

## ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Нелинейные аспекты квантовой физики плазмы

П.К. Шукла, Б. Элиассон

*Плотная квантовая плазма повсеместно встречается во внутренних областях планет, в компактных астрофизических объектах (например, внутри белых карликов, в магнитарах и т.д.), в полупроводниках и микромеханических системах, а также в экспериментах следующего поколения по взаимодействию мощных лазеров с плотной плазмой мишеней и в квантовых рентгеновских лазерах на свободных электронах. В отличие от классической плазмы, в квантовой могут возникать крайне высокие концентрации и низкие температуры частиц. Такая квантовая плазма состоит из вырожденных электронов, позитронов и дырок. Масса позитрона (дырки) равна (немного отличается) массе электрона, а их заряды противоположны. Вырожденные заряженные частицы (электроны, позитроны, дырки) подчиняются статистике Ферми–Дирака. В квантовой плазме появляются новые силы, связанные 1) с квантовым статистическим давлением электронов и позитронов, 2) с туннелированием электронов и позитронов через потенциал Бомы и 3) с моментами спина электронов и позитронов. Учёт этих квантовых сил приводит к появлению сверхвысокочастотных дисперсионных электростатических и электромагнитных волн (например, в областях жёсткого рентгеновского и гамма-излучения) с чрезвычайно короткими длинами волн. В настоящем обзоре представлены теоретические основы важных нелинейных аспектов взаимодействия волн типа волна-волна и волна-частица в плотной квантовой плазме. В частности, значительное внимание уделено нелинейным электростатическим электронным и ионным плазменным волнам, новым аспектам трёхмерной турбулентности квантовой электронной жидкости, в том числе нелинейно связанным интенсивным электромагнитным волнам и локализованным плазменным волновым структурам. Также обсуждаются кинетические структуры в фазовом пространстве и возможные механизмы генерации квазистационарных магнитных полей в плотной квантовой плазме. Обсуждается влияние внешнего магнитного поля и момента спина электрона на динамику электромагнитной волны. В заключении отмечены направления развития нелинейной квантовой физики плазмы.*

PACS numbers: 05.30.Fk, 52.35.Mw, 52.35.Ra, 52.35.Sb

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201001b.0055

## Содержание

1. Введение (55).
2. Жидкостное представление квантоподобных моделей (59).
3. Нелинейные уравнения для немагнитной квантовой плазмы (61).
  - 3.1. Нелинейное уравнение Шрёдингера – уравнение Пуассона.
  - 3.2. Учёт динамики ионов.
4. Локализованные электростатические возбуждения (62).

- 4.1. Тёмные солитоны и вихри, связанные с ЭПК. 4.2. Локализованные ионные волновые возбуждения в квантовой плазме.
  5. Турбулентность квантовой жидкости (66).
  6. Кинетические структуры в фазовом пространстве (69).
  7. Магнитные поля в квантовой плазме (70).
    - 7.1. Квантовая вейбелевская неустойчивость. 7.2. Намагничивание плотной плазмы электромагнитной волной.
  8. Динамика электромагнитных волн в плотной плазме (73).
    - 8.1. Электромагнитные спиновые волны в замагниченной плазме. 8.2. Нелинейно связанные ЭМ-волны. 8.3. Неустойчивости вынужденного рассеяния. 8.4. Автолокализованные ЭМ-волны в квантовой дырке.
  9. Выводы и перспективы (77).
  10. Приложения (78).
    - 10.1. Вывод уравнения Власова из уравнения Вигнера. 10.2. Вывод дисперсионного соотношения для системы Вигнера – Пуассона.
- Список литературы (80).

**П.К. Шукла (P.K. Shukla)**, Institut für Theoretische Physik IV, Fakultät für Physik und Astronomie, Ruhr–Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany  
 Scottish Universities Physics Alliance (SUPA), Department of Physics, University of Strathclyde, Glasgow G4 0NG, United Kingdom  
 Instituto de Plasmas e Fusão Nuclear, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1049-001 Lisboa, Portugal  
 Department of Physics, Umeå University, SE-90 187 Umeå, Sweden  
 The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, I-34014 Trieste, Italy. E-mail: profshukla@yahoo.de  
**Б. Элиассон (B. Eliasson)**, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, I-34014 Trieste, Italy  
 E-mail: bengt@tp4.ruhr-uni-bochum.de

Статья поступила 19 июня 2009 г.,  
 после доработки 26 августа 2009 г.

## 1. Введение

Квантовая физика плазмы имеет длинную и разнообразную историю исследований [1–5] и в последнее время интерес к ней постоянно растёт [6, 7]. Это связано со всевозможными современными технологическими

приложениями квантовой физики плазмы (например, металлические и полупроводниковые наноструктуры, такие как металлические наночастицы, металлические кластеры, тонкие металлические плёнки, спинтроника, нанотрубки, квантовые ямы и квантовые точки, наноплазмонные устройства, квантовые рентгеновские лазеры на свободных электронах и т.д.). Благодаря развитию техники сверхбыстрой спектроскопии, в настоящее время оказывается возможным наблюдать фемтосекундную динамику электронного газа в металлической плазме. Концентрации вырожденных электронов и/или позитронов в плотной квантовой плазме чрезвычайно высоки, так что частицы плазмы (в основном электроны и позитроны) подчиняются статистике Ферми–Дирака.

Эффекты квантового вырождения начинают играть значительную роль, когда тепловая длина волны де Бройля электронов  $\lambda_B = \hbar/(2\pi m_e k_B T)^{1/2}$  становится порядка или больше среднего межэлектронного расстояния  $n_e^{-1/3}$ , т.е. когда [6, 7]

$$n_e \lambda_B^3 \gtrsim 1, \quad (1)$$

или, что то же самое, если температура  $T$  сравнима или ниже электронной температуры Ферми  $T_{Fe} = E_F/k_B$ , где энергия Ферми электрона

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{2/3}, \quad (2)$$

так что

$$\chi = \frac{T_{Fe}}{T} = \frac{1}{2} (3\pi^2)^{2/3} (n_e \lambda_B^3)^{2/3} \gtrsim 1. \quad (3)$$

Здесь  $\hbar$  — постоянная Планка, делённая на  $2\pi$ ,  $n_e$  — концентрация электронов,  $m_e$  — масса покоя электрона и  $k_B$  — постоянная Больцмана.

Если температура приближается к электронной температуре Ферми  $T_{Fe}$ , то можно показать, используя формализм матрицы плотности [8], что равновесная функция распределения электронов видоизменяется от распределения Максвелла–Больцмана  $\propto \exp(-E/k_B T)$  к распределению Ферми–Дирака

$$\propto \left( \frac{2}{\hbar^3} \right) \left[ \exp \left( \frac{E - \mu}{k_B T} \right) + 1 \right]^{-1},$$

где  $E$  — кинетическая энергия электрона, а  $\mu$  — химический потенциал. Радиус экранирования Томаса–Ферми в плотной фермиевской плазме

$$\lambda_F = \frac{V_{Fe}}{\sqrt{3}\omega_{pe}} \quad (4)$$

является квантовым аналогом радиуса Дебая–Хюккеля. Здесь электронная скорость Ферми

$$V_{Fe} = \left( \frac{2E_F}{m_e} \right)^{1/2} = \frac{\hbar}{m_e} (3\pi^2 n_e)^{1/3} \quad (5)$$

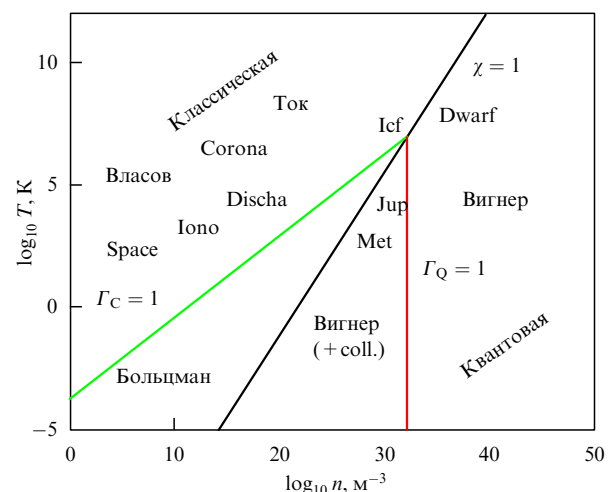
соответствует скорости электрона на поверхности Ферми.

Величина, характеризующая значимость столкновений в плотной плазме, представляет собой квантовый параметр связи — отношение энергии взаимодействия электронов  $E_{int} = e^2 n_e^{1/3}$  к средней кинетической энергии электронов  $E_{kin}$ , где  $e$  — заряд электрона. Кинетическая

энергия в классической плазме есть  $k_B T$  и, следовательно, в классическом случае  $\Gamma_C = E_{int}/k_B T$ . В квантовой плазме вместо этого имеем  $E_{kin} = E_F$ , что даёт квантовый параметр связи [6, 7, 9]

$$\Gamma_Q = \frac{E_{int}}{E_F} = \frac{2}{(3\pi^2)^{2/3}} \frac{m_e e^2}{\hbar^2 n_e^{1/3}} \sim \left( \frac{1}{n_e \lambda_F^3} \right)^{2/3} \sim \left( \frac{\hbar \omega_{pe}}{2k_B T_{Fe}} \right)^2 \equiv H^2 \quad (6)$$

(для ясности коэффициенты пропорциональности опущены), который аналогичен классическому при  $\lambda_F \rightarrow \lambda_D$ . Различные плазменные режимы проиллюстрированы на рис. 1, где прямые линии разделяют 1) области классической и квантовой плазмы,  $\chi = 1$ , 2) пределы бесстолкновительной и столкновительной классической плазмы,  $\Gamma_C = 1$  и 3) пределы бесстолкновительной и столкновительной квантовой плазмы,  $\Gamma_Q = 1$ . Примеры встречающейся в экспериментах и естественных условиях плазмы приведены на рис. 1. Также на рис. 1 указаны кинетические уравнения, используемые для моделирования плазмы в соответствующем режиме. Таким образом, уравнения Власова и Вигнера применяются для моделирования бесстолкновительной плазмы в классическом и квантовом пределах соответственно, в то время как "Больцман" означает столкновительные кинетические модели в классической плазме. Кинетические модели столкновительной квантовой плазмы обозначены на рис. 1 как "Вигнер (+coll)". Заметим, что квантовая плазма становится бесстолкновительной, ( $\Gamma_Q < 1$ ), когда среднее расстояние между электронами оказывается порядка боровского радиуса  $a_0$ , т.е. когда  $d = 1/n_e^{1/3} < [(3\pi^2)^{2/3}/8\pi] a_0 \approx 0,38 a_0$ , где  $a_0 = \hbar^2/m_e e^2 \approx 0,53 \text{ \AA}$ . Это соответствует концентрациям  $n_e \gtrsim 1,22 \times 10^{26} \text{ см}^{-3}$ , что на три порядка превышает плотность электронов в обычном металле, например, в золоте  $n_e = 5,9 \times 10^{22} \text{ см}^{-3}$  при комнатной температуре.



**Рис. 1.** Схематическая диаграмма плазмы на плоскости  $\log_{10}(T)$ – $\log_{10}(n)$ : IONO — ионосферная плазма, SPACE — космическая плазма, CORONA — плазма солнечной короны, DISCHA — типичный электрический разряд, ТОК — токамаки/эксперименты по синтезу в магнитном поле, ICF — синтез с инерционным удержанием, MET — металлы и металлические кластеры, JUP — ядро Юпитера, DWARF — белый карлик. Согласно работам [6, 7].

В ферми-вырожденных веществах имеет место эффект, называемый блокировкой Паули, который сильно уменьшает электрон-электронные и электрон-ионные частоты столкновений. А именно, при умеренных температурах столкновения могут испытывать только электроны внутри энергетического слоя толщиной  $k_B T$  около поверхности Ферми (на которой энергия электрона равна  $E_F$ ). Частота электрон-электронных столкновений для таких электронов — величина порядка  $k_B T/\hbar$ , а средняя частота столкновений получается умножением этого выражения на  $T/T_F$ . В результате частота столкновений  $\nu_{ee}$ , поделённая на электронную плазменную частоту, есть [7]

$$\frac{\nu_{ee}}{\omega_{pe}} \sim \frac{E_F}{\hbar\omega_p} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 = \frac{1}{\Gamma_Q^{1/2}} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2. \quad (7)$$

Следовательно,  $\nu_{ee} \ll \omega_{pe}$  при  $T \ll T_F$  и  $\Gamma_Q > 1$ , что характерно для электронов в металле. Например, при комнатной температуре имеем  $\nu_{ee} \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ , что намного меньше типичной бесстолкновительной частоты коллективных взаимодействий  $\omega_{pe} \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$ . Аналогично, типичная частота электронно-решёточных (ионных) столкновений,  $\nu_{ei} \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , на порядок меньше  $\omega_{pe}$ . Таким образом, бесстолкновительный режим представляется подходящим для описания свободных электронов на временах порядка фемтосекунды. В более плотной плазме, такой, как во внутренних областях звёзд [10–12] и в устройствах инерционного ядерного синтеза [13–15], относительное влияние столкновений становится ещё меньше, приводя к увеличению электронного переноса и теплопроводности.

Более 60 лет назад Вигнер [16] представил формализм фазового пространства для описания квантового состояния заряженных частиц в бесстолкновительных квантовых системах. Он ввел квантовую функцию распределения переменных в фазовом пространстве  $f(x, p, t)$ . Вигнеровская функция распределения определяется следующим образом:

$$f(x, p, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3N}} \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(x - \frac{\hbar}{2}\tau, x + \frac{\hbar}{2}\tau, t\right) \exp(-ip\tau) d\tau, \quad (8)$$

где  $N$  — число частиц в системе,  $x\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  и  $p\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  — множества координат и импульсов частиц,  $t$  — время и  $\rho(x, x', t)$  — матрица плотности. Функция Вигнера не является плотностью вероятности в фазовом пространстве  $x, p$ , поскольку она может принимать отрицательные значения. Вигнеровская функция распределения  $W_i(x, p, t)$ , соответствующая волновой функции  $\psi_i(x, t)$ , может быть записана как

$$W_i(x, p, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3N}\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi_i\left(x - \frac{y}{2}, t\right) \psi_i^*\left(x + \frac{y}{2}, t\right) \times \exp\left(-i\frac{py}{\hbar}\right), \quad (9)$$

причём

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W_i(x, p, t) = \langle |\psi_i(x, t)|^2 \rangle, \quad (10)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение. Квантовое кинетическое уравнение на основе распределения

Вигнера было развито Моялом [17], так что в настоящее время при рассмотрении статистических эффектов в электронных плазменных волнах в квантовой плазме ссылаются на описание Вигнера–Мояла [18].

Аналитические исследования коллективных взаимодействий в ансамблях вырожденных электронов в плотной квантовой плазме относятся к началу 1955-х гг. В частности, Климонтович и Силин [1], а также Бом и Пайнс [2–5] описали свойства линейных электронных плазменных колебаний (ЭПК) в плотной квантовой плазме. В такой плазме электроны, позитроны и дырки вырождены, в то время как ионы холодные и классические (в плотной квантовой плазме ионная скорость Ферми обычно намного меньше электронной скорости Ферми). Соответственно, у электронов, позитронов и дырок имеем функцию распределения Ферми–Дирака [19], в отличие от функции распределения Максвелла–Больцмана у заряженных частиц в классической плазме.

Дисперсионное уравнение для высокочастотных электронных плазменных колебаний в плотной квантовой плазме с фиксированным ионным фоном (см. раздел 10.2),

$$1 - \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \frac{f_0(\mathbf{u})}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - (\hbar^2 k^4)/4m_e^2} d^3u = 0 \quad (11)$$

было также получено Бомом и Пайнсом [3] путём ряда канонических преобразований в гамильтоновой системе отдельных электронов, взаимодействующих электростатически. В пределе нулевой температуры имеем (см. раздел 9.2)

$$1 + \frac{3\omega_{pe}^2}{4k^2 V_{Fe}^2} \left\{ 2 - \frac{m_e}{\hbar k V_{Fe}} \left[ V_{Fe}^2 - \left( \frac{\omega}{k} + \frac{\hbar k}{2m_e} \right)^2 \right] \right\} \times \log \left| \frac{\omega/k - V_{Fe} + \hbar k/2m_e}{\omega/k + V_{Fe} + \hbar k/2m_e} \right| + \frac{m_e}{\hbar k V_{Fe}} \times \left[ V_{Fe}^2 - \left( \frac{\omega}{k} - \frac{\hbar k}{2m_e} \right)^2 \right] \times \log \left| \frac{\omega/k - V_{Fe} - \hbar k/2m_e}{\omega/k + V_{Fe} - \hbar k/2m_e} \right| \equiv 1 + \chi_e = 0, \quad (12)$$

что в пределе  $\hbar k/m_e \rightarrow 0$  даёт

$$1 + \frac{3\omega_{pe}^2}{k^2 V_{Fe}^2} \left( 1 - \frac{\omega}{2k V_{Fe}} \log \left| \frac{\omega + k V_{Fe}}{\omega - k V_{Fe}} \right| \right) = 0, \quad (13)$$

где предполагается, что  $\omega$  — действительна, и  $\omega/k > V_{Fe}$ . Здесь  $\omega$  — частота волны,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, и  $\omega_{pe} = (4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2}$  — электронная плазменная частота. С другой стороны, при малых волновых числах с точностью до членов, содержащих  $k^4$ , из (12) получаем

$$\omega^2 \approx \omega_{pe}^2 + \frac{3}{5} k^2 V_{Fe}^2 + (1 + \alpha) \frac{\hbar^2 k^4}{4m_e^2}, \quad (14)$$

где  $\alpha = (48/175) m_e^2 V_{Fe}^4 / \hbar^2 \omega_{pe}^2 \approx 2,000 (a_0^3 n_0)^{1/3}$ , где  $a_0 = \hbar^2/m_e e^2 \approx 53 \times 10^{-10} \text{ см}$  — боровский радиус. Уравнение (14) показывает, что дисперсия волны появляется из-за конечной ширины волновой функции электрона в плотной фермиевской плазме [7, 20–24].

Более того, в пределе малых фазовых скоростей, т.е. при  $\omega \ll k V_{Fe}$ , диэлектрическая постоянная для ионных

колебаний оказывается равной

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) \approx 1 + \frac{3\omega_{\text{pe}}^2}{k^2 V_{\text{Fe}}^2 + 3\hbar^2 k^4 / 4m_e^2} - \frac{\omega_{\text{pi}}^2}{\omega^2}, \quad (15)$$

что при подстановке  $\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$  даёт частоту ионных колебаний

$$\omega \approx \frac{\omega_{\text{pi}}}{(1 + Q)^{1/2}}, \quad (16a)$$

где  $\omega_{\text{pi}} = (m_e/m_i)^{1/2}\omega_{\text{pe}}$  — ионная плазменная частота,  $m_i$  — масса иона,  $Q = 3\omega_{\text{pe}}^2/(k^2 V_{\text{Fe}}^2 + 3\hbar^2 k^4 / 4m_e^2)$ , и  $\alpha \ll 1$ . При  $Q \gg 1$  из (16a) имеем

$$\omega \approx k C_{\text{Fs}} \left(1 + \frac{\hbar k^4}{4m_e^2 \omega_{\text{pe}}^2}\right)^{1/2}, \quad (16b)$$

где  $C_{\text{Fs}} = (T_{\text{Fe}}/3m_i)^{1/2}$  — скорость звука.

Дисперсионные свойства электростатических волн в немагнитной плотной квантовой плазме с произвольным вырождением электронов получили Маафа [25] и Мелроуз [26]. Проницаемость вырожденной бесстолкновительной плазмы даётся в учебниках [27, 28] в приближении случайных фаз. Более того, поскольку чистая электромагнитная волна в беспотоковой немагнитной плотной плазме не сопровождается флуктуациями плотности, частота волны  $\omega = (\omega_{\text{pe}}^2 + k^2 c^2)^{1/2}$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. Теоретические исследования квантовых статистических свойств плотной плазмы в присутствии электромагнитных волн представлены в работе Кремпа и др. [29] и в учебниках [30, 31], в то время как квантовые параметры режимов обсуждаются Боницем [6]. В замагниченной плотной квантовой плазме внешнее магнитное поле значительно влияет на динамику вырожденных электронов и позитронов, и поэтому в ней появляются новые коллективные явления, связанные с электронным спиновым моментом [32, 33], магнитным спиновым моментом [34] и квантованными энергетическими уровнями Ландау [35] фермионов в сильном магнитном поле. Оказывается, что в квантовой магнитоплазме как термодинамика и кинетика [36], так и дисперсионные свойства электростатических и электромагнитных волн [37–43], существенно отличаются от таковых в немагнитной квантовой плазме.

Давно известно, что физические основы нелинейных квантовоподобных уравнений можно лучше понять путём приведения этих уравнений к форме гидродинамических уравнений (или уравнений Эйлера), которые по существу описывают эволюцию концентраций и импульсов квантовых частиц. Это было элегантно проделано Маделунгом [44] и Бомом [2] посредством введения эйконольного представления для эволюции волновой функции в нестационарном уравнении Шрёдингера. Вывод уравнений Маделунга квантовой жидкости для уравнения Паули с квантовыми частицами с угловым спиновым моментом был проделан Такабаяши [45–47], Бомом и др. [48, 49], Яносси и Циглер–Нареем [50], и другими [51]. Чтобы включить в квантовожидкостный формализм релятивистские эффекты, Такабаяши вывел уравнения квантовой электронной жидкости для уравнения Клейна–Гордона [52] и для уравнения Дирака [53–55]. Дальнейшее расширение жидкостного описания для уравнения Вейля безмассовых частиц со спином 1/2 (нейтрино) было проделано Бяльницки–Бирулей [56].

Недавно возник растущий активный интерес к исследованиям новых аспектов квантовой физики плазмы

путём развития нерелятивистских квантовых гидродинамических (КГД) уравнений [7, 20, 21, 57]. Последние содержат квантовое статистическое давление электронов и квантовую силу, включающую туннелирование вырожденных электронов через боровский потенциал [20]. Для вывода системы нерелятивистских квантово-гидродинамических (КГД) уравнений также использовалась модель Вигнера–Пуассона (ВП) [7, 21] для плотной электронной плазмы, в которой ионы предполагаются неподвижными. КГД-уравнения включают уравнения непрерывности и движения электронов, а также уравнение Пуассона. Квантовая сила [7, 20, 21] в нерелятивистском уравнении движения электронов описывается посредством члена с давлением, что требует знания распределения Вигнера для квантовой смеси электронных волновых функций, где каждая характеризуется некоторой вероятностью заполнения. Квантовые модели переноса, аналогичные КГД плазменной модели, использовались в исследованиях сверхтекучести [58] и сверхпроводимости [59], а также в исследованиях металлических кластеров и наночастиц, где они назывались нестационарными моделями Томаса–Ферми [60].

