

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Вращение плоскости качания маятника Фуко и прецессия Томаса: две линии одного сюжета

М.И. Криворученко

С помощью элементарных геометрических построений одним и тем же способом получены выражения для углов вращения плоскости качания маятника Фуко и прецессии спина релятивистской частицы, движущейся по круговой орбите (прецессия Томаса).

PACS numbers: 01.65. + g, 02.40.Ky, 03.30. + p

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200908e.0873

Содержание

1. Введение (873).
 2. Параллельный перенос (875).
 - 2.1. Евклидово пространство. 2.2. Риманово пространство.
 - 2.3. Риманово пространство как гиперповерхность евклидова пространства.
 3. Вращение плоскости качания маятника Фуко (877).
 - 3.1. Динамические условия. 3.2. Метод касательного конуса в задаче о маятнике Фуко.
 4. Прецессия Томаса (878).
 - 4.1. Касательное пространство физического пространства релятивистских скоростей. 4.2. Метод касательного конуса в задаче о прецессии Томаса.
 5. Заключение (881).

Приложение. Геодезические в пространстве релятивистских скоростей (881).
- Список литературы (881).

1. Введение

Свой первый эксперимент с маятником Жан Бернар Леон Фуко провёл в январе 1851 г. в Париже с целью доказать вращение Земли с помощью наглядной демонстрации вращения плоскости качания маятника. Длина подвеса маятника первоначально составила 2 м. Следующий эксперимент с длиной подвеса 11 м был проведён в Парижской обсерватории. Луи Наполеон Бонапарт, первый президент Французской Республики, племянник прославленного императора Франции Наполеона I, был информирован о работах Фуко и предложил ему прове-

сти эксперимент в Пантеоне. Эксперимент был осуществлён 31 марта 1851 г., вес маятника составил 28 кг, маятник был подвешен под куполом Пантеона на стальной проволоке длиной 67 м.

С точки зрения наблюдателя, связанного с Землёй, удалённые звёзды вращаются по часовой стрелке и совершают полный оборот за 1 сидерический (звёздный) день — 23 часа 56 минут 4,091 секунды. Аристарх Самосский, предложивший первую последовательную гелиоцентрическую систему около 270 года до н. э., связывал наблюдаемое вращение звёзд с осевым вращением Земли. Сходные идеи высказывали представитель школы Пифагора Филолай в V в. до н. э. и Гераклид в IV в. до н. э. Если представление об осевом вращении Земли верно, то можно ожидать, что вследствие инерции плоскость качания маятника Фуко будет запаздывать, вращаясь относительно Земли. Если же Земля неподвижна, как полагали большинство греческих философов, в том числе Аристотель и Птолемей, то плоскость качания маятника не должна вращаться.

С технической точки зрения эксперимент с маятником Фуко был доступен всем древним и более поздним цивилизациям, включая греческую, однако был осуществлён лишь в новую эру. В течение полутора тысяч лет считалось, что проблема вращения звёзд не требует дополнительного внимания, что было связано с авторитетом Аристотеля и успехом геоцентрической системы Птолемея, описывавшей и описывающей по сей день движение планет с высокой точностью. Интерес к проблеме и дискуссии возобновились в XVI в. после работ Николая Коперника и в основном завершились после работ Иоганна Кеплера в начале XVII в.

Наблюдаемая скорость вращения плоскости качания маятника Фуко, $\dot{\phi}_E \approx -11^\circ$ в час, не равна нулю и отлична от $-360^\circ/23,93 \approx -15^\circ$ в час (отрицательный знак показывает, что вращение происходит по часовой стрелке).

Если наблюдатель, связанный с системой координат удалённых звёзд, в каждый момент времени мысленно переносит маятник Фуко вдоль меридиана к Северному полюсу, сохраняя угол между плоскостью качания и

М.И. Криворученко. Государственный научный центр Российской Федерации "Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова", ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация
E-mail: mikhail.krivoruchenko@itep.ru

Статья поступила 30 октября 2008 г.

меридианом, то он обнаружит в своей системе равномерное вращение перенесённой плоскости по отношению к звёздам. Углы вращения φ_S и φ_E за один сидерический день соответственно по отношению к звёздам и исходному меридиану связаны соотношением $\varphi_S = 2\pi + \varphi_E$. Для малых углов качания маятника в адиабатическом приближении

$$\varphi_S = 2\pi(1 - \cos \vartheta), \quad (1)$$

где ϑ — полярный угол маятника. Условие адиабатичности означает, что период вращения Земли много больше периода качания.

Уравнение вращения плоскости качания маятника Фуко как иллюстрация законов классической механики (см., например, [1], а также раздел 3) входит в программу университетских курсов физических факультетов.

Таким образом, маятник Фуко, помещённый на Северный полюс, за день поворачивается на угол $\varphi_E = -360^\circ$. На экваторе маятник не вращается. В справочниках можно найти, что Пантеон в Париже находится на параллели $\vartheta = 41,15^\circ$ (в географии говорят о широте $\alpha = \pi/2 - \vartheta$). Из приведённых уравнений находим $\dot{\varphi}_E = -11,3^\circ$ в час, что согласуется с наблюдениями над маятником Фуко и исключает сопутствующее "вращение небес" с высокой точностью.

Эксперимент с маятником Фуко представляет собой первое доказательство вращения Земли с помощью наземных средств.

В процессе перемещения по поверхности Земли плоскость качания маятника вследствие законов классической механики остаётся параллельной самой себе [2–5]. Этот удивительный факт позволяет исследовать задачу об эволюции маятника Фуко геометрическими методами.

В точке равновесия скорость груза маятника лежит в плоскости, касательной к поверхности Земли. Плоскость качания маятника может быть охарактеризована ортогональным ей вектором. Этот вектор также лежит в плоскости, касательной к поверхности Земли. При смещении в отсутствие внешних сил и/или вращающих моментов касательные векторы испытывают *параллельный перенос*. Например, касательный вектор пространства-времени Минковского $M = \mathcal{R}^{1,3}$, 4-скорость, при смещении движущейся по инерции частицы остаётся фиксированным, т.е. параллельным самому себе. Векторы, касательные к искривлённым поверхностям, например к поверхности сферы S^2 или физическому пространству релятивистских скоростей, при смещении, вообще говоря, изменяются, оставаясь внутри касательного пространства. В сопутствующей локально-евклидовой системе координат их эволюция выглядит как *движение по инерции*. В первом случае смещение происходит в пространстве-времени Минковского. В последних двух случаях смещение происходит вдоль поверхности сферы и в физическом пространстве релятивистских скоростей.

Геометрическая основа эффекта известного сегодня как прецессия Томаса была открыта в 1913 г. французским математиком Эмилем Борелем [6], который описал эффект вращения осей твёрдого тела на круговой орбите и указал на связь этого эффекта с некоммутативностью преобразований Лоренца. Борель отметил аналогию между преобразованиями векторов на поверхности

сферы и в физическом пространстве релятивистских скоростей, а также привёл оценку угла вращения осей твёрдого тела на круговой орбите в низшем квадратичном порядке по скорости.

