

## ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

## К 70-летию формулировки граничного условия Леонтовича

(отклик на статью В.И. Альшица и В.Н. Любимова

"Обобщение приближения Леонтовича для электромагнитных полей на границе диэлектрик – металл")

А.В. Гульельми

*Обсуждается вопрос о граничном условии на поверхности хорошо проводящих тел, которое было сформулировано Леонтовичем 70 лет тому назад. Подвергается сомнению справедливость утверждения Альшица и Любимова [УФН 179 865 (2009)] о том, что точность граничного условия оказывается выше, чем полагал сам автор. Указывается на статью Рытова, написанную по предложению Леонтовича и опубликованную в 1940 г., из которой очевидно, что Леонтович был вполне осведомлён о точности предложенного им граничного условия.*

PACS number: 71.36.+c

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201001g.0105

Импедансное граничное условие Леонтовича

$$\mathbf{E}_t = \zeta \mathbf{H}_t \times \mathbf{n} \quad (1)$$

приближённо выполняется на поверхности хорошо проводящих тел [1]. Здесь  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  — касательные компоненты электрического и магнитного полей,  $\mathbf{n}$  — внутренняя нормаль к поверхности тела,  $\zeta$  — поверхностный импеданс. Условие Леонтовича оказалось полезным при решении электродинамических задач во многих областях в исключительно широком диапазоне: вакуумная длина волны изменяется от  $4 \times 10^{-5}$  см в оптике [2] до  $10^{14}$  см в геофизике [3].

М.А. Леонтович сформулировал граничное условие (1) в конце 30-х годов прошлого века. Более точно указать время затруднительно. По стечению обстоятельств результат был опубликован лишь после Второй мировой войны, но и до этого он был хорошо известен радиофизикам. Можно сослаться, например, на статью С.М. Рытова [4], поступившую в ЖЭТФ 19 декабря 1939 г. Статья написана по предложению Леонтовича, который, судя по контексту [4], поставил задачу найти поправки к (1) в рамках асимптотической теории скин-эффекта.

В данном письме я выражаю сомнение в справедливости следующих высказываний В.И. Альшица и В.Н. Любимова: "Интересно, что сам Леонтович парадоксальным образом недооценил точность своего приближения... Тем самым точность рассматриваемого подхода оказывается выше, чем полагал сам автор" [2]. Из формул, приведённых в [4], вполне очевидно, что Леонтович и Рытов правильно оценивали точность формулы

(1). А именно, согласно [4] в определённом классе моделей распространения электромагнитных волн поправки к (1) начинаются не с квадратичного, а с кубического члена по малому параметру  $\zeta$ . К такому же выводу независимо приходят Альшиц и Любимов [2], однако вопреки их мнению у нас нет оснований предполагать, что Леонтович ошибался в оценке точности формулы (1).

Кубичные по  $\zeta$  поправки нарушают локальность граничного условия. Пусть, например, однородное проводящее тело располагается в полупространстве  $z \geq 0$  и граничит с вакуумом, а электромагнитное поле зависит от  $x$  и  $z$ , но не зависит от  $y$  и имеет структуру ТМ-волны. Тогда при  $z = 0$

$$E_x = \zeta H_y + \frac{c^2 \zeta^3}{2\omega^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где  $\omega$  — частота волны,  $c$  — скорость света. Элементарный вывод (2) с использованием параболического уравнения Леонтовича дан в [5], причём прямо указано, что более общая, но и значительно более громоздкая формула, аналогичная (2), получена ранее другим путём в работе [4]. Мы видим, что квадратичная по  $\zeta$  поправка к (1) действительно отсутствует. Однако это свойство граничного условия может быть легко нарушено, если поверхность тела не является плоской. Другими словами, в граничном условии появляются члены порядка  $\zeta^2$  при учёте кривизны поверхности. Леонтовичу это обстоятельство также хорошо было известно.

Должен подчеркнуть, что мои замечания касаются только исторического аспекта проблемы. В целом же я считаю работу [2] интересной и важной.

## Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) [Landau L. D., Lifshitz E. M. *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)]
2. Альшиц В. И., Любимов В. Н. *УФН* 179 865 (2009) [Alshits V. I., Lyubimov V. N. *Phys. Usp.* 52 815 (2009)]

А.В. Гульельми. Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта, ул. Б. Грузинская 10, 123995 Москва, Российская Федерация  
Тел. (495) 582-99-71  
E-mail: guglielmi@mail.ru

Статья поступила 24 августа 2009 г.