Электростатические КГД-уравнения полезны при исследовании коллективных взаимодействий (например, различных волн, неустойчивостей, турбулентности квантовой жидкости, нелинейных структур) [7, 21, 22, 61–69] в плотной квантовой плазме. Квантовые кинетические и КГД уравнения были также обобщены с включением электромагнитных эффектов и эффектов, связанных с внешним магнитным полем и моментом спина электрона [40, 70–74]. Последние приводят к высокочастотным спиновым волнам, которые могут возбуждаться пучками нейтрино в сверхновых звёздах [70, 75]. Итак, исследования многочисленных коллективных взаимодействий в плотной плазме важны: 1) в контексте экспериментов по взаимодействию мощных лазеров с плотной плазмой мишеней [13, 14, 76–85], в которых исследуются новые границы физики высоких плотностей энергии [86]; 2) для описания ядер гигантских планет и коры старых звёзд [87–89]; 3) для изучения сверхплотных астрофизических объектов [90–98] (например, внутренних областей белых карликов и магнитосфер нейтронных звёзд и магнитаров); 4) а также при изучении микро- и наномасштабных объектов (например, квантовых диодов [99–104], квантовых точек и нанопроволок [105], нанофотоники [106, 107], плазмоники [108], сверхмалых электронных устройств [109–111] и металлических наноструктур [112]); 5) при изучении микроплазмы [113] и квантовых рентгеновских лазеров на свободных электронах [114, 115]. Далее, необходимо подчеркнуть, что ферми-вырожденная плотная плазма может также появиться при сильном сжатии водородных гранул (пеллет) в сценариях быстрого зажигания инерционного синтеза [15, 116, 117]. Благодаря впечатляющему развитию области короткоимпульсных петаваттных лазерных технологий, подобные плазменные условия с высокой степенью вероятности могут возникнуть при интенсивном лазерном сжатии, использующем мощные импульсы рентгеновского излучения. При этом для измерения характеристик плазменных линий, усиленных лазером, могут применяться ультрабыстрые методы томсоновского рассеяния, что в свою очередь, даёт неоценимую информацию относительно уравнения состояния вещества, сжатого ударным воздействием. Недавно прове-

денные измерения со спектральным разрешением рентгеновского рассеяния в плотной плазме [82, 84] делают возможными аккуратные измерения электронной функции распределения скорости, температуры, ионизационного состояния и плазмонов в режиме теплого плотного вещества [118]. Эти новаторские методы обещают доступ к вырожденному и плотно-связанному режимам и к режиму идеальной плазмы, позволяя исследовать чрезвычайно плотное состояние материи, такое, какое может возникнуть при сжатии инерционно-удержанного топлива для ядерного синтеза, когда достигаются сверхвысокие плотности.

В настоящем обзоре представлено развитие теории и успехи, достигнутые в последнее время в области коллективных нелинейных взаимодействий в бесстолкновительной плотной квантовой плазме. Обзор организован следующим образом. В разделе 2 кратко изложено гидродинамическое описание некоторых квантовоподобных моделей, появляющихся в различных областях физики. Основные уравнения для нелинейно-взаимодействующих электростатических волн в немагнитной квантовой плазме выведены в разделе 3. В разделе 4 представлены численные исследования нелинейных возбуждений электронной плазменной волны в форме квантованных одномерных тёмных солитонов и квантованных двумерных вихрей. Используемая здесь модель включает нелинейное уравнение Шрёдингера для дисперсионных ЭПК, связанное с уравнением Пуассона для электростатического потенциала. Эта модель также используется для исследования трехмерной квантовой турбулентности электронной жидкости в разделе 5, где находятся неколомгоровские типы спектров турбулентности. В разделе 6 представлены последние результаты по (кинетической) турбулентности в фазовом пространстве, которые используют вигнеровские и власовские модели для функции распределения электронов. Теоретическая модель генерации квазистационарных магнитных полей в плотной квантовой плазме из-за вейбелевской неустойчивости представлена в разделе 7.1. Намагниченность плотной плазмы в присутствии электромагнитной волны большой амплитуды вычислена в разделе 7.2. Динамика электромагнитных волн в плотной магнитоплазме обсуждается в разделе 8. Здесь внимание уделяется спиновым волнам, распространяющимся поперёк магнитного поля, и выводятся нелинейные уравнения для электромагнитных волн с низкой (по сравнению со скоростью света) фазовой скоростью в плотной квантовой магнитоплазме. Наконец, в разделе 9 подытожены основные результаты и даны перспективы исследований квантовой физики плазмы.

## 2. Жидкостное представление квантовоподобных моделей

Включение в обзор данного раздела имеет целью показать, как различные виды квантовоподобных моделей могут быть приведены к форме гидродинамических уравнений.

Рассмотрим сначала нестационарное нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - U_0(|\psi|^2) \psi = 0, \quad (17)$$

где  $\psi(\mathbf{r}, t)$  — макроскопическая волновая функция,  $m$  — масса частицы, а  $U_0(|\psi|^2)$  — эффективный потенциал. НУШ появляется в разнообразных физических контекстах при описании амплитудно-модулированных нелинейных волн в жидкостях [119, 120], в линиях передачи [121], в нелинейной оптике для сверхбыстрой связи [122–124], в плазме [125–130] и во многих других областях физики [131–133].

Введём преобразование Маделунга [44]

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n} \exp\left(i \frac{\varphi_q}{\hbar}\right), \quad (18)$$

где  $n$  и  $\varphi_q$  действительны, и получим из (17) пару квантовых гидродинамических уравнений, состоящих из уравнений непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (19)$$

и движения

$$m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla [U_0(n) + U_B] \quad (20)$$

соответственно. Здесь  $n = n(\mathbf{r}, t) = |\psi|^2$  соответствует локальной плотности и  $\hbar \nabla \varphi_q(\mathbf{r}, t) = m\mathbf{v}$ . Квантовый потенциал есть

$$U_B = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}. \quad (21)$$

Заметим, что концентрация квантовых частиц  $n$  и поле квантовых скоростей  $\mathbf{v}$  могут быть записаны как

$$n(\mathbf{r}, t) = \psi \psi^* \equiv |\psi|^2, \quad (22)$$

и

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2im} \frac{(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)}{|\psi|^2} = -\frac{i\hbar}{2m} \nabla \left[ \ln \left( \frac{\psi}{\psi^*} \right) \right]. \quad (23)$$

соответственно, где звёздочка означает комплексное сопряжение. Квантовоподобная скорость (23) является потенциальным полем, а именно

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (24)$$

везде в односвязной области.

Теперь определим обобщённую завихренность на заданном поле скоростей как [68]

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\nabla \times (|\psi|^2 \mathbf{v})}{|\psi|^2} = \nabla \times \mathbf{v} + \frac{\nabla |\psi|^2 \times \mathbf{v}}{|\psi|^2}, \quad (25)$$

где первый член в правой части (25) есть обычная завихренность. Хорошо известно [51, 134], что в состоянии конденсата все вращательные потоки осуществляются квантованными вихрями (циркуляция скорости вокруг центра каждого такого вихря квантована). В отсутствие квантованных вихрей первый член равен нулю из-за условия (24). В этом случае второй член (25) определяет обобщённую завихренность. Разнообразные аспекты динамики квантованных вихрей и турбулентности в сверхтекучей жидкости даны Баренги и др. [134].

Бьюли и др. [135] представили методику визуализации квантованных вихрей в жидком гелии.

Во-вторых, нелинейное уравнение Шрёдингера может быть обобщено путём включения удерживающего потенциала

$$V_b(x, y, z) = \frac{1}{2} m_b (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (26)$$

который удерживает идентичные бозоны [136] в гармонической ловушке ультрахолодной квантовой системы. Здесь  $m_b$  — масса бозона, а  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  — гармонические частоты бозонов в соответствующих направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  декартовой системы координат. Нелинейная динамика бозе-эйнштейн конденсатов (БЭК) [136, 137] тогда подчиняется уравнению Гросса–Питаевского [138–140]

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - V_b \psi(\mathbf{r}, t) - G |\psi|^2(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (27)$$

где для БЭК имеем  $U_0(|\psi|^2) = (4\pi\hbar^2 a_s/m_b)^{1/2} |\psi|^2 \equiv G |\psi|^2$ . Здесь  $m_b$  — масса бозона, а  $a_s$  — длина рассеяния для бозон-бозонных столкновений. БЭК является отталкивающим (притягивающим) при  $G > (<) 0$ .

При подстановке в (27)  $\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_b(\mathbf{r}, t)} \exp[i\varphi_b(\mathbf{r}, t)]$  получаем обобщённые квантовые гидродинамические уравнения [141, 142]

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \nabla \cdot (n_b \mathbf{u}_b) = 0, \quad (28)$$

и

$$m_b \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} = -\nabla \left( V_b + \frac{m_b}{2} u_b^2 + G n_b - \frac{\hbar^2}{2m_b \sqrt{n_b}} \nabla^2 \sqrt{n_b} \right), \quad (29)$$

где поток частиц

$$n_b(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}_b(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar^2}{2im_b} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*), \quad (30)$$

с  $\mathbf{u}_b = (\hbar/m_b) \nabla \varphi_b(\mathbf{r}, t)$ . Уравнение (29) устанавливает неротационный характер сверхтекучего движения БЭК. Уравнения (29) и (30) могут использоваться для исследования линейных и нелинейных свойств БЭК.

Далее рассмотрим динамику нерелятивистской одиночной ферми-частицы (спин 1/2) (вырожденный электрон), описываемой уравнением Паули [143, 144]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \Psi - \left[ \frac{ie\hbar}{2m_e c} (\mathbf{A} \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2m_e c^2} - e\phi - \mu_e \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \Psi = 0, \quad (31)$$

где  $\Psi(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\sigma})$  — волновая функция одночастичной компоненты со спином  $\mathbf{s} = 1/2 \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  — спиновая матрица Паули,  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал,  $\phi$  — скалярный потенциал,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , а  $\mu_B = e\hbar/2m_e c$  — магнетон Бора.

Используя представление Маделунга для комплексной волновой функции [145]

$$\Psi(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\sigma}) = s \sqrt{n_e(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\sigma})} \exp \left[ \frac{iS_e(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\sigma})}{\hbar} \right], \quad (32)$$

получаем из (31) квантовые магнитогидродинамические уравнения [19, 145]

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{n_e \mathbf{p}_e}{m_e} \right) = 0 \quad (33)$$

и

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m_e} \mathbf{p}_e \cdot \nabla \right) \mathbf{p}_e = e \left[ \nabla \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] + \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}} \right) + \mu_B \nabla (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}), \quad (34)$$

где  $s$  — спинор, с которым связаны спиновые свойства электрона,  $n_e(\mathbf{r}, t, \boldsymbol{\sigma}) = \Psi \Psi^*$  представляет собой плотность вероятности обнаружения электрона со спином  $\mathbf{s}$  в некоторой точке. Обобщённый импульс электрона обозначен как  $\mathbf{p}_e = \nabla S_e - i\hbar s^* \nabla s + (e/c) \mathbf{A}$ .

Теперь можно записать квантовую скорость электрона [145]

$$\mathbf{v}_e = \frac{\hbar}{2m_e} \frac{(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)}{|\Psi|^2} + i \frac{\hbar}{m_e} s^* \nabla s - \frac{e}{m_e c} \mathbf{A}, \quad (35)$$

вектор плотности спина

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} s^* \boldsymbol{\sigma} s \quad (36)$$

и уравнение переноса вектора спина [45]

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{e}{m_e c} (\mathbf{s} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{m_e n_e} \left[ \mathbf{s} \times \frac{\partial}{\partial x_k} \left( n_e \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_k} \right) \right], \quad (37)$$

где использованы стандартные правила суммирования по повторяющимся индексам, а полные производные обозначены как  $d/dt \equiv (\partial/\partial t) + \mathbf{v}_e \cdot \nabla$ . Импульс электрона и электромагнитные поля связаны уравнениями Максвелла.

Пренебрегая электромагнитными полями и спином частиц, после линеаризации (33) и (34) получаем частоту электронных колебаний

$$\omega_g = \frac{\hbar k^2}{2m_e}, \quad (38)$$

где  $k$  — волновое число.

Наконец, рассмотрим взаимодействие электрона как с окружающими электронами, так и с однозарядными ионами. Динамика электронов описывается уравнением [146]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi - U(|\psi|^2) = 0, \quad (39)$$

где

$$U(|\psi|^2) = e^2 \int d^3 \mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left( |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 - n_i(\mathbf{r}', t) \right) \quad (40)$$

— потенциал, ответственный за взаимодействие электрона с окружающей средой, включающей электроны и положительно заряженные ионы с концентрацией  $n_i(\mathbf{r}', t)$ .

Волновая функция нормирована на концентрацию электронов, т.е.  $n_e(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ . Заметим, что в урав-

нении (39) учитываются только кулоновские взаимодействия между электронами и ионами и полностью пренебрегается квантовым статистическим давлением, самосогласованным амбиполярным полем, возникающим из разделения зарядов, и эффектами спина электрона.

Предположим, что  $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 + \psi_1(\mathbf{r}, t)$ , где  $|\psi_0|^2 = n_0$  представляет невозмущённую концентрацию электронов, и что возмущённая волновая функция  $\psi_1(\mathbf{r}, t)$  для сферически-симметричных колебаний имеет форму  $(A_k/r) \sin(kr) \exp(-i\omega t)$ , где  $A_k$  — постоянная нормировки. Таким образом, дисперсионное уравнение, выведенное из (39), записывается как [146]

$$k^2 = \frac{\omega m_e}{\hbar} \left[ 1 \pm \left( 1 - 4 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (41)$$

Взаимодействие между двумя электронами, участвующими в сферически-симметричных электронных колебаниях рассматривалось в работе [146]. В этой работе было предсказано появление эффективного притяжения между электронами посредством низкоэнергетических (описываемых знаком "минус" в уравнении (41)) сферически-симметричных колебаний электронов в квантовой плазме. Таким образом, в плотной плазме появляются притягивающиеся вырожденные электроны. Физика, лежащая в основе притяжения электронов, аналогична физике куперовского спаривания электронов в сверхпроводниках, где электроны, близкие к поверхности Ферми, притягиваются из-за взаимодействия с вибрациями кристаллической решётки (фононные колебания). Пары электронов действуют как бозоны, которые могут конденсироваться на один энергетический уровень, в отличие от одиночных электронов, являющихся фермионами и подчиняющихся принципу исключения Паули.

### 3. Нелинейные уравнения для незамагниченной квантовой плазмы

В предыдущей части мы убедились, что квантово-жидкостное описание Маделунга предсказывает дифракционную картину для одиночного электрона или позитрона. Однако коллективные взаимодействия в ансамбле вырожденных электронов (фермионов) в плотной плазме ответственны за появление новых линейных и нелинейных волн и структур.

Квантовая задача  $N$  тел описывается уравнением Шрёдингера для  $N$ -частичной волновой функции  $\psi(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$ , где  $q_j = (\mathbf{r}_j, s_j)$  — координата (пространственная и спин) частицы  $j$ . Равновесная  $N$ -частичная волновая функция для идентичных фермионов дается определителем Слэтера [8]

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(q_1, t) & \psi_2(q_1, t) & \dots & \psi_N(q_1, t) \\ \psi_1(q_2, t) & \psi_2(q_2, t) & \dots & \psi_N(q_2, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(q_N, t) & \psi_2(q_N, t) & \dots & \psi_N(q_N, t) \end{vmatrix}, \quad (42)$$

который антисимметричен для нечётных перестановок. Следовательно,  $\psi$  обращается в нуль, если два ряда идентичны. Это является выражением принципа запрета

Паули, гласящего, что два идентичных фермиона не могут занимать одно и то же состояние. Например, при ( $N = 2$ ):

$$\psi(q_1, q_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(q_1, t) \psi_2(q_2, t) - \psi_1(q_2, t) \psi_2(q_1, t)]$$

так что  $\psi(q_2, q_1, t) = -\psi(q_1, q_2, t)$  и  $\psi(q_1, q_1, t) = 0$ . Из-за принципа исключения Паули все электроны не могут занимать самое нижнее энергетическое состояние, и в пределе сверхнизких температур, когда все энергетические уровни вплоть до уровня Ферми заняты электронами, все ещё имеет место квантово-статистическое давление, определяемое давлением Ферми.

Для описания коллективных электростатических колебаний в плазме используется квантовый аналог системы Власова–Пуассона — система Вигнера–Пуассона, записываемая как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{ie m_e^3}{(2\pi)^3 \hbar^4} \iint \exp \left[ im_e (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \frac{\lambda}{\hbar} \right] \times \left[ \phi \left( \mathbf{x} + \frac{\lambda}{2}, t \right) - \phi \left( \mathbf{x} - \frac{\lambda}{2}, t \right) \right] f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) d^3 \lambda d^3 v', \quad (43)$$

и

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e \left( \int f d^3 v - n_0 \right), \quad (44)$$

предполагая неподвижные ионы. Заметим (см. раздел 9.1), что при  $\hbar \rightarrow 0$  уравнение Вигнера сводится к уравнению Власова для классических частиц (электронов)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{e}{m_e} \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}. \quad (45)$$

Вычисляя соответствующие моменты уравнения Вигнера (43), получим (с точностью до  $O(\hbar^2)$ ) систему уравнений для квантовой электронной жидкости (или квантовой жидкости Маделунга) [7, 21], состоящую из уравнения непрерывности для электронов

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0 \quad (46)$$

и уравнения движения для электронов, включающего квантовое статистическое давление и квантовую силу

$$m_e \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_e = e \nabla \phi - \frac{1}{n_e} \nabla P_e + \mathbf{F}_Q, \quad (47)$$

где  $\phi$  определяется уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e (n_e - n_0). \quad (48)$$

В вырожденной плазме с распределением Ферми–Дирака имеет место (с точностью до постоянных порядка единицы) электронное квантово-статистическое давление

$$P_e = \frac{m_e V_{Fe}^2 n_0}{3} \left( \frac{n_e}{n_0} \right)^{(D+2)/D}, \quad (49)$$

где  $D$  — число степеней свободы в системе. Заметим, что Элиассон и Шукла [69] и Цинцадзе и Цинцадзе [19] получили разные выражения для  $P_e$  в ненулевом пределе для температуры Ферми электронов.

Квантовая сила [20] из-за тунnelирования электронов через потенциал Бома есть

$$\mathbf{F}_Q = \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}} \right) \equiv -\nabla \phi_B, \quad (50)$$

где  $\phi_B$  — потенциал Бома. Заметим, что в (50) член с  $\alpha$  (ср. (14)) не появляется из-за ограничения в точности рассмотрения до  $O(\hbar^2)$  по параметру разложения. То же самое происходит при использовании приближения среднего поля [20] при выводе  $\mathbf{F}_Q$ .

### 3.1. Нелинейное уравнение Шрёдингера – уравнение Пуассона

Вводя волновую функцию

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_e(\mathbf{r}, t)} \exp\left(i \frac{\varphi_e(\mathbf{r}, t)}{\hbar}\right), \quad (51)$$

где  $S$  определяется согласно выражению  $m_e \mathbf{u}_e = \nabla \varphi_e$  и  $n_e = |\psi|^2$ , можно показать, что КГД-уравнения (т.е. уравнения (46)–(48)) эквивалентны обобщённой системе НУШ – Пуассон [7, 21]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi + e\phi \psi - \frac{m_e V_{Fe}^2}{2n_0^2} |\psi|^{4/D} \psi = 0 \quad (52)$$

и

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e (|\psi|^2 - n_0). \quad (53)$$

Вывод (52) требует, чтобы скорость электронного плазменного потока являлась безвихревой везде в односвязной области за исключением точек, где концентрация электронов обращается в нуль. Ясно, что это условие в общем случае несправедливо. Аналогично рассмотрению квантовой жидкости, необходимо ввести обобщённую завихренность электронов  $\mathbf{\Omega}_e = \nabla \times (|\psi|^2 \mathbf{u}_e) / |\psi|^2$ , которая не обращается в нуль (см. обсуждение после уравнения (25)). Уравнение (52) описывает две основных отличительных черты квантовой плазмы, а именно, квантовое статистическое давление (полностью нелинейное) и квантовые дисперсионные эффекты, и оно связано самосогласованным образом с электростатическим потенциалом через уравнение Пуассона (53). Таким образом, получается нелокальное нелинейное взаимодействие между плотностью электронов и электростатическим потенциалом. Далее заметим, что одномерный вариант уравнения (52) без члена с  $\phi$  также использовался для описания поведения бозе-эйнштейновского конденсата [147] в отсутствие удерживающего потенциала.

Линеаризация системы уравнений НУШ – Пуассона даёт частоту ЭПК [1, 2, 4, 5]

$$\omega_k = \left( \omega_{pe}^2 + k^2 V_{Fe}^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_e^2} \right)^{1/2}. \quad (54)$$

Здесь можно заметить два различных дисперсионных эффекта: один в длинноволновом режиме  $V_{Fe} \gg \hbar k / 2m_e$  и другой в коротковолновом режиме  $V_{Fe} \lesssim \hbar k / 2m_e$ , разделённых критическим волновым числом  $k_{cr} = 2\pi / \lambda_{cr} = \pi \hbar / m_e V_{Fe} \sim n_e^{-1/3}$ .

### 3.2. Учёт динамики ионов

Динамика электростатических ионных колебаний с малой фазовой скоростью (по сравнению со скоростью

Ферми электронов) в квантовой электронно-ионной плазме описывается уравнением движения безмассовых электронов

$$0 = e\nabla \phi - \frac{1}{n_e} \nabla P_e + \mathbf{F}_Q, \quad (55)$$

уравнением непрерывности ионов

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (56)$$

уравнением движения ионов

$$m_i n_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i = -Z_i n_i e \nabla \phi \quad (57)$$

и уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e (n_e - Z_i n_i), \quad (58)$$

где  $n_i$  — концентрация ионов,  $\mathbf{u}_i$  — скорость ионной жидкости и  $Z_i$  — ионное зарядовое число.

В квазинейтральном приближении  $n_i = Z_i n_i = n$  уравнения (55) и (57) объединяются и получается выражение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i = -\frac{C_{Fs}^2 n_0}{n_i} \nabla \left( \frac{Z_i n_i}{n_0} \right)^{(D+2)/D} + \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{Z_i n_i}}{\sqrt{Z_i n_i}} \right). \quad (59)$$

Уравнения (56) и (59) составляют искомую систему для исследования нелинейных ионных волн [61, 62] в плотной квантовой плазме.

## 4. Локализованные электростатические возбуждения

На основе нелинейных уравнений, выведенных в предыдущей части, оказывается возможным обсудить нелинейные свойства и динамику локализованных электростатических возбуждений в плотной квантовой плазме.

### 4.1. Тёмные солитоны и вихри, связанные с ЭПК

Здесь мы обсудим образование одномерных квантованных тёмных солитонов и двумерных квантованных вихрей, связанных с ЭПК в плотной квантовой плазме на наномасштабах (порядка  $V_{Fe} / \omega_{pe}$ ). Заметим, что исследование динамики тёмных солитонов двумерного уравнения Шрёдингера в дефокусирующей среде было проведено Ивониным [148] и Ивониным и др. [149]. Однако для изучения образования и динамики электростатических наноструктур в плотной квантовой плазме мы используем нелинейные уравнения Шрёдингера – Пуассона [22]

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + A \nabla^2 \Psi + \phi \Psi - |\Psi|^{4/D} \Psi = 0 \quad (60)$$

и

$$\nabla^2 \phi = |\Psi|^2 - 1, \quad (61)$$

где  $\Psi$  — безразмерная волновая функция  $\psi / \sqrt{n_0}$ ,  $\phi$  соответствует  $e\phi / k_B T_{Fe}$ , а пространственные и времен-



ная переменные нормированы соответственно на  $V_{Fe}/\omega_{pe}$  и  $\hbar/k_B T_{Fe}$ . Мы также ввели обозначение  $A = 4\pi m_e e^2 / \hbar^2 n_0^{1/3}$  (см. работу [22]).

Система уравнений (60) и (61) дополняется уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = iA \left( \Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi \right), \quad (62)$$

где электрическое поле  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ .

Система (60)–(62) обладает следующими интегралами сохранения: число электронов

$$N = \int |\Psi|^2 d^3x, \quad (63)$$

импульс электронов

$$\mathbf{P} = -i \int \Psi^* \nabla \Psi d^3x, \quad (64)$$

момент импульса электронов

$$\mathbf{L} = -i \int \Psi^* \mathbf{r} \times \nabla \Psi d^3x, \quad (65)$$

и полная энергия

$$\mathcal{E} = \int \left[ -\Psi^* A \nabla^2 \Psi + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{|\Psi|^{2+4/D} D}{2+D} \right] d^3x. \quad (66)$$

Эти сохраняющиеся величины требуются для проверки точности численного интегрирования (60) и (61).

