Сентябрь 2009 г. **Том 179, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Сила, действующая на вещество в электромагнитном поле

В.П. Макаров, А.А. Рухадзе

Настоящая статья, по существу, является продолжением работы В.Л. Гинзбурга, В.А. Угарова [УФН **118** 175 (1976)]. *Показано, что только из уравнений Максвелла макроскопической электродинамики, соответствующих материальных уравнений и уравнений движения вещества* (*уравнений гидродинамики*) *однозначно следуют результаты, приведённые в* § 75 *книги* "*Электродинамика сплошных сред*" *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица* (*М*.: *Наука,* 1982) *и в* § 105 *книги* "*Основы теории электричества*" *И.Е. Тамма* (*М*.: *Наука,* 1989): 1) *сила, действующая на единицу объёма неподвижного вещества, представляется как сумма силы Гельмгольца и силы Абрагама*; 2) *плотность импульса электромагнитного поля есть делённый на* c^2 *вектор Умова – Пойнтинга*; 3) *тензор напряжений, связанный с полем, по виду совпадает с суммой тензора напряжений электростатического поля и тензора напряжений магнитостатического поля. Тем самым доказано, что для тензора энергии-импульса электромагнитного поля в неподвижной среде справедлива симметричная форма тензора Абрагама.*

PACS numbers: **03.30.+p**, 03.50.De, **41.20.–q** DOI: 10.3367/UFNr.0179.200909e.0995

Содержание

1. Введение

Проблема определения силы, действующей на вещество в электромагнитном поле, и связанная с ней проблема определения тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде уже целое столетие обсуждаются в литературе, начиная с первых работ Минковского 1908 года и Абрагама 1909 года. Однако однозначное решение этих проблем до сих пор отсутствует; в частности, до сих пор нет однозначного ответа на вопрос о том, какая из форм тензора энергии-импульса — Минковского или Абрагама — является правильной.

В.П. Макаров. Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 135-02-47, (499) 503-83-94
E-mail: vpmac@ran.gpi.ru
А.А. Рухадзе. Московский университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
Воробьевы горы, 119991 Москва, Российская Федерация
Тел. (499) 135-02-47, (499) 939-14-34
Факс (499) 135-02-47
E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

*Статья поступила 17 октября 2008 г.,
после доработки 25 июня 2009 г.*

В работе [1] предложен последовательный подход к определению силы, действующей на неподвижное изотропное вещество, основанный только на макроскопических уравнениях: уравнениях Максвелла, материальных уравнениях и уравнениях движения вещества (уравнениях гидродинамики). Для вывода выражения для средней силы, действующей на неподвижное вещество в высокочастотном электромагнитном поле, авторы работы [1] рассмотрели стационарно движущуюся среду и только в окончательном выражении перешли к пределу покоящейся среды. Строгий расчёт, проведённый в [1], приводит к следующему результату: в рамках чисто макроскопического подхода не представляется возможным сделать однозначный выбор тензора энергии-импульса электромагнитного поля (хотя авторы [1] отдают предпочтение тензору энергии-импульса в форме Абрагама).

Цель настоящей статьи — показать, что отмеченная в [1] неоднозначность снимается, если в подходе [1] не ограничиваться лишь стационарным движением среды. В результате получается, что единственно корректной формой тензора энергии-импульса является форма Абрагама.

Как и в работе [1], мы рассматриваем изотропное центросимметричное (негиротропное) вещество при пренебрежении дисперсией диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей. Сила $\bar{\mathbf{f}}$, действующая на единицу объёма неподвижного вещества [1], получается обычно (см. [2, § 75], [3, § 105]) из уравнения, которое эквивалентно закону сохранения импульса системы "вещество плюс поле":

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial t}\,, \quad \bar{\sigma}_i' = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial r_j}\,, \tag{1.1}$$

[1] Все величины, относящиеся к неподвижной среде, отмечены чертой сверху.

где $\bar{\sigma}_{ij}$ — тензор напряжений, связанный с электромагнитным полем [2], $\bar{\mathbf{g}}$ — плотность импульса электромагнитного поля в среде. Принимается, что $\bar{\sigma}_{ij}$ совпадает с суммой тензора напряжений электростатического поля и тензора напряжений магнитостатического поля:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji} = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon \bar{E}_i \bar{E}_j - \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \rho\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)\bar{E}^2 \delta_{ij}\right] + \frac{1}{4\pi}\times$$
$$\times\left[\mu \bar{H}_i \bar{H}_j - \frac{1}{2}\left(\mu - \rho\,\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)\bar{H}^2 \delta_{ij}\right], \qquad (1.2)$$

где ρ — плотность вещества.

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений

$$\bar{\mathbf{D}} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}}\,, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mu \bar{\mathbf{H}} \qquad (1.3)$$

следует, что

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}' = \bar{\mathbf{f}}^{\mathrm{G}} + \frac{1}{4\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{B}})\,, \qquad (1.4)$$

где [3]

$$\bar{\mathbf{f}}^{\mathrm{G}} = \frac{1}{8\pi}\left[\nabla\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\,\bar{E}^2 + \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\,\bar{H}^2\right) - (\bar{E}^2 \nabla \varepsilon + \bar{H}^2 \nabla \mu)\right]. \quad (1.5)$$

Принимается также, что плотность импульса поля [4]

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g}^{\mathrm{A}} = \frac{1}{c^2}\,\bar{\mathbf{S}}^{\mathrm{P}} = \frac{1}{4\pi c}\,\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}\,, \qquad (1.6)$$

где $\bar{\mathbf{S}}^{\mathrm{P}}$ — плотность потока энергии поля в покоящейся среде (вектор Умова – Пойнтинга).