В том же году в Гёттингене два молодых математика Людвиг Фопл и Пёси Даниел [7] вывели точную формулу для угла прецессии¹, согласно которой при равномерном круговом движении за один оборот координатные оси твёрдого тела в системе покоящегося наблюдателя поворачиваются на угол

$$\phi_S = 2\pi(1 - \cosh \theta), \quad (2)$$

где $\cosh \theta \equiv \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор, v — скорость тела, c — скорость света. Примерно в это же время релятивистская прецессия обсуждалась Людвигом Зилберштейном [8].

В начале 1920-х годов Энрико Ферми [9] и позднее Артур Уолкер [10] установили правило переноса векторов для построения выделенных систем отсчёта в общей теории относительности. При переносе Ферми – Уолкера векторы, касательные к физическому пространству релятивистских скоростей, ведут себя аналогично осям твёрдого тела в теории Бореля и др. [6–8].

Прецессия осей твёрдого тела, испытывающего ускорение, известна физикам как прецессия Томаса, поскольку Левелин Томас [11] раскрыл её фундаментальное значение для теории тонкой структуры атомных спектров. Томас опирался при этом на статью Вильяма де Ситтера о релятивистской прецессии Луны, опубликованную в книге Артура Эддингтона [12].

С теоретико-групповыми аспектами вращения спина физики познакомились благодаря работе Вигнера [13]. Термин "вигнеровское вращение" используется и как синоним "прецессии Томаса", и в более широком смысле — как вращение твёрдого тела при преобразованиях координат.

История первых исследований, связанных с прецессией Томаса, изложена в работе Вальтера [14].

Геометрическая сторона эффекта прецессии спина релятивистской частицы недавно вновь привлекла к себе внимание. Аравинд показал [15], что угол вращения ϕ_S определяется интегралом по поверхности, ограниченной замкнутой траекторией частицы в физическом пространстве релятивистских скоростей. Это свойство характеризует *параллельный перенос* векторов в римановом пространстве (см., например, [16]). Параллельный перенос в пространстве релятивистских скоростей и прецессия Томаса подробно обсуждаются Родосом и Семонем [17].

Углы вращения φ_S и ϕ_S имеют смысл геометрической фазы, которая встречается во многих областях физики [4, 5, 18].

Эвристическую ценность представляет известная аналогия между вращениями и преобразованиями Лоренца. В частности, напомним, что теорему сложения релятивистских скоростей можно получить как закон сложения дуг больших окружностей сферы с мнимым радиусом в четырёхмерном евклидовом пространстве с одной мнимой координатой (временем). Вводя одну мнимую координату (время), можно преобразовать гиперболоид

¹ Статья Фопла и Даниела была рекомендована к печати Давидом Гильбертом.

физических релятивистских скоростей в сферу с мнимым радиусом в четырёхмерном евклидовом пространстве.

Как для маятника Фуко, так и для прецессии Томаса поверхность, вдоль которой происходит смещение, можно рассматривать, следовательно, как некую сферу. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что эффекты вращения плоскости качания маятника Фуко и прецессии Томаса геометрически, очевидно, тождественны, причём данный факт не обязательно противоречит тому, что физическая природа систем различна.

Цель настоящей методической заметки состоит в том, чтобы показать, что выражения для углов вращения φ_S и ϕ_S можно получить одинаковым способом с помощью элементарных геометрических построений для параллельного переноса векторов вдоль соответствующих поверхностей. В первом случае поверхность представляет собой поверхность Земли, т.е. поверхность сферы, погружённой в евклидово пространство $\mathcal{R}^3$. Во втором случае поверхность — физическое пространство релятивистских скоростей, т.е. гиперболоид $u^2 = 1$, погружённый в касательное пространство пространства-времени Минковского $T_x \mathcal{M}$.

Наглядный геометрический метод касательного конуса, с помощью которого выводятся основные уравнения в разделах 3 и 4, часто используется для иллюстрации влияния кривизны на параллельный перенос векторов вдоль поверхности сферы (см., например, приложение 1 в [1]). Этот метод использовался Зомервиллем [2] и Роковым, Миллером и Миллсом² [3] для описания эволюции маятника Фуко. В разделе 2 мы напомним основные принципы параллельного переноса. В разделе 3 на основе рассмотрения эволюции маятника Фуко с динамической точки зрения показано, что эволюция сводится к параллельному переносу плоскости качания маятника вдоль поверхности сферы, и получено уравнение (1). В разделе 4 метод касательного конуса обобщён для случая томасовской прецессии. С его помощью получено выражение (2).

2. Параллельный перенос

2.1. Евклидово пространство

Понятие параллельного переноса берёт начало в евклидовой геометрии. Говорят, что два вектора параллельны, если две прямые, проходящие через начальные и конечные точки векторов, параллельны в смысле V постулата Евклида и ориентации векторов совпадают. Непрерывное преобразование, которое на каждом бесконечно малом шаге сохраняет длину вектора и оставляет его параллельным самому себе, называется *параллельным переносом*. Для вектора $\mathbf{A}$ в точке P существует один и только один вектор $\mathbf{A}'$ в точке P' , который может быть построен параллельным переносом $\mathbf{A}$ из P в P' .

В евклидовом пространстве сумма и разность векторов определены с помощью параллельного переноса и правила треугольника. Условие параллельного переноса может быть записано в виде

$$\delta \mathbf{A} = \mathbf{A}' - \mathbf{A} = 0, \quad (3)$$

² Р.Л. Миллс совместно с Чж.Н. Янгом в 1954 г. впервые ввели в физику элементарных частиц поля с неабелевыми калибровочными группами симметрии.

где $\delta \mathbf{A}$ — бесконечно малое смещение. В евклидовом пространстве условие (3) справедливо также для конечных смещений.

Параллельный перенос допускает простое описание в аналитической геометрии. Декартова система координат определена набором базисных векторов $\mathbf{e}_i$ в выбранной начальной точке P , которые переносятся параллельно в другие точки пространства:

$$\delta \mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i - \mathbf{e}_i = 0. \quad (4)$$

Контравариантные координаты вектора $\mathbf{A}$ фиксированы разложением $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$, ковариантные координаты определены через скалярное произведение $A_i = \mathbf{e}_i \mathbf{A}$. Из ортонормированности базиса, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \delta^{ij} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$, следует $A^i = \delta^{ij} A_j = A_i$ и $\mathbf{A} \mathbf{B} = A_i B^i$.

В определённой таким образом системе отсчёта параллельный перенос не изменяет координаты векторов:

$$\delta A_i = \delta(\mathbf{e}_i \mathbf{A}) = \delta \mathbf{e}_i \mathbf{A} + \mathbf{e}_i \delta \mathbf{A} = 0, \quad (5)$$

и, как следствие, не изменяет скалярное произведение:

$$\delta(\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\delta A_i) B^i + A_i (\delta B^i) = 0. \quad (6)$$

2.2. Риманово пространство

Риманово пространство локально евклидово. В каждой точке P можно найти систему координат, в которой метрический тензор принимает евклидову форму, причём в любой точке P' , принадлежащей окрестности P , отклонение метрического тензора от евклидова имеет второй порядок малости по расстоянию между P и P' .