Для квазистационарных одномерных структур, двигающихся с постоянной скоростью  $v_0$ , можно найти локализованные решения в виде уединённых волн путём подстановки  $\Psi = W(\xi) \exp(iKx - i\Omega t)$ , где  $W$  — комплексная функция аргумента  $\xi = x - v_0 t$ , а  $K$  и  $\Omega$  — постоянные сдвига волнового числа и частоты соответственно. Выбирая  $K = v_0/2A$ , перепишем систему связанных уравнений как

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} + \lambda W + \frac{\varphi W}{A} - \frac{|W|^4 W}{A} = 0 \quad (67)$$

и

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = |W|^2 - 1, \quad (68)$$

где  $\lambda = \Omega/A - v_0^2/4A^2$  — собственное значение системы. Из граничных условий  $|W| = 1$  и  $\varphi = 0$  при  $|\xi| = \infty$  определяем  $\lambda = 1/A$  и  $\Omega = 1 + v_0^2/4A$ . Система уравнений (67) и (68) допускает первый интеграл в виде

$$\mathcal{H} = A \left| \frac{dW}{d\xi} \right|^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 + |W|^2 - \frac{|W|^6}{3} + \varphi |W|^2 - \varphi - \frac{2}{3} = 0, \quad (69)$$

где использовались граничные условия  $|W| = 1$  и  $\varphi = 0$  при  $|\xi| = \infty$ .

На рисунке 2 показаны профили  $|W|^2$  и  $\varphi$ , полученные численно из (67) и (68) для нескольких значений  $A$ , где  $W$

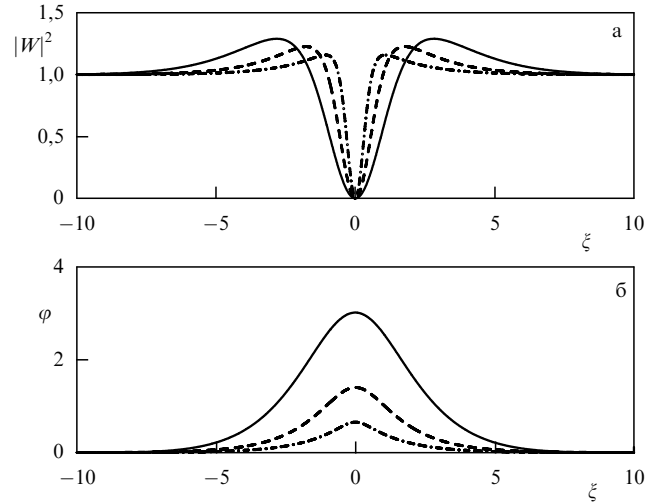


Рис. 2. Плотность электронов  $|W|^2$  (вверху) и электростатический потенциал (внизу), связанные с тёмным солитоном, описываемым системой уравнений (67) и (68), при  $A = 5$  (сплошная линия),  $A = 1$  (пунктирная линия) и  $A = 0,2$  (штрихпунктирная линия). Согласно работе [22].

было положено равным  $-1$  на левой границе и  $+1$  на правой границе, т.е. сдвиг по фазе между двумя границами составляет  $180^\circ$ . Солитоны по форме являются тёмными, с локализованным разрежением плотности  $N_e = |W|^2$ , связанным с локализованным положительным потенциалом. Большие значения квантового параметра связи  $A$  приводят к солитонам большей амплитуды и большей ширины. У солитонов наблюдаются локализованные выступы ("плечи") с обеих сторон разрежения плотности.

Численные решения системы зависящих от времени уравнений (60) и (61) показаны на рис. 3, с начальными условиями близкими (но не равными) тем, что использовались на рис. 2. Ясно видны два долгоживущих тёмных солитона, связанных с положительным потенциалом  $\varphi \approx 3$ , в соответствии в квазистационарном решении рис. 2 при  $A = 5$ . Также имеют место колебания и волновая турбулентность у зависящего от времени солитона, показанного на рис. 3. Следовательно, тёмные солитоны представляются устойчивыми структурами, которые могут в течение значительного времени противостоять возмущениям и турбулентности.

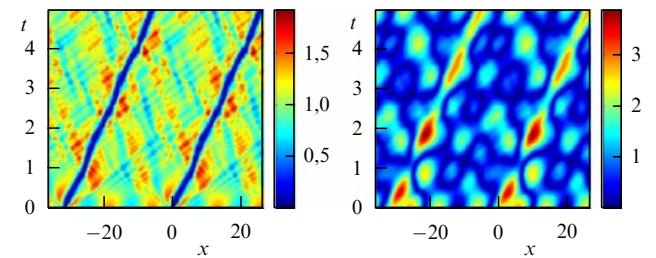


Рис. 3. Развитие во времени электронной плотности  $|\Psi|^2$  (слева) и электростатического потенциала  $\varphi$  (справа), полученные путём численного решения системы уравнений (60) и (61). Начальным условием является  $\Psi = 0,18 + \tanh[20 \sin(x/10)] \exp(iKx)$  с  $K = v_0/2A$ ,  $A = 5$  и  $v_0 = 5$ . Согласно работе [22].

Для двумерных систем можно получить вихревые структуры в виде  $\Psi = \psi(r) \exp(is\theta - i\Omega t)$ , где  $r$  и  $\theta$  — полярные координаты, определённые согласно выражениям  $x = r \cos(\theta)$  и  $y = r \sin(\theta)$ ,  $\Omega$  — постоянный сдвиг частоты, и  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  для различных возбуждённых состояний (зарядовых состояний). Показатель  $s$  также известен как показатель обращения (циркуляции) [51]. С этой подстановкой, уравнения (60) и (61) приводятся к виду

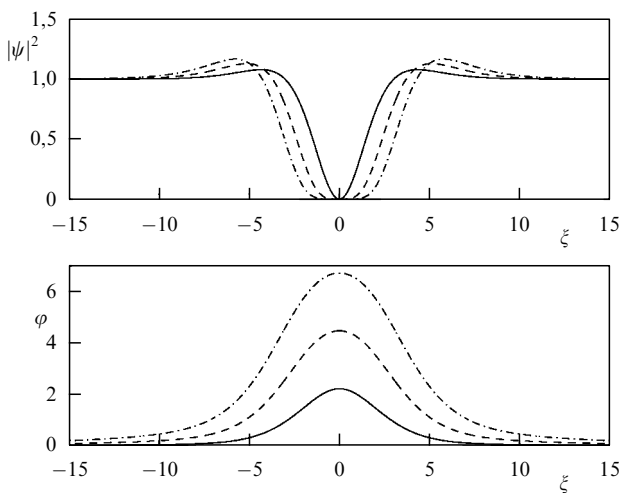
$$\left[ \Omega + A \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{s^2}{r^2} \right) + \varphi - |\psi|^2 \right] \psi = 0, \quad (70)$$

и

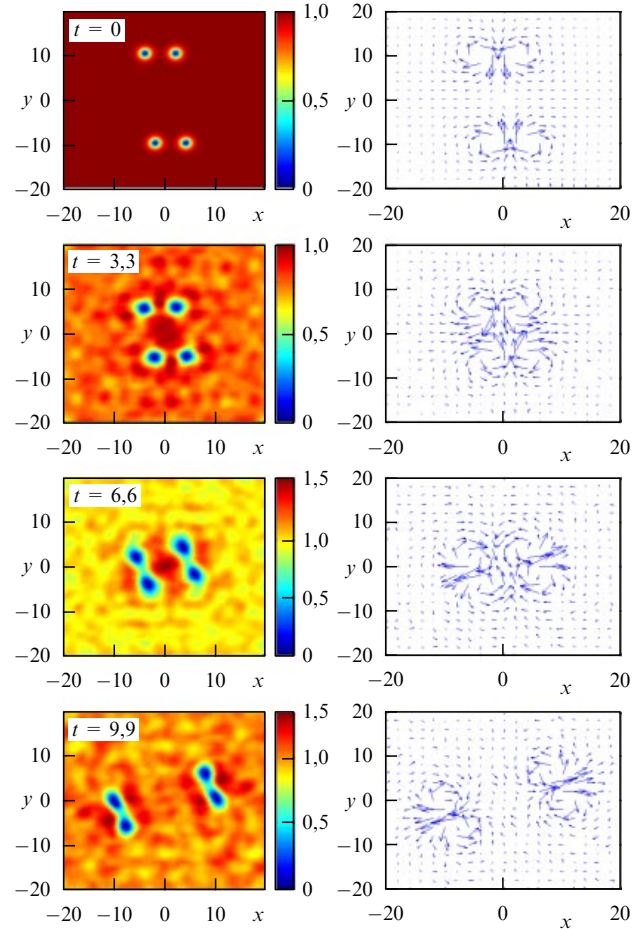
$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \varphi = |\psi|^2 - 1 \quad (71)$$

соответственно, где граничные условия  $\psi = 1$  и  $\varphi = d\psi/dr = 0$  при  $r = \infty$  определяют постоянную частоту  $\Omega = 1$ . Разные знаки зарядового состояния  $s$  описывают разные направления вращения вихря. Для  $s \neq 0$ , должно быть  $\psi = 0$  при  $r = 0$ , и из соображений симметрии получается  $d\varphi/dr = 0$  при  $r = 0$ . На рисунке 4 показаны численные решения уравнений (70) и (71) для различных  $s$  при  $A = 5$ . Вихрь здесь характеризуется полным разрежением электронной плотности в центре и связан с положительным электростатическим потенциалом.

На рисунке 5 показаны зависящие от времени решения уравнений (60) и (61) в пространственно-двумерном случае для однозарядных ( $s = \pm 1$ ) вихрей, где четыре вихреподобных структуры были в начальное время размещены на некотором расстоянии друг от друга. Начальные условия были подобраны таким образом, что вихри соорганизовались в две вихревые пары, с  $s_1 = +1$ ,  $s_2 = -1$ ,  $s_3 = -1$  и  $s_4 = +1$ , которые видны на верхнем рис. 5. Вихри в парах обладают противоположной полярностью вращения электронной жидкости, что видно на рис. 5 вверху справа. Интересно, что "партнёры"

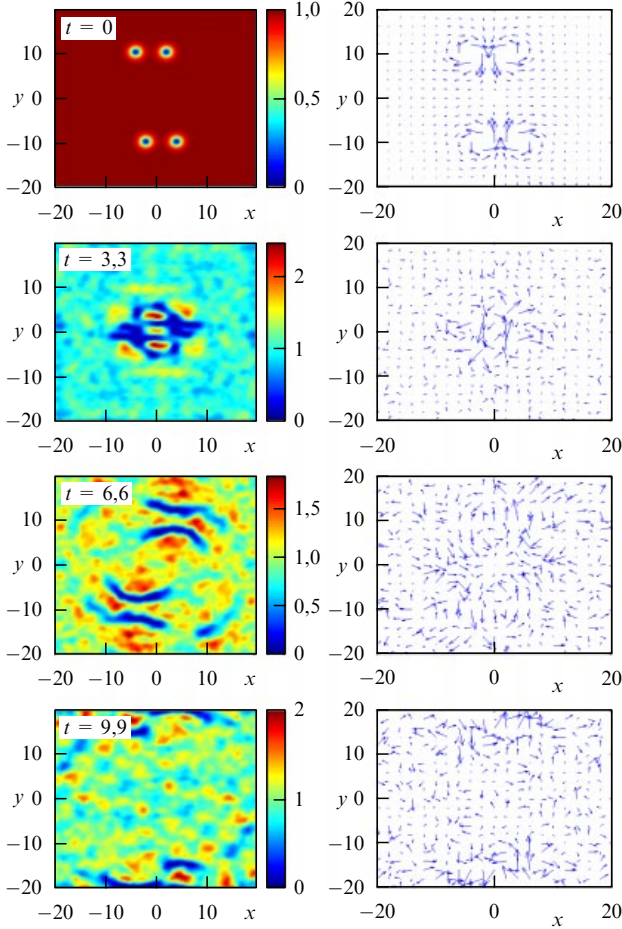


**Рис. 4.** Электронная плотность  $|\psi|^2$  (вверху) и электростатический потенциал  $\varphi$  (внизу), связанные с двумерным вихрем, описываемым системой (70) и (71), при состояниях заряда  $s = 1$  (сплошные линии),  $s = 2$  (пунктирные линии) и  $s = 3$  (штрихпунктирные линии). Во всех случаях  $A = 5$ . Согласно работе [22].



**Рис. 5.** Электронная плотность  $|\Psi|^2$  (слева) и векторная диаграмма электрического тока  $i(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi)$  (справа), связанные с однозарядными ( $|s| = 1$ ) двумерными вихрями, полученными путём численного решения системы зависящих от времени уравнений (60) и (61), на временах  $t = 0$ ,  $t = 3,3$ ,  $t = 6,6$  и  $t = 9,9$  (сверху вниз). Использовано  $A = 5$ . Однозарядные вихри образуют пары и сохраняют свою идентичность. Согласно работе [22].

в вихревых парах притягиваются друг к другу и распространяются вместе с постоянной скоростью, причём вихри сохраняют свою идентичность и меняют партнёров при столкновениях и взаимодействиях (см. вторую и третью пары на рис. 5), преобразуясь в две новые вихревые пары, которые распространяются под углом по отношению к первоначальному направлению распространения. С другой стороны, многозарядные ( $|s_j| > 1$ ) вихри неустойчивы, как показано на рис. 6. Здесь система уравнений (60) и (61) снова решалась численно, с теми же начальными условиями, как и на рис. 5, но для двухзарядных вихрей  $s_1 = +2$ ,  $s_2 = -2$ ,  $s_3 = -2$  и  $s_4 = +2$ . Второй ряд рис. 6 показывает, что вихревые пары сохраняют свою идентичность в течение некоторого времени, в то время как между этими вихревыми парами формируется квазиодномерное разрежение плотности. На следующей стадии эти четыре вихря распадаются на сложные нелинейные структуры и волновую турбулентность. Таким образом, нелинейная динамика однозарядных и многозарядных солитонов оказывается различной, поскольку только однозарядные вихри являются долгоживущими и сохраняют свою идентичность. Это согласуется с предыдущими результатами для нелинейного



**Рис. 6.** Электронная плотность  $|\Psi|^2$  (слева) и векторная диаграмма электрического тока  $i(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi)$  (справа), связанные с двухзарядными ( $|s| = 2$ ) двумерными вихрями, полученными путём численного решения системы зависящих от времени уравнений (60) и (61), на временах  $t = 0, t = 3,3, t = 6,6$  и  $t = 9,9$  (сверху вниз). Использовано  $A = 5$ . Двухзарядные вихри разлагаются на нелинейные структуры и волновую турбулентность. Согласно работе [22].

уравнения Шрёдингера, где отмечалось, что вихри с высокими зарядовыми состояниями неустойчивы [149].

#### 4.2. Локализованные ионные волновые возмущения в квантовой плазме

В своей классической работе Хаас и др. [61] разработали теорию одномерных уединённых ионных волн как малой, так и большой амплитуды, в плотной квантовой плазме. Было получено, что динамика уединённых волн малой амплитуды описывается уравнением Кортевега – де Вриза (КДВ):

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + 2U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H}{8}\right) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (72)$$

где  $U$  представляет собой относительное (нормированное на  $n_0$ ) возмущение ионной плотности, временная и пространственные переменные нормированы на ионный плазменный период  $\omega_{pi}^{-1}$  и электронный радиус Томаса – Ферми  $(k_B T_{Fe} / 4\pi n_0 e^2)^{1/2}$  соответственно.

Уравнение КДВ допускает как уединённые, так и периодические (кноидальные) волны [150]. Вводя волну в виде  $U(\eta = \xi - M_s \tau)$ , запишем (72) в стационарной

системе отсчёта как

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{H}{8}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - M_s U + U^2 + C = 0, \quad (73)$$

где  $M_s$  — число Маха и  $C$  — постоянная интегрирования. В особом случае, когда  $U$  и ее производные стремятся к нулю при  $\pm\infty$ , имеем  $C = 0$ . Умножая (73) на  $\partial U / \partial \eta$ , можно проинтегрировать получающееся уравнение и записать результат в виде интеграла энергии [151–153]. Окончательное решение (73) в виде уединённой волны есть

$$U = U_m \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right), \quad (74)$$

где  $U_m = (3M_s/2)$  и  $\eta_0 = (2/M_s)^{1/2} (1 - H/8)^{1/2}$  — максимум амплитуды и ширина солитона. Видно, что решения в виде уединённой волны сжатия возможны при  $0 < H < 8$ .

Также существует возможность одномерных локализованных возбуждений ионных волн большой амплитуды. Для её демонстрации предположим, что квантовая сила, действующая на электроны, преобладает над квантовым статистическим давлением, т.е.  $k_B T_{Fe} n_e \ll (\hbar^2 / 4m_e) \partial^2 n_e / \partial x^2$ . Следовательно, электронная плотность находится из [62]

$$e\phi + \frac{\hbar^2}{2m_e \sqrt{n_e}} \frac{\partial^2 \sqrt{n_e}}{\partial x^2} = 0. \quad (75)$$

Электроны связаны с ионами через электрическое поле пространственного заряда  $(-\nabla\phi)$ .

Динамика однозарядных ионов описывается ионным уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i u_i)}{\partial x} = 0, \quad (76)$$

уравнением движения ионов

$$m_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_i = -e \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (77)$$

где  $u_i$  является  $x$ -компонентой возмущения скорости жидкости ионов. Система уравнений (75)–(77) замыкается уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_e - n_i). \quad (78)$$

Найдём стационарные нелинейные ионные волновые структуры, двигающиеся с постоянной скоростью  $u_0$ . Таким образом, все неизвестные зависят только от переменной  $\xi = x - u_0 t$ . Определяя  $\sqrt{n_e} \equiv \psi$ , уравнение (75) приводится к виду

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + e\phi \psi = 0. \quad (79)$$

Уравнения (76) и (77) можно проинтегрировать один раз с граничными условиями  $n_i = n_0$  и  $u_i = 0$  при  $\xi = |\infty|$ ; результаты можно объединить:

$$n_i = \frac{n_0 u_0}{\sqrt{u_0^2 - 2e\phi/m_i}}. \quad (80)$$

Подставляя (80) в (78), получаем

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 4\pi e \left( \psi^2 - \frac{n_0 u_0}{\sqrt{u_0^2 - 2e\phi/m_i}} \right). \quad (81)$$

Уравнения (79) и (81) являются искомыми уравнениями для исследования нелинейных ионных волн в плотной квантовой плазме.

Удобно ввести безразмерные величины (см. ниже уравнение (83)) в уравнения (79) и (81) и переписать их как

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\Phi \Psi}{2} = 0 \quad (82)$$

и

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \Psi^2 + \frac{M}{\sqrt{M - 2\Phi}} = 0, \quad (83)$$

где пространственные переменные нормированы как  $X = k_q \xi$ , электронная волновая функция как  $\Psi = \sqrt{n_0} \psi$ , и потенциал как  $\Phi = e\phi/m_i c_q^2$ . Здесь  $c_q = \omega_{pi}/k_q$  — скорость квантовой ионной волны и  $k_q = (2m_e \omega_{pe}/\hbar)^{1/2}$  — квантовое волновое число. Квантовое "число Маха" определено как  $M = u_0/c_q$ .

Заметим, что связанные уравнения (82) и (83) допускают сохраняющуюся величину

$$\mathcal{H} = -2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)^2 - \Phi \Psi^2 - M(\sqrt{M - 2\Phi} - M) = 0, \quad (84)$$

где использованы граничные условия  $\Phi = \partial \Phi / \partial X = \partial \Psi / \partial X = 0$  и  $\Psi = 1$  при  $|X| = \infty$ . Для симметричной уединённой ионной волновой структуры предположим, что  $\Phi = \Phi_{\max}$  и  $\Psi = \Psi_{\max}$ , а также  $\partial \Psi / \partial X = \partial \Phi / \partial X = 0$  при  $X = 0$ . Следовательно, при  $X = 0$  уравнение (84) дает

$$\Phi_{\max} \Psi_{\max}^2 + M(\sqrt{M - 2\Phi_{\max}} - M) = 0. \quad (85)$$

В пределе опрокидывания волны, когда  $M = (2\Phi_{\max})^{1/2}$ , находим, что  $-\Phi_{\max} \Psi_{\max}^2 + 2\Phi_{\max} = 0$ , или  $\Psi_{\max} = 2$ . Соответственно, плотность электронов будет больше в два раза по сравнению с фоновой плотностью при опрокидывании волны.

На рисунке 7 показаны решения уравнений (82) и (83) для профилей электростатического потенциала и концентрации электронов при различных значениях  $M$ . Видно, что как электростатический потенциал, так и плотность электронов имеют локализованные максимумы с резкими пиками и осциллирующий хвост. Последнее находится в разительном противоречии с классическим (неквантовым) случаем, где ионно-звуковые уединенные волны имеют монотонный профиль, который в пределе малой амплитуды, когда система описывается уравнением Кортевега–де Вриза, описывается гиперболическим секансом. Из рисунка 7 видно, что  $M = 1,1$  близко к пределу опрокидывания, выше которого не существует решений в виде уединённых волн. Численное исследование также подсказывает, что у  $M$  есть и нижний предел (немного меньше, чем 0,75), ниже которого решение в виде уединенной волны исчезает.

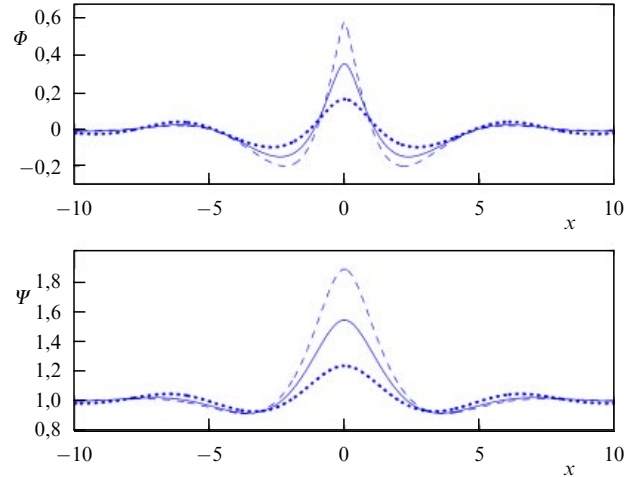


Рис. 7. Профили потенциала  $\Phi$  (вверху) и плотности электронов  $\Psi^2$  (внизу) как функции  $X$  при различных значениях числа Маха:  $M = 1,1$  (пунктирная кривая),  $M = 0,9$  (сплошная кривая), и  $M = 0,75$  (штриховая кривая). Согласно работе [62].

## 5. Турбулентность квантовой жидкости

Статистические свойства турбулентности и связанного с нею электронного переноса на наномасштабах в квантовой плазме исследовались как в двумерном, так и в трёхмерном случаях с помощью связанных уравнений НУШ и Пуассона [66, 67]. Было получено, что нелинейные связи между ЭПК различного масштаба приводят к мелкомасштабным структурам электронной плотности, в то время как электростатический потенциал каскадирует к крупным масштабам. Тем не менее полная энергия, связанная с турбулентностью квантовой электронной плазмы, развивается в характерный неколомогоровский спектр. Электронная диффузия, вызванная турбулентностью электронной жидкости, согласуется с динамической эволюцией структур турбулентных мод.

Чтобы исследовать турбулентность электронной квантовой жидкости в трёх измерениях, воспользуемся нелинейным уравнением Шрёдингера и уравнением Пуассона [21, 22, 67]:

$$i\sqrt{2H} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + H\nabla^2 \Psi + \varphi \Psi - |\Psi|^{4/3} \Psi = 0, \quad (86)$$

$$\nabla^2 \varphi = |\Psi|^2 - 1, \quad (87)$$

которые определяют динамику нелинейно взаимодействующих ЭПК с различными длинами волн. В уравнениях (86) и (87) волновая функция нормирована на  $\sqrt{n_0}$ , электростатический потенциал — на  $k_B T_{Fe}/e$ , время  $t$  — на электронный плазменный период  $\omega_{pe}^{-1}$ , и пространственные переменные  $\mathbf{r}$  — на радиус Томаса–Ферми  $V_{Fe}/\omega_{pe}$ . Также введено обозначение  $\sqrt{H} = \hbar \omega_{pe} / \sqrt{2} k_B T_{Fe}$ .