Из (1.1), (1.4) и (1.6) находится выражение для силы, действующей на покоящееся вещество в электромагнитном поле:

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}^{\mathrm{G}} + \bar{\mathbf{f}}^{\mathrm{A}}\,, \qquad (1.7)$$

где так называемая сила Абрагама

$$\bar{\mathbf{f}}^{\mathrm{A}} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\,\frac{\partial \bar{\mathbf{S}}^{\mathrm{P}}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}})\,. \qquad (1.8)$$

Отметим ещё раз, что приведённый здесь вывод формулы для силы (1.7), (1.5) и (1.8) существенно опирается на выбор импульса поля в виде (1.6).

2. Подход Гинзбурга – Угарова

В работе [1] предложен подход к нахождению силы, действующей на вещество в электромагнитном поле, который отличается как от обычного подхода, изложенного во введении, так и от подхода в целом ряде других работ, в которых вопрос о силе связывается с вопросом о выборе 4-тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Подход, предложенный в [1], состоит в следующем:

1. "Тензор энергии-импульса в макроскопической электродинамике является величиной в известном смысле вспомогательной. Основными же величинами являются объёмные силы, а также плотность энергии и поток энергии. Именно силы входят в уравнения движения среды и могут, в принципе, быть измерены" [1, с. 175].

2. "Общие соображения", касающиеся выбора импульса поля в виде (1.6), "не бесспорны", и "желательно получить и силы, и другие выражения (плотность энергии, поток энергии, плотность импульса) единым образом на базе уравнений поля" [1, с. 176].

3. Так как — без привлечения формулы (1.6) — для получения силы $\bar{\mathbf{f}}$ уравнения (1.1), т.е. закона сохранения импульса, недостаточно, необходимо ещё уравнение, эквивалентное закону сохранения энергии системы "вещество плюс поле".

4. "При обсуждении закона сохранения энергии естественно обратиться к движущимся средам, поскольку сила, действующая на среду, «работает» только, если скорость среды не равна нулю" [1, с. 176]. Следовательно, если даже конечной целью является нахождение силы $\bar{\mathbf{f}}$, действующей на покоящееся вещество, необходимо, тем не менее, рассматривать движущуюся среду. Это — очень важное положение во всём подходе [1].

5. Если среда движется, то соответствующие материальные уравнения отличаются от простых уравнений (1.3), которые справедливы только для покоящейся среды. С точностью до членов $\sim v/c$, где $\mathbf{v}$ — скорость вещества, связь между полями $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ в неподвижной, лабораторной, системе отсчёта даётся уравнениями Минковского (см. [2, § 76], [3, § 111], [4, § 33], [1, формулы (10), (11), с. 176]):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{H}\,,$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{E}\,. \qquad (2.1)$$

6. Равенство, аналогичное равенству (1.4) и эквивалентное закону сохранения импульса, получается из уравнений Максвелла (уравнения (6) – (9) в [1])

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho^{\mathrm{ext}}\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,,$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{\mathrm{ext}}, \qquad (2.2)$$

где ρ^{ext} — плотность сторонних (по отношению к рассматриваемому веществу) зарядов, $\mathbf{j}^{\mathrm{ext}}$ — плотность создаваемого ими тока. Для этого в выражении для силы, с которой поле действует на сторонние заряды (формула (1) в [1]):

$$\mathbf{f}^{\mathrm{ext}} = \rho^{\mathrm{ext}}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{j}^{\mathrm{ext}} \times \mathbf{B}\,, \qquad (2.3)$$

нужно ρ^{ext} и $\mathbf{j}^{\mathrm{ext}}$ выразить с помощью уравнений (2.2) через поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$. В результате получается уравнение

$$\mathbf{f}^{\mathrm{ext}} + \frac{1}{4\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{H}} - \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^2\,, \quad \sigma_i'^{\mathrm{H}} = \frac{\sigma_{ij}^{\mathrm{H}}}{\partial r_j}\,, \qquad (2.4)$$

[2] По дважды повторяющимся индексам $i, j, \ldots = x, y, z$ везде подразумевается суммирование.

[3] Для электростатического поля сила (1.5) впервые получена Гельмгольцем (см. [2, § 15]).

[4] Выражение (1.6) для плотности импульса поля введено Абрагамом (см. [1] и [4, § 35]).

где

$$\sigma_{ij}^{\rm H} = \sigma_{ji}^{\rm H} = \frac{1}{8\pi}\Big\{\big[(E_iD_j + E_jD_i) - \mathbf{E}\,\mathbf{D}\delta_{ij}\big] + \\ + \big[(H_iB_j + H_jB_i) - \mathbf{H}\,\mathbf{B}\delta_{ij}\big]\Big\}\,, \qquad (2.5)$$

$$\mathbf{f}^1 = -\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{rot}(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{H}\times\mathbf{B})\,, \qquad (2.6)$$

$$f_i^2 = -\frac{1}{8\pi}\left[\left(\mathbf{E}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial r_i} - \mathbf{D}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial r_i}\right) + \left(\mathbf{H}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial r_i} - \mathbf{B}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial r_i}\right)\right]. \qquad (2.7)$$

Равенство (2.4) мы записали в виде, несколько отличном от вида формулы (20а) в [1], используя симметричный тензор $\sigma_{ij}^{\rm H}$, впервые введённый Г. Герцем (см. [4, § 35]). Можно показать, что, если в (2.5)–(2.7) использовать материальные уравнения (1.3) и положить $\mathbf{f}^{\rm ext} = 0$, то уравнение (2.4) примет вид (1.4).