В локальной евклидовой системе координат с началом в точке P проходящие через точку P траектории $\mathbf{x} = \mathbf{v}l + O(l^3)$, где l — бесконечно малое расстояние от P , определяют элементы прямых или геодезических³. Кривая называется геодезической, если её каждый бесконечно малый элемент является элементом геодезической. В евклидовом пространстве прямые определяют кратчайшие расстояния между двумя точками. Соответственно в римановом пространстве элементы геодезических определяют кратчайшие расстояния между близкими точками, а геодезические — между произвольными точками в некоторой окрестности соединяющей их кривой.

В локальной евклидовой системе координат параллельный перенос определён уравнением (3) в первом порядке по смещению. В общем случае параллельный перенос определён по отношению к преобразованию вдоль кривой, в каждой точке которой вектор переносится параллельно на каждом бесконечно малом шаге. Параллельный перенос локально, а следовательно, и вдоль всей кривой сохраняет скалярное произведение, длины и углы между векторами.

При параллельном переносе вдоль прямой евклидова пространства угол между вектором $\mathbf{A}$ и вектором,

³ Траектория пробной частицы, проходящая через центр масс свободно падающего лифта (точка P), отклоняется от прямой на величину порядка $O(l^3)$; на расстоянии l от P частица испытывает гравитационное ускорение порядка $O(l)$. Отсутствие членов $O(l^2)$ в уравнении для траектории указывает, что в бесконечно малой окрестности P движение происходит по инерции. В точке P внешняя сила и ускорение равны нулю согласно 2-му закону Ньютона.

касательным к траектории, остаётся фиксированным. Это свойство выполняется локально в римановом пространстве. Вместе с требованием фиксированной длины оно определяет параллельный перенос вектора вдоль геодезической в двумерном римановом пространстве единственным образом. В пространствах с более высокой размерностью существует дополнительная свобода вращения $\mathbf{A}$ вокруг касательного к траектории вектора. При параллельном переносе в евклидовом пространстве и локально в римановом пространстве $\mathbf{A}$ остаётся в начальной плоскости, натянутой на вектор $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{v}$, касательный к траектории в точке P . Это свойство запрещает произвольные вращения и определяет единственным образом параллельный перенос в римановых пространствах с более высокой размерностью⁴.

2.3. Риманово пространство как гиперповерхность евклидова пространства

Риманово пространство можно вложить в евклидово пространство $\mathcal{E}$ с более высокой размерностью и рассматривать его как некоторую гиперповерхность $\Sigma \subset \mathcal{E}$. Декартова система координат гиперплоскости $\Pi(P)$, касательной к Σ в точке P , определяет локально-евклидову систему координат Σ в точке P . В окрестности $P \in \Sigma$ метрические отношения и алгебраические операции с векторами, принадлежащими $\Pi(P)$ и Σ , совпадают в первом порядке по расстоянию от P . Это даёт возможность оперировать с геометрическими объектами в римановом пространстве локально так же, как в евклидовом.

При параллельном переносе в окрестности $P \in \Sigma$ векторы, принадлежащие касательному пространству $\text{Tr}\Sigma$, удовлетворяют уравнениям (3) и (4).

Векторы евклидова пространства $\mathcal{E}$ имеют компоненты, ортогональные $\text{Tr}\Sigma$. Условия параллельного переноса в Σ не ограничивают изменение этих компонент. При любом доопределении параллельный перенос в Σ вектора $\mathbf{A} \in \text{Tr}\mathcal{E}$, вообще говоря, не является параллельным переносом в $\mathcal{E}$. С точки зрения $\mathcal{E}$ имеет место прецессия $\mathbf{A}$.

Обозначим через $\mathbf{e}_i$ базисные векторы $\text{Tr}\Sigma$. Эти же векторы являются базисными векторами $\Pi(P)$. В бесконечно малой окрестности $P \in \Sigma$ условия параллельного переноса (3) и (4) для векторов $\mathbf{A} \in \text{Tr}\mathcal{E}$, могут быть записаны в виде

$$\mathbf{e}_i \delta \mathbf{A} = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{e}_i \delta \mathbf{e}_k = 0. \quad (8)$$

В первом порядке компоненты $\mathbf{A}$, касательные к Σ , не изменяются. Уравнение (8) показывает, что в локальной евклидовой системе координат символы Кристоффеля обращаются в нуль.

Уравнение Ферми–Уолкера [9, 10, 19] фиксирует также изменение компоненты $\mathbf{A}$, нормальной к $\text{Tr}\Sigma$. В

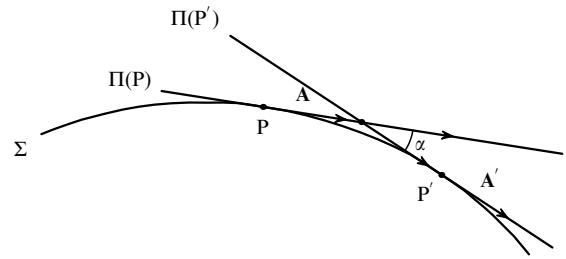


Рис. 1. Параллельный перенос вектора $\mathbf{A}$ между двумя близкими точками P и P' вдоль гиперповерхности Σ . $\Pi(P)$ и $\Pi(P')$ — касательные гиперплоскости к Σ в точках P и P' . Вектор $\mathbf{A}$ параллельно в смысле евклидовой геометрии переносится внутри $\Pi(P)$ к пересечению $\Pi(P)$ и $\Pi(P')$. Далее вектор $\mathbf{A}$ проецируется на $\Pi(P')$. На заключительном этапе $\mathbf{A}$ переносится в смысле евклидовой геометрии параллельно внутри $\Pi(P')$ к точке P' . Расстояние между P и P' имеет первый порядок малости по углу α , а изменение длины вектора $\delta|\mathbf{A}| = (1 - \cos \alpha)|\mathbf{A}|$ — второй порядок по α . В континуальном пределе длина вектора $|\mathbf{A}|$ остаётся постоянной.

задачах о маятнике Фуко и прецессии Томаса нормальные компоненты тождественно равны нулю. В такой ситуации уравнения (7) являются кинематически полными. Для векторов $\text{Tr}\Sigma$ уравнение Ферми–Уолкера эквивалентно уравнениям (7).

Параллельный перенос внутри гиперповерхности от P к P' в случае, когда P' близко к P , может рассматриваться как соответствующий параллельный перенос вектора внутри $\Pi(P)$ с последующей проекцией на $\Pi(P')$ (рис. 1). Результат не зависит от того, в какой точке пересечения $\Pi(P)$ и $\Pi(P')$ выполняется проекция. Поскольку параллельный перенос определён для бесконечно малых смещений, то он определён для всей траектории.