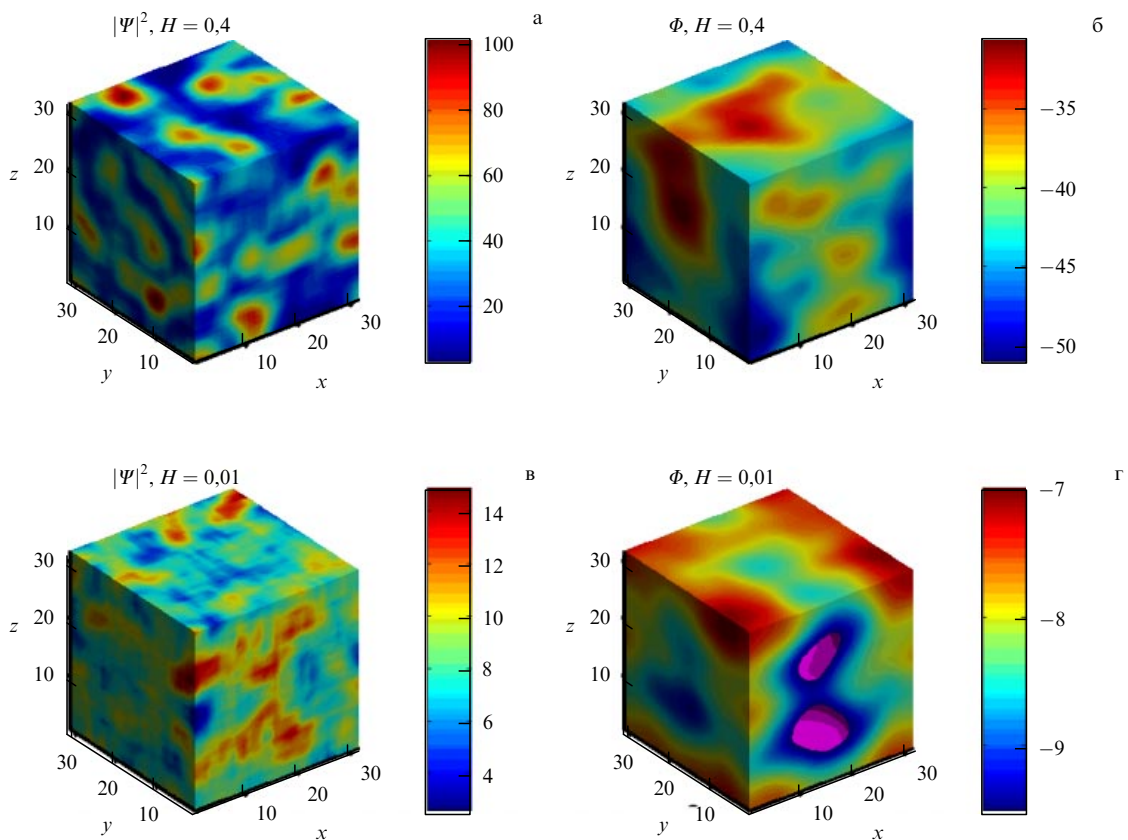
Исследования взаимодействий нелинейной связи мод выполняются для изучения многомасштабной эволюции распадной трехмерной турбулентности электронной жидкости, которая описывается уравнениями (86) и (87). Все флуктуации инициируются изотропно (предполагается отсутствие среднего поля) со случайными фазами и амплитудами в фурье-пространстве, а их дальнейшее развитие получается интегрированием уравнений (86) и (87) путем использования полностью сглаженной псевдо-

спектральной численной схемы [154], основывающейся на спектральных методах Фурье. Пространственная дискретизация в трёхмерном численном моделировании использует дискретное фурье-представление турбулентных флуктуаций. Применяемый здесь численный алгоритм сохраняет энергию через динамические переменные жидкости, а не за счёт отдельного уравнения для энергии, записанного в виде закона сохранения. Эволюционные переменные используют периодические граничные условия. Начальный изотропный турбулентный спектр выбирался близким к  $k^{-2}$ , со случайными фазами во всех трёх направлениях. Выбор такого (или даже более плоского, чем  $-2$ ) спектра позволяет рассматривать турбулентные флуктуации равноправно и аннулировать любое воздействие на динамическую эволюцию, которое может возникнуть из-за начальной несимметрии спектра. Для описания временной эволюции уравнений используется метод предиктора–корректора второго порядка. Код стабилизирован путем соответствующего сглаживания паразитных фурье-мод, а также выбором относительно малого временного шага расчёта. Программа широко распараллелена, с использованием библиотек интерфейса обмена сообщениями (Message Passing Interface, MPI), способствуя таким образом высокому разрешению в трёхмерном вычислительном объёме с разрешением  $128^3$  точек сетки.

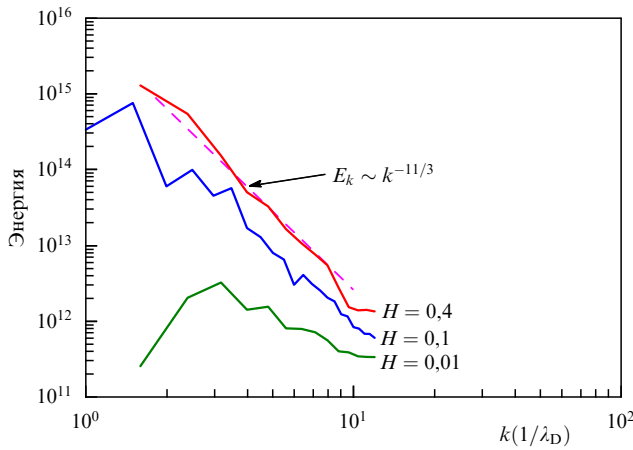
Исследуем свойства трёхмерной жидкостной турбулентности, состоящей из нелинейно взаимодействующих ЭПК, в двух особых физических случаях. Это плотная

плазма в методах лазерного сжатия плазмы (ЛСП) [81], а также плазма сверхплотных астрофизических объектов [96–98] (например, белых карликов). Ожидается, что в схемах ЛСП концентрация электронов может достигать  $10^{27} \text{ см}^{-3}$  и выше. Таким образом, имеем  $\omega_{pe} = 1,76 \times 10^{18} \text{ с}^{-1}$ ,  $T_F = 1,7 \times 10^{-9} \text{ эрг}$ ,  $\hbar\omega_{pe} = 1,7 \times 10^{-9} \text{ эрг}$ , и  $H = 1$ . Фермиевская длина Дебая  $\lambda_D = 0,1 \text{ \AA}$ . С другой стороны, во внутренних областях белых карликов, как правило, имеем  $n_0 \sim 10^{30} \text{ см}^{-3}$ , что даёт  $\omega_{pe} = 5,64 \times 10^{19} \text{ с}^{-1}$ ,  $T_F = 1,7 \times 10^{-7} \text{ эрг}$ ,  $\hbar\omega_{pe} = 5,64 \times 10^{-8} \text{ эрг}$ ,  $H \approx 0,3$ , и  $\lambda_D = 0,025 \text{ \AA}$ . Численные решения уравнений (86) и (87) для  $H = 1$  и  $H = 0,025$  (что соответствует  $n_0 = 10^{27} \text{ см}^{-3}$  и  $n_0 = 10^{30} \text{ см}^{-3}$ ) показаны соответственно на рис. 8 и 9, на которых представлены распределения концентрации электронов и электростатического (ЭС) потенциала в плоскости  $(x, y)$ .

Из рисунков 8 и 9 видно, что распределение электронной плотности имеет тенденцию к возбуждению мелко-масштабных структур, в то время как ЭС потенциал эволюционирует к крупным масштабам. Совместное существование мелко- и крупномасштабных структур в турбулентности повсеместно наблюдается в разнообразных трёхмерных турбулентных системах. Например, несжимаемая жидкость в трёхмерной гидродинамической турбулентности допускает два инварианта, а именно, энергию и средний квадрат завихренности. Эти два инварианта одновременно переносятся по спектру турбулентности под действием внешних сил, таким образом приводя к явлению двойного каскада. В таких



**Рис. 8.** Мелкомасштабные флуктуации электронной плотности, полученные в результате численного моделирования стационарной турбулентности трёхмерной электронной плазмы при  $H = 0,4$  (вверху) и  $H = 0,01$  (внизу). Направленный вперёд прямой каскад ответствен за возбуждение мелкомасштабных флуктуаций, которые видны на (а) и (в). Крупномасштабные структуры электростатического потенциала, заметные на (б) и (г), по сути являются результатом обратного каскада. Согласно работе [67].

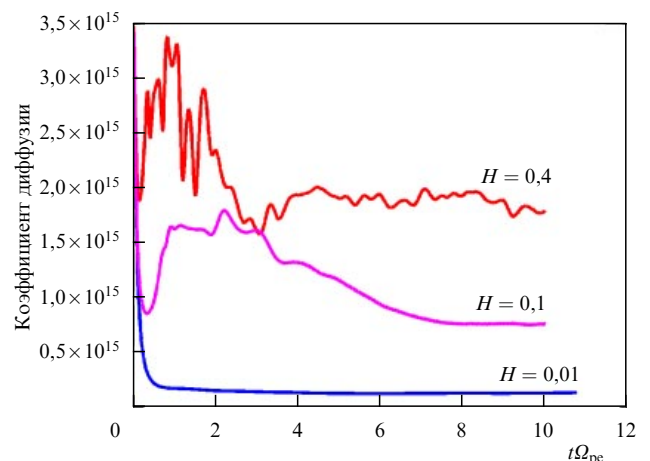


**Рис. 9.** Энергетический спектр трёхмерных ЭПК в режиме прямого каскада. Спектр типа колмогоровского  $\sim k^{-11/3}$  наблюдается при  $H = 0,4$ . Показатель спектра меняется как функция  $H$ . Численное разрешение  $128^3$ . Согласно работе [67].

процессах энергия переносится к более крупным масштабам, в то время как завихренность переносит энергию спектра в область коротких масштабов. Двойной каскад, как правило, наблюдается при численном моделировании направляемой турбулентности, когда определённые моды возбуждаются внешним образом посредством случайных турбулентных сил в спектральном пространстве. Эти случайным образом возбуждённые фурье-моды переносят энергию спектра, сохраняя постоянные движения в  $k$ -пространстве. С другой стороны, в свободно-распадной турбулентности, энергия, содержащаяся в крупномасштабных вихрях, переносится в область мелких масштабов, приводя к статистически стационарному инерционному режиму, связанному с прямым каскадом одного из инвариантов. Распадная турбулентность часто приводит к образованию когерентных структур, возникающих по мере того, как турбулентность ослабляется, делая таким образом нелинейные взаимодействия довольно неэффективными при их насыщении. Энергетический спектр имеет интересное свойство в рассматриваемой трёхмерной плазменной системе, что отличает его от спектра трёхмерной гидродинамической турбулентности [155–158]. Наклон спектра трёхмерной квантовой турбулентности электронной жидкости ближе к степенному спектру Ирошника–Крейчана [159, 160]  $k^{-3/2}$ , чем к обычному колмогоровскому спектру [155]  $k^{-5/3}$ . Однако оказывается, что этот скейлинг не универсален, а критически зависит от эффекта квантового туннелирования. Например, при более высоком значении  $H = 1,0$  спектр становится более плоским (см. рис. 9). Физически, уплощённость (или отклонение от  $k^{-5/3}$ ) является результатом коротковолновой части спектра ЭПК, которая контролируется эффектом квантового туннелирования, связанного с потенциалом Бома. Пик энергетического спектра может быть обусловлен более высокой энергией турбулентности, находящейся в потенциале ЭПК, что в конечном счете приводит к возбуждению крупномасштабных структур, когда полная энергия заключена как в электростатическом потенциале, так и в электронной плотности. В рассматриваемом процессе двойного каскада имеет место деликатный баланс между дисперсией ЭПК, вызываемой статистическим

давлением (что приводит к члену  $k^2 V_F^2$ , доминирующему на крупных масштабах), и квантовым потенциалом Бома (приводящим к члену  $\hbar^2 k^4 / 4m_e^2$ , который доминирует на масштабах, более мелких по отношению к источнику). Более того, стоит заметить, что индексы, отличные от  $k^{-5/3}$  также наблюдались при численном моделировании [161, 162] уравнения Чарни и уравнения Навье–Стокса трёхмерной несжимаемой жидкости. Недавно Паолетти и др. [163] исследовали статистику скоростей в квантовой турбулентности сверхтекучего  $^4\text{He}$  и обнаружили, что она значительно отличается от случая классической турбулентности, поскольку топологические взаимодействия вихрей отличаются со взаимодействиями в классической жидкости.

Наконец, оценим коэффициент электронной диффузии при наличии мелкомасштабных и крупномасштабных ЭПК в рассматриваемой квантовой плазме. Эффективный коэффициент электронной диффузии, вызываемый переносом импульса, вычисляется согласно формуле  $D_{\text{eff}} = \int_0^\infty \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \mathbf{P}(\mathbf{r}, t + t') \rangle dt'$ , где  $\mathbf{P}$  — электронный импульс, а угловые скобки означают пространственное усреднение и усреднение по ансамблю, нормированное на единицу массы. Эффективный коэффициент электронной диффузии,  $D_{\text{eff}}$ , по сути связывает диффузионные процессы, ассоциированные со случайным поступательным движением электронов в нелинейных полях плазмонов. Коэффициент  $D_{\text{eff}}$  вычисляется при численном моделировании для того, чтобы померить турбулентный электронный перенос, связанный с описываемыми здесь турбулентными структурами. Наблюдаемая электронная диффузия оказывается ниже, когда возмущения полей гауссовы. С другой стороны, электронная диффузия резко возрастает с образованием в конце концов крупномасштабных структур, как показано на рис. 10. Электронная диффузия из-за крупномасштабных распределений потенциала в квантовой плазме существенно доминирует, что показано сплошной кривой на рис. 10. Далее, в установившемся режиме нелинейно связанные ЭПК формируют стационарные



**Рис. 10.** Эволюция во времени эффективного коэффициента электронной диффузии, связанная с крупномасштабным электростатическим потенциалом и мелкомасштабной электронной плотностью, при  $H = 0,4$ ,  $H = 0,1$  и  $H = 0,01$ . Меньшие значения  $H$  соответствуют малому эффективному коэффициенту диффузии, характеризующему присутствие мелкомасштабных турбулентных вихрей, которые подавляют электронный перенос. Согласно работе [67].

структуры, и  $D_{\text{eff}}$  в конце концов насыщается. Примечательно, таким образом, что повышенная электронная диффузия обусловлена, в первую очередь, появлением крупномасштабных потенциальных структур в рассматриваемой трёхмерной квантовой плазме.

## 6. Кинетические структуры в фазовом пространстве

В разделе 5 обсуждались свойства квантованных когерентных структур и трёхмерной турбулентности квантовой жидкости на основе связанных уравнений Шрёдингера и Пуассона. При этом предполагалось, что нелинейно взаимодействующие плазменные волны возникают спонтанно в результате известных физических процессов (например, плазменно-пучковой неустойчивости) в квантовой плазме.

Хорошо известно формирование электростатических кинетических структур в фазовом пространстве, описываемое на основе уравнений Власова–Пуассона классической плазмы [164]. Ниже обсуждаются квазилинейные аспекты [165] ЭПК, описываемых системой Вигнера–Пуассона (т.е. квантовым аналогом системы Власова–Пуассона). Более конкретно, рассматриваются кинетические нелинейные структуры в фазовом пространстве, возникающие из-за захвата электронов потенциалом волны конечной амплитуды, и самосогласованная модификация функции распределения электронов в присутствии нанокинетических структур.

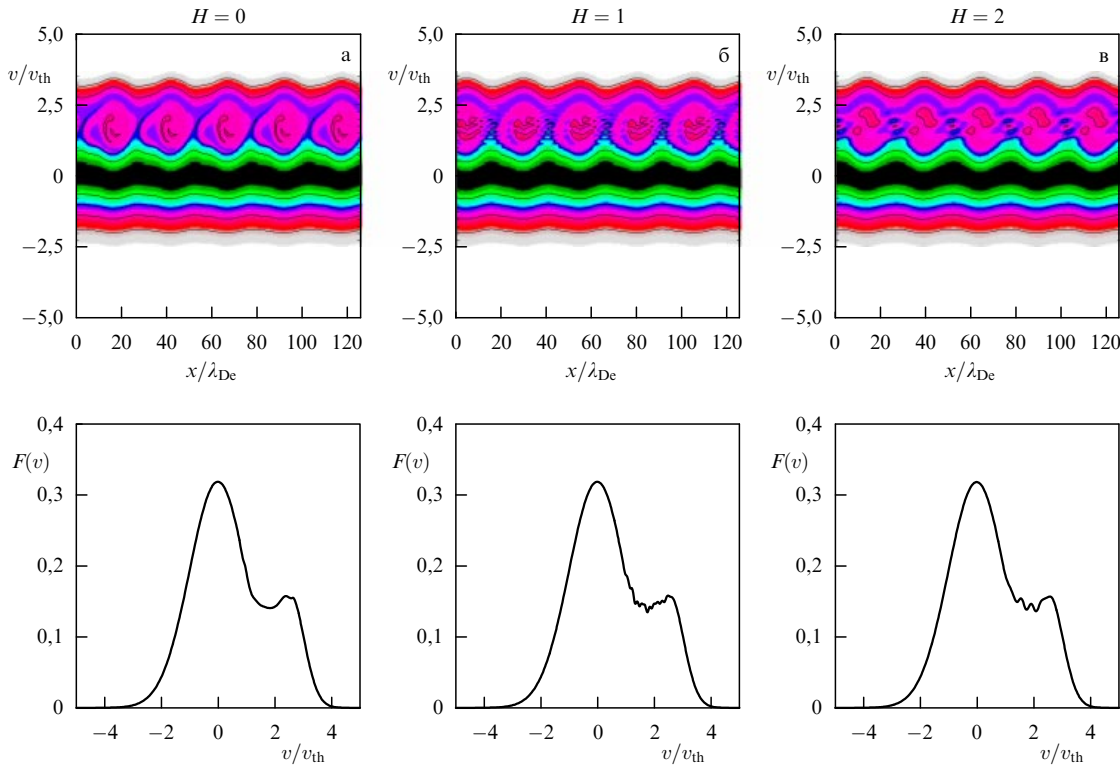
Для исследования различий в нелинейной эволюции уравнений Вигнера и Пуассона, рассмотрим результаты

численного моделирования хорошо известной кинетической пучковой неустойчивости (bump-on-tail instability) [165], где высокоскоростной пучок используется для дестабилизации максвелловского равновесия. Используются начальные условия

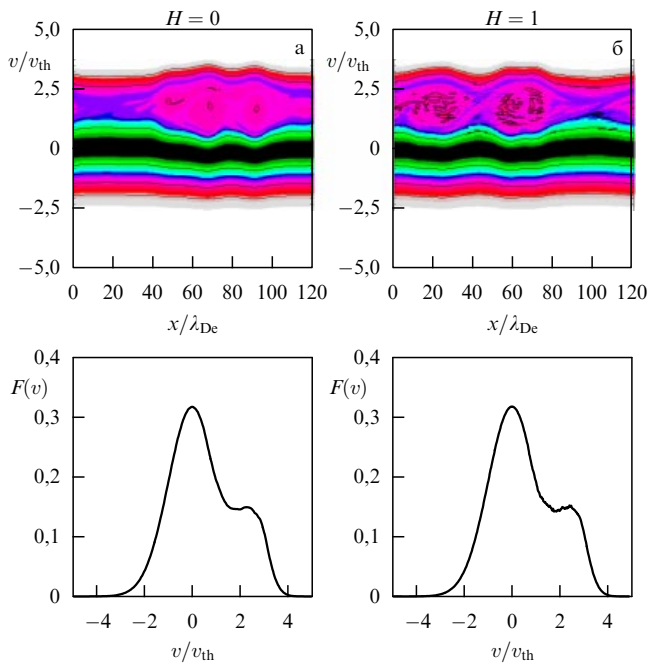
$$f = (1 + \delta) \left( \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{\text{th}}} \right) \left[ 0,8 \exp \left( -\frac{v^2}{2v_{\text{th}}^2} \right) + 0,4 \exp \left( -\frac{2(v - 2,5v_{\text{th}})^2}{v_{\text{th}}^2} \right) \right],$$

где  $\delta$  представляет собой случайные флуктуации порядка  $10^{-5}$ , которые питают неустойчивость (рис. 11). Здесь  $v_{\text{th}} = \sqrt{k_B T_e / m_e}$  — тепловая скорость электронов. Использованы периодические граничные условия с пространственным периодом  $L = 40\pi\lambda_{\text{De}}$ , где  $\lambda_{\text{De}} = v_{\text{th}}/\omega_{\text{pe}}$  — дебаевский радиус. Моделирование проводилось для трёх различных значений нормированной постоянной Планка, определенной как  $H = \hbar\omega_{\text{pe}}/mv_{\text{th}}^2$ :  $H = 0$  (Власов),  $H = 1$ , и  $H = 2$ .

Для того чтобы выделить переходные осцилляции в пространстве скоростей, упомянутое выше равновесие сперва возмущалось монохроматической волной с  $k\lambda_{\text{De}} = 0,25$  (с длиной волны  $8\pi\lambda_{\text{De}}$ ). На рисунке 11 показаны результаты моделирования систем Вигнера–Пуассона и Власова–Пуассона. В обоих случаях из-за пучковой неустойчивости электростатические волны развиваются нелинейно и создают периодические острова захваченных частиц (электронных дырок) с волновым вектором  $k = 0,25\lambda_{\text{De}}^{-1}$ . Теория предсказывает формиро-



**Рис. 11.** Моделирование систем Вигнера–Пуассона и Власова–Пуассона за время  $\omega_{\text{pe}}t = 200$ , при (а)  $H = 0$  (Власов), (б)  $H = 1$  (Вигнер) и (в)  $H = 2$  (Вигнер). Спектр изначально монохроматический. Вверху: пространственно-усреднённая функция распределения  $f(x, v)$  в фазовом пространстве. Внизу: пространственно-усреднённая функция распределения  $F(v)$  в пространстве скоростей. Согласно работе [165]. (Цветной вариант рисунка приведён в электронной версии на сайте [www.ufn.ru](http://www.ufn.ru).)



**Рис. 12.** Моделирование систем Вигнера–Пуассона и Власова–Пуассона за время  $\omega_{pe}t = 500$ , (а) при  $H = 0$  (Власов) и (б)  $H = 1$  (Вигнер). Изначально широкий по волновым числам спектр. Вверху: функция распределения электронов  $f(x, v)$  в фазовом пространстве. Внизу: пространственно-усреднённая функция распределения электронов  $F(v)$  в пространстве скоростей. Согласно работе [165]. (Цветной вариант рисунка приведён в электронной версии на сайте [www.ufn.ru](http://www.ufn.ru))

вание колебаний в пространстве скоростей в случае вигнеровской эволюции, которые должны отсутствовать в классическом (власовском) моделировании. Результаты для этого случая представлены на рис. 12, где ясно видны колебания.

В случае широкополосных начальных возбуждений (т.е. когда возбуждаются волновые числа  $0,05 \leq k\lambda_{De} \leq 0,5$ ) электронные дырки начинают сливаться на больших временах из-за неустойчивости боковых частот [166, 167] (см. рис. 12). На этой стадии важным становится спаривание мод, и квазилинейная теория неспособна описать подобные эффекты. По мере того, как система эволюционирует в сторону больших пространственных длин волн, эволюция постепенно становится все более классической, с появлением плато в резонансной области. Тем не менее при  $\omega_{pe}t = 500$  вигнеровское решение ещё демонстрирует некоторое осцилляторное поведение в пространстве скоростей, отсутствующее в случае власовской эволюции.

Что касается эксперимента, то недавнее наблюдение коллективного рентгеновского рассеяния в теплой плотной материи [118] показало измеримый сдвиг частоты плазмонов из-за квантовых эффектов. В нелинейном режиме (сильные возбуждения) этот эффект мог бы приводить к захвату электронов в волновой потенциал плазмонов с последующим формированием структур (типа обсуждаемых здесь) в фазовом пространстве. Кроме того, заметим, что также существует теоретическое описание [168] квантово-скорректированных электронных дырок на основе рассмотрения возмущений уравнений Вигнера–Пуассона.