7. Уравнение, эквивалентное закону сохранения энергии, получается, если в выражении для работы $\mathbf{j}^{\rm ext}\,\mathbf{E}$, совершаемой полем над сторонними зарядами, ток $\mathbf{j}^{\rm ext}$ выразить с помощью уравнений (2.2) через поля. Оно имеет следующий вид (формула (12) в [1]):

$$\mathbf{j}^{\rm ext}\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) - \mathrm{div}\,\mathbf{S}^{\rm P}\,,$$

$$\mathbf{S}^{\rm P} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}\,. \qquad (2.8)$$

Подход, предложенный в [1], основан только на уравнениях (2.1) и (2.4)–(2.8). Однако в [1] этот подход реализован при некоторых ограничениях на ε, μ и скорость $\mathbf{v}$. В [1, с. 177] "предполагается, что изменение ε (а также μ) для данного элемента среды связано лишь с изменением её плотности", т.е.

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho)\,, \quad \mu = \mu(\rho)\,; \qquad (2.9)$$

"скорость среды постоянна в пространстве и во времени или, точнее, производными по $\mathbf{r}$ и t везде можно пренебречь (будет сохранена лишь $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$)", т.е.

$$\frac{\partial v_i}{\partial r_j} = \frac{1}{3}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\delta_{ij}\,, \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = 0\,. \qquad (2.11)$$

В [1] исследуются уравнения (2.1) и (2.4)–(2.8) при условиях (2.9)–(2.11). Согласно [1], хотя "в теоретическом плане в существовании силы Абрагама (или, точнее, силы такого типа) не может быть сомнений" [1, с. 181], "законы сохранения не могут однозначно определять входящие в них величины" [1, с. 178], и, более конкретно, существуют две возможности: либо сила $\mathbf{f}$ определяется формулой (1.7), при этом импульс поля даётся выражением (1.6), либо сила

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{\rm G}, \qquad (2.12)$$

при этом импульс поля [5]

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^{\rm M} = \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{D}\times\mathbf{B}\,; \qquad (2.13)$$

выбор выражения для импульса поля или силы "должен производиться на основании опытных данных или каких-то расчётов, лежащих за пределами самих уравнений для макроскопического поля" [1, с. 185].

Мы считаем, что предложенный и использованный в [1] подход является не только "более последовательным" [1, с. 178], но и единственно последовательным подходом в макроскопической электродинамике. Поэтому с невозможностью — в рамках этого подхода — однозначного ответа на вопрос о силе, действующей на вещество, можно было бы ещё "согласиться", если бы сила не выражалась только через поля и диэлектрическую и магнитную проницаемости (как в поглощающих средах (см. [2, § 81]). Но в обоих возможных, согласно [1], вариантах сила и импульс поля выражаются только через поля и проницаемости ε и μ. Это обстоятельство и несомненная важность вопроса побудили нас вернуться к его обсуждению в рамках подхода [1], т.е. исходя из уравнений (2.1) и (2.4)–(2.8). Мы повторяем проведённые в [1] вычисления во всех основных пунктах, за одним только исключением: мы не будем налагать на ε, μ и скорость среды $\mathbf{v}$ никаких ограничений (полагая лишь, что $v \ll c$) до тех пор, пока сам ход вычислений не заставит нас ввести ограничения (вида (2.9)–(2.11) или какие-либо другие), для того чтобы избежать внутренних противоречий в теории. Таким образом мы узнаем, насколько результаты [1] связаны с налагаемыми с самого начала условиями (2.9)–(2.11), и, если эти условия не необходимы для самого подхода [1], как изменятся результаты при отказе от этих условий.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости являются функциями плотности, энтропии (или температуры) и, если среда неоднородна по составу, то и концентрации смеси в системе отсчёта, где ε и μ определены, т.е. в системе отсчёта, относительно которой вещество покоится. Но с точностью до членов $\sim v/c$ плотность, энтропия, температура и концентрация смеси [6] не изменяются при преобразованиях Лоренца (см. [4, § 46]). Поэтому мы можем полагать, что

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, s, \gamma)\,, \quad \mu = \mu(\rho, s, \gamma)\,, \qquad (2.14)$$

где ρ, s и γ — плотность, энтропия и концентрация смеси соответственно — функции координат $\mathbf{r}$ и времени t в лабораторной системе отсчёта.

Материальные уравнения Минковского (2.1) являются прямым следствием преобразований Лоренца и поэтому справедливы, строго говоря, только в том случае, если сопутствующая система отсчёта (в которой вещество покоится) — инерциальная, т.е. вещество как целое движется относительно лабораторной (тоже инерциальной) системы отсчёта с постоянной скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{const}$. Если же скорость $\mathbf{v} \neq \mathrm{const}$, то сопутствующая система отсчёта — не инерциальная и сами уравнения Максвелла, определение полей через силу, действующую на точечный (пробный) заряд, и материальные уравнения, вообще говоря, существенно отличаются от соответствующих уравнений в инерциальной системе отсчета [7]. Однако, следуя [1; 2, § 76], мы будем полагать, что материальные уравнения Минковского (2.1) остаются справедливыми и тогда, когда скорость $\mathbf{v}$ не является

[5] Это выражение для плотности импульса поля было введено Минковским (см. [1], [4, § 35]).