3. Гульельми А В *УФН* **158** 605 (1989) [Guglielmi A V *Phys. Usp.* **32** 678 (1989)]
4. Рытов С М *ЖЭТФ* **10** 180 (1940)
5. Гульельми А В *Письма в ЖЭТФ* **89** 439 (2009) [Guglielmi A V *JETP Lett.* **89** 377 (2009)]

**On the 70th anniversary of the Leontovich boundary condition** (comments on "The generalization of the Leontovich approximation to electromagnetic fields at the insulator-metal interface" by V I Alshits and V N Lyubimov)

**A.V. Guglielmi**

*O. Yu. Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences,  
ul. B. Gruzinskaya 10, 123995 Moscow, Russian Federation  
Tel. (7-495) 582-99-71. E-mail: guglielmi@mail.ru*

The question of Leontovich's 70-year old boundary condition for the surface of a well conducting body is discussed. Doubt is cast on the assertion by Alshits and Lyubimov (*Usp. Fiz. Nauk* **179** 865 (2009) [*Phys. Usp.* **52** 815 (2009)]) that this boundary condition is more accurate than Leontovich himself believed. The 1940 paper by Rytov written on the suggestion of Leontovich is indicated as evidence for the latter's full awareness of exactly how accurate his proposed boundary condition was.

PACS number: **71.36.+c**

Bibliography — 5 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **180** (1) 105–106 (2009)

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201001g.0105

Received 24 August 2009

*Physics – Uspekhi* **53** (1) (2010)

## К юбилею плодотворной идеи

(ответ на письмо А.В. Гульельми в Редакцию *УФН*)

В.И. Альшиц, В.Н. Любимов

PACS number: **71.36.+c**

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201001h.0106

Цель нашей статьи [1] в *УФН*, послужившей поводом для полемического отклика А.В. Гульельми, не сводилась только к обсуждению обобщения граничного условия Леонтовича для электромагнитных полей в виде точного уравнения, справедливого для любых значений поверхностного импеданса  $\zeta$  металла. В работе [1] продемонстрировано, что приближение Леонтовича обычно, на удивление, прекрасно работает без всяких поправок, а уж если отказывает, как в случае отражения электромагнитных волн от поверхности металла при углах близких к углу скользкого падения, то одной поправкой не обойдётся — именно тогда и пригодится наша точная формула.

То, что поправки к классической формуле Леонтовича начинаются с кубического по импедансу члена  $\zeta^3$ , хорошо известно в литературе — в нашей статье [1] стоит ссылка на монографию [2]. Это видно и из работы Рытова [3] — она подробно обсуждается самим Леонтовичем в статье, впервые опубликованной в 1948 г., а затем — в 1985 г. в сборнике его трудов [4] (ссылка [1] в нашей статье). Из обсуждения в этой статье результатов Рытова видно, что Леонтович действительно был хорошо знаком с проблемой поправок к его граничному условию и прекрасно знал, что первая поправка к классической формуле  $\sim \zeta^3$ . Этот факт мы не подвергаем сомнению в статье [1]. Вопреки утверждению Гульельми, *мы нигде не пишем о недооценке Леонтовичем "точности граничного условия"*. Совсем другой вопрос, с какой точностью

можно вычислять конкретные характеристики волновых полей, пользуясь классической формулой Леонтовича.

Говоря о недооценке точности в [4], мы имели в виду не само граничное условие, а полученные с его помощью результаты. Вот здесь Леонтович действительно недооценил точность собственного приближения. В самом конце статьи [4] он сравнивает коэффициент отражения плоской волны, полученный в импедансном приближении, с точным решением Френеля и утверждает, что разница отвечает ошибке квадратичной по импедансу. Между тем при более внимательном сравнении видно, что эта разница кубична по импедансу, т.е. результат значительно точнее. Именно об этом сказано в нашей статье [1, с. 867–868] после фразы, процитированной Гульельми. Весь данный фрагмент текста в целом по смыслу однозначен и вряд ли может быть истолкован читателем иначе. О том же говорится и в аннотации к нашей статье, но, судя по реакции А.В. Гульельми, здесь, к сожалению, мы изъяснились недостаточно чётко.

Тот факт, что в 2009 г. в двух ведущих физических журналах России независимо появились статьи [1, 5], посвящённые условию Леонтовича, свидетельствует о том, что в данном случае мы имеем дело с исключительно удачной эвристической идеей. Настоящая полемика вслед за публикациями [1, 5] продолжает отмечать 70-летие этой идеи.

### Список литературы

1. Альшиц В И, Любимов В Н *УФН* **179** 865 (2009) [Alshits V I, Lyubimov V N *Phys. Usp.* **52** 815 (2009)]
2. Senior T B A, Volakis J L *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics* (IEEE Electromagnetic Waves Ser., 41) (London: IEEE, 1995)
3. Рытов С М *ЖЭТФ* **10** 180 (1940)
4. Леонтович М А *Теоретическая физика. Избранные труды* **89** (М.: Наука, 1985) с. 351–355
5. Гульельми А В *Письма в ЖЭТФ* **89** 439 (2009) [Guglielmi A V *JETP Lett.* **89** 377 (2009)]

**В.И. Альшиц, В.Н. Любимов.** Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН, Ленинский просп. 59, 119333 Москва, Российская Федерация  
Тел. (495) 330-82-74. Факс (499) 135-10-11  
E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru, lyubvn36@mail.ru

Статья поступила 16 сентября 2009 г.