## 7. Магнитные поля в квантовой плазме

Существует несколько механизмов генерации магнитных полей в классической плазме. Они включают: 1) непараллельные градиенты плотности и температуры (так называемую батарею Бирмана [169]), 2) анизотропию электронной температуры (известную как вейбелевская неустойчивость [170]), 3) противоположно направленные электронные пучки [171, 172] и 4) пондеромоторные силы лазерных пучков [173–179].

Далее, обсудим два возможных механизма генерации магнитных полей в квантовой плазме.

### 7.1. Квантовая вейбелевская неустойчивость

Сперва обсудим линейные и нелинейные аспекты [180–183] вейбелевской неустойчивости, вызываемой равновесной функцией распределения Ферми–Дирака с анизотропной электронной температурой. Хорошо известно [184], что плотная квантовая плазма с изотропной равновесной функцией распределения не допускает чисто растущих линейных мод. Это подтверждается, например, выражением для мнимой части поперечной диэлектрической проницаемости, выведенной Линдхардом [185] для полностью вырожденной нерелятивистской фермиевской плазмы. Можно показать (см. уравнение (30) в работе [186]), что единственным исключением являются чрезвычайно малые длины волн  $k > 2k_F$ , где  $k_F$  — характерное волновое число Ферми рассматриваемой системы. Однако в этом случае волна оказывается сверхсветовой. С другой стороны, в классической власовско-максвелловской плазме с анизотропной функцией распределения электронов имеется чисто растущая вейбелевская неустойчивость [170], из-за которой возникают магнитные поля. Анизотропия электронной температуры может появляться вследствие нагрева плазмы лазерными лучами [187], что также является отличительной чертой вейбелевской неустойчивости. В экспериментах следующего поколения по взаимодействию интенсивного лазерного излучения с плотной плазмой мишени весьма вероятно вырождение электронов, возможно развитие анизотропии электронной температуры из-за анизотропного нагрева электронов мощными лазерными пучками посредством резонансного поглощения, аналогичного случаю взаимодействия лазеров с классической плазмой [188].

Рассмотрим линейные поперечные волны в плотной квантовой плазме, состоящей из электронов и неподвижных ионов, с  $\mathbf{kE} = 0$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, а  $\mathbf{E}$  — электрическое поле волны. Следуя стандартной процедуре, получаем общее дисперсионное уравнение [1, 182, 183] для поперечных волн в системе Вигнера–Пуассона:

$$\omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2 + \frac{m_e \omega_{pe}^2}{2n_0 \hbar} \int dv \left( \frac{v_x^2 + v_y^2}{\omega - kv_z} \right) \times \\ \times \left[ f_0 \left( v_x, v_y, v_z + \frac{\hbar k}{2m} \right) - f_0 \left( v_x, v_y, v_z - \frac{\hbar k}{2m_e} \right) \right] = 0, \quad (88)$$

где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — вектор скорости и  $f_0(v_x, v_y, v_z)$  — равновесная функция Вигнера, связанная с фермиевскими системами. Для частиц со спином  $1/2$ , равновесная функция псевдораспределения записывается в виде функции Ферми–Дирака. Допуская анизотропию ско-



ростей, запишем

$$f_0 = \frac{\alpha}{\exp \left\{ m/2 [(v_x^2 + v_y^2)/\kappa_{\text{В}} T_{\perp} + v_z^2/\kappa_{\text{В}} T_{\parallel}] - \beta\mu \right\} + 1}, \quad (89)$$

где  $\mu$  — химический потенциал, а постоянная нормировки

$$\alpha = -\frac{n_0}{\text{Li}_{3/2}[-\exp(\beta\mu)]} \left( \frac{m_e \beta}{2\pi} \right)^{3/2} = 2 \left( \frac{m_e}{2\pi\hbar} \right)^3. \quad (90)$$

Здесь  $\text{Li}_{3/2}$  — полилогарифмическая функция [189, 190]. К тому же  $\beta = 1/[\kappa_{\text{В}}(T_{\perp}^2 T_{\parallel})^{1/3}]$ , где  $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$  связаны с дисперсией скоростей в направлении, перпендикулярном и параллельном оси  $z$  соответственно. В особом случае  $T_{\perp} = T_{\parallel}$  восстанавливается обычное равновесие Ферми–Дирака. Химический потенциал находится решением условия нормировки (90), что, в частности, даёт  $\mu = E_{\text{F}}$  в пределе нулевой температуры, где  $E_{\text{F}} = (3\pi^2 n_0)^{2/3} \hbar^2 / (2m_e)$  — энергия Ферми. Также получаем, что распределение Ферми–Дирака  $\hat{f}(\mathbf{k})$  ( $\mathbf{k}$  — соответствующий волновой вектор в пространстве импульсов) связано с равновесной функцией распределения Вигнера (89) соотношением  $\hat{f}(\mathbf{k}) = (1/2)(2\pi\hbar/m)^3 f_0(\mathbf{v})$ , где множитель 2 обусловлен спином [191, 192]. Однако предыдущие работы относятся к случаям, в которых отсутствует анизотропия температуры. Заметим, что в своё время высказывалось мнение [193], что в лазерной плазме вейбелевская неустойчивость ответственна за дальнейший рост  $T_{\parallel}$  со временем.

Подставляя (89) в (88) и интегрируя по компонентам поперечных скоростей, получаем

$$\omega^2 - k^2 c^2 - \omega_{\text{pe}}^2 \left( 1 + \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} W_{\text{Q}} \right) = 0, \quad (91)$$

где

$$W_{\text{Q}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}H \text{Li}_{3/2}[-\exp(\beta\mu)]} \int \frac{dv}{v - \xi} \times \\ \times \left( \text{Li}_2 \left\{ -\exp \left[ - \left( v + \frac{H}{2} \right)^2 + \beta\mu \right] \right\} - \right. \\ \left. - \text{Li}_2 \left\{ -\exp \left[ - \left( v - \frac{H}{2} \right)^2 + \beta\mu \right] \right\} \right). \quad (92)$$

В (92)  $\text{Li}_2$  — дилогарифмическая функция,  $H = \hbar k / (m_e v_{\parallel})$  — характеристический параметр, представляющий эффект квантовой дифракции,  $\xi = \omega / (k v_{\parallel})$  и  $v = v_z / v_{\parallel}$  с  $v_{\parallel} = (2\kappa_{\text{В}} T_{\parallel} / m_e)^{1/2}$ . Можно показать, что если эффекты квантовой дифракции малы ( $H \ll 1$ ) и одновременно система разрежена ( $\exp(\beta\mu) \ll 1$ ), то  $W_{\text{Q}} \simeq -1 - \xi Z(\xi)$ , где  $Z$  — стандартная дисперсионная функция плазмы [194]. Важно отметить, что либо (88), либо (91) воспроизводит поперечную диэлектрическую проницаемость, вычисляемую в приближении случайных фаз для полностью вырожденной квантовой плазмы [185] в изотропной системе. В этой эквивалентности можно убедиться простым образом, если в (88) положить  $T_{\perp} = T_{\parallel}$ , а затем перейти к пределу нулевой температуры, так что  $f_0 = 3n_0 / (4\pi V_{\text{Fe}}^3)$  при  $|\mathbf{v}| < V_{\text{Fe}}$  и  $f_0 = 0$  в противном случае.

Полученное новое дисперсионное соотношение (91) решается далее для ряда параметров, характерных

для перспективных экспериментов по взаимодействию мощных лазеров и плазмы твёрдой мишени. Условие нормировки (90) может быть также записано как  $-\text{Li}_{3/2}[-\exp(\beta\mu)] = (4/3\sqrt{\pi})(\beta E_{\text{F}})^{3/2}$ , что по виду аналогично соотношению, имеющему место в изотропном равновесии Ферми–Дирака [8]. При выбранных значениях произведения  $\beta\mu$  и плотности это соотношение даёт значение  $\beta$ , из которого вычисляются температуры  $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$  для известного  $T_{\perp}/T_{\parallel}$ . Рассмотрим только чисто растущие моды. Можно показать, что из определения (92) следует  $W_{\text{Q}} \rightarrow -1$ , когда  $\omega = i\gamma \rightarrow 0$  для конечного волнового числа  $k$ . Тогда из (91) для неустойчивости получается максимальное волновое число  $k_{\text{max}} = (\omega_{\text{pe}}/c)\sqrt{T_{\perp}/T_{\parallel} - 1}$ . Если  $T_{\perp}/T_{\parallel} \rightarrow 1$ , то область неустойчивых волновых чисел сужается до нуля. На рисунках 13 и 14 использована концентрация электронов  $n_0 = 10^{33} \text{ м}^{-3}$ , которая может получаться в схемах лазерного сжатия. Скорость роста при различных значениях  $T_{\perp}/T_{\parallel}$  показана на рис. 13. Видно, что максимальное неустойчивое волновое число равно, как предсказано,  $k_{\text{max}} = (\omega_{\text{pe}}/c)\sqrt{T_{\perp}/T_{\parallel} - 1}$ , а максимальная скорость роста достигается при  $k \approx k_{\text{max}}/2$ . На рисунке 13 также видно, что максимальная скорость роста неустойчивости практически прямо пропорциональна  $T_{\perp}/T_{\parallel} - 1$ . На рисунке 14 менялось произведение  $\beta\mu$ , которое показывает меру вырождения квантовой плазмы. Видно, что неустойчивость ограничена при  $\beta\mu$ , превышающем 5; предел неустойчивости не зависит от температуры, в то время как тепловые эффекты начинают играть важную роль при  $\beta\mu$  порядка единицы.

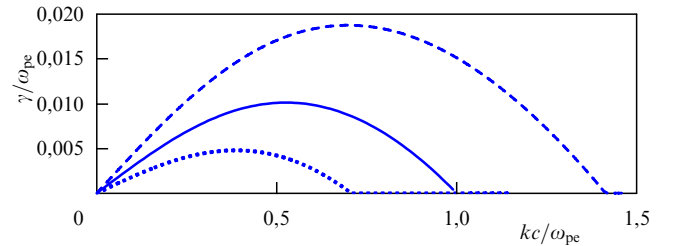


Рис. 13. Скорость роста вейбелевской неустойчивости в плотной фермионной плазме с  $n_0 = 10^{33} \text{ м}^{-3}$  ( $\omega_{\text{pe}} = 1,8 \times 10^{18} \text{ с}^{-1}$ ) и  $\beta\mu = 5$ , имеющей отношение к перспективным инерционно сжатым материалам в экспериментах по взаимодействию мощных лазеров и плазмы твёрдой мишени. Анизотропия температуры  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 3$  (пунктирная линия),  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 2$  (сплошная линия) и  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 1,5$  (штриховая линия), что соответственно даёт  $T_{\parallel} = 3,9 \times 10^6 \text{ К}$ ,  $T_{\parallel} = 5,2 \times 10^6 \text{ К}$  и  $T_{\parallel} = 6,3 \times 10^6 \text{ К}$ . Согласно работе [183].

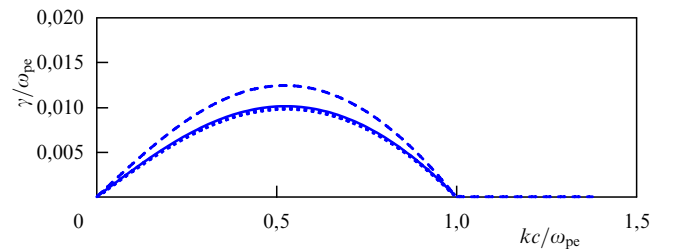


Рис. 14. Скорость роста вейбелевской неустойчивости в плотной фермионной плазме с  $n_0 = 10^{33} \text{ м}^{-3}$  ( $\omega_{\text{pe}} = 1,8 \times 10^{18} \text{ с}^{-1}$ ). Здесь анизотропия температуры  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 2$  при  $\beta\mu = 1$  (пунктирная линия),  $\beta\mu = 5$  (сплошная линия) и  $\beta\mu = 10$  (штриховая линия), что соответственно даёт  $T_{\parallel} = 1,6 \times 10^7 \text{ К}$ ,  $T_{\parallel} = 5,2 \times 10^7 \text{ К}$  и  $T_{\parallel} = 2,6 \times 10^6 \text{ К}$ . Согласно работе [183].

На основе нескольких численных решений линейного дисперсионного соотношения [183] устанавливается приближённый закон подобия неустойчивости  $\gamma_{\max}/\omega_{\text{pe}} = \text{const} \times n_0^{1/3} (T_{\perp}/T_{\parallel} - 1)$ , где постоянная приближенно равна  $8,5 \times 10^{-14} \text{ м с}^{-1}$ . Используя

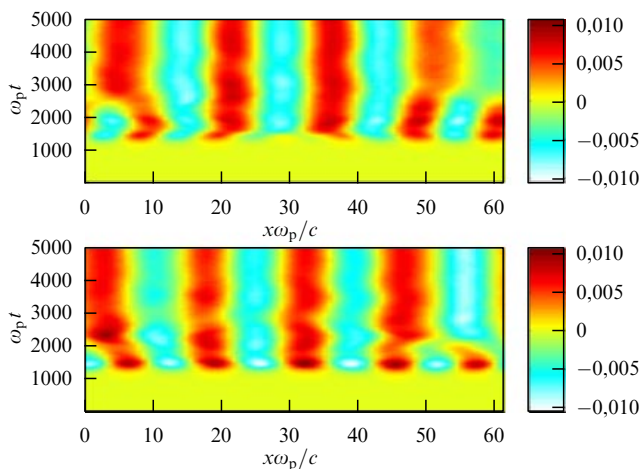
$$n_0 = \frac{(2m_e E_F / \hbar^2)^{3/2}}{3\pi^2} \approx 1,67 \times 10^{36} \left( \frac{E_F}{m_e c^2} \right)^{3/2},$$

имеем для максимальной скорости роста вейбелевской неустойчивости в вырожденной фермиевской плазме:

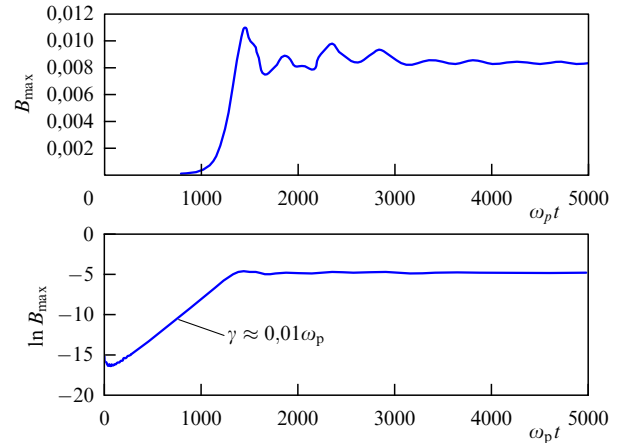
$$\frac{\gamma_{\max}}{\omega_{\text{pe}}} = 0,10 \left( \frac{E_F}{m_e c^2} \right)^{1/2} \left( \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right). \quad (93)$$

Этот закон подобия, в котором скорость роста неустойчивости зависит от энергии Ферми и анизотропии температуры, должен сравниваться с соответствующим скейлингом в классической плазме [188, 195], где скорость роста зависит от тепловой энергии и анизотропии температуры.

Для максвелловской плазмы было получено [196], что вейбелевская неустойчивость нелинейно насыщается, когда частота вращения в магнитном поле  $\omega_c = eB/m_e c$  возрастает до значения, сравнимого с линейной скоростью роста. Для того чтобы оценить нелинейное поведение вейбелевской неустойчивости в вырожденной плазме, было проведено численное моделирование системы Вигнера–Пуассона. Предполагалось, что эффекты квантовой дифракции слабы, так что моделирование уравнения Вигнера может быть приближено моделированием уравнения Власова посредством электромагнитного власовского кода [197]. В качестве начального условия использовалась функция распределения (89). Для затравки неустойчивости плотность плазмы возмущалась низкочастотными флуктуациями (случайными числами). Результаты представлены на рис. 15 и 16 для значений параметров  $\beta\mu = 5$  и  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 2$ , соответствующих сплошным линиям. На рисунке 15 показаны компоненты магнитного поля как функции пространственных переменных и времени. Видно, что магнитное поле сперва растёт и затем насыщается с установивши-



**Рис. 15.** Компоненты магнитного поля  $B_y$  (вверху) и  $B_z$  (внизу) как функции пространственных координат и времени при  $\beta\mu = 5$  и  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 2$ . Магнитное поле нормировано на  $\omega_{\text{pe}} m_e / e$ . Видно нелинейное насыщение компонент магнитного поля при амплитуде  $\sim 0,01$ . Согласно работе [183].



**Рис. 16.** Максимум амплитуды магнитного поля,  $B = (B_y^2 + B_z^2)^{1/2}$ , в области вычислений (вверху), и логарифм максимума магнитного поля (внизу) как функция времени при  $T_{\perp}/T_{\parallel} = 2$  и  $\beta\mu = 5$ . Магнитное поле нормировано на  $\omega_{\text{pe}} m_e / e$ . Из наклона логарифма магнитного поля в линейном режиме находится  $\gamma \approx \Delta \ln(B_{\max}) / \Delta t \approx 0,01 \omega_{\text{pe}}$ . Согласно работе [183].

мися флуктуациями с амплитудой  $eB/m_e c \omega_{\text{pe}} \approx 0,008$ . Максимум амплитуды магнитного поля в области вычислений показан на рис. 16 как функция времени, где видно, что скорость роста наиболее неустойчивой моды есть  $\gamma_{\max}/\omega_{\text{pe}} \approx 0,009$ . Аналогично случаю классической плазмы [196], можно оценить возбуждённое магнитное поле в вырожденной фермиевской плазме как

$$B = \frac{m_e c \gamma_{\max}}{e}. \quad (94)$$

Для параметров, имеющих место в экспериментах по взаимодействию мощного лазерного излучения с твёрдыми мишенями, магнитное поле оказывается таким образом порядка  $10^5$  Тл (один гигагаусс).

## 7.2. Намагничивание плотной плазмы электромагнитной волной

Ещё одним примером является намагничивание плотной плазмы в присутствии потока электронов и электромагнитных волн большой амплитуды. Здесь нестационарная пондеромоторная сила электромагнитной волны может создавать медленно меняющиеся электрические поля и токи, которые генерируют магнитные поля постоянного тока в плотной плазме.

Рассмотрим распространение электромагнитной волны с электрическим полем  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (1/2)\mathbf{E}_0(x, t) \times \exp(-i\omega t + ikx) + \text{с.с.}$  в немагнитной нерелятивистской плотной плазме с потоком электронов (со скоростью дрейфа  $u\hat{z}$ , где  $u$  — величина скорости потока и  $\hat{z}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$  декартовой системы координат; как правило,  $u$  намного меньше фермиевской скорости электронов) и неподвижными ионами. Здесь  $\mathbf{E}_0(x, t)$  — огибающая электромагнитного поля в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ , а с.с. означает комплексное сопряжение. Частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k} = k\hat{x}$ , где  $\hat{x}$  — единичный вектор вдоль оси  $x$ , связаны как [198]

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = N = 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{k^2 u^2 \omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2 (\omega^2 - k^2 V_{\text{Fe}}^2 - \Omega_q^2)}, \quad (95)$$

где  $N$  — показатель преломления и  $\Omega_q = \hbar k^2 / 2m_e$ .

Электромагнитная волна действует на электроны плазмы пондеромоторной силой  $\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_{ps} + \mathbf{F}_{pt}$ , стационарная и нестационарная компоненты которой соответственно [173]

$$\mathbf{F}_{ps} = \frac{N-1}{16\pi} \nabla |\mathbf{E}_0|^2 \quad (96)$$

и

$$\mathbf{F}_{pt} = \frac{1}{16\pi} \frac{\mathbf{k}}{\omega^2} \frac{\partial [\omega^2(N-1)]}{\partial \omega} \frac{\partial |\mathbf{E}_0|^2}{\partial t}. \quad (97)$$

Пондеромоторная сила локально расталкивает электроны и создает медленно меняющееся электрическое поле

$$\mathbf{E}_s = -\nabla \phi_s - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_s}{\partial t} = \frac{1}{n_0 e} \mathbf{F}_p, \quad (98)$$

где скалярные и векторные потенциалы соответственно равны

$$\phi_s = -\frac{N-1}{16\pi n_0 e} |\mathbf{E}_0|^2, \quad (99)$$

и

$$\mathbf{A}_s = -\frac{c}{16\pi n_0 e} \frac{\mathbf{k}}{\omega^2} \frac{\partial [\omega^2(N-1)]}{\partial \omega} |\mathbf{E}_0|^2. \quad (100)$$

Медленно меняющееся индуцированное магнитное поле  $\mathbf{B}_s$  тогда записывается как  $\mathbf{B}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s$ . Замечая, что

$$\frac{\partial [\omega^2(N-1)]}{\partial \omega} = \frac{2\omega k^2 u^2 \omega_{pe}^2}{(\omega^2 - k^2 V_{Fe}^2 - \Omega_q^2)^2}, \quad (101)$$

величина магнитного поля выражается как

$$|\mathbf{B}_s| = \frac{eck^3 u^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2m_e L \omega (\omega^2 - \Omega^2)^2}, \quad (102)$$

где  $L$  — характерный размер огибающей  $|\mathbf{E}_0|^2$  и  $\Omega = (k^2 V_{Fe}^2 + \Omega_q^2)^{1/2} \equiv (\hbar k^2 / 2m_e) [1 + 4(3\pi^2 n_0)^{2/3} / k^2]^{1/2}$ . Из (102) видно, что величина магнитного поля пропорциональна  $u^2$  и может достигать больших значений при  $\omega \sim \Omega$ . Гирочастота электронов  $\Omega_c$  есть

$$\Omega_c = \frac{e|\mathbf{B}_s|}{m_e c} = \frac{k^3 V_0^2 u^2 \omega}{2L(\omega^2 - \Omega^2)^2}, \quad (103)$$

где  $V_0 = e|\mathbf{E}_0|/m_e \omega$  — скорость осцилляций электронов в электромагнитном поле.

## 8. Динамика электромагнитных волн в плотной плазме

Здесь рассмотрены разнообразные электромагнитные (ЭМ) волновые моды и их нелинейные взаимодействия в плотной плазме. В качестве примера обсуждаются спиновые волны, появляющиеся в замагниченной плазме из-за эффекта спина-1/2 электронов и позитронов. Также рассмотрены нелинейные взаимодействия между электромагнитными и электростатическими волнами конечной амплитуды в плотной плазме. Основное внимание уделено лежащей в основе указанных эффектов физике неустойчивостей вынужденного рассеяния и локализации волн из-за параметрических взаимодействий, включающих радиационное давление [178].

### 8.1. Электромагнитные спиновые волны в замагниченной плазме

В присутствии внешнего магнитного поля, квантовое описание линейной кинетики плотной бесстолкновительной плазмы весьма сложно из-за квантования гиромагнитного движения и учёта спина электронов и позитронов. В прошлом многие авторы [199–203] исследовали высокочастотную проводимость, а также продольные и поперечные диэлектрические отклики плотной замагниченной плазмы. Характеристики распространения высокочастотных электромагнитных волн в квантовой магнитоплазме отличаются от таковых в классической магнитоактивной плазме [204].

Ораевский и др. [70] недавно обнаружили новую электромагнитную спиновую волну, электрическое поле которой параллельно  $B_0 \hat{z}$ , и которая распространяется поперёк  $\hat{z}$ , где  $\hat{z}$  — единичный вектор вдоль оси  $z$  декартовой системы координат и  $B_0$  — величина внешнего магнитного поля. Волна спина сопровождается током намагничивания из-за движения спинов электронов её частота находится из [70]

$$\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)} + 2\pi\mu_B^2 \frac{k_{\perp}^2 c^2 n_0}{\omega^2 E_F} \frac{\omega_{ce}}{\omega - \omega_{ce}}, \quad (104)$$

где  $k_{\perp}$  — перпендикулярная компонента волнового вектора  $\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{x}$ ,  $\hat{x}$  — единичный вектор, перпендикулярный  $\hat{z}$ ,  $\nu_e$  — частота электронных столкновений, и  $E_F \sim m_e c^2$ . Третий член правой части (104) представляет электронный спин-магнитный резонанс на электронной циклотронной частоте  $\omega_{ce} = eB_0/m_e c$ .