[6] Для простоты мы полагаем, что смесь является двухкомпонентной.

[7] Относительно микроскопических уравнений Максвелла см. [5, § 90].

постоянной, а представляет собой достаточно медленно изменяющуюся функцию [8]. (Стоит, может быть, ещё раз напомнить, что нашей конечной целью (как и в работе [1]) является получение выражений для силы и импульса поля в неподвижной среде.)

3. Закон сохранения энергии

Мы рассмотрим сначала уравнение (2.8) (уравнение (12) в [1]). Прежде всего нам следует строго определить, что мы понимаем под силой $\mathbf{f}$, действующей на единицу объёма вещества со стороны электромагнитного поля. Это можно сделать, только записав уравнение движения вещества при наличии поля. Будем для простоты полагать, что вещество — это идеальная жидкость. Тогда уравнение движения представляет собой уравнение Эйлера (см. [6, § 2]) с добавлением в него силы $\mathbf{f}$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\,(-\nabla p + \mathbf{f})\,, \tag{3.1}$$

где $p = p(\rho, s, \gamma)$ — давление, которое имелось бы в веществе в отсутствие поля при данных (в присутствии поля) значениях плотности, энтропии и концентрации смеси ρ, s, γ (см. [2, § 15]). После такого уточнения смысла давления p уравнение (3.1) вполне определяет силу $\mathbf{f}$.

Найдём, как изменяется во времени энергия единицы объёма вещества

$$w^{\mathrm{m}} = \rho\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon^{\mathrm{m}}\right), \tag{3.2}$$

где $\varepsilon^{\mathrm{m}} = \varepsilon^{\mathrm{m}}(\rho, s, \gamma)$ — внутренняя энергия единицы массы вещества в отсутствие поля. Будем полагать, что нет ни теплового, ни диффузионного потоков. Тогда, наряду с уравнением непрерывности (см. [6, § 1])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0\,, \tag{3.3}$$

справедливы уравнения (см. [6, §§ 49, 58])

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s = 0\,, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \gamma = 0\,. \tag{3.5}$$

Повторив вычисления, проведённые в [6, § 6], используя при этом уравнения (3.1) и (3.3) – (3.5), получим

$$\frac{\partial w^{\mathrm{m}}}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{S}^{\mathrm{m}} + \mathbf{f}\mathbf{v}\,, \tag{3.6}$$

где плотность потока энергии вещества

$$\mathbf{S}^{\mathrm{m}} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon^{\mathrm{m}} + \frac{p}{\rho}\right). \tag{3.7}$$

Закону сохранения полной энергии системы (вещества и поля) при учёте работы поля над сторонними зарядами соответствует уравнение

$$\frac{\partial w^{\mathrm{tot}}}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{S}^{\mathrm{tot}} - \mathbf{j}^{\mathrm{ext}}\mathbf{E}\,, \quad w^{\mathrm{tot}} = w^{\mathrm{m}} + w\,,$$
$$\mathbf{S}^{\mathrm{tot}} = \mathbf{S}^{\mathrm{m}} + \mathbf{S}\,, \tag{3.8}$$

где, по определению, w — плотность энергии, $\mathbf{S}$ — плотность потока энергии электромагнитного поля. Из (3.6) и (3.8) получаем

$$\mathbf{f}\mathbf{v} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{S} - \mathbf{j}^{\mathrm{ext}}\mathbf{E}\,. \tag{3.9}$$

Таким образом, если сила, с которой поле действует на вещество, определяется в соответствии с уравнением движения (3.1), то уравнение (2.8) должно приводиться к виду (3.9). Подставим в (2.8) $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ из (2.1). Производные $\partial\varepsilon/\partial t$ и $\partial\mu/\partial t$ вычисляем по формулам (2.14) и (3.3) – (3.5):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma}\,\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\left(\rho\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\varepsilon\right),$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\left(\rho\,\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\mu\right). \tag{3.10}$$

Прямые вычисления, при которых используются (3.10), приводят уравнение (2.8) к следующему виду:

$$(\mathbf{f}^{\mathrm{G}} + \mathbf{f}^{\mathrm{A}})\,\mathbf{v} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{8\pi}\,(\varepsilon E^2 + \mu H^2) - \frac{2}{c^2}\,(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{v}\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\right] -$$
$$- \operatorname{div}\left[\mathbf{S}^{\mathrm{P}} - \frac{1}{8\pi}\,\rho\mathbf{v}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\,E^2 + \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\,H^2\right)\right] - \mathbf{j}^{\mathrm{ext}}\mathbf{E}\,, \tag{3.11}$$

сила Гельмгольца $\mathbf{f}^{\mathrm{G}}$ и сила Абрагама $\mathbf{f}^{\mathrm{A}}$ определяются по формулам (1.5) и (1.8), в которых нужно сделать замену $\bar{\mathbf{E}} \to \mathbf{E}$ и $\bar{\mathbf{H}} \to \mathbf{H}$. Уравнение (3.11) имеет требуемый (3.9) вид; сравнение даёт:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{\mathrm{G}} + \mathbf{f}^{\mathrm{A}} + \mathbf{f}^{\perp}\,, \tag{3.12}$$

где $\mathbf{f}^{\perp}$ — неизвестная пока сила, перпендикулярная скорости $\mathbf{v}$ и поэтому не дающая вклада в работу $\mathbf{f}\mathbf{v}$;

$$w = \frac{1}{8\pi}\,(\varepsilon E^2 + \mu H^2) - \frac{2}{c^2}\,(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{v}\mathbf{S}^{\mathrm{P}} \tag{3.13}$$

— плотность энергии поля (формула (19) в [1]);

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{P}} - \frac{1}{8\pi}\,\rho\mathbf{v}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\,E^2 + \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\,H^2\right) \tag{3.14}$$

— плотность потока энергии поля (формула (17) в [1]). Заметим, что для покоящейся среды сила (3.12) приводится к силе $\bar{\mathbf{f}}$ (1.7), плотность энергии поля (3.13) — к плотности энергии [9] $\bar{w} = 1/8\pi\,(\varepsilon\bar{E}^2 + \mu\bar{H}^2)$ и плотность потока энергии (3.14) — к вектору Пойнтинга – Умова $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^{\mathrm{P}}$.