Уравнения (7) и (8) приводят к заключению, что если базисные векторы и некоторый касательный вектор $\mathbf{A}$ одновременно параллельно переносятся вдоль некоторой кривой, то координаты $\mathbf{A}$ в локальном базисе остаются неизменными. Это свойство следует из уравнений (7), (8) и разложения $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$:

$$\delta(\mathbf{e}_i \mathbf{A}) = \delta \mathbf{e}_i \mathbf{A} + \mathbf{e}_i \delta \mathbf{A} = A^k \mathbf{e}_k \delta \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \delta \mathbf{A} = 0. \quad (9)$$

Векторы $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$, образующие сферический базис на S^2 , при фиксированном азимутальном угле связаны параллельным переносом вдоль меридиана. Следовательно, параллельный перенос $\mathbf{A}$ вдоль меридиана не изменяет локальные координаты $\mathbf{A}$. В частности, ориентация плоскости качания маятника Фуко по отношению к удалённым звёздам может быть естественным (хотя не единственным) образом определена с помощью параллельного переноса плоскости качания маятника вдоль меридиана в локальную систему координат наблюдателя на Северном полюсе.

Синхронизация систем отсчёта в специальной теории относительности предполагает, что базисные векторы систем отсчёта S' получены преобразованиями буста базисных векторов некоторой выделенной системы отсчёта S . Доказательство утверждений о том, что 1) однопараметрическое семейство бустов в двумерной плоскости определяет некоторую геодезическую на гиперboloиде $u^2 = 1$ релятивистских скоростей и что 2) буст базисных векторов является параллельным переносом вдоль геодезической, дано в приложении. В качестве

⁴ Можно рассматривать также геодезические, исходящие из P в гиперплоскости Π_2 , натянутой на $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{v}$, касательный к траектории. Такие геодезические образуют двумерную гиперповерхность Σ_2 , касательную к Π_2 в точке P . При параллельном переносе из P в $P' \in \Sigma_2$ геодезическая лежит целиком в Σ_2 , а вектор $\mathbf{A}$ остаётся касательным к Σ_2 . Это свойство запрещает вращения вектора и приводит к описанному выше результату для $\mathbf{A}'$ в P' с точностью $O(l^2)$. В пределе $l \rightarrow 0$ параллельный перенос хорошо определён.

следствия отметим, что параллельный перенос 4-вектора поляризации a вдоль геодезической не изменяет локальные координаты a .

Общий математический формализм, необходимый для описания риманового пространства, можно найти в работах [1, 16, 19]. Сфера, вложенная в трёхмерное евклидово пространство $\mathcal{R}^3$, и гиперboloид физических релятивистских скоростей, вложенный в пространство релятивистских скоростей $T_x M$, пока ещё остаются достаточно простыми и предоставляют возможность пользоваться элементарными геометрическими методами.

3. Вращение плоскости качания маятника Фуко

3.1. Динамические условия

Мы сосредоточим внимание на динамических аспектах эволюции маятника Фуко, которые тесно связаны с геометрией задачи (см. также [2–5, 18]).

Точка подвеса маятника описывает круговую траекторию. На маятник действует сила Кориолиса, связанная с вращением Земли. Сила реакции нити, на которой подвешен маятник, противостоит силе тяжести⁵.

Сила тяжести направлена к центру Земли, направление силы реакции зависит от положения груза маятника. Радиальные компоненты силы тяжести и силы реакции взаимно компенсируются. Сила реакции создает тангенциальную в приближении малых углов составляющую к поверхности Земли, которая стремится вернуть маятник в положение равновесия.

Сила Кориолиса появляется в уравнении движения маятника из-за вращения связанной с Землёй системы координат:

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (10)$$

где m и $\mathbf{v}$ — масса и скорость груза маятника, $\boldsymbol{\Omega}$ — частота вращения Земли. Скорость $\mathbf{v}$ — касательная к поверхности. На экваторе $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ лежат в касательной плоскости, поэтому $\mathbf{F}_C$ параллельна ускорению свободного падения. В результате кориолисова сила не создает вращающего момента. Если маятник движется вдоль экватора, то его плоскость качания не вращается по отношению к направлению движения. Это свойство остаётся справедливым при движении маятника вдоль любой большой окружности сферы.

Задачу о динамической эволюции маятника теперь можно переформулировать как чисто геометрическую задачу о параллельном переносе плоскости качания маятника. Траектория фиксированного ϑ , которую описывает маятник, может быть аппроксимирована отрезками дуг больших окружностей сферы. При перемещении вдоль каждой из них состояние маятника не изменяется в том смысле, что плоскость качания не вращается по отношению к направлению дуги. Качание маятника происходит по инерции. Однако по отношению к окружности фикси-

рованного ϑ плоскость качания поворачивается, потому что геометрия поверхности сферы не является евклидовой. В континуальном пределе, когда длины дуг стремятся к нулю, восстанавливается исходная траектория, задаваемая полярным углом ϑ , и находится угол вращения плоскости качания маятника.

Земля обладает сплюснутостью $f \approx 1/300$ ($f = (a - c)/a$, a — экваториальный радиус, b — полюсный радиус). Мы рассматриваем Землю как идеальную сферу и пренебрегаем связанными с эллипсоидальной формой Земли малыми отклонениями от соответствующего закона параллельного переноса.

3.2. Метод касательного конуса в задаче о маятнике Фуко

На рисунке 2 схематически показана Земля, накрытая с Северного полушария конусом с вершиной В. Конус касается поверхности Земли на параллели, задаваемой углом $\vartheta = \angle BOA$. Вектор, ортогональный плоскости качания маятника, движется вместе с маятником по окружности. В каждой точке траектории вектор принадлежит касательному пространству сферы и конуса. Полагая радиус сферы равным единице, находим

$$\mathbf{OA} = (\mathbf{n} \sin \vartheta, \cos \vartheta), \quad (11)$$

$$\mathbf{CA} = (\mathbf{n} \sin \vartheta, 0), \quad (12)$$

$$\mathbf{BA} = \left(\mathbf{n} \sin \vartheta, -\frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} \right), \quad (13)$$

где $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ — единичный вектор в плоскости экватора. Для того чтобы найти вектор $\mathbf{BA}$, мы пишем $\mathbf{BA} = (\mathbf{n} \sin \vartheta, z)$ и находим z из условия ортогональности

$$\mathbf{BA} \cdot \mathbf{OA} = 0. \quad (14)$$



Рис. 2. Земля представлена как идеальная сфера с центром в точке О и радиусом $|\mathbf{OA}|$. Маятник Фуко помещён в точку А на окружности полярного угла $\vartheta = \angle BOA$. За один сидерический день маятник совершает оборот вокруг Земли. Параллельный перенос плоскости качания маятника проще представить как параллельный перенос нормального к ней вектора. Этот вектор принадлежит касательному пространству сферы, а также конуса с вершиной В (похожего на вьетнамскую шляпу), который касается поверхности Земли на широте маятника. С — центр окружности, вдоль которой движется маятник. Точки В, С, О расположены на оси вращения Земли.