Предполагая, что  $k_{\perp}^2 c^2 + \omega_{pe}^2 \neq \omega_{ce}^2$ , из (104) получаем

$$\omega \simeq \omega_{ce} \left[ 1 + \frac{2\pi\mu_B^2 n_0}{E_F} \frac{k_{\perp}^2 c^2}{k_{\perp}^2 c^2 + \omega_{pe}^2 (1 - i\nu_e/\omega) - \omega_{ce}^2} \right]. \quad (105)$$

При  $\nu_e \ll \omega \sim \omega_{ce}$ , скорость затухания спиновой моды

$$\text{Im } \omega \simeq \frac{\nu_e \omega_{pe}^2 k_{\perp}^2 c^2 \mu_B^2 B_0^2}{E_F m_e c^2 \omega_{ce}^2 (k_{\perp}^2 c^2 + \omega_{pe}^2 - \omega_{ce}^2)^2}. \quad (106)$$

Пондеромоторная сила спиновой волны может генерировать возмущения компрессионного магнитного поля благодаря обратному эффекту Коттон–Мутона/Фарадея [205].

### 8.2. Нелинейно связанные ЭМ-волны

Электромагнитные волны конечной амплитуды в квантовой магнитоплазме нелинейно взаимодействуют друг с другом. В этом разделе при получении компактных нелинейных уравнений для электронной магнитогиродинамической (ЭМГД) и холловской МГД-плазмы использованы обобщённые квантовые МГД-уравнения и показано, как нетривиально связаны между собой возмущения плотности, скорости жидкости и магнитного поля.

Нелинейными уравнениями, определяющими электромагнитные волны в плотной магнитоплазме, являются квантовые МГД-уравнения, включающие уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_{e,i}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{e,i} \mathbf{u}_{e,i}) = 0, \quad (107)$$

уравнения движения электронов и ионов

$$n_e m_e \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_e = -n_e e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} \right) - \nabla P_e + \mathbf{F}_{Qe}, \quad (108)$$

$$n_i m_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i = Z_i e n_i \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} \right) \quad (109)$$

соответственно, закон Фарадея

$$c \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (110)$$

уравнение Максвелла со спиновым током намагничивания

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left( \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_m \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (111)$$

причём давление нерелятивистских вырожденных электронов [206]

$$P_e = \frac{4eB(2m_e)^{1/2} E_F^{3/2}}{3(2\pi)^2 \hbar^2 c} \left[ 1 + 2 \sum_{n_L=1}^{n_{\max}} \left( 1 - \frac{n_L \hbar \omega_{ce}}{E_F} \right)^{3/2} \right], \quad (112)$$

где  $n_L = 0, 1, 2, \dots, n_{\max}$  и величина  $n_{\max}$  зафиксирована максимальным целым  $n_L$ , которое удовлетворяет  $E_F - n_L \hbar \omega_{ce} \geq 0$ .

Сумма квантовой силы Бома и силы собственного момента импульса спина равна

$$\mathbf{F}_{Qe} = \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}} \right) - \frac{n_e \mu_B^2}{k_B T_{Fe}} \nabla B. \quad (113)$$

В уравнениях (107)–(113),  $n_j$  — концентрация частиц сорта  $j$  ( $e$  для электронов и  $i$  для ионов),  $\mathbf{u}_j$  — гидродинамическая скорость частиц, и  $B = |\mathbf{B}|$ . Плотность плазменного тока обозначена как  $\mathbf{J}_p = -n_e e \mathbf{u}_e + Z_i n_i e \mathbf{u}_i$  и плотность спинового тока намагничивания электронов как  $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ , где намагничивание для движений, значительно более медленных, чем частота прецессии спина ферми-газа электронов, равно  $\mathbf{M} = (n_e \mu_B^2 / k_B T_{Fe}) \hat{\mathbf{B}}$  [208].

**8.2.1. Нелинейная ЭМГД.** Представим сначала обобщённые нелинейные уравнения ЭМГД плотной магнито-плазмы. Здесь ионы образуют нейтрализующий фон. Волновые явления в ЭМГД плазме происходят на временах, значительно меньших, чем ионный плазменный период и ионный гиропериод. В равновесии имеем

$$n_{e0} = Z_i n_{i0} \equiv n_0. \quad (114)$$

Соответствующие нелинейные уравнения ЭМГД

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad (115)$$

уравнение движения электронов (108), закон Фарадея (110), и уравнение для скорости электронной жидкости

$$\mathbf{u}_e = \frac{\mathbf{J}_m}{en_e} - \frac{c(\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi en_e} + \frac{1}{en_e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (116)$$

Заметим, что если имеются небольшие неоднородности электронной плотности и магнитного поля в плотной плазме, то квантовое туннелирование и спиновые силы играют важную роль. Нелинейные ЭМГД-уравнения весьма полезны для изучения коллективной динамики

электронов в металлических и полупроводниковых наноструктурах [112].

**8.8.2. Нелинейная холловская МГД.** Во-вторых, выведем уравнения холловской МГД в плотной электрон-ионной плазме. Холловские МГД-уравнения пригодны для описания волновых явлений на временах, больших, чем гиропериод электронов. Соответствующими нелинейными холловскими МГД-уравнениями являются уравнения непрерывности электронов и ионов, уравнение движения безмассовых электронов

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} - \frac{\nabla P_e}{n_e e} - \frac{\mathbf{F}_{Qe}}{n_e e} = 0, \quad (117)$$

закон Фарадея (110), уравнение движения ионов

$$n_i m_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i = Z_i e n_i \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_i \times \mathbf{B} \right), \quad (118)$$

и уравнение для скорости электронной жидкости

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i + \frac{\mathbf{J}_m}{en_e} - \frac{c(\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi en_e}, \quad (119)$$

где пренебрегается током смещения, поскольку холловская МГД-плазма имеет дело с электромагнитными волнами, фазовая скорость которых много меньше скорости света в вакууме.

Устраняя электрическое поле из (118) путём использования (117), получаем

$$\begin{aligned} n_i m_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i &= \\ &= Z_i e n_i \left[ \frac{1}{c} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \times \mathbf{B} - \frac{\nabla P_e}{n_e e} + \frac{\mathbf{F}_{Qe}}{n_e e} \right]. \end{aligned} \quad (120)$$

Далее, устраняя  $\mathbf{u}_e$  из (120) путём использования (119), имеем

$$\begin{aligned} n_i m_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i &= Z_i e n_i \left\{ \frac{1}{c} \left[ - \frac{\mathbf{J}_m}{en_e} + \frac{c(\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{B} - \frac{\nabla P_e}{n_e e} + \frac{\mathbf{F}_{Qe}}{n_e e} \right\}, \end{aligned} \quad (121)$$

с учётом квазинейтральности  $n_e = Z_i n_i$ .

Используя (117), оказывается возможным устранить  $\mathbf{E}$  из (108), так что окончательно получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[ (\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{J}_m \times \mathbf{B}}{e Z_i n_i} - \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right]. \quad (122)$$

Уравнение непрерывности ионов, уравнения (121) и (122), вместе со (118) и  $Z_i n_{i1} = n_{e1}$ , где  $n_{e1,i1} \ll n_{e0,i0}$ , и есть искомые обобщённые нелинейные уравнения для низкочастотных (по сравнению с гирочастотой электронов) волн с малой фазовой скоростью (по сравнению со скоростью света в вакууме) в холловской МГД-плазме. Они могут использоваться для исследования многомерных линейных и нелинейных волн (например, магнитозвуковых солитонов [209]), а также наноструктур и турбулентности [210] в плотной квантовой магнито-плазме.

### 8.3. Неустойчивости вынужденного рассеяния

Нелинейные взаимодействия высокочастотных ЭМ-волн и низкочастотных электростатических волн вызывают

неустойчивости вынужденного рассеяния в классической плазме [130, 211–213]. В квантовой плазме также существует возможность возбуждения плазменных волн высокочастотными ЭМ-волнами из-за параметрических неустойчивостей [214]. Уравнениями, описывающими высокочастотные ЭМ-волны [64] и управляемые радиационным давлением модифицированные ленгмюровские и ионно-звуковые колебания в немагнитной квантовой плазме, являются

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 + \omega_{\text{pe}}^2 \right) \mathbf{A} + \omega_{\text{pe}}^2 \frac{n_1}{n_0} \mathbf{A} \approx 0, \quad (123)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\text{pe}}^2 - \frac{3}{5} V_{\text{Fe}}^2 \nabla^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} \nabla^4 \right) \frac{n_1}{n_0} = \frac{q_e^2}{2m_e^2 c^2} \nabla^2 |\mathbf{A}|^2 \quad (124)$$

и

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_e}{m_i} V_{\text{Fe}}^2 \nabla^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e m_i} \nabla^4 \right) \frac{n_1}{n_0} = \frac{q_e^2}{2m_e m_i c^2} \nabla^2 |\mathbf{A}|^2 \quad (125)$$

соответственно, где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал высокочастотной электромагнитной волны и  $n_1$  — возмущение электронной плотности низкочастотных колебаний (а именно, модифицированных ЭПК и ионных волн).

Нелинейные дисперсионные соотношения получаются простым образом путём комбинирования уравнений (123)–(125):

$$\omega^2 - \Omega_{\text{R}}^2 = - \frac{q_e^2 \omega_{\text{pe}}^2 k^2 |\mathbf{A}_0|^2}{2m_e^2 c^2} \sum_{\pm} \frac{1}{D_{\pm}}, \quad (126)$$

и

$$\omega^2 - \Omega_{\text{B}}^2 = - \frac{q_e^2 \omega_{\text{pe}}^2 k^2 |\mathbf{A}_0|^2}{2m_e m_i c^2} \sum_{\pm} \frac{1}{D_{\pm}}, \quad (127)$$

где  $\Omega_{\text{R}} = (\omega_{\text{pe}}^2 + 3k^2 V_{\text{Fe}}^2 / 5 + \hbar^2 k^4 / 4m_e^2)^{1/2}$  и  $\Omega_{\text{B}} = (k^2 C_{\text{Fs}}^2 + \hbar^2 k^4 / m_e m_i)^{1/2}$ .

Уравнения (126) и (127) допускают неустойчивости вынужденного рамановского (комбинационного — *примеч. переводчика*) и вынужденного бриллюэновского рассеяний, а также модуляционные неустойчивости электромагнитной волны накачки (с амплитудой  $\mathbf{A}_0$  и частотой  $\omega_0 = (k_0^2 c^2 + \omega_{\text{pe}}^2)^{1/2}$ ) в плотной квантовой плазме. Здесь введено обозначение  $D_{\pm} = \pm 2\omega_0(\omega - \mathbf{k} \mathbf{V}_{\text{g}} \mp \delta)$ , где  $\mathbf{V}_{\text{g}} = c^2 \mathbf{k}_0 / \omega_0$  — групповая скорость ЭМ-волны накачки, и  $\delta = k^2 c^2 / 2\omega_0$  — малый сдвиг частоты, возникающий из-за нелинейного взаимодействия накачки с электростатическими возмущениями  $(\omega, \mathbf{k})$  в рассматриваемой квантовой плазме. При вынужденном рамановском и бриллюэновском рассеянии, ЭМ-волна накачки рассеивается на резонансных электронной плазменной волне и ионной волне соответственно, в то время как при модуляционной неустойчивости электронные и ионные плазменные колебания не находятся в резонансе, так же как и боковые частоты ЭМ-волны накачки.

Для трёхволновых взаимодействий полагаем, что  $D_- = 0$  и  $D_+ \neq 0$ . Таким образом, в (126) и (127) пренебрегается  $D_+$ . Полагая  $\omega = \Omega_{\text{R}} + i\gamma_{\text{R}}$  и  $\omega = \Omega_{\text{B}} + i\gamma_{\text{B}}$  в (126) и (127) соответственно, а также полагая  $\omega - \mathbf{k} \mathbf{V}_{\text{g}} + \delta \equiv i\gamma_{\text{R,B}}$ , получаем инкременты неустойчивостей вынужденного рамановского и бриллюэновского рассея-

ния (обозначенных соответственно индексами R и B):

$$\gamma_{\text{R}} = \frac{\omega_{\text{pe}} e k |\mathbf{A}_0|^2}{2\sqrt{2}\omega_0 \Omega_{\text{R}} m_e c} \quad (128)$$

и

$$\gamma_{\text{B}} = \frac{\omega_{\text{pe}} e k |\mathbf{A}_0|^2}{2\sqrt{2}\omega_0 \Omega_{\text{B}} m_e m_i c}, \quad (129)$$

где  $|\mathbf{k} \mathbf{V}_{\text{g}} - \delta| \sim \Omega_{\text{R}}, \Omega_{\text{B}}$ . Заметим, что инкременты неустойчивостей рамановского и бриллюэновского рассеяния обратно пропорциональны квадратному корню из  $\Omega_{\text{R}}$  и  $\Omega_{\text{B}}$ , которые зависят от квантовых параметров. Неустойчивости вынужденного рамановского и бриллюэновского рассеяния ЭМ-волны на ЭС-волнах предоставляют неоценимую информацию о флуктуациях плотности и уравнении состояния, которые могут быть в квантовой плазме.

Трёхмерные уравнения Захарова [127] с квантовыми поправками были получены Хаасом [215] и Хаасом и Шукла [216], которые продемонстрировали, что дисперсионные эффекты, связанные с квантовыми поправками, могут предотвратить коллапс огибающих локализованных ленгмюровских электрических полей как в случае двух, так и в случае трёх пространственных измерений.

#### 8.4. Автолокализованные ЭМ волны в квантовой дырке

Нелинейные взаимодействия между сильными электромагнитными волнами и электростатическими плазменными волнами могут порождать нелинейные наноструктуры, состоящие из разрежений плотности, которые захватывают огибающие электромагнитных волн. Продемонстрируем здесь захват интенсивных электромагнитных волн в дырку плотности конечной амплитуды [65], возникающую на масштабе порядка толщины скин-слоя  $c/\omega_{\text{pe}}$ .

Мощная электромагнитная плоская волна с круговой поляризацией (ЭМКП), взаимодействующая нелинейно с ЭПК, генерирует огибающую ЭМКП векторного потенциала  $\mathbf{A}_{\perp} = A_{\perp}(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z)$ , которая подчиняется нелинейному уравнению Шрёдингера [178]

$$2i\Omega_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_{\text{g}} \frac{\partial}{\partial z} \right) A_{\perp} + \frac{\partial^2 A_{\perp}}{\partial z^2} - \left( \frac{|\psi|^2}{\gamma} - 1 \right) A_{\perp} = 0, \quad (130)$$

где волновая функция электрона  $\psi$  и скалярный потенциал описываются уравнениями

$$iH_e \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{H_e^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (\phi - \gamma + 1) \psi = 0 \quad (131)$$

и

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = |\psi|^2 - 1, \quad (132)$$

причём электронная концентрация определяется членом  $|\psi|^2$ . Здесь  $\Omega_0$  — частота ЭМПК-волны,  $V_{\text{g}}$  —  $x$ -компонента групповой скорости ЭМПК-волны,  $H_e$  — квантовый параметр связи, а  $\gamma = (1 + |A_{\perp}|^2)^{1/2}$  — плазменный релятивистский фактор из-за вибрационного движения электрона в поле ЭМПК-волны. Детали нормировки переменных даны в работе [65]. Нелинейная связь между интенсивными ЭМПК-волнами и ЭПК обусловлена

плотностью нелинейного тока, описываемого членом  $|\psi|^2 A_{\perp}/\gamma$  уравнения (130). В уравнении (131),  $1 - \gamma$  — релятивистский пондеромоторный потенциал [178], появляющийся из-за перекрёстной связи между индуцированной ЭМПК-волной скоростью вибрации электронов и магнитным полем ЭМПК-волны.

Влияние квантовой дисперсии на локализованные электромагнитные пульсации исследуется путём рассмотрения установившейся структуры, движущейся с постоянной скоростью  $V_g$ . Подставляя  $A_{\perp} = W(\xi) \times \exp(-i\Omega t)$ ,  $\psi = P(\xi) \exp(ikx - i\omega t)$  и  $\phi = \phi(\xi)$  в уравнения (130)–(132), где  $\xi = z - V_g t$ ,  $k = V_g/H_e$  и  $\omega = V_g^2/2H_e$  и где  $W(\xi)$  и  $P(\xi)$  действительны, получаем из (130)–(132) систему связанных уравнений

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \left( \lambda - \frac{P^2}{\gamma} + 1 \right) W = 0, \quad (133)$$

$$\frac{H_e^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + (\phi - \gamma + 1) P = 0, \quad (134)$$

где  $\gamma = (1 + W^2)^{1/2}$  и

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = P^2 - 1 \quad (135)$$

с граничными условиями  $W = \phi = 0$  и  $P^2 = 1$  при  $|\xi| = \infty$ . В уравнении (133)  $\lambda = 2\Omega_0\Omega$  представляет собой нелинейный сдвиг частоты ЭМПК-волны. В пределе  $H_e \rightarrow 0$  имеем из (134)  $\phi = \gamma - 1$ , где  $P \neq 0$ , и таким образом восстанавливается классический (неквантовый) случай релятивистской уединённой волны в холодной плазме [217]. Система уравнений (133)–(135) допускает гамильтониан

$$\begin{aligned} Q_H = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{H_e^2}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\lambda + 1) W^2 + P^2 - \gamma P^2 + \phi P^2 - \phi = 0, \quad (136) \end{aligned}$$

где использованы граничные условия  $\partial/\partial \xi = 0$ ,  $W = \phi = 0$  и  $|P| = 1$  при  $|\xi| = \infty$ .

Численные решения квазистационарной системы (133)–(135) представлены на рис. 17 и 18, в то время как зависящие от времени решения уравнений (130)–(132) показаны на рис. 19 и 20. При этом использованы параметры, характерные для схем лазерного сжатия плазмы (ЛСП) следующего поколения [13, 14, 81]. Формула [178]  $eA_{\perp}/mc^2 = 6 \times 10^{-10} \lambda_s \sqrt{I}$  определяет нормированный векторный потенциал при условии, что известны длина ЭМПК-волны  $\lambda_s$  (в микронах) и интенсивность  $I$  (в Вт см<sup>-2</sup>). Ожидается, что в схемах ЛСП концентрации электронов  $n_0$  может достигать значений  $10^{27}$  см<sup>-3</sup> и выше, и пиковые значения  $eA_{\perp}/mc^2$  могут быть в промежутке 1–2 (например, для сфокусированных ЭМ импульсов с  $\lambda_s \sim 0,15$  нм и  $I \sim 5 \times 10^{27}$  Вт см<sup>-2</sup>). При  $\omega_{pe} = 1,76 \times 10^{18}$  с<sup>-1</sup>, имеем  $\hbar\omega_{pe} = 1,76 \times 10^{-9}$  эрг и  $H_e = 0,002$ , поскольку  $mc^2 = 8,1 \times 10^{-7}$  эрг. Толщина электронного скин-слоя  $\lambda_e \sim 1,7$  Å. С другой стороны, более высокие значения  $H_e = 0,007$  достигаются при  $\omega_{pe} = 5,64 \times 10^{18}$  с<sup>-1</sup>. Таким образом, представленные численные решения, основывающиеся на двух значениях  $H_e$ , соответствуют сценариям экспериментов следующего поколения по взаимодействию мощных лазерных пучков с плотной плазмой [81].

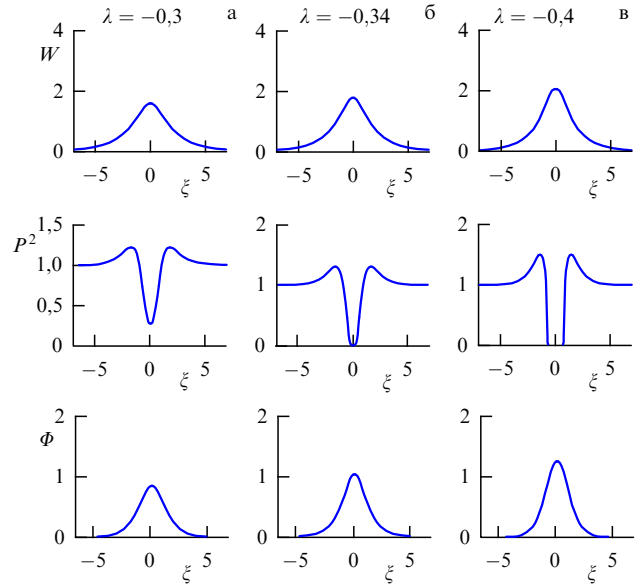


Рис. 17. Профили векторного потенциала ЭМПК-волны  $W$  (верхний ряд), концентрации электронов (средний ряд) и скалярного потенциала (нижний ряд) при  $\lambda = -0,3$  (левая колонка),  $\lambda = -0,34$  (средняя колонка) и  $\lambda = -0,4$  (правая колонка), с  $H_e = 0,002$ . Согласно работе [65].

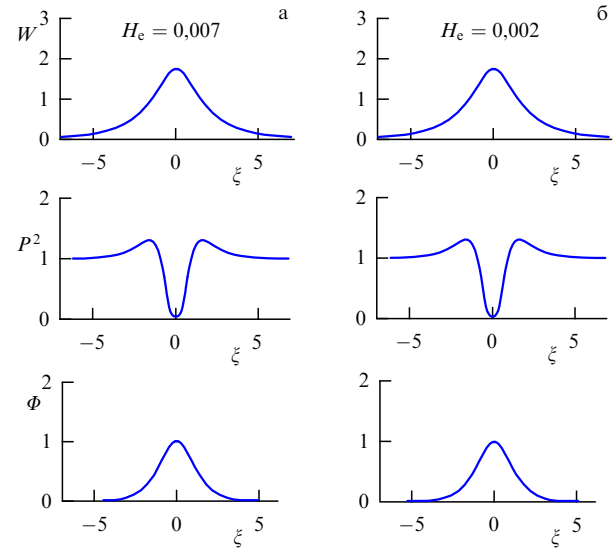


Рис. 18. Профили векторного потенциала ЭМПК волны  $W$  (верхний ряд), концентрации электронов  $P^2$  (средний ряд) и скалярного потенциала  $\Phi$  (нижний ряд) при  $H_e = 0,007$  (левая колонка) и  $H_e = 0,002$  (правая колонка), с  $\lambda = -0,34$ . Согласно работе [65].

На рисунках 17 и 18 показаны численные решения уравнений (133)–(135) при разных значениях  $H_e$ . Нелинейная граничная задача решалась с условиями  $W = \phi = 0$  и  $P = 1$  на границах при  $\xi = \pm 10$ . Видно, что огибающая солитона представляет собой уединённый максимум локализованного векторного потенциала  $W$  с локальным разрежением плотности электронов  $P^2$  и локализованным положительным потенциалом  $\phi$  в центре солитона. Последний обладает непрерывным спектром по  $\lambda$ , где большие значения отрицательного  $\lambda$  связаны с уединённым ЭМ-импульсом большей амплитуды. В центре ЭМ-солитона электронная плотность

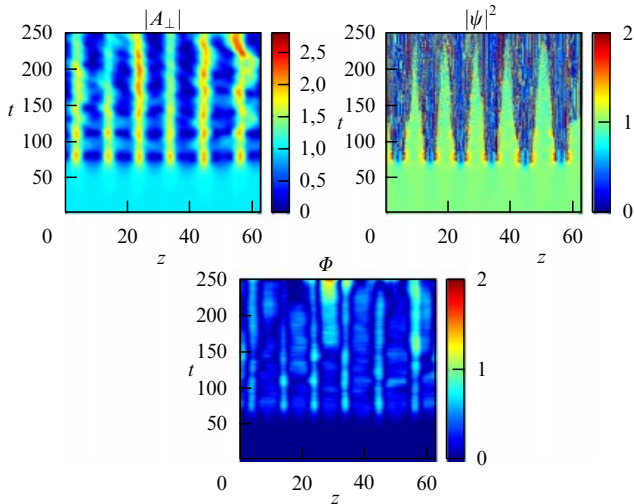


Рис. 19. Динамика векторного потенциала ЭМПК волны  $A_{\perp}$  и концентрации электронов  $|\psi|^2$  (вверху) и электростатического потенциала  $\Phi$  (внизу) при  $H_e = 0,002$ . Согласно работе [65].