4. Законы сохранения импульса и момента импульса

Рассмотрим теперь уравнение (2.4) (уравнение (20а) в [1]). Найдём, как изменяется во времени импульс единицы объёма вещества

$$\mathbf{P}^{\mathrm{m}} = \rho\mathbf{v}\,. \tag{4.1}$$

[8] Заметим, что в [2, § 76] уравнения Минковского применяются при решении задач об электрическом поле, возникающем вокруг равномерно вращающегося шара.

[9] Энергия $\bar{w}$ имеет точный термодинамический смысл (см. [2, § 80]) — это разность между значениями внутренней энергии единицы объёма вещества в поле и в отсутствие поля при одинаковых ρ, s и γ.

Повторив вычисления, проведённые в [6, § 7], используя при этом уравнения (3.1) и (3.3), получим

$$\frac{\partial P_i^{\mathrm{m}}}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}^{\mathrm{m}}}{\partial r_j} + f_i\,, \tag{4.2}$$

где плотность потока импульса вещества

$$\Pi_{ij}^{\mathrm{m}} = \Pi_{ji}^{\mathrm{m}} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}^{\mathrm{m}}\,, \tag{4.3}$$

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{m}} = \sigma_{ji}^{\mathrm{m}} = -p\delta_{ij} \tag{4.4}$$

— тензор напряжений в отсутствие поля.

Закону сохранения полного импульса системы, состоящей из вещества и поля, с учётом силы, с которой поле действует на сторонние заряды, соответствует уравнение

$$\frac{\partial P_i^{\mathrm{tot}}}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}^{\mathrm{tot}}}{\partial r_j} - f_i^{\mathrm{ext}}\,, \quad \mathbf{P}^{\mathrm{tot}} = \mathbf{P}^{\mathrm{m}} + \mathbf{g}\,,$$

$$\Pi_{ij}^{\mathrm{tot}} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}^{\mathrm{tot}}\,, \quad \sigma_{ij}^{\mathrm{tot}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{m}} + \sigma_{ij}\,, \tag{4.5}$$

где, по определению, $\mathbf{g}$ — плотность импульса поля, σ_{ij} — тензор напряжений, связанный с полем. Из (4.5) и (4.2) получаем

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{f}^{\mathrm{ext}}, \quad \sigma_i' = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j}. \tag{4.6}$$

Важно иметь в виду, что полный тензор напряжений должен быть непременно симметричным (см. [2, § 15]): $\sigma_{ij}^{\mathrm{tot}} = \sigma_{ji}^{\mathrm{tot}}$. Отсюда, с учётом формулы (4.4), следует, что и

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\,. \tag{4.7}$$

Симметричность полного тензора напряжений $\sigma_{ij}^{\mathrm{tot}}$ связана с законом сохранения полного момента импульса системы (вещества и поля). Момент импульса вещества и поля в некотором фиксированном объёме V

$$\mathbf{J}^{\mathrm{tot}} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{P}^{\mathrm{tot}}\,\mathrm{d}V. \tag{4.8}$$

Используя (4.5), находим

$$\frac{\mathrm{d}J_i^{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = e_{ijk} \oint_S r_j(\sigma_{kl}^{\mathrm{tot}} - \rho v_k v_l)\,\mathrm{d}S_l - e_{ijk}\int_V \sigma_{kj}^{\mathrm{tot}}\,\mathrm{d}V - M_i^{\mathrm{ext}}\,, \tag{4.9}$$

где e_{ijk} — единичный, полностью антисимметричный псевдотензор третьего ранга [5], S — поверхность, ограничивающая объём V,

$$\mathbf{M}^{\mathrm{ext}} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f}^{\mathrm{ext}}\,\mathrm{d}V \tag{4.10}$$

— момент сил, действующих со стороны поля на сторонние заряды в объёме V. Для того чтобы момент сил, действующих на вещество и поле в объёме V, сводился к интегралу по поверхности, объёмный интеграл в (4.9) должен обратиться в нуль, т.е. тензор $\sigma_{ij}^{\mathrm{tot}}$ должен быть симметричным. Если объём V включает в себя всё вещество и на границе S поле отсутствует, то поверхностный интеграл в (4.9) обращается в нуль. Тогда, если $\sigma_{ij}^{\mathrm{tot}} = \sigma_{ji}^{\mathrm{tot}}$, то, как и должно быть,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}^{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{M}^{\mathrm{ext}}\,. \tag{4.11}$$

Уравнение (2.4) должно приводиться к виду (4.6) с симметричным тензором σ_{ij} (см. (4.7)) и силой $\mathbf{f}$ (3.12). Чтобы это сделать, нужно должным образом преобразовать $\mathbf{f}^1$ (2.6) и $\mathbf{f}^2$ (2.7). Используя уравнения (2.1), получим:

$$\mathbf{f}^1 = -\frac{1}{2c^2}\,\mathrm{rot}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{v} \times \mathbf{S}^{\mathrm{P}} = -\boldsymbol{\sigma}'^1 + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\,(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}} + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\,\mathrm{div}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{v}\,, \tag{4.12}$$

