,  $q_{2i}$  — заряды, приобретаемые шарами. В экспериментах это отклонение от закона Кулона фиксируются совершенно однозначно, с достаточно хорошей точностью (см. рис. 9, 10). Однако уже на расстоянии  $l = 2(R_1 + R_2)$  между центрами шаров кулоновское приближение хорошо выполняется — отличие реальной силы от вычисленной в кулоновском приближении порядка 6%. С уменьшением (увеличением) отношения радиусов множитель  $j$  монотонно возрастает от значения  $j = 0,616$  (одинаковые шары) до  $j = 0,832$  в асимптотическом случае "шар — бесконечная проводящая плоскость". Здесь найденная асимптотика для  $j$  совпадает с известным решением задачи о взаимодействии одноименно заряженных шара и плоскости [6].

На плоскости параметров отношение радиусов — отношение зарядов область действия силы отталкивания одноименно заряженных шаров занимает относительно узкую полосу (см. рис. 5), расширяющуюся с уменьшением отношения радиусов. Внутри этой полосы потенциалы шаров либо равны, либо близки между собой. Как только потенциалы шаров начинают ощу-

тимо различаться, сила, действующая на шары, становится силой притяжения (например, при  $R_1/R_2 = 0,5$  фактически достаточно различия потенциалов шаров на 4%). Этот теоретический вывод качественно подтверждается в экспериментах.

Авторы благодарят Е.И. Вараксину и А.Б. Федорова за помощь в проведении экспериментов.

## Список литературы

1. Davis M H *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **17** 499 (1964)
2. Мучник В М, Фишман Б Е *Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере* (Л.: Гидрометеоздат, 1982)
3. Саранин В А *Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях* (М. — Ижевск: РХД, 2009)
4. Саранин В А *УФН* **169** 453 (1999) [Saranin V A *Phys. Usp.* **42** 385 (1999)]
5. Остроумов Г А *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: Физические основы электрогидродинамики* (М.: Наука, 1979)
6. Лебедев Н Н, Скальская И П *ЖТФ* **32** 375 (1962) [Lebedev N N, Skal'skaya I P *Sov. Phys. Tech. Phys.* **7** 268 (1962)]
7. Smythe W R *Static and Dynamic Electricity* (New York: McGraw-Hill, 1939) [Смайт В *Электростатика и электродинамика* (М.: ИЛ, 1954)]
8. Саранин В А, Данилов О Е *Физическое образование в вузах* **14** (4) 20 (2008)
9. Саранин В А *Физическое образование в вузах* **15** (3) 80 (2009)

## Interaction of two charged conducting balls: theory and experiment

V.A. Saranin, V.V. Mayer

*Physics Department, V.G. Korolenko Glazov State Pedagogical Institute,  
ul. Pervomaiskaya 25, 427621 Glazov, Udmurtia Republic, Russian Federation  
Tel. (7-34141) 5-58 57. E-mail: val-sar@yandex.ru, saranin@ggpi.org, varaksina\_ei@list.ru*

Three possible settings are considered for the problem of two interacting charged conducting balls: (1) both balls are kept at constant and equal potentials, (2) one ball is charged and isolated, the other is kept at a constant potential of the same sign as the first, and (3) both balls are likely charged and isolated. It is shown that fundamentally different problems generally arise here: whereas in the first case the balls always repel, in the second and the third fairly wide ranges of radius and charge ratios can always be found in which the balls attract each another at close distances. These ranges are identified in the paper. The results are presented of experiments that demonstrate both the repulsion and an attraction of likely charged balls. Theory and experiment show satisfactory agreement, both qualitatively and quantitatively.

PACS numbers: 01.50.My, **01.55. + b**, 41.20.Cv

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201010f.1109

Bibliography — 9 references

Received 3 March 2010

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **180** (10) 1109–1117 (2010)

*Physics – Uspekhi* **53** (10) (2010)