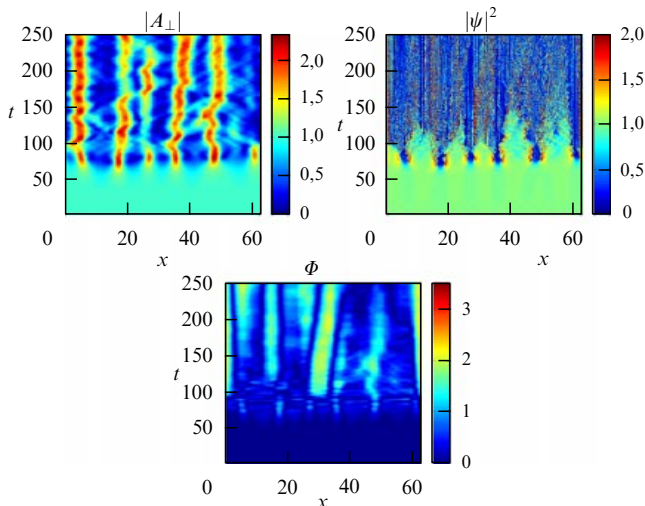


Рис. 20. Динамика векторного потенциала ЭМПК волны  $A_{\perp}$  и концентрации электронов  $|\psi|^2$  (вверху) и электростатического потенциала  $\Phi$  (внизу) при  $H_e = 0,007$ . Согласно работе [65].

частично разрежена (рис. 17а), причём при больших амплитудах ЭМ-волн имеется более сильное разрежение электронной плотности (рис. 17б, в). Когда плотность электронов приближается к нулю в классическом случае [217], важным квантовым эффектом является туннелирование электронов в область разрежения плотности. Это видно на рис. 18, где плотность электронов остаётся ненулевой для больших значений  $H_e$  (рис. 18а), в то время как плотность стремится к нулю при меньших значениях  $H_e$  (рис. 18б).

На рисунках 19 и 20 представлены результаты численного моделирования уравнений (130)–(132), проведенного с целью исследования влияния квантовой дифракции на динамику локализованных пакетов ЭМПК-волн. Здесь рассматривался длинноволновый предел  $\omega_0 \approx 1$  и  $V_g \approx 0$ . В качестве начальных условий бралась ЭМ-волна накачки с постоянной амплитудой  $A_{\perp} = A_0 = 1$  и постоянная плотность плазмы  $\psi = 1$ , наряду с шумом малой амплитуды (случайные числа) порядка  $10^{-2}$ , добавленного к  $A_{\perp}$  для затравки неустойчивости.

Численные результаты показаны на рис. 19 и 20 при  $H_e = 0,002$  и  $H_e = 0,007$  соответственно. В обоих случаях можно видеть фазу начального линейного роста и коллапс волн при  $t \approx 70$ , когда практически вся энергия ЭМПК-волны заключена в нескольких хорошо разделённых локализованных волновых трубках. Они характеризуются большой амплитудой колоколообразной формы ЭМПК-волны, практически полным разрежением электронной концентрации в центре волнового пакета, и положительным электростатическим потенциалом большой амплитуды. Из сравнения рис. 19 с рис. 20 видно, что более сложная динамика взаимодействия между пакетами ЭМПК-волн имеет место при больших  $H_e = 0,007$  (рис. 20) по сравнению со значением  $H_e = 0,002$  (рис. 19), когда волновые пакеты практически стационарны.

## 9. Выводы и перспективы

В настоящей работе представлено современное состояние теории нелинейной физики нерелятивистской квантовой плазмы. Мы начали с нелинейных квантовых моделей, которые описывают локализованные возбуждения в различных областях физики. Далее, мы приступили к обсуждению хорошо известных спектров электронных и ионных плазменных волн в плотной квантовой плазме и представили нелинейные модели для описания нелинейных взаимодействий плазменных волн большой амплитуды на наномасштабах. В качестве примера было продемонстрировано существование локализованных ЭПК и локализованных ионных волн в плотной квантовой плазме. В электростатических ЭПК, динамика электронов описывается системой, состоящей из нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения Пуассона (система НУШ–Пуассон). Подчеркнём, что нелинейное уравнение Шрёдингера, управляющее пространственно-временной эволюцией волновой функции электронов в присутствии самосогласованного электростатического потенциала в плотной плазме, было получено из квантового уравнения движения электронов в эйкональном представлении и даёт математический аппарат, удобный для понимания сложных взаимодействий электронных плазменных волн на наномасштабах. Подобное описание также появляется в контексте исследований нелинейной динамики электронов в тонких металлических плёнках [112]. Система НУШ–Пуассон допускает ряд сохраняющихся величин, таких как полное число электронов, импульс электронов, момент импульса и энергия электронов. Было получено, что уравнения НУШ–Пуассон допускают существование квазистационарных локализованных структур в виде одномерных квантованных тёмных солитонов и двумерных квантованных вихрей. Эти наноструктуры связаны с локальными разрежениями плотности электронов, ассоциированными с положительным электростатическим потенциалом, и параметризованы только квантовым параметром связи. В двумерной геометрии существует класс вихрей различных возбужденных состояний (зарядовых состояний), связанных с полным разрежением электронной плотности и ассоциированным положительным потенциалом. Численное моделирование зависящих от времени уравнений НУШ–Пуассон демонстрирует устойчивость тёмных одномерных солитонов с амплитудой, соответствующей амплитуде не зависящих от времени решений. В двух измерениях, тёмные солитоны первого возбуж-

дённому состоянию устойчивы, и предпочтительным являлось нелинейное состояние в виде пары вихрей с разной полярностью. Одномерные тёмные солитоны и однозарядные двумерные вихри являются, таким образом, долгоживущими нелинейными структурами в квантовой плазме.

По аналогии с модами Бернштейна–Грина–Крускала [164] учитывался захват электронов электростатическим потенциалом волны и были численно продемонстрированы как деформация равновесной функции распределения Ферми–Дирака, так и последующее появление локализованных кинетических структур в фазовом пространстве. Исследование проводилось на основе зависящего от времени уравнения Вигнера и уравнения Пуассона. Далее были представлены два механизма генерации магнитных полей в квантовой плазме, связанных с квантовой вейбелевской неустойчивостью в присутствии равновесной анизотропной функции распределения Ферми–Дирака, а также с нестационарной поперечной силой электромагнитных волн большой амплитуды в квантовой плазме с потоком электронов. Спонтанно возбуждённые магнитные поля могут влиять на линейное и нелинейное распространение как электростатических, так и электромагнитных волн в квантовой магнитоплазме [39]. Квантовые поправки задают дисперсию на коротких масштабах для электростатических верхнегибридных, нижнегибридных и ионно-циклотронных волн, в то время как квантовая сила Бома и эффекты, связанные со спином электронов, приводят к новым свойствам у эллиптически поляризованной необыкновенной электромагнитной моды [40]. Более того, спин электрона ответствен за новую, распространяющуюся перпендикулярно (по отношению к направлению магнитного поля) электромагнитную волну спина, которая может возбуждаться мощными нейтринными вспышками в сверхновых. По-новому выведенные нелинейные ЭМГД и холловские МГД-уравнения могут использоваться для исследования многомерных линейных и нелинейных электромагнитных волн в квантовой плазме. Наконец, также представлены теоретические и численные исследования неустойчивостей вынужденного рамановского и бриллюэновского рассеяния электромагнитной волны большой амплитуды и захват циркулярно-поляризованной ЭМ-волны произвольно большой амплитуды в полностью нелинейную дырку электронной плотности в немагнитной квантовой плазме. Ожидается, что локализованные наноструктуры могут переносить энергию электромагнитной волны на наномасштабах в лабораторной и астрофизической плотной плазме с вырожденными электронами.

Активно исследуемая в настоящее время область нелинейной физики квантовой плазмы оказывается чрезвычайно богатой и многообещающей для обеспечения новых технологий. Например, углеродные наноструктуры и наноматериалы с наличием плазмы являются будущим нанотехнологий, так же как и новые источники излучения рентгеновских и гамма-лучей. В подобных обстоятельствах необходимо полное понимание основ коллективных нелинейных взаимодействий (например, интенсивной генерации высших гармоник ультракоротких лазерных импульсов из облучаемой лазером поверхности плотной плазмы) в квантовой плазме. Кроме того, помимо вырожденных электронов, несомненно, имеются ещё и вырожденные позитроны в магнитарах и экспери-

ментах следующего поколения по взаимодействию мощных лазеров с плазмой высокой плотности. Ожидается, что физика плотной квантовой магнитоплазмы с вырожденными электрон-позитронными парами весьма отличается от той, что описана в настоящей работе. Причиной является сложная нелинейная динамика электрон-позитронных пар, которые могут обладать релятивистскими скоростями в плотной магнитоплазме. Соответственно, должны быть развиты новые подходы, которые содержат релятивистские кинетические и квантовые релятивистские МГД-уравнения, равноправно включающие релятивистские эффекты [218–220], электромагнитные силы, спиновые моменты и нелинейные эффекты. Детальный анализ подобных теорий даст общее направление для понимания причин локализованного высокоэнергетического излучения и других сложных явлений (таких, как образование структур) в астрофизических условиях и будущих лабораторных экспериментах по моделированию астрофизических сценариев.

Один из авторов (П.К. Шукла) признателен В.Е. Фортону за полезные обсуждения. Авторы глубоко признательны своим коллегам Л. Стенфлю, Г. Бродину, М. Марклунду, Ф. Хаасу и Н. Шукла за неоценимое плодотворное сотрудничество. Данное исследование было поддержано Deutsche Forschungsgemeinschaft (Бонн, Германия), проект SH21/3-1 Research Unit 1048, и Swedish Research Council (VR).

## 10. Приложения

### 10.1. Вывод уравнения Власова из уравнения Вигнера

Покажем здесь, что уравнение Вигнера сводится к уравнению Власова в классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$ . Уравнение Вигнера выглядит как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{ie m_e^3}{(2\pi)^3 \hbar^4} \iint d^3 \lambda d^3 v' \exp \left[ i \frac{m_e}{\hbar} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \boldsymbol{\lambda} \right] \times \\ \times \left[ \phi \left( \mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}, t \right) - \phi \left( \mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}, t \right) \right] f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t). \quad (137)$$

После замены переменных,  $\boldsymbol{\lambda} = \hbar \boldsymbol{\xi} / m_e$ , имеем  $d^3 \lambda = \hbar^3 d^3 \xi / m_e^3$  и уравнение (137) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{ie}{(2\pi)^3 \hbar} \iint d^3 \xi d^3 v' \exp [i(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \boldsymbol{\xi}] \times \\ \times \left[ \phi \left( \mathbf{x} + \frac{\hbar \boldsymbol{\xi}}{2 m_e}, t \right) - \phi \left( \mathbf{x} - \frac{\hbar \boldsymbol{\xi}}{2 m_e}, t \right) \right] f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t). \quad (138)$$

Предполагая, что  $\hbar / m_e$  мало, раскладываем  $\phi$  по Тейлору до третьего порядка по  $\mathbf{x}$

$$\phi \left( \mathbf{x} \pm \frac{\hbar \boldsymbol{\xi}}{2 m_e}, t \right) \approx \phi(\mathbf{x}, t) \pm \frac{\hbar}{2 m_e} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \phi(\mathbf{x}, t) + \\ + \frac{\hbar^2}{8 m_e^2} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)^2 \phi(\mathbf{x}, t) \pm \frac{\hbar^3}{48 m_e^3} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)^3 \phi(\mathbf{x}, t), \quad (139)$$

имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \approx -\frac{ie}{(2\pi)^3 m_e} \iint d^3 \xi d^3 v' \exp [i(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \boldsymbol{\xi}] \times \\ \times \left[ \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\hbar^2}{24 m_e^2} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)^3 \phi(\mathbf{x}, t) \right] f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t). \quad (140)$$



Согласно тождеству

$$\exp [i(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \xi] \xi = i \nabla_{\mathbf{v}'} \exp [i(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \xi], \quad (141)$$

где  $\nabla_{\mathbf{v}'} = \hat{\mathbf{x}} \partial / \partial v'_x + \hat{\mathbf{y}} \partial / \partial v'_y + \hat{\mathbf{z}} \partial / \partial v'_z$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f &= \frac{e}{(2\pi)^3 m_e} \iint d^3 \xi d^3 v' \left\{ \exp [i(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \xi] \times \right. \\ &\times \left[ (\hat{\nabla}_{\mathbf{v}'} \cdot \hat{\nabla}) - \frac{\hbar^2}{24m_e^2} (\hat{\nabla}_{\mathbf{v}'} \cdot \hat{\nabla})^3 \right] \phi(\mathbf{x}, t) \left. \right\} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t), \end{aligned} \quad (142)$$

где стрелки показывают направление действия операторов  $\nabla$ .

Интегрирование по частям в пространстве  $\mathbf{v}'$ , используя, что  $f \rightarrow 0$  при  $|\mathbf{v}'| \rightarrow \infty$ , даёт

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f &= -\frac{e}{(2\pi)^3 m_e} \iint d^3 \xi d^3 v' \exp [i(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \xi] \times \\ &\times \left\{ \phi(\mathbf{x}, t) \left[ (\hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla}_{\mathbf{v}'} - \frac{\hbar^2}{24m_e^2} (\hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla}_{\mathbf{v}'})^3) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (143)$$

Теперь можно формально провести интегрирование в пространстве  $\xi$ ; в результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f &= -\frac{e}{m_e} \int d^3 v' \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \times \\ &\times \left\{ \phi(\mathbf{x}, t) \left[ (\hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla}_{\mathbf{v}'} - \frac{\hbar^2}{24m_e^2} (\hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla}_{\mathbf{v}'})^3) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (144)$$

где использовалось тождество

$$\int d^3 \xi \exp [i(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \xi] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \quad (145)$$

и где  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Окончательно, интегрирование в пространстве  $\mathbf{v}'$  даёт

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f &= -\frac{e}{m_e} \left\{ \phi(\mathbf{x}, t) \times \right. \\ &\times \left[ (\hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla}_{\mathbf{v}} - \frac{\hbar^2}{24m_e^2} (\hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla}_{\mathbf{v}})^3) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (146)$$

В пределе  $\hbar \rightarrow 0$  получаем уравнение Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{e}{m_e} \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (147)$$

## 10.2. Вывод дисперсионного соотношения для системы Вигнера–Пуассона

Здесь приведён вывод дисперсионного уравнения электростатических волн в вырожденной квантовой плазме, описываемой системой уравнений Вигнера–Пуассона. Линеаризованная система Вигнера–Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 &= -\frac{iem_e^3}{(2\pi)^3 \hbar^4} \iint d^3 \lambda d^3 v' \exp \left[ i \frac{m_e}{\hbar} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \lambda \right] \times \\ &\times \left[ \phi_1 \left( \mathbf{x} + \frac{\lambda}{2}, t \right) - \phi_1 \left( \mathbf{x} - \frac{\lambda}{2}, t \right) \right] f_0(\mathbf{v}'), \end{aligned} \quad (148)$$

и

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi e \int f_1 d^3 v, \quad (149)$$

где  $f_0$  означает невозмущённую функцию распределения, а  $f_1$  и  $\phi_1$  — возмущённую функцию распределения и электростатический потенциал соответственно. Преобразуя по Фурье пространственные переменные и по Лапласу — время, получаем из (148), (149)

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) f_1 &= \frac{em_e^3}{(2\pi)^3 \hbar^4} \iint d^3 \lambda d^3 v' \exp \left[ i \frac{m_e}{\hbar} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \lambda \right] \times \\ &\times \left[ \exp \left( i \frac{\mathbf{k} \lambda}{2} \right) - \exp \left( -i \frac{\mathbf{k} \lambda}{2} \right) \right] f_0(\mathbf{v}') \phi_1(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (150)$$

$$k^2 \phi_1 = -4\pi e \int f_1 d^3 v. \quad (151)$$

Перепишем (150) как

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) f_1 &= \frac{iem_e^3}{(2\pi)^3 \hbar^4} \iint d^3 \lambda d^3 v' \times \\ &\times \left\{ \exp \left[ \frac{m_e}{\hbar} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \lambda + i \mathbf{k} \frac{\lambda}{2} \right] - \right. \\ &\left. - \exp \left[ i \frac{m_e}{\hbar} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \lambda - i \mathbf{k} \frac{\lambda}{2} \right] \right\} f_0(\mathbf{v}') \phi_1(\omega, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (152)$$

и выполним интегрирование по пространству  $\lambda$ . Имеем

$$\begin{aligned} (\omega - \mathbf{v} \mathbf{k}) f_1 &= \frac{em_e^3}{\hbar^4} \int d^3 v' \left\{ \delta \left[ \frac{m_e}{\hbar} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + \frac{\mathbf{k}}{2} \right] - \right. \\ &\left. - \delta \left[ \frac{m_e}{\hbar} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') - \frac{\mathbf{k}}{2} \right] \right\} f_0(\mathbf{v}') \phi_1(\omega, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (153)$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Теперь можно проинтегрировать по пространству  $\mathbf{v}'$ , в результате получим

$$(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) f_1 = \frac{e}{\hbar} \left[ f_0 \left( \mathbf{v} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2m_e} \right) - f_0 \left( \mathbf{v} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2m_e} \right) \right] \phi_1(\omega, \mathbf{k}). \quad (154)$$

Решая (154) для  $f_1$  и подставляя результат в (151), получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4\pi e^2 k^2}{\hbar} \times \\ \times \int \left[ \frac{f_0(\mathbf{v} + \hbar \mathbf{k} / 2m_e)}{(-\omega + \mathbf{k} \mathbf{v})} - \frac{f_0(\mathbf{v} - \hbar \mathbf{k} / 2m_e)}{(-\omega + \mathbf{k} \mathbf{v})} \right] d^3 v = 0. \end{aligned} \quad (155)$$

Замена переменных в двух членах даёт

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4\pi e^2 k^2}{\hbar} \int \left[ \frac{1}{[-\omega + \mathbf{k}(\mathbf{u} - \hbar \mathbf{k} / 2m_e)]} - \right. \\ \left. - \frac{1}{[-\omega + \mathbf{k}(\mathbf{u} + \hbar \mathbf{k} / 2m_e)]} \right] f_0(\mathbf{u}) d^3 u = 0, \end{aligned} \quad (156)$$

что может быть переписано как

$$1 - \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \frac{f_0(\mathbf{u})}{(\omega - \mathbf{k} \mathbf{u})^2 - \hbar^2 k^4 / 4m_e^2} d^3 u = 0. \quad (157)$$

Дисперсионное соотношение (157) было также получено Бомом и Пайнсом [3] путём использования ряда канонических преобразований гамильтониана системы, см., например, уравнение (57) их статьи. Выберем теперь

систему координат такую, что ось  $x$  направлена по волновому вектору. Тогда (157) примет вид

$$1 - \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \frac{f_0(\mathbf{u})}{(\omega - ku_x)^2 - \hbar^2 k^4 / 4m_e^2} d^3u = 0. \quad (158)$$

Далее рассмотрим плотную плазму с вырожденными электронами в пределе нулевой температуры. Невозмущённая функция распределения принимает тогда простой вид

$$f_0 = \begin{cases} 2 \left( \frac{m_e}{2\pi\hbar} \right)^3, & |\mathbf{u}| \leq V_{Fe}, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (159)$$

где  $V_{Fe} = (2E_{Fe}/m_e)^{1/2}$  — скорость электронов на поверхности Ферми и  $E_{Fe} = (3\pi^2 n_0)^{2/3} \hbar^2 / (2m_e)$  — энергия Ферми. Интегрирование в (158) может быть проведено по пространству скоростей, перпендикулярных  $u_x$ , используя цилиндрические координаты в  $u_y$  и  $u_z$ . В результате получаем

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \frac{F_0(u_x)}{(\omega - ku_x)^2 - (\hbar^2 k^4) / 4m_e^2} du_x, \quad (160)$$

где

$$F_0(u_x) = \iint f_0(\mathbf{u}) du_y du_z = 2\pi \int_0^{\sqrt{V_{Fe}^2 - u_x^2}} 2 \left( \frac{m_e}{2\pi\hbar} \right)^3 u_{\perp} du_{\perp} = \begin{cases} 2\pi \left( \frac{m_e}{2\pi\hbar} \right)^3 (V_{Fe}^2 - u_x^2), & |u_x| \leq V_{Fe}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (161)$$

Уравнение (160) может быть записано как

$$1 = \frac{8\pi^2 e^2}{m_e} \left( \frac{m_e}{2\pi\hbar} \right)^3 \int_{-V_{Fe}}^{V_{Fe}} \frac{V_{Fe}^2 - u_x^2}{(\omega - ku_x)^2 - (\hbar^2 k^4) / 4m_e^2} du_x = \frac{3\omega_{pe}^2}{4V_{Fe}^3} \int_{-V_{Fe}}^{V_{Fe}} \frac{V_{Fe}^2 - u_x^2}{(\omega - ku_x)^2 - (\hbar^2 k^4) / 4m_e^2} du_x. \quad (162)$$

Во-первых, в пределе  $\hbar k / m_e \rightarrow 0$  имеем из (162)

$$1 + \frac{3\omega_{pe}^2}{k^2 V_{Fe}^2} \left( 1 - \frac{\omega}{2kV_{Fe}} \log \left| \frac{\omega + kV_{Fe}}{\omega - kV_{Fe}} \right| \right) = 0, \quad (163)$$

где предполагается, что  $\omega$  действительна и  $\omega/k > V_{Fe}$ .

Раскладывая (163) по малым волновым числам до членов, содержащих  $k^2$ , получаем

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{5} k^2 V_{Fe}^2. \quad (164)$$

Во-вторых, при ненулевом  $\hbar k^2 / m_e$  имеем из (162) дисперсионное соотношение

$$1 + \frac{3\omega_{pe}^2}{4k^2 V_{Fe}^2} \left\{ 2 - \frac{m_e}{\hbar k V_{Fe}} \left[ V_{Fe}^2 - \left( \frac{\omega}{k} + \frac{\hbar k}{2m_e} \right)^2 \right] \times \log \left| \frac{\omega/k - V_{Fe} + (\hbar k)/2m_e}{\omega/k + V_{Fe} + (\hbar k)/2m_e} \right| + \frac{m_e}{\hbar k V_{Fe}} \times \left[ V_{Fe}^2 - \left( \frac{\omega}{k} - \frac{\hbar k}{2m_e} \right)^2 \right] \log \left| \frac{\omega/k - V_{Fe} - (\hbar k)/2m_e}{\omega/k + V_{Fe} - (\hbar k)/2m_e} \right| \right\} = 0. \quad (165)$$

Раскладывая (165) по малым волновым числам до членов, содержащих  $k^4$ , получаем

$$\omega^2 \approx \omega_{pe}^2 + \frac{3}{5} k^2 V_{Fe}^2 + (1 + \alpha) \frac{\hbar^2 k^4}{4m_e^2}, \quad (166)$$

где  $\alpha = (48/175) m_e^2 V_{Fe}^4 / \hbar^2 \omega_{pe}^2 \approx 2,000 (n_0 a_0^3)^{1/3}$  и  $a_0 = \hbar^2 / m_e e^2 \approx 53 \times 10^{-10}$  см — радиус Бора. Для типичных металлов (например, золота), в которых концентрация свободных электронов  $n_0 = 5,9 \times 10^{22}$  см<sup>-3</sup>, имеем  $\alpha \approx 0,4$ . Для значений концентраций свободных электронов в полупроводниках, которые на много порядков меньше концентраций в металлах, величина  $\alpha$  становится существенно меньше и может быть опущена по сравнению с единицей.