где

$$\sigma_i'^1 = \frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial r_j}\,, \quad \sigma_{ij}^1 = \sigma_{ji}^1 = \frac{\varepsilon\mu - 1}{2c^2}\,(v_i S_j^{\mathrm{P}} + v_j S_i^{\mathrm{P}})\,; \tag{4.13}$$

$$f_i^2 = f_i^{\mathrm{G}} - \sigma_i'^2 - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\,\mathbf{v}\,\frac{\partial \mathbf{S}^{\mathrm{P}}}{\partial r_i}\,, \tag{4.14}$$

$$\sigma_i'^2 = \frac{\partial \sigma_{ij}^2}{\partial r_j}\,,$$
$$\sigma_{ij}^2 = \delta_{ij}\left[\frac{1}{8\pi}\,\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\,E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}\,H^2\right) - \frac{1}{c^2}\,(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{v}\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\right]. \tag{4.15}$$

Подставляя $\mathbf{f}^1$ из (4.12) и $\mathbf{f}^2$ из (4.14) в уравнение (2.4), приводим его к виду [10]:

$$\mathbf{f}^{\mathrm{G}} + \mathbf{f}^3 = -\frac{1}{4\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{\sigma}'^1 + \boldsymbol{\sigma}'^2 - \mathbf{f}^{\mathrm{ext}}, \tag{4.16}$$

где

$$\mathbf{f}^3 = -\frac{1}{c^2}\left[(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}} + \mathbf{S}^{\mathrm{P}}\,\mathrm{div}(1 - \varepsilon\mu)\,\mathbf{v}\right]. \tag{4.17}$$

Силу $\mathbf{f}^3$ (4.17) можно представить в другом виде; учитывая (3.10), имеем

$$\frac{\partial \varepsilon\mu}{\partial t} = -\left[\mathrm{div}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{v} + \left(\rho\,\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial\rho} + 1 - \varepsilon\mu\right)\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right], \tag{4.18}$$

так что

$$\mathbf{f}^3 = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t}\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}} + \mathbf{f}^{\perp} + \mathbf{f}^{\parallel}\,, \tag{4.19}$$

где сила, перпендикулярная к скорости,

$$\mathbf{f}^{\perp} = -\frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\,\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}} + \frac{1}{c^2}\left(\varepsilon\mu - 1 - \rho\,\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial\rho}\right)\left[\mathbf{S}^{\mathrm{P}} - \mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\mathbf{S}^{\mathrm{P}}}{v^2}\right]\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,, \tag{4.20}$$

[10] Соответствующее уравнение (24) в [1] записано уже для неподвижной среды.

и сила, параллельная скорости,

$$\mathbf{f}^{\parallel} = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}\left(\varepsilon\mu - 1 - \rho\,\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial\rho}\right)\frac{(\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\mathbf{v})}{v^2}\,\operatorname{div}\mathbf{v}\,. \qquad (4.21)$$

Левая часть уравнения (4.16) ещё существенно отличается от силы $\mathbf{f}$, для которой ранее из закона сохранения энергии мы получили выражение (3.12) с силой Абрагама. Следовательно, для дальнейших вычислений существуют две возможности [1]: либо, оставив без изменения уравнение (3.11), преобразовать уравнение (4.16) с $\mathbf{f}^3$ (4.19) – (4.21) так, чтобы в его левой части появилась сила Абрагама $\mathbf{f}^{\mathrm{A}}$, либо, оставив без изменения уравнение (4.16), преобразовать уравнение (3.11) так, чтобы исключить из него силу Абрагама $\mathbf{f}^{\mathrm{A}}$. В этом разделе мы воспользуемся первой возможностью.

Прибавим к обеим частям уравнения (4.16) силу Абрагама (см. (1.8))

$$\mathbf{f}^{\mathrm{A}} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\,\frac{\partial\mathbf{S}^{\mathrm{P}}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\,(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}} - \frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t}\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\right]. \qquad (4.22)$$

Учитывая (4.19) – (4.21), получаем окончательно

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}^{\parallel} = -\frac{1}{4\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{D}\times\mathbf{B} - (\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right] + \boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{\sigma}'^{1} + \boldsymbol{\sigma}'^{2} - \mathbf{f}^{\mathrm{ext}}\,, \qquad (4.23)$$

где $\mathbf{f}$ — сила (3.12), полученная из закона сохранения энергии, причём её компонента $\mathbf{f}^{\perp}$ определяется формулой (4.20). Сравнивая правые части уравнений (4.6) и (4.23), находим, что плотность импульса электромагнитного поля

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\left[\mathbf{D}\times\mathbf{B} - (\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right], \qquad (4.24)$$

и тензор напряжений (см. (2.5), (4.13) и (4.15))

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \sigma_{ij}^{\mathrm{H}} + \sigma_{ij}^{1} + \sigma_{ij}^{2}\,. \qquad (4.25)$$

Левая часть уравнения (4.23) содержит лишнее, по сравнению с силой (3.12), слагаемое $\mathbf{f}^{\parallel}$, которое должно быть, следовательно, пренебрежимо малым по сравнению с $\mathbf{f}$:

$$\left|\mathbf{f}^{\parallel}\right| \ll \left|\mathbf{f}^{\mathrm{G}}\right|,\quad \left|\mathbf{f}^{\mathrm{A}}\right|. \qquad (4.26)$$