⁵ Центробежная сила выводит вектор, ортогональный плоскости качания маятника, из касательного пространства поверхности Земли. Эффект сводится к возмущению ускорения свободного падения $\mathbf{g}$. Им можно пренебречь с точностью $\Omega^2 R \sin \vartheta / |\mathbf{g}| \sim 0,003$, где $|\Omega| = 2\pi/23,93$ в час, $R = 6371$ км — радиус Земли, $\sin \vartheta \sim 1$, $|\mathbf{g}| = 9,81$ м с⁻².

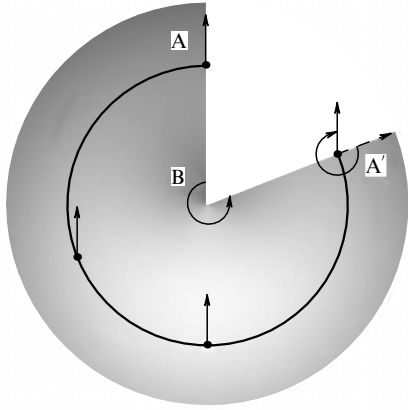


Рис. 3. Параллельный перенос вектора, ортогонального плоскости качания маятника. Маятник, который находится в точке А, вращается с Землёй против часовой стрелки и по завершению одного полного оборота оказывается в точке А. На плоскости маятник оказывается в точке $A' \neq A$, которая физически совпадает с А. Путь на плоскости не замкнут. Угол φ_E , показанный ориентированной дугой, окружающей точку A' , $|\varphi_E| < 2\pi$, определяет угол поворота плоскости качания маятника в системе отсчёта, связанной с Землёй. Точки А и В — те же, что на рис. 2.

Метрика на конусе, индуцированная евклидовым пространством $\mathcal{R}^3$, является евклидовой. Действительно, на конусе можно выбрать систему координат (ρ, φ) , где ρ — евклидово в смысле $\mathcal{R}^3$ расстояние от точки В, φ — азимутальный угол, определённый выше. Бесконечно малое расстояние между двумя точками на конусе равно

$$dl^2 = d\rho^2 + \cos^2 \vartheta \rho^2 d\varphi^2. \quad (15)$$

Изменением переменной $\varphi \rightarrow \varphi / \cos \vartheta$ (напомним, что угол ϑ остаётся постоянным) можно добиться, чтобы метрический тензор на конусе стал евклидовым в полярной системе координат.

Таким образом, можно разрезать конус вдоль прямой ВА, развернуть его и уложить на плоскости, как показано на рис. 3. Метрика на развёрнутом конусе остаётся евклидовой, расстояния между точками на конусе и углы не изменяются.

Параллельный перенос в евклидовом пространстве прост и нагляден. Он показан на рис. 3 для вектора с началом в точке А, направленного по меридиану.

Маятник вращается вместе с Землёй против часовой стрелки. Плоскость качания маятника вращается по часовой стрелке в направлении вращения звёзд. В системе координат, связанной с Землёй, угол поворота φ_E отрицательный. Его значение определено отношением длины дуги AA' вдоль пути маятника $2\pi|CA|$ к радиусу $|BA|$ окружности, показанной на рис. 3. Длина дуги AA' равна длине окружности на рис. 2 с центром С и радиусом $|CA|$, $|BA|$ — образующая конуса. Длины векторов, определённых уравнениями (12) и (13), $|CA| = \sin \vartheta$ и $|BA| = \tan \vartheta$. Таким образом, мы получаем

$$\varphi_E = -\frac{2\pi|CA|}{|BA|} = -2\pi \cos \vartheta. \quad (16)$$

Угол вращения по отношению к удалённым звёздам даётся уравнением (1).

Уравнение (16), полученное для Северного полушария, в котором $\vartheta \leq \pi/2$, справедливо также для Южного полушария. Для того чтобы это увидеть, следует зеркально отразить рис. 2 относительно плоскости экватора и повторить рассуждения.

4. Прецессия Томаса

На рисунке 4 показана трёхмерная проекция пространства релятивистских скоростей и погружённого в него гиперboloида $u^2 = 1$ физических релятивистских скоростей. Скалярное произведение вычисляется с помощью метрики Минковского $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Частица в начальный момент находится в точке А гиперboloида и имеет 4-скорость $u = (\gamma, \gamma\mathbf{v}/c)$.

4.1. Касательное пространство физического пространства релятивистских скоростей

4.1.1. Вектор поляризации. Аксиальный 4-вектор поляризации определяется через трёхмерный аксиальный вектор $\mathbf{a}$ в системе покоя частицы как ожидаемое значение $\hat{\mathbf{s}}/s$, где $\hat{\mathbf{s}}$ — оператор спина, s — спин частицы. Преобразования трёхмерных векторов при преобразованиях Лоренца плохо определены, поэтому поляризация релятивистской частицы должна описываться некоторым четырёхмерным вектором. В системе покоя его можно определить следующим образом:

$$a = (0, \mathbf{a}), \quad (17)$$

где $\mathbf{a}^2 = -a^2 = 1$ для чистых состояний и $\mathbf{a}^2 = -a^2 < 1$ для смешанных состояний.

В системе покоя $u = (1, \mathbf{0})$, поэтому

$$ua = 0. \quad (18)$$

Скалярное произведение инвариантно относительно преобразований Лоренца, поэтому уравнение (18) справедливо во всех инерциальных системах отсчёта.

Это утверждение можно дополнить более общим. Принцип эквивалентности подразумевает, что все явления в сопутствующей локальной инерциальной системе отсчёта протекают так же, как в глобальной инерциальной системе отсчёта. Представление (17) и условие (18) поэтому также справедливы в сопутствующих инерциальных системах отсчёта частиц, движущихся с ускорением. В таких системах допустимые изменения a ограничены вращениями пространственной компоненты вектора.

К уравнению (18) можно прийти другим способом. С помощью тензора углового момента M_{jk} и 4-импульса p_l можно построить вектор Паули–Любаньского

$$J^i = \frac{1}{m} \epsilon^{ijkl} M_{jk} p_l. \quad (19)$$

Этот вектор пропорционален 4-вектору поляризации $J^i = sa^i$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно выбрать систему отсчёта, в которой $p = (m, \mathbf{0})$. В такой системе частица покоится и её орбитальный момент равен нулю, а тензор M_{jk} , который связан лишь со спином, определяет пространственную часть вектора J^i . Уравнение (18) справедливо вследствие того, что $p = mi$ и тензор ϵ^{ijkl} полностью антисимметричен ($\epsilon_{0123} = +1$).

С геометрической точки зрения уравнение (18) означает, что a принадлежит касательному пространству гиперboloида $u^2 = 1$, вложенного в пространство релятивистских скоростей $T_x M$. В свою очередь $T_x M$ — касательное пространство M в точке $x \in M$.