## Список литературы

1. Климонтович Ю Л, Силян В П *ДАН СССР* **82** 361 (1952); *ЖЭТФ* **23** 151 (1952)
2. Bohm D *Phys. Rev.* **85** 166 (1952)
3. Bohm D, Pines D *Phys. Rev.* **92** 609 (1953)
4. Pines D *J. Nucl. Energy Pt. C Plasma Phys.* **2** 5 (1961)
5. Bohm D, Pines D, in *Plasma Physics* (Ed. J E Drummond) (New York: McGraw-Hill, 1961) Ch. 2, p. 35
6. Bonitz M et al. *J. Phys. A Math. Gen.* **36** 5921 (2003)
7. Manfredi G *Fields Inst. Commun.* **46** 263 (2005)
8. Bransden B H, Joachain C J *Quantum Mechanics* 2nd ed. (Harlow: Prentice Hall, 2000)
9. Fortov V E, Iakubov I T *The Physics of Non-Ideal Plasma* (Singapore: World Scientific, 2000)
10. Lee T D *Astrophys. J.* **111** 625 (1950)
11. Hubbard W B *Astrophys. J.* **146** 858 (1966)
12. Lampe M *Phys. Rev.* **170** 306 (1968)
13. Azechi H et al. *Laser Part. Beams* **9** 193 (1991)
14. Azechi H et al. (the FIREX Project) *Plasma Phys. Control. Fusion* **48** B267 (2006)
15. Son S, Fisch N J *Phys. Rev. Lett.* **95** 225002 (2005)
16. Wigner E *Phys. Rev.* **40** 749 (1932)
17. Moyal J E *Proc. Camb. Philos. Soc.* **45** 99 (1949)
18. Anderson D et al. *Phys. Rev. E* **65** 046417 (2002)
19. Tsintsadze N L, Tsintsadze L N, arXiv:0903.5368
20. Gardner C L, Ringhofer C *Phys. Rev. E* **53** 157 (1996)
21. Manfredi G, Haas F *Phys. Rev. B* **64** 075316 (2001)
22. Shukla P K, Eliasson B *Phys. Rev. Lett.* **96** 245001 (2006)
23. Shukla P K *Phys. Lett. A* **352** 242 (2006)
24. Shukla P K, Eliasson B *New J. Phys.* **9** 98 (2007)
25. Maafa N *Phys. Scripta* **48** 351 (1993)
26. Melro D B *Quantum Plasmadynamics: Unmagnetized Plasmas* (New York: Springer, 2008)
27. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979) [Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1981)]
28. Nozieres P, Pines D *The Theory of Quantum Liquids* (Cambridge: Perseus Books, 1999) p. 279
29. Kremp D et al. *Phys. Rev. E* **60** 4725 (1999)
30. Bonitz M *Quantum Kinetic Theory* (Stuttgart: B-G-Teubner, 1998)
31. Kremp D, Schlages M, Kraeft W-D *Quantum Statistics of Nonideal Plasmas* (Berlin: Springer, 2005)
32. Uhlenbeck G E, Goudsmit S *Naturwissenschaften* **47** 953 (1925); *Nature* **117** 264 (1926)
33. Bohm D *Quantum Theory* (New York: Prentice-Hall, 1951)
34. Sasabe S and Tsuchiya K *Phys. Lett. A* **372** 381 (2008)
35. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* 3rd ed. (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
36. Steinberg M *Thermodynamics and Kinetics of a Magnetized Quantum Plasma* (Berlin: Logos, 2000)
37. John P *Contrib. Plasma Phys.* **33** 488 (2006)
38. Shukla P K, Stenflo L J. *Plasma Phys.* **72** 605 (2006)
39. Shukla P K et al. *Phys. Plasmas* **13** 112111 (2006)
40. Shukla P K *Phys. Lett. A* **369** 312 (2007)
41. Lundin J et al. *Phys. Plasmas* **14** 062112 (2007)
42. Misra A P *Phys. Plasmas* **14** 064501 (2007)
43. Khan S A, Saleem H *Phys. Plasmas* **16** 052109 (2009)
44. Madelung E Z. *Phys.* **40** 322 (1927)

45. Takabayasi T *Prog. Theor. Phys.* **8** 143 (1952)
46. Takabayasi T *Prog. Theor. Phys.* **14** 283 (1955)
47. Takabayasi T *Prog. Theor. Phys.* **70** 1 (1983)
48. Bohm D, Schiller R, Tiomno J *Suppl. Nuovo Cimento* **1** 48 (1955)
49. Bohm D, Schiller R *Suppl. Nuovo Cimento* **1** 67 (1955)
50. Janossy L, Ziegler-Naray M *Acta Phys. Hung.* **20** 23 (1965)
51. Ghosh S K, Deb B M *Phys. Rep.* **92** 1 (1982)
52. Takabayasi T *Prog. Theor. Phys.* **9** 187 (1953)
53. Takabayasi T *Prog. Theor. Phys.* **13** 222 (1955)
54. Takabayasi T *Nuovo Cimento* **3** 233 (1956)
55. Takabayasi T *Prog. Theor. Phys. Suppl.* (4) 2 (1957)
56. Bialynicki-Birula I *Acta Phys. Polonica B* **26** 1201 (1995)
57. Gardner C L *SIAM J. Appl. Math.* **54** 409 (1994)
58. Loffredo M I, Morato L M *Nuovo Cimento B* **108** 205 (1993)
59. Feynman R P *Statistical Mechanics; A Set of Lectures* (Reading, Mass.: W.A. Benjamin, 1972) [Фейнман Р *Статистическая механика* (М.: Мир, 1978)]
60. Dompas A, Reinhard P-G, Suraud E *Phys. Rev. Lett.* **80** 5520 (1998)
61. Haas F, Garcia L G, Goedert J, Manfredi G *Phys. Plasmas* **10** 3858 (2003)
62. Eliasson B, Shukla P K *J. Plasma Phys.* **74** 581 (2008)
63. Haas F *Phys. Plasmas* **12** 062117 (2005)
64. Shukla P K, Stenflo L *Phys. Plasmas* **13** 044505 (2006)
65. Shukla P K, Eliasson B *Phys. Rev. Lett.* **99** 096401 (2007)
66. Shaikh D, Shukla P K *Phys. Rev. Lett.* **99** 125002 (2007)
67. Shaikh D, Shukla P K *New J. Phys.* **10** 083007 (2008)
68. Bershadskii A *Phys. Lett. A* **372** 2741 (2008)
69. Eliasson B, Shukla P K *Phys. Scr.* **78** 025503 (2008)
70. Oraevsky V N, Semikoz V B *ЯФ* **66** 494 (2003) [*Phys. At. Nucl.* **66** 466 (2003)]; Oraevsky V N, Semikoz V B, Volokitin A S, hep-ph/0203020
71. Marklund M, Brodin G *Phys. Rev. Lett.* **98** 025001 (2007)
72. Brodin G, Marklund M *Phys. Rev. E* **76** 055403(R) (2007)
73. Shukla P K, Stenflo L *J. Plasma Phys.* **74** 719 (2008)
74. Shukla P K *Nature Phys.* **5** 92 (2009)
75. Oraevsky V N, Semikoz V B *Astropart. Phys.* **18** 261 (2002)
76. Hu S X, Keitel C H *Phys. Rev. Lett.* **83** 4709 (1999)
77. Андреев А В *Письма в ЖЭТФ* **72** 350 (2000) [Andreev A V *JETP Lett.* **72** 238 (2000)]
78. Mourou G A, Tajima T, Bulanov S V *Rev. Mod. Phys.* **78** 309 (2006)
79. Marklund M, Shukla P K *Rev. Mod. Phys.* **78** 591 (2006)
80. Salamin Y A et al. *Phys. Rep.* **427** 41 (2006)
81. Malkin V M, Fisch N J, Wertele J S *Phys. Rev. E* **75** 026404 (2007)
82. Kritcher A L et al. *Science* **322** 69 (2008)
83. Hartemann F V, Siders C W, Barty C P J *Phys. Rev. Lett.* **100** 125001 (2008)
84. Lee H J et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 115001 (2009)
85. Norreys P A et al. *Phys. Plasmas* **16** 041002 (2009)
86. Drake R P *Phys. Plasmas* **16** 055501 (2009)
87. van Horn H M *Science* **252** 384 (1991)
88. Guillot T *Science* **286** 72 (1999)
89. Fortney J J et al. *Phys. Plasmas* **16** 041003 (2009)
90. Mészáros P *High Energy Radiation from Magnetized Neutron Stars* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1992)
91. Beskin V S, Gurevich A V, Istomin Ya N *Physics of the Pulsar Magnetosphere* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
92. Craighead H G *Science* **290** 1532 (2000)
93. Opher M et al. *Phys. Plasmas* **8** 2454 (2001)
94. Shapiro S L, Teukolsky S A *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (Weinheim: Wiley-VCH, 2004)
95. Benvenuto O G, De Vito M A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **362** 891 (2005)
96. Chabrier G, Douchin F, Potekhin A Y *J. Phys. Condens. Matter* **14** 9133 (2002)
97. Chabrier G, Sauma D, Potekhin A Y *J. Phys. A Math. Gen.* **39** 4411 (2006)
98. Lai D *Rev. Mod. Phys.* **73** 629 (2001); Harding A K, Lai D *Rep. Prog. Phys.* **69** 2631 (2006)
99. Lau Y Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 1446 (1991)
100. Ang L K, Kwan T J T, Lau Y Y *Phys. Rev. Lett.* **91** 208303 (2003)
101. Ang L K, Lau Y Y, Kwan T J T *IEEE Trans. Plasma Sci.* **32** 410 (2004)
102. Ang L K et al. *Phys. Plasmas* **13** 056701 (2006)
103. Ang L K, Zhang P *Phys. Rev. Lett.* **98** 164802 (2007)
104. Shukla P K, Eliasson B *Phys. Rev. Lett.* **100** 036801 (2008)
105. Шпатаковская Г В *ЖЭТФ* **129** 533 (2006) [Shpatakovskaya G V *JETP* **102** 466 (2006)]
106. Barnes W L, Dereux A, Ebbesen T W *Nature* **424** 824 (2003)
107. Chang D E et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 053002 (2006)
108. Marklund M et al. *Europhys. Lett.* **84** 17006 (2008)
109. Markovich P A et al. *Semiconductor Equation* (Wien: Springer, 1990)
110. Abrahams E, Kravchenko S V, Sarachik M P *Rev. Mod. Phys.* **73** 251 (2001)
111. Magnus W C J, Schoenmaker W J *Quantum Transport in Submicron Devices* (Berlin: Springer, 2002)
112. Crouseilles N, Hervieux P-A, Manfredi G *Phys. Rev. B* **78** 155412 (2008)
113. Becker K H, Schoenbach K H, Eden J G J. *Phys. D* **39** R55 (2006)
114. Serbeto A et al. *Phys. Plasmas* **15** 013110 (2008)
115. Piovella N et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 044801 (2008)
116. Lindl J *Phys. Plasmas* **2** 3933 (1995)
117. Tabak M et al. *Phys. Plasmas* **1** 1626 (1994); **12** 057305 (2005)
118. Glenzer S H et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 065002 (2007)
119. Benney D J, Newell A C J. *Math. Phys. (MIT)* **46** 81 (1967)
120. Benjamin T B *Proc. R. Soc. London A* **299** 59 (1967)
121. Scott A C et al. *Proc. IEEE* **66** 1444 (1973)
122. Hasegawa A, Tappert F *Appl. Phys. Lett.* **23** 142, 171 (1973)
123. Agrawal G P *Nonlinear Fiber Optics* (Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2007)
124. Wan W, Jia S, Fleischer J W *Nature Phys.* **3** 46 (2007)
125. Карпман В И, Крушкаль Е М *ЖЭТФ* **55** 530 (1968) [Karpman V I, Krushkal E M *Sov. Phys. JETP* **28** 277 (1969)]
126. Карпман В И *Plasma Phys.* **13** 477 (1971)
127. Захаров В Е *ЖЭТФ* **62** 1745 (1972) [Zakharov V E *Sov. Phys. JETP* **35** 908 (1972)]
128. Карпман В И *Нелинейные волны в диспергирующих средах* (М.: Наука, 1973) [Karpman V I *Nonlinear Waves in Dispersive Media* (New York: Pergamon, 1975)]
129. Schamel H, Shukla P K *Phys. Rev. Lett.* **36** 968 (1976)
130. Shukla P K *Nature* **274** 874 (1978)
131. Sulem C, Sulem P-L *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse* (New York: Springer, 1999)
132. Fedele R *Phys. Scripta* **65** 502 (2002)
133. Dauxois T, Peyrard M *Physics of Solitons* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006)
134. Barenghi C F, Donnelly R J, Vinen W F (Eds) *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence* (Berlin: Springer, 2001)
135. Bewley G P, Lathrop D P, Sreenivasan K R *Nature* **441** 588 (2006)
136. Bose S N Z. *Phys.* **26** 178 (1924)
137. Einstein A *Sitzungsber. K. Preuß Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.* 261 (1924)
138. Gross E P *Nuovo Cimento* **20** 454 (1961)
139. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **40** 646 (1961) [Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **13** 451 (1961)]
140. Pitaevskii L, Stringari S *Bose-Einstein Condensation* (Oxford: Clarendon Press, 2003)
141. Dalfovo F et al. *Rev. Mod. Phys.* **71** 463 (1999)
142. O'Dell D H J, Giovanazzi S, Eberlein C *Phys. Rev. Lett.* **92** 250401 (2004)
143. Pauli W Z. *Phys.* **32** 111 (1925); *Rev. Mod. Phys.* **13** 203 (1941)
144. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1980) [Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999) p. 123]
145. Brodin G, Marklund M *New J. Phys.* **9** 277 (2007)
146. Dvornikov M, arXiv:0902.4596
147. Kolomeisky E B et al. *Phys. Rev. Lett.* **85** 1146 (2000)
148. Ивонин И А *ЖЭТФ* **112** 2252 (1997) [Ivonin I A *JETP* **85** 1233 (1997)]
149. Ivonin I A, Pavlenko V P, Persson H *Phys. Rev. E* **60** 492 (1999)
150. Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: John Wiley & Sons, 1999)
151. Сагдеев Р З, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 4 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Атомиздат, 1964) с. 20 [Sagdeev R Z, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 4 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1966) p. 23]
152. Sagdeev R Z *Rev. Mod. Phys.* **51** 11 (1979)
153. Shukla P K, Yu M Y *J. Math. Phys.* **19** 2506 (1978); Yu M Y, Shukla P K, Bujarbarua S *Phys. Fluids* **23** 2146 (1980)
154. Gottlieb D, Orszag S A *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications* (Philadelphia: SIAM, 1977)
155. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 301 (1941); **31** 438 (1941) [Kolmogorov A N *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR* **30** 301 (1941); **31** 438 (1941)]
156. Lesieur M *Turbulence in Fluids: Stochastic and Numerical Modelling* 2nd ed. (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990)
157. Frisch U *Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995)

158. Eyink G L, Sreenivasan K R *Rev. Mod. Phys.* **78** 87 (2006)
159. Ирошников П С *Астрон. журн.* **40** 742 (1963) [Iroshnikov P S *Sov. Astron.* **7** 566 (1964)]
160. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **8** 1385 (1965)
161. Larichev V D, McWilliams J C *Phys. Fluids A* **3** 938 (1991)
162. Scott R K *Phys. Rev. E* **75** 046301 (2007)
163. Paoletti M S et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 154501 (2008)
164. Eliasson B, Shukla P K *Phys. Rep.* **422** 225 (2006)
165. Haas F, Eliasson B, Shukla P K, Manfredi G *Phys. Rev. E* **78** 056407 (2008)
166. Krueer W L, Dawson J M, Sudan R N *Phys. Rev. Lett.* **23** 838 (1969)
167. Albrecht-Marc M et al. *Phys. Plasmas* **14** 072704 (2007)
168. Luque A, Schamel H, Fedele R *Phys. Lett. A* **324** 185 (2004)
169. Biermann L Z. *Naturforsch. A* **5** 65 (1950)
170. Weibel E S *Phys. Rev. Lett.* **2** 83 (1959)
171. Gruzinov A *Astrophys. J.* **563** L15 (2001)
172. Schlickeiser R, Shukla P K *Astrophys. J.* **599** L57 (2003)
173. Вашими Х, Карпман В И *ЖЭТФ* **71** 1010 (1976) [Washimi H, Karpman V I *Sov. Phys. JETP* **44** 528 (1976)]
174. Karpman V I, Washimi H J. *Plasma Phys.* **18** 173 (1977)
175. Gradov O M, Stenflo L Z. *Naturforsch. A* **35** 461 (1980)
176. Gradov O M, Stenflo L *Phys. Lett. A* **95** 233 (1983)
177. Shukla P K, Yu M Y *Plasma Phys. Control. Fusion* **26** 841 (1984)
178. Shukla P K et al. *Phys. Rep.* **138** 1 (1986)
179. Tsintsadze L N, Shukla P K *Phys. Lett. A* **187** 67 (1994)
180. Tsintsadze L N, Shukla P K J. *Plasma Phys.* **74** 431 (2008)
181. Haas F *Phys. Plasmas* **15** 022104 (2008)
182. Haas F, Lazar M *Phys. Rev. E* **77** 046404 (2008)
183. Haas F, Shukla P K, Eliasson B J. *Plasma Phys.* **75** 251 (2009)
184. Pines D, Nozières P *The Theory of Quantum Liquids* (New York: W.A. Benjamin, 1966)
185. Lindhard J *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* **28** 1 (1954)
186. Cockayne E, Levine Z H *Phys. Rev. B* **74** 235107 (2006)
187. Wei M S et al. *Phys. Rev. E* **70** 056412 (2004)
188. Estabrook K *Phys. Rev. Lett.* **41** 1808 (1978)
189. Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (New York: Dover Publ., 1972) [Абрамовиц М, Стиган И (Ред.) *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (М.: Наука, 1979)]
190. Lewin L *Polylogarithms and Associated Functions* (New York: North-Holland, 1981)
191. von Roos O *Phys. Rev.* **119** 1174 (1960)
192. Arista N R, Brandt W *Phys. Rev. A* **29** 1471 (1984)
193. Leemans W P et al. *Phys. Rev. A* **46** 1091 (1992)
194. Fried B D, Conte S D *The Plasma Dispersion Function; the Hilbert Transform of the Gaussian* (New York: Academic Press, 1961)
195. Krall N A, Trivelpiece A W *Principles of Plasma Physics* (New York: McGraw-Hill, 1973)
196. Davidson R C et al. *Phys. Fluids* **15** 317 (1972)
197. Eliasson B J. *Comput. Phys.* **225** 1508 (2007)
198. Shukla P K, Shukla N, Stenflo L J. *Plasma Phys.* **75** (2009) (in press)
199. Oberman C, Ron A *Phys. Rev.* **130** 1291 (1963)
200. Kelley D C *Phys. Rev.* **134** A641 (1964)
201. Benford G, Rostoker N *Phys. Rev.* **181** 729 (1969)
202. [Kuzelev M V, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **42** 603 (1999)]
203. Melrose D B, Weise J I *Phys. Plasmas* **9** 4473 (2002)
204. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Физматгиз, 1960) [Ginzburg V L *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma* (New York: Gordon and Breach, 1962)]
205. Абдуллаев А Ш *Физ. плазмы* **14** 365 (1988) [Abdullaev A Sh *Sov. J. Plasma Phys.* **14** 214 (1988)]
206. Eliezer S et al. *Phys. Plasmas* **12** 052115 (2005)
207. Boosé D, Perez A *Phys. Lett. A* **234** 113 (1997)
208. Kittel C *Introduction to Solid State Physics* 7th ed. (New York: Wiley, 1996) Ch. 14 [Киттель Ч *Введение в физику твердого тела* (М.: Наука, 1978)]
209. Marklund M, Eliasson B, Shukla P K *Phys. Rev. E* **76** 067401 (2007)
210. Shaikh D, Shukla P K *Phys. Rev. Lett.* **102** 045004 (2009)
211. Drake J F et al. *Phys. Fluids* **17** 778 (1974)
212. Yu M Y, Spatschek K H, Shukla P K Z. *Naturforsch. A* **29** 1736 (1974)
213. Stenflo L *Phys. Scripta* **T30** 166 (1990)
214. Sagdeev R Z, Galeev A A *Nonlinear Plasma Theory* (New York: Benjamin, 1969)
215. Haas F *Phys. Plasmas* **14** 042309 (2007)
216. Haas F, Shukla P K *Phys. Rev. E* **79** 066402 (2009)
217. Marburger J H, Tooper R H *Phys. Rev. Lett.* **35** 1001 (1975)
218. Hakim R, Heyvaerts J *Phys. Rev. A* **18** 1250 (1978)
219. Шавад А Е *Труды ФИАН* **192** 5 (1988) [Shabad A Y *Polarization of the Vacuum and a Quantum Relativistic Gas in an External Field* (Proc. Lebedev Phys. Inst., Ed. V L Ginzburg) (New York: Nova Sci. Pub. Inc, 1991)]
220. Lamata L et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 253005 (2007)

### Nonlinear aspects of quantum plasma physics

#### P.K. Shukla

*Institut für Theoretische Physik IV, Fakultät für Physik und Astronomie, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany*  
*Scottish Universities Physics Alliance (SUPA), Department of Physics, University of Strathclyde, Glasgow G4 0NG, United Kingdom*  
*Instituto de Plasmas e Fusão Nuclear, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1049-001 Lisboa, Portugal*  
*Department of Physics, Umeå University, SE-90 187 Umeå, Sweden*  
*The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, I-34014 Trieste, Italy*  
*E-mail: profshukla@yahoo.de*

#### B. Eliasson

*The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, I-34014 Trieste, Italy*  
*Email: bengt@tp4.ruhr-uni-bochum.de*

Dense quantum plasmas are ubiquitous in planetary interiors and in compact astrophysical objects (e.g. the interior of white dwarf stars, in magnetars etc.), in semiconductors and micro-mechanical systems, as well as in the next generation intense laser-solid density plasma interaction experiments and in quantum X-ray free-electron lasers. In contrast to classical plasmas, one encounters extremely high plasma number density and low temperature in quantum plasmas. The latter are composed of electrons, positrons and holes, which are degenerate. Positrons (holes) have the same (slightly different) mass as electrons, but opposite charge. The degenerate charged particles (electrons, positrons, holes) follow the Fermi–Dirac statistics. In quantum plasmas, there are new forces associated with (i) quantum statistical electron and positron pressures, (ii) electron and positron tunneling through the Bohm potential, and (iii) electron and positron angular momentum spin. Inclusion of these quantum forces provides possibility of very high-frequency dispersive electrostatic and electromagnetic waves (e.g. in the hard X-ray and gamma rays regimes) having extremely short wavelengths. In this review paper, we present theoretical backgrounds for some important nonlinear aspects of wave-wave and wave-electron interactions in dense quantum plasmas. Specifically, we shall focus on nonlinear electrostatic electron and ion plasma waves, novel aspects of 3D quantum electron fluid turbulence, as well as nonlinearly coupled intense electromagnetic waves and localized plasma wave structures. Also discussed are the phase space kinetic structures and mechanisms that can generate quasi-stationary magnetic fields in dense quantum plasmas. The influence of the external magnetic field and the electron angular momentum spin on the electromagnetic wave dynamics is discussed. Finally, future perspectives of the nonlinear quantum plasma physics are highlighted.

PACS numbers: 05.30.Fk, 52.35.Mw, 52.35.Ra, 52.35.Sb

DOI: 10.3367/UFNr.0180.201001b.0055

Bibliography — 220 references

Received 19 June 2009, revised 26 August 2009

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **180** (1) 55–82 (2010)

*Physics–Uspekhi* **53** (1) (2010)