Условие (4.26) — это единственное условие, при котором с точностью $\sim v/c$ все величины: плотность энергии поля w (3.13), плотность потока энергии поля $\mathbf{S}$ (3.14), плотность потока импульса поля $\mathbf{g}$ (4.24), плотность силы, действующей на вещество в поле, $\mathbf{f}$ (3.12) и симметричный тензор напряжений σ_{ij} (4.25) — определяются в макроскопической электродинамике непротиворечивым образом. Остаётся лишь показать, что эти определения однозначны. Что касается условия (4.26), то (кроме очевидного случая, когда $\mathbf{v}\perp\mathbf{S}^{\mathrm{P}}$) $\mathbf{f}^{\parallel} = 0$, когда среду можно считать несжимаемой ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ [2, § 76]) и когда среда представляет собой достаточно разреженный газ (тогда $\mu = 1$, $\rho\partial\varepsilon/\partial\rho = \varepsilon - 1$ [2, § 15]).

5. Однозначность выражений для силы и импульса поля

Теперь воспользуемся второй возможностью: оставляя без изменения уравнение (4.16) с $\mathbf{f}^3$ из (4.19), преобразуем уравнение (3.11), вычитая из обеих его частей работу силы Абрагама (4.22):

$$\mathbf{f}^{\mathrm{A}}\,\mathbf{v} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\,(\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{v}\mathbf{S}^{\mathrm{P}} - \frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t}\,\mathbf{v}\mathbf{S}^{\mathrm{P}} - (\varepsilon\mu - 1)\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right]. \qquad (5.1)$$

В результате вместо (3.11) получим следующее уравнение:

$$\mathbf{f}^{\mathrm{M}}\,\mathbf{v} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial w^{\mathrm{M}}}{\partial t} - \operatorname{div}\mathbf{S} - \mathbf{j}^{\mathrm{ext}}\,\mathbf{E}\,, \qquad (5.2)$$

где

$$\mathbf{f}^{\mathrm{M}} = \mathbf{f}^{\mathrm{G}} + \mathbf{f}^{\perp} - \frac{1}{c^2}\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\,\frac{\partial\varepsilon\mu}{\partial t}\,, \qquad (5.3)$$

$$w^{\mathrm{M}} = w + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\,\mathbf{v}\mathbf{S}^{\mathrm{P}} = \frac{1}{8\pi}\,(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B})\,, \qquad (5.4)$$

а w и $\mathbf{S}$ определяются формулами (3.13) и (3.14). При этом уравнение (4.16), с учётом (4.19) и (5.3), имеет следующий вид:

$$\mathbf{f}^{\mathrm{M}} + \mathbf{f}^{\parallel} = -\frac{1}{4\pi c}\,\frac{\partial(\mathbf{D}\times\mathbf{B})}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{f}^{\mathrm{ext}}\,, \qquad (5.5)$$

где $\sigma_i' = \partial\sigma_{ij}/\partial r_j$, а тензор напряжений σ_{ij} и сила $\mathbf{f}^{\parallel}$, параллельная скорости, по-прежнему определяются соответственно формулами (4.25) и (4.21). Уравнение (5.2) имеет требуемый согласно (3.9) вид, если только вторым слагаемым в левой части можно пренебречь:

$$\left|\frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2}\,\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right| \ll \left|\mathbf{f}^{\mathrm{M}}\,\mathbf{v}\right|. \qquad (5.6)$$

За исключением очевидного случая, когда $\mathbf{S}^{\mathrm{P}}\perp\partial\mathbf{v}/\partial t$, условие (5.6) эквивалентно, очевидно, условию (2.11). Если вместе с условием (4.26) выполняется ещё и условие (5.6), то в согласии с [1] в качестве плотности энергии поля можно принять (наряду с w (3.13)) w^{M} (5.4), в качестве плотности импульса (наряду с $\mathbf{g}$ (4.24)) — $\mathbf{g}^{\mathrm{M}} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}/4\pi c$ и в качестве силы (наряду с $\mathbf{f}$ (3.12)) — $\mathbf{f}^{\mathrm{M}} = \mathbf{f}^{\mathrm{G}}$. Если не ограничиваться только стационарным движением среды (отказаться от условия (2.11) или (5.6)), то при одном только условии (4.26) все величины определяются однозначным и непротиворечивым образом — в соответствии с результатами раздела 4.

6. Заключение

Согласно [1], сила, действующая на вещество в электромагнитном поле, и другие величины, квадратичные по полю (энергия, поток энергии, импульс поля), должны получаться единым образом на основе уравнений Максвелла, соответствующих материальных уравнений и уравнений движения среды. Этот подход реализован в [1] для изотропной центросимметричной (негиротропной) среды при пренебрежении дисперсией диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей и при наличии, кроме того, некоторых дополнительных ограничений на ε, μ и скорость среды $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (см. (2.9) – (2.11)). Авторы [1] показали, что в рамках предложенного ими подхода (по нашему мнению, единственно последовательного подхода в макроскопической электродинамике), когда выполняются условия (2.9)–(2.11), не представляется возможным однозначно определить силу, действующую на вещество, и импульс поля: в пределе, когда движением вещества можно пренебречь, либо выражение для силы включает в себя силу Абрагама (1.7) и тогда импульс поля — это делённый на c^2 вектор Умова–Пойнтинга (1.6), либо в выражение для силы не входит сила Абрагама (см. (2.12)) и тогда импульс поля — это $\mathbf{g}^{\mathrm{M}}$ (см. (2.13)).