Параллельный перенос вектора поляризации употребляется в двух смыслах. Во-первых, в смысле параллельного переноса в M , например, вдоль спиральной траектории частицы в пространстве-времени Минковского. Во-вторых, в смысле параллельного переноса в $T_x M|_{u^2=1}$, например, вдоль окружности фиксированного γ на гиперboloиде 4-скоростей для некоторого $x \in M$.

Вектор поляризации неявно зависит от координаты $x \in M$ и скорости $u \in T_x M|_{u^2=1}$ частицы. Векторы a и a' двух частиц, которые находятся в точках x и x' , могут сравниваться, когда их 4-скорости равны, $u = u'$. Два наблюдателя в точках x и x' , движущиеся с одинаковыми скоростями $u = u'$, принадлежат одной инерциальной системе координат с точностью до некоторого вращения. Второй наблюдатель поворачивает координатные оси своей системы в направлении координатных осей системы отсчёта первого наблюдателя. После этого наблюдатели обмениваются между собой информацией о значениях координат a и a' .

В точности такой же результат наблюдатели могут получить, перенося параллельно векторы a и a' в пространстве-времени Минковского так, как будто эти векторы принадлежат $T_x M$, хотя согласно уравнению (18) они принадлежат касательному пространству $T_x M|_{u^2=1}$.

При $x = x'$ и $u \neq u'$ векторы поляризации сравниваются с помощью схемы параллельного переноса в физическом пространстве релятивистских скоростей вдоль геодезической, соединяющей точки u и u' .

При $x \neq x'$ и $u \neq u'$ вектор a' переносится параллельно $(x', u') \rightarrow (x, u')$ в M , затем он переносится параллельно $(x, u') \rightarrow (x, u)$ вдоль геодезической в $T_x M|_{u^2=1}$, после этого a' сравнивается с a . Поскольку параллельный перенос в M не изменяет координаты вектора и, следовательно, параллельные переносы в M и $T_x M|_{u^2=1}$ коммутируют, результат не зависит от того, какая операция выполняется первой.

Векторы поляризации поэтому можно рассматривать как векторы $T_x M|_{u^2=1}$ для какого-либо одного выделенного значения x , например $x = (0, \mathbf{0})$, и характеризовать их только 4-скоростью $u \in T_x M|_{u^2=1}$.

В результате наблюдатель, покоящийся в некоторой системе координат, например в начале отсчёта, в состоянии анализировать и делать непротиворечивые заключения о характере прецессии спина частицы, движущейся с произвольной скоростью и ускорением.

В квантовой механике соотношение неопределённости не позволяет одновременно измерять координаты и скорости. Это ограничение не приносит трудностей, поскольку локализация частиц не важна и только переносы в пространстве скоростей дают вклад в прецессию.

4.1.2. Угловой момент механического волчка. Угловой момент механического волчка L — трёхмерный аксиальный вектор в системе покоя. Те же аргументы, что для вектора поляризации, ведут к 4-вектору, характеризующему угловой момент механического волчка релятивистски-инвариантным способом. В результате мы приходим к представлению $J = (0, L)$ в системе покоя и выводу о

том, что 4-вектор J — касательный к физическому пространству релятивистских скоростей: $uJ = 0$. Ввиду указанного сходства механический волчок часто рассматривается в качестве механического образа вращающегося электрона.

Под действием внешней силы, приложенной к центру масс в заданном направлении, механический волчок переносится параллельно из одной инерциальной системы отсчёта в другую. По этой причине механический волчок удобен для представления координатных осей инерциальных систем отсчёта.

4.1.3. 4-ускорение частицы. Взяв производную от обеих частей уравнения $u^2 = 1$, получаем $wu = 0$. Ускорение $w = du/ds$, как и поляризация, принадлежит касательному пространству $T_x M|_{u^2=1}$.

4.2. Метод касательного конуса в задаче о прецессии Томаса

Рассмотрим конус, касательный к гиперboloиду в точке A и вдоль окружности фиксированного γ , т.е. вдоль траектории частицы в физическом пространстве релятивистских скоростей. На круговой орбите касательные пространства гиперboloида и конуса совпадают. Вектор поляризации a принадлежит обоим касательным пространствам.

Пусть B — вершина конуса. Векторы на рис. 4 имеют вид

$$\mathbf{OA} = \left(\gamma, \frac{\mathbf{p}\gamma v}{c} \right), \quad (20)$$

$$\mathbf{CA} = \left(0, \frac{\mathbf{p}\gamma v}{c} \right), \quad (21)$$

$$\mathbf{BA} = \left(\frac{\gamma v^2}{c^2}, \frac{\mathbf{p}\gamma v}{c} \right), \quad (22)$$



Рис. 4. Трёхмерная проекция пространства релятивистских скоростей. Множество физических релятивистских скоростей образует гиперboloид с $u_0 = +\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}$, где $\mathbf{u} = \gamma \mathbf{v}/c$, $\mathbf{v}$ — трёхмерная скорость. Вектор $\mathbf{OA} = (\gamma, \mathbf{p}\gamma v/c)$ указывает на начальную 4-скорость частицы на круговой орбите с постоянным γ . Вектор $\mathbf{BA}$ является ортогональным вектору $\mathbf{OA}$ и принадлежит, следовательно, касательному пространству гиперboloида. Конус с вершиной B , напоминающий перевёрнутую вьетнамскую шляпу, касается гиперboloида в точке A и вдоль всей круговой орбиты с центром в точке C . Точка O — вершина светового конуса. Точки O , B и C лежат на одной оси.

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в плоскости вращения частицы. Фиксировать $\mathbf{BA}$ можно, записав $\mathbf{BA} = (w, \mathbf{n}\gamma v/c)$ и определив w из условия ортогональности

$$\mathbf{BA} \mathbf{OA} = 0. \quad (23)$$

Уравнения (20)–(22) аналогичны уравнениям (11)–(13).

Вектор $\mathbf{BA}$ — касательный к гиперboloиду. В процессе параллельного переноса угол вращения $\mathbf{BA}$ совпадает с углом вращения вектора поляризации.

Метрику, индуцированную на конусе, можно получить следующим образом. Точки конуса охарактеризуем вектором

$$\mathbf{BX} = \rho \left(\frac{v}{c}, \mathbf{n} \right), \quad (24)$$

где $\mathbf{n} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ лежит в плоскости вращения (u_x, u_y) . Вектор $\mathbf{BX}$ получен растяжением и вращением $\mathbf{BA}$ вокруг оси u_0 . Бесконечно малое приращение $\mathbf{BX}$ касательно к поверхности конуса, его можно записать в виде

$$d\mathbf{BX} = \frac{\partial \mathbf{BX}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathbf{BX}}{\partial \phi} d\phi = d\rho \left(\frac{v}{c}, \mathbf{n} \right) + \rho(0, d\mathbf{n}). \quad (25)$$

Здесь $d\mathbf{n} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) d\phi$, так что $\mathbf{n} d\mathbf{n} = 0$.