Представляется интересным выяснить, в какой степени условия (2.9)–(2.11) необходимы для самого подхода [1] и, если они не являются необходимыми и от них можно отказаться, то насколько результат о неоднозначности определения силы и импульса поля связан с этими условиями. В данной статье показано, что ни одно из условий (2.9)–(2.11) не является необходимым. Единственное условие, выполнение которого необходимо для отсутствия внутреннего противоречия в подходе [1], — это условие (4.26) на $\operatorname{div}\mathbf{v}$ (см. (4.21)), не сводящееся ни к одному из условий (2.9)–(2.11).

Условия (2.9) и (2.10) не принципиальны, т.е. отказ от них не изменяет результата [1] о невозможности однозначного определения силы и импульса поля. Условие же (2.11) в этом смысле — принципиально: если условие (2.11) принять, т.е. ограничиться только стационарным движением вещества, то выбор из двух возможных выражений для импульса поля — (1.6) или (2.13) — и соответственно для силы — (1.7) или (2.12) — действительно невозможен, в согласии с [1]. Если же отказаться от условия (2.11), то вторая возможность — (2.12), (2.13) (сила Абрагама отсутствует) — исключается, так как она приводит к внутренним противоречиям в самом подходе [1]. *Таким образом, если, оставаясь в рамках макроскопической теории, мы хотим найти силу, действующую в электромагнитном поле на покоящееся вещество, то мы должны, тем не менее, рассматривать движущуюся среду* [1], *причём движущуюся нестационарно. При этом для импульса поля и силы получаются формулы* (1.6) *и* (1.7), *совпадающие с соответствующими формулами, приведёнными в* [2, § 75] и [3, § 105]. Что касается 4-тензора энергии-импульса электромагнитного поля в неподвижной среде, то для него справедлива симметричная форма Абрагама (см. формулы (32) и (33) в [1] и [4, § 35]).

После того как настоящая статья была направлена в печать (октябрь 2008 г.), в редакцию *УФН* поступила (декабрь 2008 г.) и была опубликована статья В.Г. Веселаго [7], в которой, в частности, автор касается и проблемы, обсуждаемой в [1–4, 8, 9] и в настоящей статье. Решение этой проблемы в [7] отличается от всех известных решений; в аннотации к статье [7] оно сформулировано так: "указано, что тензор энергии-импульса в форме Абрагама по сути дела не является тензором, так как не является релятивистски инвариантным", а в самом тексте статьи сказано только, что это утверждение "легко определяется прямым расчётом". Мы не согласны с этим утверждением и надеемся обсудить этот вопрос в одной из будущих работ.

Авторы благодарны Б.М. Болотовскому за полезные для нас замечания при рецензировании настоящей статьи.

Список литературы

1. Гинзбург В Л, Угаров В А *УФН* **118** 175 (1976) [Ginzburg V L, Ugarov V A *Sov. Phys. Usp.* **19** 94 (1976)]
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, (1984)]
3. Тамм И Е *Основы теории электричества* (М.: Наука, 1989) [Tamm I E *Fundamentals of the Theory of Electricity* (Moscow: Mir Publ., 1979)]
4. Pauli W *Relativitätstheorie* (Leipzig: Teubner, 1921) [*Theory of Relativity* (New York: Pergamon Press, 1958); Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)]
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)]
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
7. Веселаго В Г *УФН* **179** 689 (2009) [Veselago V G *Phys.Usp.* **52** (6) (2009)]
8. Brevik I *Phys. Rep.* **52** 133 (1979)
9. Pfeifer R N C et al. *Rev. Mod. Phys.* **79** 1197 (2007)

Force on matter in an electromagnetic field

V.P. Makarov
A.M. Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences
ul. Vavilova 38, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-499) 135-02 47, (7-499) 503-83 94
E-mail: vpmac@ran.gpi.ru
A.A. Rukhadze
Faculty of Physics, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Vorob'evy gory, 119991 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-499) 135-02 47, (7-499) 939-14 34. *Fax* (7-499) 135-02 47
E-mail: rukh@fpl.gpi.ru

This is in fact a follow up to a paper by V.L. Ginzburg and V.A. Ugarov (*Usp. Fiz. Nauk* **118** 175 (1976) [*Sov. Phys. Usp.* **19** 94 (1976)]). It is shown that the macroscopic Maxwell equations and the corresponding equations of state combined with the equations of motion of matter (equations of hydrodynamics) are sufficient to uniquely produce the following results familiar from Landau and Lifshitz's *Electrodynamics of Continuous Media* (Moscow: Nauka, 1982, p. 75) and also given in *Fundamentals of the Theory of Electricity* by I.E. Tamm (Moscow: Nauka, 1989, p. 105): 1) the force on a unit volume of matter at rest can be regarded as the sum of the Helmholtz force and the Abraham force; 2) the electromagnetic field momentum density is the Poynting vector divided by c^2; 3) the field stress tensor has identically the same form as the sum of the stress tensor of the electrostatic field and the strain tensor of the magnetostatic field, pointing to the symmetric form of the Abraham tensor as the correct form of the electromagnetic field energy-momentum tensor for a medium at rest.

PACS numbers: **03.30.+p**, 03.50.De, **41.20.–q**
DOI: 10.3367/UFNr.0179.200909e.0995
Bibliography — 9 references
Received 17 October 2008, revised 25 June 2009
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **179** (9) 995–1001 (2009)
Physics–Uspekhi **52** (9) (2009)