Длина 4-вектора определяется через скалярное произведение

$$|\mathbf{XY}| = \sqrt{-\mathbf{XY} \mathbf{XY}}. \quad (26)$$

Расстояние между бесконечно близкими точками на конусе даётся выражением

$$dl^2 \equiv -d\mathbf{BX} d\mathbf{BX} = \frac{d\rho^2}{\gamma^2} + \rho^2 d\phi^2. \quad (27)$$

Для того чтобы привести dl^2 к евклидову виду, мы делаем замену $\phi \rightarrow \phi/\gamma$ и $\rho \rightarrow \gamma\rho$ и получаем

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2. \quad (28)$$

Метрика, индуцированная на конусе пространством-временем Минковского, таким образом, евклидова. Уравнение (28) задает её в полярной системе координат.

Конус на рис. 4 поэтому можно разрезать вдоль $\mathbf{BA}$, развернуть с сохранением расстояний и углов, и уложить на плоскости, как показано на рис. 5.

Частица вращается против часовой стрелки, вектор поляризации вращается по часовой стрелке. В сопутствующей системе координат угол вращения ϕ_E отрицательный. Его значение определено отношением длины дуги AA' вдоль траектории частицы, т.е. $2\pi|\mathbf{CA}|$, и окружности радиусом $|\mathbf{BA}|$. Траектория представляет собой окружность фиксированной широты на гиперboloиде физических релятивистских скоростей, как показано на рис. 4. Длина окружности определяется радиусом $|\mathbf{CA}|$.

На плоскости рис. 5 угол, соответствующий дуге AA' вдоль траектории, больше 2π . Расстояния между точками A , B и A , C можно найти с помощью уравнений (21) и (22):

$$|\mathbf{CA}| = \frac{\gamma v}{c}, \quad (29)$$

$$|\mathbf{BA}| = \frac{v}{c}. \quad (30)$$

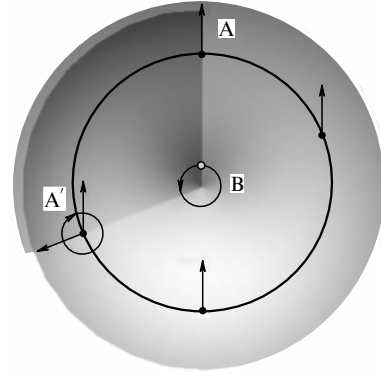


Рис. 5. Касательный конус с вершиной B , показанный на рис. 4, разрезан вдоль направления отрезка $\mathbf{BA}$ и развёрнут на плоскости. Точка A принадлежит конусу и гиперboloиду. Во время одного оборота частицы от A к A' вдоль круговой орбиты вектор поляризации поворачивается на угол $|\phi_E| > 2\pi$ в сопутствующей системе координат. Точки A ($= A'$) и B те же, что на рис. 4.

Векторы $\mathbf{CA}$ и $\mathbf{BA}$ — пространственные, их длины вещественны. Окончательно получаем

$$\phi_E = -\frac{2\pi|\mathbf{CA}|}{|\mathbf{BA}|} = -2\pi\gamma. \quad (31)$$

В инерциальной системе координат, начало которой $x = y = z = 0$ совпадает с осью спиральной траектории в $\mathcal{M}$, угол вращения $\phi_S = 2\pi + \phi_E$ принимает вид (2).

В пространстве $T_x \mathcal{M}$ такая система координат расположена в вершине гиперboloида $u = (1, 0)$. С точки зрения задачи о маятнике Фуко, её можно рассматривать как аналог локальной системы координат, связанной с наблюдателем на Северном полюсе.

Меридианы на сфере образованы следом точки $(0, 0, 1)$ при вращении в плоскостях $(0, 0, 1)$ и $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, где φ — нумерующий меридианы азимутальный угол. Аналогично меридианов в $T_x \mathcal{M}|_{u^2=1}$ являются орбиты, образованные следом точки $u = (1, 0)$ при преобразованиях буста в плоскостях $(1, 0)$ и $(0, \mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ — нумерующий орбиты единичный вектор. Орбиты точки $u = (1, 0)$, как и меридианы на сфере, являются геодезическими (см. приложение).

Заметим, что уравнение (1) можно преобразовать к виду (2) с помощью замены $\vartheta \rightarrow i\vartheta$, которая формально соответствует замене вращений преобразованиями Лоренца.

В сопутствующей системе координат центробежная сила и сила реакции удерживают частицу в состоянии покоя. Скорость прецессии спина нельзя оценить, не зная лоренцеву природу силы реакции.

Круговая орбита частицы может быть аппроксимирована набором малых отрезков геодезических на гиперboloиде скоростей. Такие отрезки, соответствующие преобразованиям буста, аналогичны дугам больших окружностей сферы. Параллельный перенос вектора поляризации вдоль каждого из таких отрезков локально не приводит к вращению. Однако по отношению к траектории фиксированного γ вектор поляризации поворачивается из-за неевклидовой природы физического пространства релятивистских скоростей. В континуальном пределе отрезки геодезических воспроизводят траекторию частицы. Параллельный перенос вдоль траекто-

рии дает томасовскую, т.е. универсальную геометрическую, составляющую прецессии спина.

Сила реакции, связанная со скалярными по группе Лоренца потенциалами, не влияет на прецессию спина. В этом случае томасовская прецессия является единственным эффектом. Это обстоятельство говорит об отсутствии вращающего момента в скалярных потенциалах.

В векторных по группе Лоренца потенциалах на спин частиц действует внешний вращающий момент, который приводит к хорошо известной прецессии Лармора. Этот случай характерен для электронов в атомах [11, 20] и антипротонов и гиперонов в экзотических атомах [21–23].

В работе [23], в частности, показано, что скорость прецессии спина в уравнении Баргмана–Мишеля–Теллеги [24] складывается из двух частей, одна из которых обусловлена томасовской прецессией, вторая — прецессией Лармора. Вследствие чисто кинематической природы прецессия Томаса влияет на спектроскопию и статические характеристики ядер [20] и адронов [25, 26].

5. Заключение

Метод касательного конуса, который используется для иллюстрации вращения вектора при параллельном переносе вдоль поверхности сфер и, в частности, для описания вращения плоскости качания маятника Фуко, обобщён для случая томасовской прецессии спина релятивистской частицы, движущейся по круговой орбите.

В задачах о маятнике Фуко и прецессии Томаса характеризующие состояние систем векторы не испытывают воздействия внешнего вращающего момента и эволюционируют по инерции, подвергаясь параллельному переносу. Мы использовали близкую аналогию между параллельным переносом вдоль поверхности сферы в трёхмерном евклидовом пространстве и вдоль поверхности гиперболоида $u^2 = 1$ в четырёхмерном пространстве релятивистских скоростей. В обоих случаях эволюция сводится к параллельному переносу в обычном евклидовом пространстве, в качестве которого выступает поверхность касательного конуса.

Таким образом, основное уравнение томасовской прецессии спина релятивистской частицы, движущейся по круговой орбите, удаётся получить с помощью элементарных геометрических построений.

Приложение. Геодезические в пространстве релятивистских скоростей

Приведём доказательства двух утверждений, сделанных в конце раздела 2.3.

1. Точки $u, u' \in T_x \mathcal{M}|_{u^2=1}$ описывают две инерциальные системы отсчёта: S и S' . В системе S $u = (1, 0)$. Запишем u' в виде

$$u' = (\cosh \theta, \mathbf{n} \sinh \theta), \quad (\text{П.1})$$

где $\mathbf{v} = c\mathbf{n} \tanh \theta$ — скорость S' в системе отсчёта S , $\mathbf{n}$ — единичный вектор. Системы отсчёта S и S' связаны бустом в плоскости (u, u') .

Метрика, индуцированная на $T_x \mathcal{M}|_{u^2=1}$, определяется интервалом $ds^2 = du du$ и в переменных (П.1) принимает вид

$$ds^2 = -d\theta^2 - \sinh^2 \theta d\mathbf{n}^2. \quad (\text{П.2})$$

Интервал между двумя точками на $T_x \mathcal{M}|_{u^2=1}$ отрицательный, причём $-ds^2 \geq d\theta^2$. Отсюда находим

$$\int_u^{u'} \sqrt{-ds^2} \geq \theta. \quad (\text{П.3})$$

Любые отклонения от кривой (П.1), соединяющей по θ точки u и u' при фиксированном $\mathbf{n}$, увеличивают расстояние между u и u' .

Семейство 4-скоростей (П.1) с постоянным $\mathbf{n}$, следовательно, определяет геодезическую на $T_x \mathcal{M}|_{u^2=1}$. С другой стороны, эта геодезическая является орбитой, образованной следом точки $u = (1, 0)$ при преобразованиях буста в плоскости векторов $(1, 0)$ и $(0, \mathbf{n})$.

2. Базисные векторы касательного пространства $T_x \mathcal{M}|_{u^2=1}$ можно выбрать в виде

$$e_\theta = \frac{\partial u'}{\partial \theta} = (\sinh \theta, \mathbf{e}_r \cosh \theta), \quad (\text{П.4})$$

$$e_\vartheta = \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial u'}{\partial \vartheta} = (0, \mathbf{e}_\vartheta), \quad (\text{П.5})$$

$$e_\varphi = \frac{1}{\sinh \theta \sin \vartheta} \frac{\partial u'}{\partial \varphi} = (0, \mathbf{e}_\varphi), \quad (\text{П.6})$$

где $\mathbf{e}_r = \mathbf{n} \equiv (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, $\mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ — базисные векторы сферической системы координат в $\mathcal{R}^3$,

$$\mathbf{e}_\vartheta = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \vartheta}, \quad (\text{П.7})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi}. \quad (\text{П.8})$$

Заметим, что $e_x e_\beta = -\delta_{x\beta}$ вдоль геодезической.

При смещении $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$, которое отвечает бусту в направлении $\mathbf{n}$, базисные векторы (П.4)–(П.6) изменяются. Их приращения удовлетворяют условиям

$$e_x \delta e_\beta = 0, \quad (\text{П.9})$$

которые являются условиями параллельного переноса согласно уравнению (8).

Список литературы

1. Арнольд В И *Математические методы классической механики* 3-е изд. (М.: Наука, 1989) [Arnold V I *Mathematical Methods of Classical Mechanics* 2nd ed. (New York: Springer, 1997)]
2. Somerville W B *Q. J. R. Astron. Soc.* **13** 40 (1972)
3. Hart J B, Miller R E, Mills R E *Am. J. Phys.* **55** 67 (1987); Rockower E B *Am. J. Phys.* **55** 70 (1987)
4. Shapere A, Wilczek F (Eds) *Geometric Phases in Physics* (Singapore: World Scientific, 1989)
5. von Bergmann J, von Bergmann H C *Am. J. Phys.* **75** 888 (2007)
6. Borel É "La théorie de la relativité et la cinématique" *C.R. Acad. Sci., Paris* **156** 215 (1913); "La cinématique dans la théorie de la relativité" *C.R. Acad. Sci., Paris* **157** 703 (1913)
7. Föppl L, Daniell P "Zur Kinematik des Born'schen starren Körpers" *Gött. Nachr.* 519 (1913)
8. Silberstein L *The Theory of Relativity* (London: MacMillan, 1914)
9. Fermi E *Rom. Acc. L. Rend.* **31** (1) 21, 51 (1922)
10. Walker A G *Proc. R. Soc. Edinb.* **52** 345 (1932)
11. Thomas L H *Nature* **117** 514 (1926); *Philos. Mag.*, **7** 31 (1927)
12. Eddington A S *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge: Univ. Press, 1924)
13. Wigner E P *Ann. Math.* **40** 149 (1939)

14. Walter S "The non-Euclidean style of Minkowskian relativity", in *The Symbolic Universe: Geometry and Physics 1890–1930* (Ed. J Gray) (Oxford: Oxford Univ. Press, 1999) p. 91
15. Aravind P K *Am. J. Phys.* **65** 634 (1997)
16. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988) [Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)]
17. Rhodes J A, Semon M D *Am. J. Phys.* **72** 943 (2004)
18. Berry M *Phys. Today* **43** (12) 34 (1990)
19. Møller C *The Theory of Relativity* (Oxford: Clarendon Press, 1952)
20. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989) [Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)]
21. Giannini M M, Krivoruchenko M I *Phys. Lett. B* **291** 329 (1992)
22. Batty C J *Nucl. Phys. A* **585** 229 (1995)
23. Krivoruchenko M I, Faessler A *Nucl. Phys. A* **803** 173 (2008)
24. Bargmann V, Michel L, Telegdi V L *Phys. Rev. Lett.* **2** 435 (1959)
25. Криворученко М И *Письма в ЖЭТФ* **38** 146 (1983) [Krivoruchenko M I *JETP Lett.* **38** 173 (1983)]
26. Кобзарев И Ю, Мартеньянов Б В, Щепкин М Г *ЯФ* **44** 475 (1986) [Kobzarev I Yu, Martem'yanov B V, Shchepkin M G *Sov. J. Nucl. Phys.* **44** 306 (1986)]

Rotation of the plane of swing of Foucault's pendulum and the Thomas spin precession: two sides of one coin

M.I. Krivoruchenko

State Scientific Center of the Russian Federation

"A.I. Alikhanov Institute for Theoretical and Experimental Physics",

ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation

E-mail: mikhail.krivoruchenko@itep.ru

Expressions for the rotation angle of the Foucault pendulum plane of swing and the spin precession of a circularly orbiting relativistic particle (Thomas precession) are derived along similar lines using elementary geometrical arguments.

PACS numbers: **01.65.+g**, **02.40.Ky**, **03.30.+p**

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200908e.0873

Bibliography — 26 references

Received 30 October 2008

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **179** (8) 873–882 (2009)

Physics—Uspekhi **52** (7) (2009)